

Sveučilište u Splitu  
**Sveučilišni odjel za stručne studije**

Bože Plazibat      Ado Matoković      Vladimir Vetma

## TEHNIČKA MEHANIKA II

Split, 2016.



## **Predgovor**

Ova su skripta namijenjena u prvom redu studentima stručnog studija Konstrukcijsko strojarstvo na Sveučilištu u Splitu, Sveučilišnom odjelu za stručne studije, koji u drugom semestru slušaju kolegij Tehnička mehanika II.

Skripta sadrže predavanja iz navedenog predmeta koja su proširena nizom ilustrativnih primjera nakon kojih slijede odabrani zadatci za samostalan rad studenata.

U prvoj, uvodnom dijelu prikazana je podjela mehanike s osnovnim pojmovima i definicijama.

Kinematika čestice obrađena je u drugom dijelu skripata. Na najjednostavnijem, pravocrtnom gibanju studenti se upoznaju s pojmovima pomak, prevaljeni put, brzina i ubrzanje. Posebno je obrađeno vezano gibanje dviju čestica. Slijedi definiranje krivocrtnog gibanja u vektorskom i analitičkom obliku. Osobita je pozornost posvećena razmatranju gibanja u pravokutnim i prirodnim koordinatama. Na kraju ovog dijela obrađen je kosi hitac.

U prvim su poglavljima trećega dijela dana razmatranja vezana uz dinamiku čestice. Uz diferencijalne jednadžbe gibanja obrađeni su D'Alembertov princip, opći zakoni dinamike čestice te kinetička energija, rad i snaga. Pojašnjen je i zakon o očuvanju mehaničke energije. U kasnjim su poglavljima dana razmatranja vezana uz dinamiku sustava čestica. Ovaj dio završava prikazom elemenata teorije udara.

U četvrtom dijelu skripata obrađena je kinematika elementarnih gibanja krutog tijela: translacije, rotacije oko nepomične osi te ravninskog gibanja kao zbroja translacije krutog tijela i njegove rotacije oko odabrane osi. Uvedene su kinematicke karakteristike rotacije krutog tijela: kut rotacije, kutna brzina i kutno ubrzanje. Detaljno su obrađeni načini određivanja brzina i ubrzanja točaka tijela pri ravninskom gibanju.

Peti dio skripata posvećen je složenom gibanju čestice. Pojašnjeni su pojmovi relativnog, prijenosnog i apsolutnog gibanja te je prikazano određivanje apsolutne brzine odnosno apsolutnog ubrzanja čestice pri složenom gibanju. Posebno je obrađeno složeno gibanje čestice kada je prijenosno gibanje translatorno.

Dinamika krutog tijela obrađena je u šestom dijelu skripata. Definirani su momenti tromosti masa i prikazan je način određivanja aksijalnih momenata tromosti. U kasnjim je poglavljima prikazana primjena D'Alembertova principa pri određivanju dinamičkih reakcija. Obrađeni su i opći zakoni dinamike krutog tijela.

Završni, sedmi dio skripata posvećen je odabranim poglavljima iz dinamike. Tu je pojašnjen fenomen mehaničkih vibracija s jednim stupnjem slobode gibanja, a iz područja analitičke mehanike princip virtualnih radova te opća jednadžba dinamike.

U ovoj prigodi zahvaljujemo recenzentima, prof. dr. sc. Zlatanu Kulenoviću i prof. dr. sc. Frani Vlaku, na pažljivom iščitavanju teksta i korisnim savjetima koje su nam pružili. Zahvaljujemo i dosadašnjim generacijama studenata stručnog studija konstrukcijskog strojarstva, čija su pitanja i dileme pridonijeli jasnjem prikazu pojedinih dijelova ovih skripata.

Svima koji upozore na eventualne slovne ili računske pogreške koje su promaknule i autorima i recenzentima unaprijed zahvaljujemo.

*Autori*

# S A D R Ž A J

<i>Predgovor</i>	<i>i</i>
<i>Sadržaj</i>	<i>iii</i>
<b>1. UVOD</b>	<b>1</b>
<b>2. KINEMATIKA ČESTICE</b>	<b>5</b>
<b>2.1. OSNOVNI ZADATCI KINEMATIKE ČESTICE</b>	<b>5</b>
<b>2.2. PRAVOCRTNO GIBANJE ČESTICE</b>	<b>5</b>
2.2.1. <b>Pomak čestice</b>	5
2.2.2. <b>Brzina i ubrzanje čestice</b>	6
2.2.3. <b>Posebni oblici zadavanja pravocrtnog gibanja</b>	10
2.2.4. <b>Grafičko rješavanje problema pravocrtnog gibanja</b>	22
2.2.5. <b>Vezano gibanje čestica</b>	25
<b>2.3. KRIVOCRTNO GIBANJE ČESTICE</b>	<b>29</b>
2.3.1. <b>Vektorski način definiranja gibanja</b>	29
2.3.2. <b>Analitički način definiranja gibanja čestice</b>	32
2.3.3. <b>Prirodni način definiranja gibanja čestice</b>	43
2.3.4. <b>Kosi hitac</b>	55
<b>3. DINAMIKA ČESTICE</b>	<b>61</b>
<b>3.1. OSNOVNI ZADATCI DINAMIKE ČESTICE</b>	<b>61</b>
<b>3.2. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE GIBANJA ČESTICE</b>	<b>61</b>
3.2.1. <b>Diferencijalne jednadžbe gibanja u analitičkom obliku</b>	61
3.2.2. <b>D'Alembertov princip (princip dinamičke ravnoteže)</b>	70
<b>3.3. OPĆI ZAKONI DINAMIKE ČESTICE</b>	<b>74</b>
3.3.1. <b>Količina gibanja. Impuls sile</b>	74
3.3.2. <b>Moment količine gibanja (kinetički moment)</b>	80
3.3.3. <b>Kinetička energija. Mehanički rad i snaga</b>	82
<b>3.4. DINAMIKA SUSTAVA ČESTICA</b>	<b>94</b>
3.4.1. <b>Vanjske i unutarnje sile sustava</b>	94
3.4.2. <b>Opći zakoni dinamike sustava čestica</b>	95

<b>3.5. OSNOVE TEORIJE UDARA</b>	<b>106</b>
3.5.1. <b>Osnovna jednadžba teorije udara</b>	106
3.5.2. <b>Koeficijent udara</b>	107
3.5.3. <b>Udar čestice o nepomičnu pregradu</b>	108
3.5.4. <b>Sudar dviju čestica</b>	113
<b>4. KINEMATIKA KRUTOG TIJELA</b>	<b>121</b>
<b>4.1. OSNOVNI ZADATCI KINEMATIKE KRUTOG TIJELA. STUPNJEVI SLOBODE GIBANJA KRUTOG TIJELA</b>	<b>121</b>
<b>4.2. ELEMENTARNA GIBANJA KRUTOG TIJELA</b>	<b>122</b>
4.2.1. <b>Translatorno gibanje krutog tijela</b>	122
4.2.2. <b>Rotacija krutog tijela oko nepomične osi</b>	123
<b>4.3. RAVNINSKO GIBANJE KRUTOG TIJELA</b>	<b>132</b>
4.3.1. <b>Jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela</b>	132
4.3.2. <b>Rastavljanje ravninskog gibanja krutog tijela na translatorno i rotacijsko gibanje</b>	134
4.3.3. <b>Brzine točaka tijela pri ravninskom gibanju</b>	134
4.3.4. <b>Ubrzanja točaka tijela pri ravninskom gibanju</b>	139
4.3.5. <b>Teorem o projekcijama vektora brzina točaka ravne figure</b>	145
4.3.6. <b>Trenutni pol brzina</b>	146
4.3.7. <b>Trenutni pol ubrzanja</b>	152
4.3.8. <b>Plan brzina i plan ubrzanja</b>	156
<b>5. SLOŽENO GIBANJE ČESTICE</b>	<b>167</b>
<b>5.1. RELATIVNO, PRIJENOSNO I APSOLUTNO GIBANJE</b>	<b>167</b>
<b>5.2. SLOŽENO GIBANJE ČESTICE: prijenosno gibanje je translatorno</b>	<b>168</b>
5.2.1. <b>Vektor položaja čestice, absolutna brzina i ubrzanje</b>	168
<b>5.3. SLOŽENO GIBANJE ČESTICE: prijenosno gibanje nije translatorno</b>	<b>175</b>
5.3.1. <b>Absolutna brzina čestice</b>	175
5.3.2. <b>Absolutno ubrzanje čestice. Coriolisovo ubrzanje</b>	176
<b>6. DINAMIKA KRUTOG TIJELA</b>	<b>185</b>
<b>6.1. DINAMIČKI MOMENTI TROMOSTI</b>	<b>185</b>
6.1.1. <b>Aksijalni i centrifugalni momenti tromosti</b>	185
6.1.2. <b>Momenti tromosti za paralelne osi (Steinerovo pravilo)</b>	187
6.1.3. <b>Momenti tromosti složenih tijela</b>	188

<b>6.2. DINAMIKA RAVNINSKOG GIBANJA KRUTOG TIJELA</b>	<b>188</b>
6.2.1. Aksijalni momenti tromosti nekih homogenih tijela	188
6.2.2. Diferencijalne jednadžbe gibanja	195
6.2.3. D'Alambertov princip	198
6.2.4. Impuls sile. Količina gibanja	205
6.2.5. Kinetička energija	206
6.2.6. Moment količine gibanja	215
<b>7. ODABRANA POGLAVLJA DINAMIKE</b>	<b>219</b>
7.1. VIBRACIJE S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE	219
7.1.1. Slobodne harmonijske vibracije	219
7.1.2. Prigušene vibracije	220
7.1.3. Prasilne vibracije bez prigušenja. Rezonancija	223
7.2. OSNOVE ANALITIČKE MEHANIKE	225
7.2.1. Uvod	225
7.2.2. Princip virtualnih radova. Opća jednadžba statike	226
7.2.3. Opća jednadžba dinamike	233
<b>LITERATURA</b>	<b>237</b>



# 1. UVOD

---

Teorijska ili klasična mehanika dio je mehanike u kojem se proučavaju opći zakoni mehaničkog gibanja i ravnoteže materijalnih tijela.

Pod mehaničkim gibanjem razumije se promjena položaja jednog materijalnog tijela u odnosu prema drugom u prostoru tijekom vremena.

Materijalnim tijelom naziva se ograničeni prostor ispunjen materijom. Posebno, materijalno tijelo čije dimenzije nemaju utjecaja na opisivanje stanja gibanja ili stanja mirovanja naziva se česticom ili materijalnom točkom.

Praktički se tijelo može smatrati česticom u svim onim problemima kod kojih su prevaljeni putovi daleko veći od dimenzija samog tijela.

Isaac Newton (1643. - 1727.), koji se smatra osnivačem klasične mehanike, uveo je u mehaniku tzv. absolutno nepomični prostor, a zajedno s tim i absolutno nepomični referentni koordinatni sustav u odnosu na koji se definira gibanje materijalnih tijela. Za absolutno nepomični referentni koordinatni sustav odabran je heliocentrski koordinatni sustav, za čije je ishodište uzeto sunce, a tri međusobno okomite osi usmjerene su ka trima zvijezdama stajačicama.

Newton je u mehaniku uveo i tzv. univerzalno vrijeme koje se jednakom mijenja u svim referentnim sustavima, što ima smisla kad su brzine čestice ili tijela dovoljno male u odnosu na brzinu svjetlosti (Einsteinova teorija relativnosti).

Gibanje čestice ili tijela u odnosu na absolutno nepomični referentni koordinatni sustav naziva se absolutno gibanje.

Gibanje čestice ili tijela u odnosu na neko drugo pokretno tijelo (pokretni referentni koordinatni sustav) naziva se relativno gibanje.

Međutim, i gibanje i mirovanje su relativni pojmovi jer ne postoji ni absolutno gibanje niti absolutno mirovanje s obzirom na to da je cijeli svemir u stanju neprekidnog gibanja.

Za tehničke probleme kakvi će se razmatrati u ovom kolegiju kao absolutno nepomični koordinatni sustav usvojiti će se sustav čvrsto vezan za Zemlju (*geocentrični sustav*), a shodno tome sva će se gibanja u odnosu na Zemlju smatrati absolutnima.

Klasična mehanika počiva na Newtonovim zakonima koje je on definirao (za gibanje čestice) u odnosu na absolutno nepomični sustav referencije.

Te zakone Isaac Newton objavio je u svom djelu „*Matematička načela prirodne filozofije*“ 1687. godine.

Prvi Newtonov zakon (zakon tromosti ili inercije) glasi: *Tijelo zadržava stanje mirovanja, odnosno jednolikog pravocrtnog gibanja ako je sustav sila koji na njega djeluje u ravnoteži.*

Taj je zakon bio poznat još Galileju koji je gibanje tijela na koje ne djeluju sile nazvao gibanje po inerciji.

Drugi Newtonov zakon (osnovni zakon dinamike) glasi: *Brzina promjene količine gibanja čestice jednaka je po iznosu, pravcu i smjeru sili koja djeluje na česticu:*

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \quad (1.1)$$

Količina gibanja čestice definira se kao umnožak mase  $m$  čestice i vektora njene brzine  $\vec{v}$ .

Uvezši u obzir da se u klasičnoj mehanici masa smatra konstantnom veličinom, te da je derivacija vektora brzine čestice po vremenu jednak vektoru ubrzanja te čestice, izraz 1.1 može se napisati i u obliku:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (1.2)$$

pa se drugi Newtonov zakon može izreći i na sljedeći način: *Prodot mase i ubrzanja čestice koje čestica dobije kada na nju djeluje zadana sila, jednak je toj sili po iznosu, pravcu i smjeru.*

Iz drugog Newtonova zakona zaključuje se da je masa skalarna veličina te da predstavlja mjeru otpora (inertnosti) čestice promjeni stanja gibanja ili mirovanja.

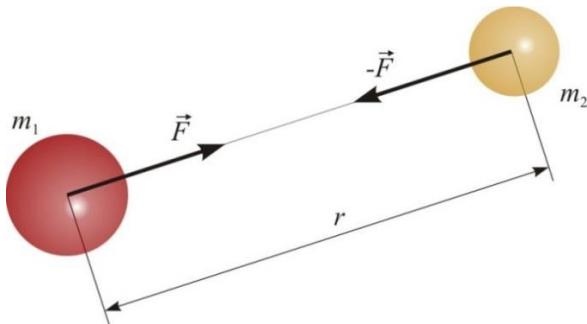
Treći Newtonov zakon (zakon akcije i reakcije) glasi: *Dvije čestice djeluju jedna na drugu silama jednakih iznosa i pravaca, suprotnih smjerova.*

Posebnu vrstu sila tvore *gravitacijske sile* koje se izračunavaju s pomoću *zakona opće gravitacije*, koji je također postavio Newton, a glasi: *Dvije čestice mase  $m_1$  i  $m_2$ , koje se nalaze na međusobnoj udaljenosti  $r$ , privlače se silama  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  (slika 1.1) intenziteta:*

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.3)$$

gdje je  $k$  univerzalna gravitacijska konstanta utvrđena eksperimentalno, a iznosi:

$$k \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad (1.4)$$



Slika 1.1. Zakon o privlačenju masa

Sada se može odrediti sila privlačenja između Zemlje i bilo kojeg tijela na njezinoj površini. Naime, srednji polumjer Zemlje je  $R = r = 6,371 \cdot 10^6$  m, dok joj je približna masa  $m_1 = m_Z \approx 5,98 \cdot 10^{24}$  kg, pa za tijelo mase  $m_2 = m$  ta sila iznosi:

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{6,371 \cdot 10^6} m = 9,831 m = g_0 m. \quad (1.5)$$

Konstanta  $g_0$  naziva se *jakost gravitacijskog polja* na površini Zemlje. Mjerenjem je ustanovljeno da privlačna sila Zemlje nije baš jednaka sili dobivenoj prema (1.5) zbog rotacije Zemlje oko svoje osi.

Stvarna sila privlačenja, koja se naziva *težina tijela*, dana je izrazom:

$$G = gm, \quad (1.6)$$

gdje je  $G$  iznos težine tijela,  $g$  *gravitacijsko ubrzanje* koje se mijenja ovisno o položaju na Zemlji, a za tehničke se proračune uzima njena prosječna vrijednost:

$$g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (1.7)$$

Teorijska (klasična) mehanika se prema osobitosti problema dijeli na statiku, kinematiku i dinamiku.

*Statikom se naziva dio teorijske mehanike u kojem se proučavaju zakoni slaganja sila i uvjeti ravnoteže tijela pod djelovanjem sila.*

*Kinematikom se naziva dio teorijske mehanike u kojem se proučavaju gibanja tijela ne uzimajući u obzir masu tijela i sile koje na njega djeluju.*

*Dinamikom se naziva dio teorijske mehanike u kojem se proučavaju zakoni gibanja materijalnih tijela pod djelovanjem sila.*

Prema svojstvu tijela mehanika se dijeli na mehaniku krutih tijela, mehaniku čvrstih (deformabilnih) tijela i mehaniku fluida.

U teorijskoj su mehanici nužne tzv. idealizacije, a jedna od njih je kruto tijelo koje se ne deformira (ne mijenja svoj oblik i obujam) pod djelovanjem sila.

U mehanici se upotrebljavaju mjerne jedinice Međunarodnoga sustava jedinica (SI sustav), prema kojemu su osnovne jedinice za duljinu metar (m), za masu kilogram (kg), a za vrijeme sekunda (s).

Prema važećoj definiciji *jedan metar jednak je duljini puta koji u vakuumu prijeđe svjetlost za vrijeme od  $1/299792458$  sekunde.*

*Jedna sekunda predstavlja trajanje  $9192631770$  perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dva hiperfini nivoa osnovnog stanja cezija-133.*

Greška pri ovakvoj definiciji etalona vremena od jedne sekunde iznosi samo  $10^{-11}\%$ .

Jedan kilogram definiran je etalonom koji se čuva u Sevresu u Francuskoj.

S pomoću osnovnih jedinica i drugog Newtonova zakona izvedena je jedinica za силу. Ako se u izraz (1.2) za masu uvrsti  $1 \text{ kg}$ , a za ubrzanje  $1 \text{ m/s}^2$ , dobiva se:

$$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N (njutn)}.$$

*Sila od jednog njutna jest ona sila koja masi od jednog kilograma daje ubrzanje od  $1 \text{ m/s}^2$ .*

Kao izvedena jedinica za kut upotrebljava se radian (rad). *Jedan radian definira se kao središnji kut koji na kružnici omeđuje luk duljine jednak polumjeru te kružnice.*

Za jedinicu kuta dopušteno je upotrebljavati i stupanj ( $^{\circ}$ ). Budući da središnjem kutu od  $360^{\circ}$  odgovara (u radijanima) kut od  $2\pi$  rad, proizlazi da je:

$$1 \text{ rad} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi}, \text{ odnosno } 1^{\circ} = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$$

U praksi se kao izvedena jedinica za brzinu umjesto metara po sekundi koristi kilometar po satu. Budući da 1 km ima 1000 m, a jedan sat 3600 s, proizlazi da je:

$$1 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nasuprot klasičnoj (Newtonovoj) mehanici, u relativističkoj mehanici, koja se temelji na Einsteinovoj teoriji relativnosti, vrijeme i masa nisu apsolutne veličine, već ovise o relativnom gibanju promatrača prema promatranom objektu.

Klasična se mehanika poklapa s relativističkom samo u području relativno malih brzina (brzine znatno manje od brzine svjetlosti) i predstavlja zapravo poseban slučaj teorije relativnosti.

Uzimajući u obzir da su najveće brzine u prirodi i tehnici oko  $10^4$  puta manje od brzine svjetlosti, može se zaključiti da klasična mehanika u potpunosti odgovara inženjerskoj praksi. U tablici 1.1 dan je prikaz nekih prosječnih, odnosno najvećih brzina koje se postižu u čovjekovu okruženju.

Tablica 1.1. Brzine koje se postižu u čovjekovu okruženju

	m/s	km/h		m/s	km/h
rast djeteta (do 1 god.)	$9,5 \cdot 10^{-9}$	$3,4 \cdot 10^{-8}$	zvuk (u zraku, $20^{\circ}\text{C}$ )	343	1235
vrtni puž	0,013	0,048	putnički zrakoplov	250	900
kornjača	0,1	0,36	borbeni zrakoplov	556	2000
konj	13,9	50	<i>Space Shuttle</i>	7743	$28 \cdot 10^3$
engleski hrt	17,4	70	puščani metak	800	2880
gepard	27,8	100	točka na ekvatoru	465	1674
čovjek (hod)	1,4	5	mjesec (oko Zemlje)	1000	3600
čovjek (sprint, <i>U. Bolt</i> )	12,4	44,7	Zemlja (oko Sunca)	$3 \cdot 10^3$	$11 \cdot 10^3$
automobil	47,2	170	elektron (u atomu)	$2 \cdot 10^6$	$7,2 \cdot 10^6$
bolid (formula 1, max.)	97,5	351	svjetlost (u vakuumu)	$3 \cdot 10^8$	$1,1 \cdot 10^9$

## 2. KINEMATIKA ČESTICE

### 2.1. OSNOVNI ZADATCI KINEMATIKE ČESTICE

U kinematici čestice rješavaju se dva osnovna problema:

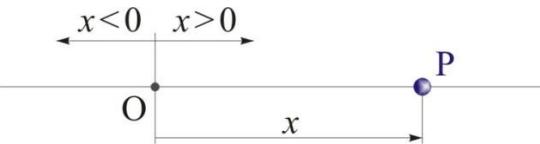
- 1) pronalaženje analitičkih postupaka za definiranje gibanja čestice u odnosu na odabrani referentni koordinatni sustav;
- 2) određivanje kinematičkih karakteristika gibanja (putanja, brzina i ubrzanje) na osnovu zadanog zakona gibanja čestice.

Putanjom ili trajektorijom naziva se zamišljena neprekinuta linija koju opisuje pokretna čestica u prostoru.

### 2.2. PRAVOCRTNO GIBANJE ČESTICE

Pravocrtno gibanje čestice je gibanje kod kojega je putanja čestice pravac.

Položaj čestice  $P$  na pravcu u potpunost je definiran udaljenošću  $\overline{OP}$ , tj. jednom jedinom koordinatom  $x$ , slika 2.1.



Slika 2.1. Položaj čestice

Točka O je po volji odabrana nepomična točka i predstavlja u ovom slučaju ishodište. Pozitivan smjer koordinate  $x$  može se odabratи proizvoljno. U prikazanom slučaju taj pozitivan smjer je udesno.

Ako je koordinata  $x$  čestice zadana kao funkcija vremena

$$x = x(t) \quad (2.1)$$

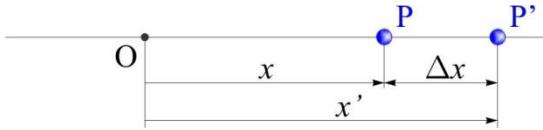
neprekinuta i najmanje dva puta derivabilna, tada izraz (2.1) predstavlja jednadžbu pravocrtnog gibanja čestice.

#### 2.2.1. Pomak čestice

Pomak čestice definira se kao promjena njena položaja. Ako čestica prijeđe iz položaja P u položaj  $P'$  (sl. 2.2), tada je njen pomak

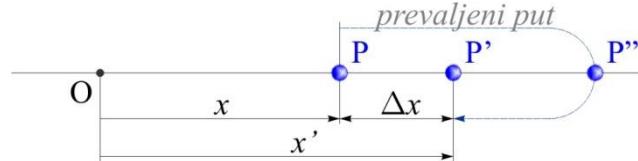
$$\Delta x = x' - x. \quad (2.2)$$

Pomak čestice  $\Delta x$  je pozitivan ako je njen konačni položaj ( $P'$ ) desno od početnoga (P), tj. ako je  $x' > x$ . U suprotnom je taj pomak negativan.



Slika 2.2. Pomak čestice

Treba naglasiti kako se, u općem slučaju, pomak čestice iz  $P$  u  $P'$  ne poklapa s ukupnim putem koji je čestica u međuvremenu prevalila, kao što je to prikazano na slici 2.3. Čestica je mogla iz položaja  $P$  doći u položaj  $P'$  i putujući udesno do  $P''$ , a zatim se vratiti ulijevo do  $P'$ .

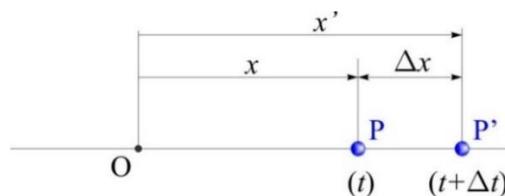


Slika 2.3. Razlika između pomaka čestice i prevaljenog puta

### 2.2.2. Brzina i ubrzanje čestice

Iako su kinematicke veličine: položaj, pomak, brzina i ubrzanje vektorske veličine, kod pravocrtnog gibanja moguće ih je prikazivati i razmatrati skalarno, vodeći računa o predznaku koji određuje smjer gibanja po pravcu.

Kao što je rečeno, kod pravocrtnog gibanja razmatrana čestica nalazi se na jednom te istom pravcu u svakom trenutku vremena. Ako je položaj čestice u trenutku  $t$   $P$ , a u trenutku  $t'$   $P'$  (sl. 2.4), tada je ta čestica u vremenskom intervalu  $\Delta t = t' - t$  doživjela pomak  $\Delta x = x' - x$ .



Slika 2.4. Pomak čestice u vremenskom intervalu  $\Delta t$

Srednjom brzinom čestice naziva se omjer pomaka čestice  $\Delta x$  i vremenskog intervala  $\Delta t$  u kojem je taj pomak nastao:

$$v_{sr} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} . \quad (2.3)$$

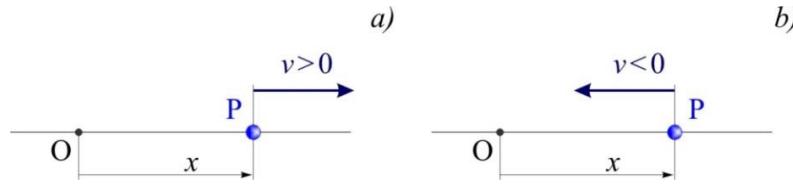
Ako je  $\Delta x$  dano u metrima (m), a vrijeme u sekundama (s), jedinica za brzinu je metar po sekundi ( $m/s$  ili  $m \cdot s^{-1}$ ).

Brzinom (trenutačnom) čestice naziva se granična vrijednost kojoj teži srednja brzina čestice kada vremenski interval  $\Delta t$  teži nuli:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} , \quad (2.4)$$

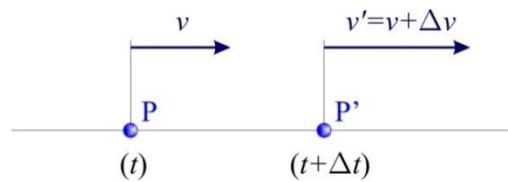
odnosno brzina čestice jednaka je prvoj derivaciji položaja čestice po vremenu.

Brzina čestice je pozitivna ako joj se smjer poklapa s pozitivnim smjerom koordinate položaja čestice (sl. 2.5.a), u suprotnom je negativna (sl. 2.5.b).



Slika 2.5. Predznak brzine čestice: a) pozitivna brzina, b) negativna brzina.

Ako je čestica u trenutku  $t$  imala brzinu  $v$ , a u trenutku  $t'$  brzinu  $v'$  (sl. 2.6), tada je brzina čestice u vremenskom intervalu  $\Delta t = t' - t$  dobila prirast  $\Delta v = v' - v$ .



Slika 2.6. Prirast brzine čestice u vremenskom intervalu  $\Delta t$

Srednjim ubrzanjem čestice naziva se omjer prirasta brzine čestice  $\Delta v$  i vremenskog intervala  $\Delta t$  u kojem je taj prirast nastao:

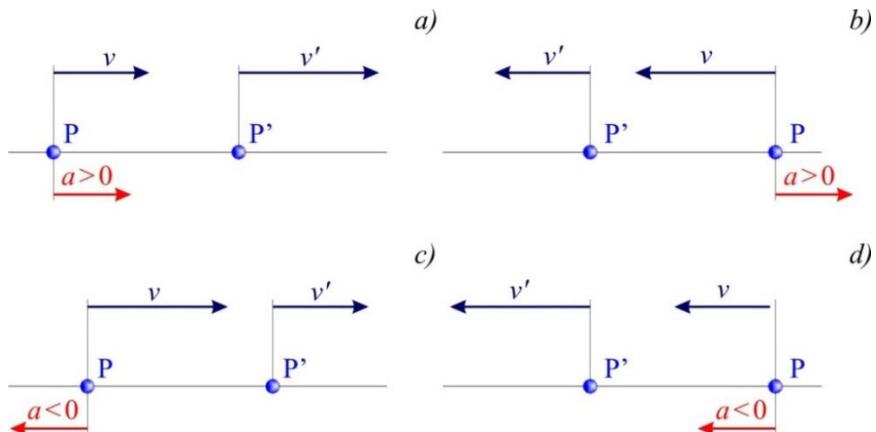
$$a_{sr} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} . \quad (2.5)$$

Ako je prirast brzine dan u metrima po sekundi (m/s), a vrijeme u sekundama (s), jedinica za ubrzanje je metar po sekundi na kvadrat ( $m/s^2$ , ili  $m \cdot s^{-2}$ ).

Ubrzanjem (trenutačnim) čestice naziva se granična vrijednost kojoj teži srednje ubrzanje čestice kada vremenski interval  $\Delta t$  teži nuli:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \text{ ili } a = \frac{d^2 x}{dt^2} . \quad (2.6)$$

Dakle, ubrzanje čestice jednako je prvoj derivaciji brzine čestice po vremenu, odnosno drugoj derivaciji koordinate položaja čestice po vremenu.



Slika 2.7. Predznak ubrzanja čestice: a) i b) pozitivno ubrzanje, c) i d) negativno ubrzanje.

Ubrzanje čestice je pozitivno ako je brzina čestice pozitivna i iznos joj se povećava (sl. 2.7.a) ili ako je brzina čestice negativna i iznos joj se smanjuje (sl. 2.7.b).

Ubrzanje čestice je negativno ako je brzina čestice pozitivna i iznos joj se smanjuje (sl. 2.7.c) ili ako je brzina čestice negativna i iznos joj se povećava (sl. 2.7.d).

### **Primjer 2.1.**

Pravocrtno gibanje čestice zadano je jednadžbom:

$$x = 12t^3 - 18t^2 + 2t + 5 ,$$

Gdje je  $x$  dano u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti položaj i brzinu čestice u trenutku  $t_1$  u kojem je ubrzanje čestice jednak nuli.

*Rješenje:*

Brzina čestice kao funkcija vremena dobije se prema (2.4)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(12t^3 - 18t^2 + 2t + 5) = 36t^2 - 36t + 2 ,$$

a ubrzanje čestice kao funkcija vremena prema (2.6)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(36t^2 - 36t + 2) = 72t - 36 .$$

Ubrzanje čestice bit će jednak nuli kada je

$$a_1 = 72t_1 - 36 = 0 ,$$

odnosno

$$t_1 = 0,5 \text{ s} .$$

Položaj čestice i njena brzina u trenutku  $t_1 = 0,5 \text{ s}$  su:

$$x_1 = x(t_1) = x(0,5) = 12 \cdot 0,5^3 - 18 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 + 5 = 3 \text{ m}$$

$$v_1 = v(t_1) = v(0,5) = 36 \cdot 0,5^2 - 36 \cdot 0,5 + 2 = -7 \text{ m/s} .$$

### **Primjer 2.2.**

Pravocrtno gibanje čestice zadano je jednadžbom:

$$x = 2t^{\frac{3}{2}} - 8 \cos \frac{\pi t}{4} ,$$

Gdje je  $x$  dano u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti položaj i brzinu čestice u trenutku  $t_1 = 4 \text{ s}$ .

*Rješenje:*

Brzina čestice kao funkcija vremena dobije se prema (2.4)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 2t^{\frac{3}{2}} - 8 \cos \frac{\pi t}{4} \right) = 2 \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot \left( -\sin \frac{\pi t}{4} \right) \cdot \frac{\pi}{4} = 3t^{\frac{1}{2}} + 2\pi \sin \frac{\pi t}{4} ,$$

a ubrzanje čestice kao funkcija vremena prema (2.6)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 3t^{\frac{1}{2}} + 2\pi \sin \frac{\pi t}{4} \right) = \frac{3}{2} t^{-\frac{1}{2}} + 2\pi \cdot \cos \frac{\pi t}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi t}{4} .$$

Položaj, brzina i ubrzanje čestice u trenutku  $t_1 = 4$  s su:

$$x_1 = 2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} - 8 \cos \frac{4\pi}{4} = 2 \cdot 2^3 + 8 = 24 \text{ m}$$

$$v_1 = 3 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + 2\pi \cdot \sin \frac{4\pi}{4} = 3 \cdot 2 + 0 = 6 \text{ m/s}$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} + \frac{\pi^2}{2} \cdot \cos \frac{4\pi}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{2} = -4,185 \text{ m/s}^2 .$$

Imajući u vidu da je

$$\cos \frac{4\pi}{4} = \cos \pi = \cos 180^\circ = -1, \quad \sin \frac{4\pi}{4} = \sin \pi = \sin 180^\circ = 0.$$



**Zadatak 2.1.** Pravocrtno gibanje čestice zadano je jednadžbom:

$$x = 1,5t^4 - 30t^2 + 5t + 10 ,$$

gdje je  $x$  dano u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti položaj, brzinu i ubrzanje čestice u trenutku  $t_1 = 2$  s.

*Odgovor:*  $x_1 = -76$  m;  $v_1 = -67$  m/s;  $a_1 = 12$  m/s<sup>2</sup>.

**Zadatak 2.2.** Poznat je zakon pravocrtnog gibanja čestice:

$$x = \frac{4}{3}t^3 - 8t^2 + 100 ,$$

Gdje je  $x$  dano u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti položaj čestice: a) u trenutku  $t_1 \neq 0$  kada joj je brzina jednaka nuli, b) u trenutku  $t_2$  kada joj je ubrzanje jednako nuli.

*Odgovor:* a)  $t_1 = 4$  s,  $x_1 = 57,33$  m; b)  $t_2 = 2$  s,  $x_2 = 78,67$  m.

## 2.2.3. Posebni oblici zadavanja pravocrtnog gibanja

### 2.2.3.1. Zadana je brzina čestice kao funkcija vremena

Ako je zadana brzina čestice kao funkcija vremena  $v = v(t)$ , tada iz (2.4) slijedi položaj čestice

$$dx = v(t) dt,$$

odnosno, nakon integriranja

$$x = \int v(t) dt + C_1, \quad (2.7)$$

gdje je  $C_1$  konstanta integracije koja se određuje iz početnog uvjeta: za  $t = t_0$  je  $x = x_0$ .

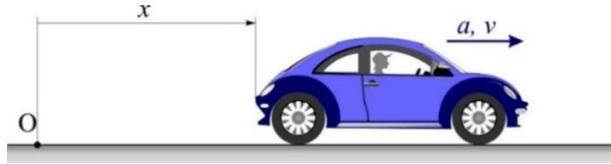
Isto tako, deriviranjem brzine čestice dobije se prema (2.6) njeno ubrzanje.

#### Primjer 2.3.

Automobil prikazan na slici 2.8 giba se pravocrtno tako da mu se brzina mijenja prema zakonu:

$$v = (3t^2 + 2t) \text{ m/s},$$

gdje je vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti položaj i ubrzanje čestice u trenutku  $t_1 = 3\text{s}$  ako je u početnom trenutku  $t = 0$  koordinata  $x_0 = 0$ .



Slika 2.8. Primjer 2.3: Položaj, brzina i ubrzanje automobila.

*Rješenje:*

Položaj automobila mjeri se od ishodišne točke O s pozitivnim smjerom udesno. Kako je zadana brzina automobila kao funkcija vremena, položaj se određuje prema izrazu (2.7):

$$x = \int v(t) dt + C_1 = \int (3t^2 + 2t) dt + C_1 = \int 3t^2 dt + \int 2t dt + C_1,$$

odnosno

$$x = 3 \frac{t^3}{3} + 2 \frac{t^2}{2} + C_1 = t^3 + t^2 + C_1.$$

Konstanta integracije  $C_1$  slijedi iz početnog uvjeta (kada je  $t = 0$  i  $x = x_0 = 0$ ), pa je  $C_1 = 0$ .

Konačno je

$$x = (t^3 + t^2) \text{ m}.$$

Ubrzanje automobila dobije se deriviranjem njegove brzine po vremenu (2.6):

$$a = \frac{dv}{dt} = (6t + 2) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

U trenutku  $t_1 = 3 \text{ s}$  bit će:

$$x_1 = x(t_1) = x(3) = 3^3 + 3^2 = 36 \text{ m}$$

$$v_1 = v(t_1) = v(3) = 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a_1 = a(t_1) = a(3) = 6 \cdot 3 + 2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



**Zadatak 2.3.** Poznat je zakon promjene brzine čestice pri njezinu pravocrtnom gibanju:

$$v = \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi t}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

gdje je vrijeme  $t$  dano u sekundama. Ako se čestica u početnom trenutku nalazila u ishodištu koordinatnog sustava, odrediti zakon gibanja čestice kao i njezin položaj, brzinu i ubrzanje u trenutku  $t_1 = 4 \text{ s}$ .

*Odgovor:*  $x = 6 \sin \frac{\pi t}{8} \text{ m}$ ,  $x_1 = 6 \text{ m}$ ,  $v_1 = 0 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = -0,925 \text{ m/s}^2$ .

#### 2.2.3.2. Zadano je ubrzanje čestice kao funkcija vremena

Ako je zadano ubrzanje čestice kao funkcija vremena  $a = a(t)$ , tada iz prvog od izraza (2.6) slijedi brzina čestice

$$dv = a(t) dt,$$

odnosno, nakon integriranja

$$v = \int a(t) dt + C_2, \quad (2.8)$$

gdje je  $C_2$  konstanta integracije koja se određuje iz početnog uvjeta: za  $t = t_0$  je  $v = v_0$ .

Dalnjim se integriranjem, prema (2.7), dobije položaj čestice kao funkcija vremena.

#### Primjer 2.4.

Ubrzanje čestice upravo je proporcionalno vremenu  $t$ :

$$a = k \cdot t \text{ m/s}^2,$$

Gdje je  $k$  konstanta (faktor proporcionalnosti) dana u  $\text{m/s}^3$ , a vrijeme  $t$  u sekundama.

Poznato je da je u trenutku  $t_0 = 0 \text{ s}$  brzina čestice  $v_0 = 16 \text{ m/s}$ , te da je u trenutku  $t_1 = 1 \text{ s}$  koordinata položaja čestice  $x_1 = 20 \text{ m}$ , a njena brzina  $v_1 = 15 \text{ m/s}$ . Odrediti položaj i brzinu čestice kao funkcije vremena  $t$  te njihove iznose u trenutku  $t_2 = 4 \text{ s}$ .

*Rješenje:*

Brzina čestice kao funkcija vremena dobije se prema (2.8)

$$v = \int a(t) dt + C_2 = \int k \cdot t dt + C_2 = k \frac{t^2}{2} + C_2,$$

a koordinata položaja čestice kao funkcija vremena prema (2.7)

$$x = \int v(t) dt + C_1 = \int \left( k \frac{t^2}{2} + C_2 \right) dt + C_1 = k \frac{t^3}{6} + C_2 \cdot t + C_1.$$

Faktor proporcionalnosti  $k$  te konstante integracije  $C_1$  i  $C_2$  odredit će se iz poznatih kinematičkih veličina u trenutcima  $t_0 = 0\text{ s}$  i  $t_1 = 1\text{ s}$ , kako slijedi:

$$t_0 = 0\text{ s}: \quad v_0 = k \frac{t_0^2}{2} + C_2 = k \frac{0^2}{2} + C_2 = C_2 = 16\text{ m/s},$$

odnosno

$$t_1 = 1\text{ s}: \quad v_1 = k \frac{t_1^2}{2} + C_2 = k \frac{1^2}{2} + 16 = 15\text{ m/s}, \text{ odakle je } k \cdot \frac{1}{2} = -1; \quad k = -2\text{ m/s}^3$$

$$x_1 = k \frac{t_1^3}{6} + C_2 \cdot t_1 + C_1 = -2 \cdot \frac{1^3}{6} + 16 \cdot 1 + C_1 = 20\text{ m}, \text{ odakle je } C_1 = 4,33\text{ m}.$$

Položaj čestice i njena brzina u funkciji vremena su:

$$x = -t^3 / 3 + 16t + 4,33\text{ m}, \quad v = -t^2 + 16\text{ m/s}.$$

Položaj čestice i njena brzina u trenutku  $t_2 = 4\text{ s}$  su:

$$x_2 = x(t_2) = x(4) = -4^3 / 3 + 16 \cdot 4 + 4,33 = 47\text{ m},$$

$$v_2 = v(t_2) = v(4) = -4^2 + 16 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



**Zadatak 2.4.** Poznat je zakon promjene ubrzanja čestice u funkciji vremena  $t$ :

$$a = 6 - \frac{1}{6} \sqrt{t} \text{ m/s}^2,$$

gdje je vrijeme  $t$  dano u sekundama.

Ako se čestica u početnom trenutku ( $t_0 = 0\text{ s}$ ) nalazila u ishodištu koordinatnog sustava, a početna joj je brzina bila  $v_0 = 2\text{ m/s}$ , odrediti zakon gibanja čestice kao i njezin položaj, brzinu i ubrzanje u trenutku  $t_1 = 9\text{ s}$ .

$$\text{Odgovor: } x = 3t^2 - \frac{2}{45} t^{\frac{5}{2}} + 2t \text{ m}, \quad x_1 = 250,2 \text{ m}, \quad v_1 = 53 \text{ m/s}, \quad a_1 = 5,5 \text{ m/s}^2.$$

### 2.2.3.3. Zadana je brzina čestice kao funkcija položaja

Ako je zadana brzina čestice kao funkcija položaja  $v = v(x)$ , može se doći do funkcije ovisnosti ubrzanja čestice o položaju proširivanjem prvog od izraza (2.6) s  $dx/dx$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = v \frac{dv}{dx}. \quad (2.9)$$

Isto tako, poznavanjem brzine čestice kao funkcije položaja  $v = v(x)$ , iz (2.4) slijedi vrijeme kao funkcija položaja:

$$dt = \frac{dx}{v(x)},$$

odnosno, nakon integriranja

$$t = \int \frac{dx}{v(x)} + C_3, \quad (2.10)$$

gdje je  $C_3$  konstanta integracije koja se određuje iz početnog uvjeta: za  $t = t_0$  je  $x = x_0$ .

Dakle, dobije se funkcija  $t = f(x)$ , odakle, kao inverzna funkcija, slijedi položaj čestice kao funkcija vremena:

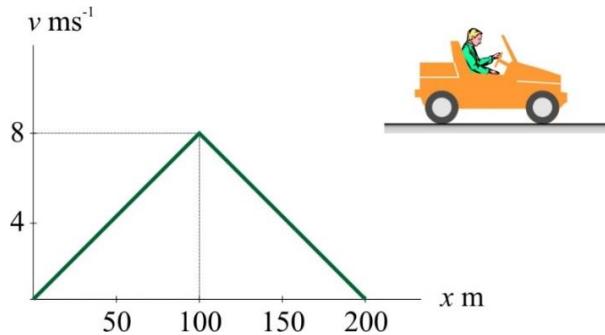
$$x = f^{-1}(t) = x(t). \quad (2.11)$$

Nadalje, derivacijom jednadžbe (2.11) dobije se brzina čestice kao funkcija vremena, a derivacijom te funkcije i ubrzanje čestice kao funkcija vremena.

#### Primjer 2.5.

Zadan je dijagram promjene brzine u funkciji položaja kod pravocrtnog gibanja džipa (sl. 2.9).

Odrediti ubrzanje džipa u položaju  $x_1 = 100$  m i u položaju  $x_2 = 200$  m.



Slika 2.9. Primjer 2.5: Promjena brzine džipa u funkciji položaja.

*Rješenje:*

Kako je brzina džipa zadana kao funkcija položaja, ubrzanje kao funkcija položaja dobije se prema (2.9):

$$a = v \frac{dv}{dx}.$$

U periodu od 0 do 100 m funkcija brzine (pravac) glasi:

$$v = \frac{8}{100}x = \frac{2}{25}x \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

pa je ubrzanje u tom periodu

$$a = v \frac{dv}{dx} = \frac{2}{25}x \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{25}x\right) = \frac{4}{625}x,$$

i u položaju  $x_1 = 100$  m iznosi

$$a_1 = \frac{4}{625}100 = \frac{400}{625} = 0,64 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

U periodu od 100 do 200 m funkcija brzine (također pravac) glasi:

$$v = 16 - \frac{8}{100}x = 16 - \frac{2}{25}x \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

pa je ubrzanje u tom periodu

$$a = v \frac{dv}{dx} = \left(16 - \frac{2}{25}x\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(16 - \frac{2}{25}x\right) = \left(16 - \frac{2}{25}x\right)\left(-\frac{2}{25}\right) = -\frac{32}{25} + \frac{4}{625}x,$$

i u položaju  $x_2 = 200$  m iznosi

$$a_2 = -1,28 + \frac{4}{625}200 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



**Zadatak 2.5.** Brzina trkača rekreativca u početnoj fazi njegova pravocrtnog trčanja može se aproksimirati izrazom:

$$v = 8 \cdot (1 + 0,06 \cdot x)^{0,25},$$

gdje je brzina  $v$  dana u m/s, a položaj čestice  $x$  u m.

Odrediti ubrzanje trkača u početnom trenutku ( $x_0 = 0$  m) te njegovu brzinu i ubrzanje u trenutku kad se nađe u položaju  $x_1 = 100$  m.

*Odgovor:*  $a_0 = 0,96 \text{ m/s}^2$ ,  $v_1 = 13,013 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 0,363 \text{ m/s}^2$ .

#### 2.2.3.4. Zadano je ubrzanje čestice kao funkcija brzine

Ako je zadano ubrzanje čestice kao funkcija brzine  $a = a(v)$ , tada iz (2.9) slijedi koordinata položaja kao funkcija brzine:

$$x = \int v \frac{dv}{a(v)} + C_4, \quad (2.12)$$

gdje je  $C_4$  konstanta integracije koja se određuje iz početnog uvjeta: za  $t = t_0$  je  $v = v_0$ .

Isto tako, ako je zadano ubrzanje čestice kao funkcija brzine  $a = a(v)$ , tada iz (2.6) slijedi vrijeme kao funkcija brzine:

$$dt = \frac{dv}{a(v)} ,$$

odnosno, nakon integriranja

$$t = \int \frac{dv}{a(v)} + C_5 , \quad (2.13)$$

gdje je  $C_5$  konstanta integracije koja se određuje iz početnog uvjeta: za  $t = t_0$  je  $v = v_0$ .

Dakle, dobije se funkcija  $t = f_1(v)$ , odakle, kao inverzna funkcija, slijedi brzina čestice kao funkcija vremena:

$$v = f_1^{-1}(t) = v(t) . \quad (2.14)$$

Nadalje, derivacijom jednadžbe (2.14) dobije se (prema 2.6) ubrzanje čestice kao funkcija vremena, a integriranjem jednadžbe (2.14) i položaj čestice kao funkcija vremena (prema 2.7).

### Primjer 2.6.

Zadan je zakon promjene ubrzanja čestice u funkciji njene brzine  $v$ :

$$a = 3\sqrt{v} ,$$

gdje je ubrzanje  $a$  dano u  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , a brzina  $v$  u  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ako je poznato da je u položaju čestice definiranom koordinatom  $x_1 = 40 \text{ m}$  brzina čestice  $v_1 = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , odrediti brzinu čestice u položaju  $x_2 = 100 \text{ m}$ .

*Rješenje:*

Položaj čestice kao funkcija brzine dobije se prema (2.9):

$$dx = \frac{v dv}{a(v)} = \frac{v dv}{3\sqrt{v}} = \frac{1}{3}\sqrt{v} dv = \frac{1}{3}v^{\frac{1}{2}} dv ,$$

a integral dobivenog izraza je

$$x = \int \frac{1}{3}v^{\frac{1}{2}} dv + C_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_1 = \frac{2}{9}\sqrt{v^3} + C_1 .$$

Konstanta integracije  $C_1$  odredit će se iz poznatih kinematičkih veličina u položaju  $x_1 = 40 \text{ m}$ :

$$40 = 2\sqrt{9^3}/9 + C_1 = 6 + C_1 , \text{ odakle je } C_1 = 34 \text{ m} ,$$

pa funkcija položaja čestice u ovisnosti o njenoj brzini glasi:

$$x = \frac{2}{9} \sqrt{v^3} + 34 \text{ m},$$

odakle se može dobiti i brzina čestice u funkciji položaja

$$v = \sqrt[3]{\left[ \frac{9}{2}(x - 34) \right]^2} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Kad se čestica nađe u položaju  $x_2 = 100 \text{ m}$ , njena brzina bit će:

$$v = \sqrt[3]{\left[ \frac{9}{2}(x - 34) \right]^2} = \sqrt[3]{\left[ \frac{9}{2}(100 - 34) \right]^2} = 44,51 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



**Zadatak 2.6.** Čestica se giba pravocrtno pri čemu joj se ubrzanje mijenja prema zakonu:

$$a = -k \cdot v,$$

gdje je  $a$  ubrzanje u  $\text{m/s}^2$ ,  $v$  je brzina čestice dana u  $\text{m/s}$ , a  $k$  je konstanta.

Ako je u trenutku kad se čestica nalazi u položaju  $x_1 = 12 \text{ m}$  njena brzina  $v_1 = 6 \text{ m/s}$ , a njeno ubrzanje  $a_1 = -3 \text{ m/s}^2$ , odrediti konstantu  $k$  i zakon promjene položaja čestice u funkciji njene brzine.

*Odgovor:*  $k = 0,5 \text{ 1/s}$ ,  $x = 24 - 2 \cdot v \text{ m}$ .

#### 2.2.3.5. Zadano je ubrzanje čestice kao funkcija položaja

Ako je zadano ubrzanje čestice kao funkcija položaja  $a = a(x)$ , tada iz izraza (2.9) slijedi:

$$a(x) dx = v dv. \quad (2.15)$$

Sada se, jer su varijable separirane, može integrirati lijeva odnosno desna strana jednadžbe (2.15) nakon čega slijedi:

$$\frac{1}{2} v^2 = \int a(x) dx + C, \quad (2.16)$$

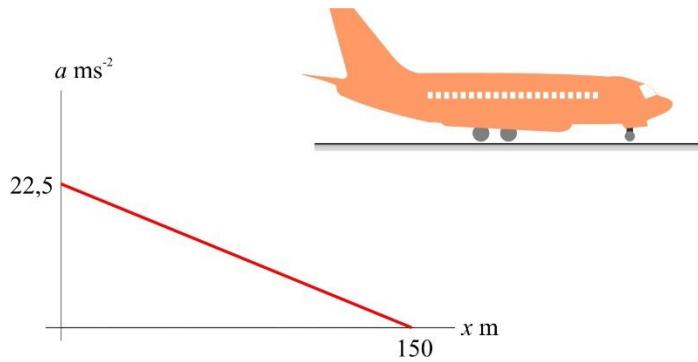
gdje je  $C$  konstanta integracije koja se određuje iz početnog uvjeta: za  $x = x_0$  je  $v = v_0$ .

Dobije se, dakle, brzina čestice kao funkcija položaja.

Dalje se provodi postupak opisan u dijelu 2.2.3.3.

#### Primjer 2.7.

Poznata je promjena ubrzanja zrakoplova pri polijetanju u funkciji koordinate njegova položaja (sl. 2.10). Odrediti brzinu zrakoplova nakon što prevali put od 60 m iz stanja mirovanja.



Slika 2.10. Primjer 2.7: Promjena ubrzanja zrakoplova u funkciji položaja.

*Rješenje:*

Budući da je ubrzanje zrakoplova zadano kao funkcija položaja, brzina zrakoplova kao funkcija položaja dobije se prema (2.16):

$$\frac{1}{2}v^2 = \int a(x) dx + C.$$

Sa slike 2.10 slijedi  $a-x$  funkcija (pravac):

$$a = -\frac{22,5}{150}x + 22,5 = -0,15x + 22,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

što nakon uvrštenja u prethodni izraz daje:

$$\frac{1}{2}v^2 = \int (-0,15x + 22,5) dx + C = -\frac{0,15}{2}x^2 + 22,5x + C.$$

Konstanta integracije  $C$  dobije se iz uvjeta (sl. 2.10) da je u početnom trenutku ( $t_0 = 0$ )  $x_0 = 0 \text{ m}$  i  $v_0 = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ :

$$\frac{1}{2} \cdot 0^2 = -\frac{0,15}{2} \cdot 0^2 + 22,5 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Konačno je

$$v^2 = -0,15 \cdot x^2 + 45 \cdot x \quad \text{ili} \quad v = \sqrt{-0,15 \cdot x^2 + 45 \cdot x} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

U trenutku kada zrakoplov prevali put od 60 m, njegova će brzina biti:

$$v_{60} = \sqrt{-0,15 \cdot 60^2 + 45 \cdot 60} = 46,48 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$



**Zadatak 2.7.** Ubrzanje čestice u funkciji položaja dano je izrazom:

$$a = 5 - \frac{4}{x^2},$$

gdje je  $a$  ubrzanje u  $\text{m}/\text{s}^2$ , a  $x$  je koordinata položaja čestice dana u m.

Ako je u trenutku kad se čestica nalazi u položaju  $x_1 = 6$  m njena brzina  $v_1 = 8$  m/s, odrediti zakon promjene brzine čestice u funkciji njezina položaja.

$$Odgovor: v = 2\sqrt{\frac{5}{2}x + \frac{2}{x} + \frac{2}{3}} \text{ m/s.}$$

### 2.2.3.6. Jednoliko i jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje čestice

Jednoliko pravocrtno gibanje čestice je gibanje čestice (po pravcu) konstantnom brzinom. To znači da je ubrzanje čestice pri tom gibanju jednak nuli ( $a = dv/dt = 0$  jer je  $v = v_0 = \text{konst.}$ ).

Položaj čestice je, prema (2.7):

$$x = \int v(t) dt + C_1 = v_0 t + C_1. \quad (2.17)$$

Ako je u početnom trenutku ( $t = 0$ )  $x = x_0$ , položaj čestice pri jednoliko pravocrtnom gibanju dan je izrazom:

$$x = x_0 + v_0 t. \quad (2.18)$$

Jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje čestice je gibanje čestice s konstantnim ubrzanjem  $a$ .

Brzina čestice je, prema (2.8):

$$v = \int a(t) dt + C_2 = at + C_2. \quad (2.19)$$

Ako je u početnom trenutku ( $t = 0$ )  $v = v_0$ , brzina čestice pri jednoliko ubrzanim pravocrtnom gibanju dana je izrazom:

$$v = v_0 + at. \quad (2.20)$$

Poznavanjem brzine kao funkcije vremena položaj čestice se dobije prema (2.7):

$$x = \int v(t) dt + C_1 = \int (v_0 + at) dt + C_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C_1,$$

pri čemu je konstanta integracije  $C_1 = x_0$  jer je u početnom trenutku ( $t = 0$ )  $x = x_0$ .

Slijedi zakon promjene položaja pri jednoliko ubrzanim pravocrtnom gibanju:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \quad (2.21)$$

U slučaju gibanja čestice konstantnim ubrzanjem može se s pomoću izraza 2.9 dobiti veza između brzine čestice i koordinate položaja čestice:

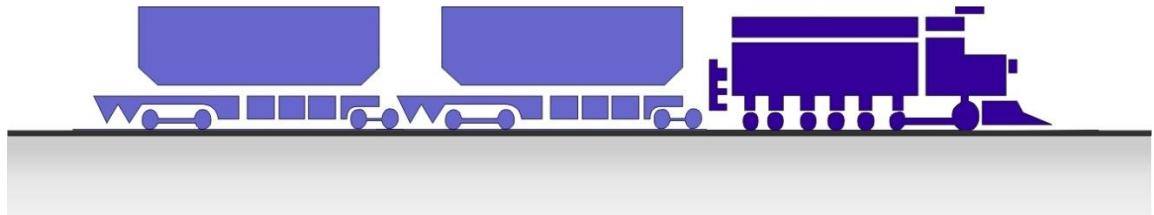
$$v dv = a dx, \text{ odnosno } \int_{v_0}^v v dv = \int_{x_0}^x a dx,$$

pa je

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x - x_0) \text{ ili } v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (2.22)$$

### Primjer 2.8.

Vlak, koji se gibao brzinom od 36 km/h (sl. 2.11), zaustavio se 1 min nakon početka kočenja. Ako se može pretpostaviti da se vlak za vrijeme kočenja giba konstantnim ubrzanjem, odrediti put koji je u tom periodu prevalio.



Slika 2.11. Primjer 2.8.

*Rješenje:*

Put što ga prevali vlak za vrijeme kočenja, uz konstantno ubrzanje, dan je izrazom (2.20):

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

a brzina vlaka izrazom (2.19):

$$v = v_0 + at.$$

Kako se put prevaljen za vrijeme kočenja mjeri od početka kočenja, to je  $x_0 = 0$ .

Ako se vlak zaustavio nakon vremena  $t_1$  od početka kočenja, bit će brzina  $v$  u tom trenutku jednaka 0, pa iz izraza za brzinu vlaka slijedi:

$$a = -\frac{v_0}{t_1}.$$

Da bi se ubrzanje dobilo u  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , mora se brzina  $v_0$  uvrstiti u  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , a vrijeme  $t_1$  u s:

$$v_0 = \frac{36 \cdot 1000}{3600} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad t_1 = 60 \text{ s}$$

pa je:

$$a = -\frac{10}{60} = -0,167 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

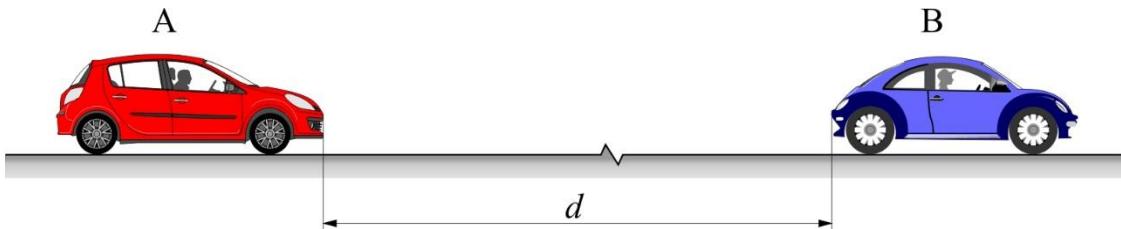
Put kočenja sada je:

$$x = 10 \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot (-0,167) \cdot 60^2 = 300 \text{ m}.$$

### Primjer 2.9.

Dva automobila, A i B, voze jedan iza drugoga na udaljenosti  $d = 64 \text{ m}$  konstantnim brzinama  $v_{A0} = v_{B0} = 30 \text{ m/s}$  (sl. 2.12). U jednom trenutku vozač automobilom A započinje pretjecanje konstantnim ubrzanjem  $a_A = 2 \text{ m/s}^2$ .

Odredite vrijeme potrebno da automobil A sustigne automobil B. Kolika je brzina automobila A u tom trenutku?



Slika 2.12. Primjer 2.9.

*Rješenje:*

Postavi li se ishodište koordinatnog sustava na mjesto gdje se automobil A nalazio u trenutku početka pretjecanja, položaj automobila B definiran je izrazom (2.17):

$$x_B = v_{B0}t + x_{B0} = v_{B0}t + d = 30t + 64,$$

a položaj automobila A izrazom (2.21):

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 + v_{A0}t + x_{A0} = \frac{1}{2}2t^2 + 30t = t^2 + 30t.$$

Kako su u trenutku sustizanja koordinate položaja automobila jednake ( $x_A = x_B$ ), može se pisati:

$$t^2 + 30t = 30t + 64,$$

odakle je (vrijeme mora biti pozitivno)

$$t = \sqrt{64} = 8 \text{ s}.$$

Dakle, automobilu A će trebati 8 s da sustigne automobil B pri čemu će brzina automobila A biti (prema 2.20):

$$v_A = v_{A0} + a_A t = 30 + 2 \cdot 8 = 46 \text{ m/s}.$$



**Zadatak 2.8.** Trkač na 800 metara pretrči prvih 100 m za 12 sekunda, a sljedećih 450 m za 62 sekunde. a) Kojom prosječnom brzinom trkač treba prijeći zadnjih 250 m pa da ostvari željenu kvalifikacijsku normu od 1 minute i 42 sekunde? b) Kolika je u tom slučaju njegova prosječna brzina na 800 metara? Brzine izraziti u m/s i u km/h.

*Odgovor:* a)  $v_{3,sr} = 8,929 \text{ m/s} = 32,14 \text{ km/h}$ , b)  $v_{sr} = 7,843 \text{ m/s} = 28,24 \text{ km/h}$ .

**Zadatak 2.9.** Automobil polazi iz stanja mirovanja i nakon prevaljenih 200 m, gibajući se jednoliko ubrzano, dostigne brzinu od 25 m/s. Odrediti: a) ubrzanje automobila, b) vrijeme koje je bilo potrebno da dostigne zadanu brzinu.

*Odgovor:* a)  $a = \frac{625}{400} = 1,563 \text{ m/s}^2$ , b)  $t = 16 \text{ s}$ .

**Zadatak 2.10.** Čestica se giba jednoliko ubrzano po pravocrtnoj putanji. Ako je poznato da čestica između petnaeste i dvadesete sekunde od početka gibanja prevali put od 350 m, odrediti koliko je ubrzanje čestice.

*Odgovor:*  $a = 4 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 2.11.** Pri brzini od 18 m/s vozač automobila ugleda pješake na označenom pješačkom prijelazu. Poznato je da je prosječnom vozaču za reakciju potrebno 0,75 sekunda, dok je vozaču s 1% alkohola u krvi za reakciju potrebno 3 sekunde.

Ako se automobil giba pravocrtno, a najveće usporenje koje se može ostvariti pritiskom na kočnicu iznosi  $2 \text{ m/s}^2$ , odrediti put koji će prevaliti automobil do trenutka zaustavljanja: a) ako njime upravlja normalan vozač, b) ako njime upravlja vozač s 1% alkohola u krvi.

*Odgovor:* a)  $x_0 = 94,5 \text{ m}$ , b)  $x_1 = 135 \text{ m}$ . (*Put kočenja automobila iznosi 81 m.*)

**Napomena:** *Ako piješ – ne voz!*!!!

**Zadatak 2.12.** Čestice A i B gibaju se duž istoga pravca, pri čemu se u početnom trenutku čestica B nalazi 60 m ispred čestice A. Čestica A giba se konstantnim ubrzanjem  $a_A = -4 \text{ m/s}^2$  i uz početnu brzinu  $v_A = 40 \text{ m/s}$ , dok se čestica B giba konstantnim ubrzanjem  $a_B = 2 \text{ m/s}^2$  i uz početnu brzinu  $v_B = 10 \text{ m/s}$ .

Koliko će vremena proći: a) do prvog susreta čestica A i B, b) do njihova drugog susreta?

*Odgovor:* a)  $t_1 = 2,76 \text{ s}$ , b)  $t_2 = 7,24 \text{ s}$ .

**Zadatak 2.13.** Automobili A i B gibaju se pravocrtno jedan prema drugom. U jednom je trenutku automobil A krenuo iz stanja mirovanja konstantnim ubrzanjem  $a_A = 4 \text{ m/s}^2$ , dok se automobil B giba konstantnom brzinom  $v_B = 20 \text{ m/s}$ .

Ako automobil A do susreta s automobilom B prevali  $2/3$  njihove početne međusobne udaljenosti, odrediti: a) vrijeme koje je proteklo od početka gibanja do susreta automobila, b) početnu međusobnu udaljenost automobila.

*Odgovor:* a)  $t_1 = 20 \text{ s}$ , b)  $\overline{AB} = 1200 \text{ m}$ .

## 2.2.4. Grafičko rješavanje problema pravocrtnog gibanja

Uzimajući u obzir diferencijalne veze između koordinate položaja čestice, njene brzine i ubrzanja, pravocrtno se gibanje čestice može razmatrati i grafički.

U ovim će se izlaganjima ono ograničiti na vezu između osnovnih kinematičkih dijagrama: dijagrama položaja i vremena ili  $x-t$  dijagrama, dijagrama brzine i vremena ili  $v-t$  dijagrama te dijagrama ubrzanja i vremena ili  $a-t$  dijagrama.

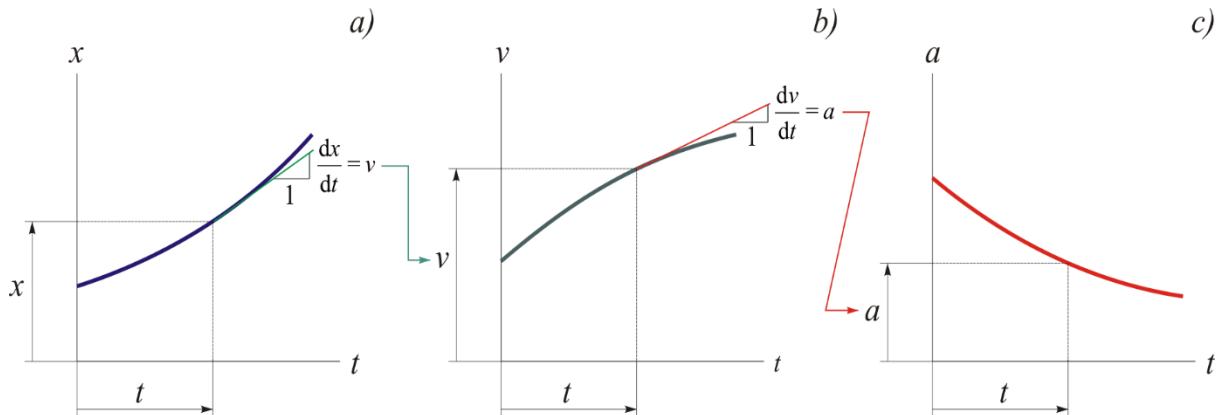
U prethodnim se razmatranjima došlo do sljedećih četiri relacija koje se mogu koristiti pri grafičkom rješavanju problema pravocrtnog gibanja čestice:

- (1) Nagib tangente na krivulju položaja i vremena ( $x-t$ ) u proizvoljnom trenutku  $t$  jednak je ordinati u dijagramu brzine i vremena ( $v-t$ ) u istom tom trenutku (sl. 2.13.a i b)

$$\frac{dx}{dt} = v .$$

- (2) Nagib tangente na krivulju brzine i vremena ( $v-t$ ) u proizvoljnom trenutku  $t$  jednak je ordinati u dijagramu ubrzanja i vremena ( $a-t$ ) u istom tom trenutku  $t$  (sl. 2.13.b i c)

$$\frac{dv}{dt} = a .$$



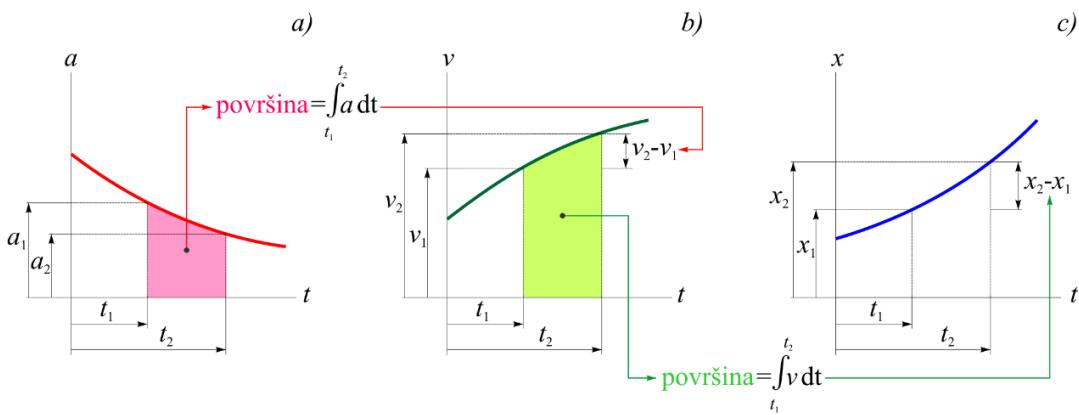
Slika 2.13. Veze među osnovnim kinematičkim veličinama  $x \rightarrow v \rightarrow a$

- (3) Prirast brzine  $v$  u vremenskom intervalu  $t_1$  do  $t_2$  jednak je površini u ( $a-t$ ) dijagramu omeđenoj krivuljom ubrzanja i ordinatama koje odgovaraju vremenskim trenutcima  $t_1$  i  $t_2$  (sl. 2.14.a i b)

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt . \quad (2.23)$$

- (4) Prirast koordinate položaja čestice  $x$  (pomak čestice  $\Delta x$ ) u vremenskom intervalu  $t_1$  do  $t_2$  jednak je površini u ( $v-t$ ) dijagramu omeđenoj krivuljom brzine i ordinatama koje odgovaraju vremenskim trenutcima  $t_1$  i  $t_2$  (sl. 2.14.b i c)

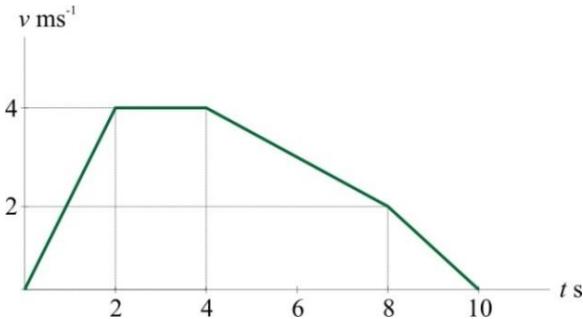
$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt . \quad (2.24)$$



Slika 2.14. Veze među osnovnim kinematičkim veličinama  $a \rightarrow v \rightarrow x$

### Primjer 2.10.

Zadan je dijagram promjene brzine čestice u funkciji vremena (sl. 2.15). Odrediti zakone promjene ubrzanja čestice u pojedinim periodima gibanja (nacrtati  $a-t$  dijagram gibanja čestice) te udaljenost čestice od početnog položaja u trenutku  $t=10\text{ s}$ .



Slika 2.15. Primjer 2.10:  $v-t$  dijagram gibanja čestice.

Rješenje:

Na slici 2.13 je vidljivo da je gibanje čestice podijeljeno u četiri perioda: I. (od 0 do 2 s) u kojem brzina raste linearno, II. (od 2 do 4 s) u kojem je brzina konstantna, te III. (od 4 do 8 s) i IV. (od 8 do 10 s) u kojima brzina konstantno pada, ali po različitim zakonima.

Prema izrazu (2.20) ubrzanje čestice jednako je nagibu tangente na krivulju u pojedinom trenutku vremena. Budući da su zakoni promjene brzine u svim periodima pravci, to su nagibi njihovih tangent u pojedinom periodu konstantni i odgovaraju koeficijentu smjera odgovarajućeg pravca, pa je

- u I. periodu:  $a_I = \Delta v_I / \Delta t_I = 4 / 2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,
- u II. periodu:  $a_{II} = \Delta v_{II} / \Delta t_{II} = 0 / 2 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,
- u III. periodu:  $a_{III} = \Delta v_{III} / \Delta t_{III} = -2 / 4 = -0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,
- u IV. periodu:  $a_{IV} = \Delta v_{IV} / \Delta t_{IV} = -2 / 2 = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

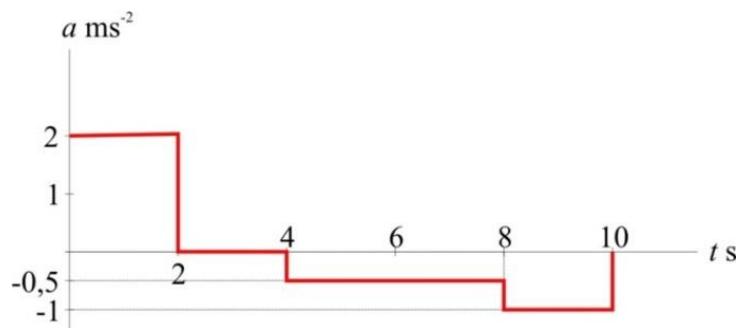
Dijagram promjene ubrzanja čestice ( $a-t$ ) prikazan je na slici 2.16.

Udaljenost čestice od početnog položaja jednaka je ukupnom prevaljenom putu jer brzina čestice nije mijenjala svoj smjer.

Zato je prema (2.21) ta udaljenost jednaka ukupnoj površini ispod  $v-t$  krivulje na slici 2.15, pa je

$$x_2 - x_1 = \Delta x = x(20) - x(0) = \int_0^{20} v dt = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV},$$

gdje su  $A_I, A_{II}, A_{III}$  i  $A_{IV}$  površine ispod  $v-t$  krivulje u pojedinom periodu gibanja.



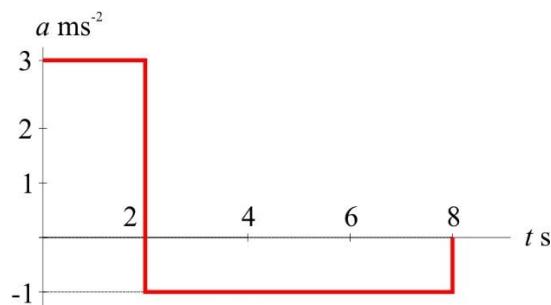
Slika 2.16. Primjer 2.10: a-t dijagram gibanja čestice.

Dalje je:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + \left( 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 26 \text{ m.}$$



**Zadatak 2.14.** Zadan je dijagram promjene ubrzanja čestice u funkciji vremena (sl. Z.2.14). Ako je čestica u početnom trenutku mirovala u ishodištu, odrediti zakone promjene brzine i položaja čestice u funkciji vremena te skicirati odgovarajuće dijagrame ( $v-t$  i  $x-t$ ).

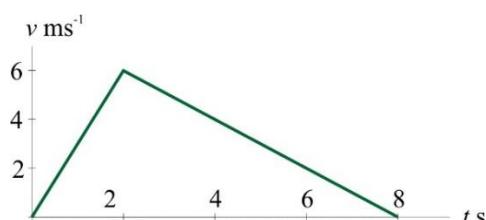


Slika Z.2.14. a-t dijagram gibanja čestice

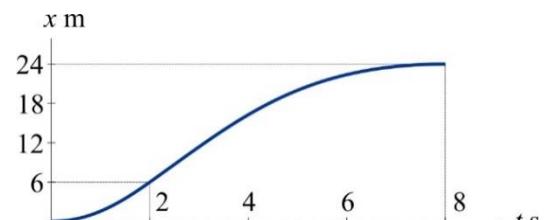
Odgovor:

$$v_{0-2} = 3t \text{ m/s}, v_{2-8} = 8 - t \text{ m/s}$$

$$x_{0-2} = 3t^2/2 \text{ m}, x_{2-8} = -8 + 8t - t^2/2 \text{ m}$$

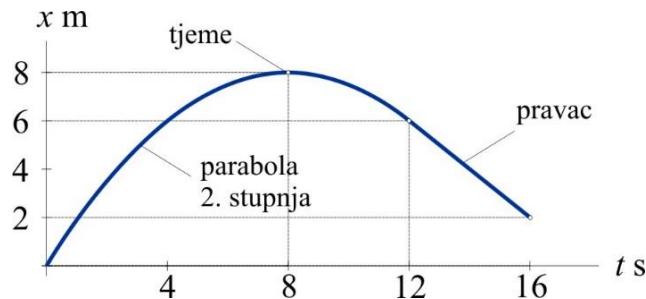


Slika Z.2.14.a. v-t dijagram gibanja čestice



Slika Z.2.14.b. x-t dijagram gibanja čestice

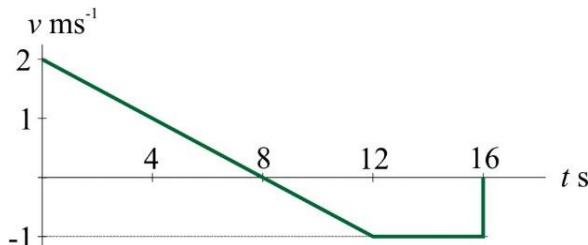
**Zadatak 2.15.** Čestica se giba pravocrtno pri čemu joj se položaj tijekom vremena mijenja prema dijagramu prikazanom na slici Z.2.15. Ako se čestica od dvanaeste sekunde nastavlja gibati konstantnom brzinom, odrediti zakone promjene položaja, brzine i ubrzanja čestice u funkciji vremena te skicirati  $v-t$  i  $a-t$ .



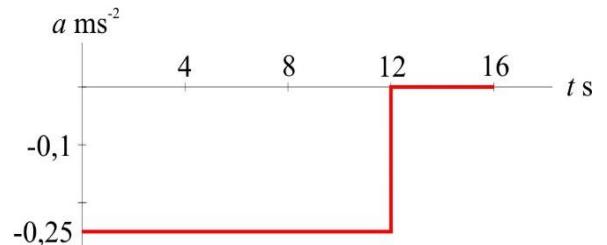
Slika Z.2.15. s-t dijagram gibanja čestice

$$Odgovor: x_{0-12} = -t^2/8 + 2t \text{ m}, \quad x_{12-16} = -t + 18 \text{ m}$$

$$v_{0-12} = -t/4 + 2 \text{ m/s}, \quad v_{12-16} = -1 \text{ m/s} \quad a_{0-12} = -1/4 = -0,25 \text{ m/s}^2, \quad a_{12-16} = 0$$



Slika Z.2.15.a. v-t dijagram gibanja čestice



Slika Z.2.15.b. a-t dijagram gibanja čestice

## 2.2.5. Vezano gibanje čestica

U sustavima kolotura i užetnih elemenata (užad, sajle, lanci) često se javlja sustav od dvije ili više međusobno povezanih čestica koje vrše pravocrtno gibanje, kako je to prikazano na slici 2.17. Pri tome se pretpostavlja da su užetni elementi nerastezljivi, idealno savitljivi, te da im se masa može zanemariti.

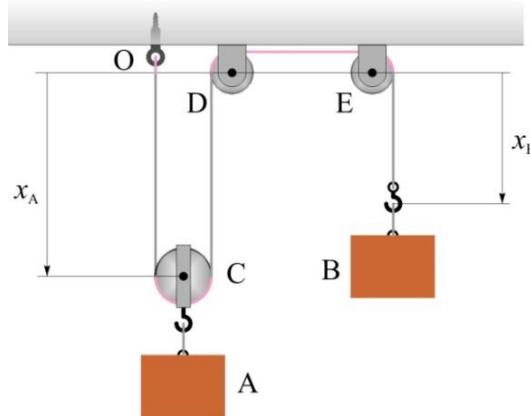
Iz navedenoga slijedi vrlo važan uvjet da duljina svakog užetnog elementa, izražena preko koordinata položaja pojedinih čestica, mora biti konstantna. Taj se uvjet naziva ograničenjem veze kod vezanog pravocrtnog gibanja čestica.

Za primjer prikazan na slici 2.17 može se ustvrditi kako duljina užeta OCDEB mora biti konstantna. S druge strane, duljina dijela užeta OC odnosno CD razlikuje se u odnosu na koordinatu položaja čestice A,  $x_A$  za konstantnu veličinu (udaljenost od čestice O horizontalne kroz koloturnike D i E, te udaljenost čestice C od čestice A). Takoder, duljina dijela užeta koji obuhvaćaju koloturnik C i duljina dijela koji obuhvaća i spaja koloturnike D i E jesu konstantne veličine.

Zato se može pisati:

$$2 \cdot x_A + x_B = \text{konst.} \quad (2.25)$$

Ta se jednadžba naziva ograničenje veze. To nadalje znači da je samo jedna od koordinata  $x_A$  i  $x_B$  neovisna (druga slijedi iz jednadžbe 2.25).



Slika 2.17. Primjer vezanog pravocrtnog gibanja čestica

Budući da se brojem stupnjeva slobode nekog sustava naziva se broj neovisnih podataka (koordinata) kojima je u potpunosti definirano gibanje tog sustava, zaključuje se da sustav prikazan na slici 2.17 ima jedan stupanj slobode gibanja.

Deriviranjem jednadžbe (2.25) po vremenu dobije se veza između brzina čestica A i B, a potom i veza između ubrzanja tih dviju čestica, kako slijedi:

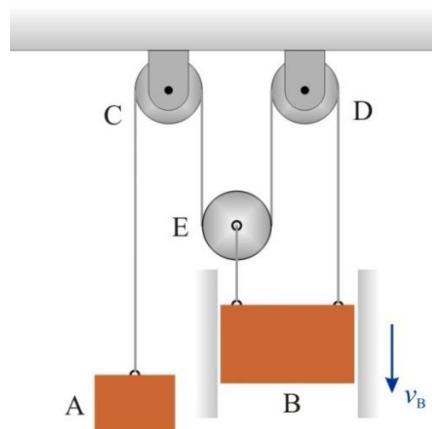
$$2 \cdot \frac{dx_A}{dt} + \frac{dx_B}{dt} = 0 \quad \text{ili} \quad 2 \cdot v_A + v_B = 0; \quad (2.26)$$

$$2 \cdot \frac{dv_A}{dt} + \frac{dv_B}{dt} = 0 \quad \text{ili} \quad 2 \cdot a_A + a_B = 0. \quad (2.27)$$

Zaključuje se da je vektor brzine čestice B dvostruko veći od vektora brzine čestice A, te da je suprotno usmjeren. Isti se zaključak može donijeti i za vektore ubrzanja ovih dviju čestica.

### Primjer 2.11.

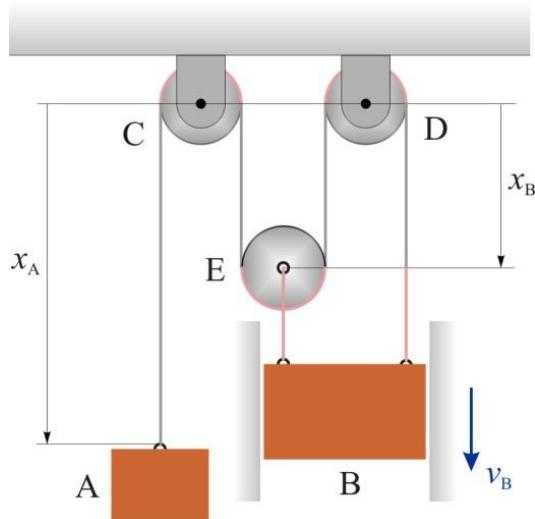
Blokovi A i B povezani su međusobno tankim nerastezljivim užetom prebačenim preko koloturnika C, E i D. Odrediti brzinu bloka A ako je poznata brzina bloka B  $v_B = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (sl. 2.18).



Slika 2.18. Primjer 2.11: Sustav za podizanje blokova.

*Rješenje:*

Na slici 2.19 prikazane su koordinate položaja blokova A i B.



Slika 2.19. Primjer 2.11: Koordinate položaja blokova.

Duljina užeta ACEDB mora biti konstantna. S druge strane ta je duljina jednaka koordinati položaja bloka A uvećanoj za trostruku koordinatu bloka B i konstantu koja obuhvaća dijelove užeta oko koloturnika C, D i E, te dio užeta od horizontale kroz središte koloturnika E do bloka B (sl. 2.19).

Zato se može pisati

$$x_A + 3 \cdot x_B = \text{konst.},$$

što nakon deriviranja po vremenu daje

$$\frac{dx_A}{dt} + 3 \cdot \frac{dx_B}{dt} = 0,$$

odnosno

$$v_A + 3 \cdot v_B = 0,$$

odakle se dobije brzina bloka A:

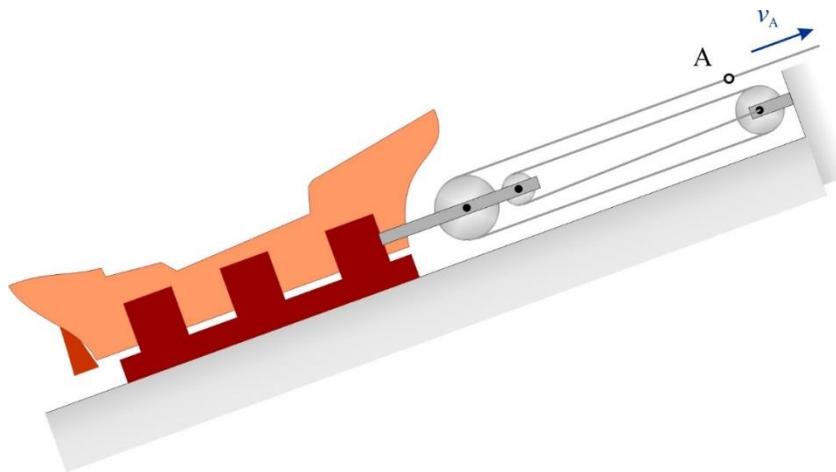
$$v_A = -3 \cdot v_B = -3 \cdot 1 = -3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Iz dobivenog se rezultata zaključuje da će se blok A gibati trostruko većom brzinom od bloka B i suprotno usmjerenom. U ovom slučaju brzina bloka A bit će usmjerenja prema gore.



**Zadatak 2.16.** Za izvlačenje broda na navoz sa svrhom remonta koristi se sustav koloturnika prikazan na slici Z.2.16. Uže je jednim krajem vezano u točki T, a drugi se kraj užeta namata na bubanj koji pokreće elektromotor.

Odrediti brzinu izvlačenja broda ako je brzina točke A na užetu  $v_A = 8 \text{ m/s}$ .

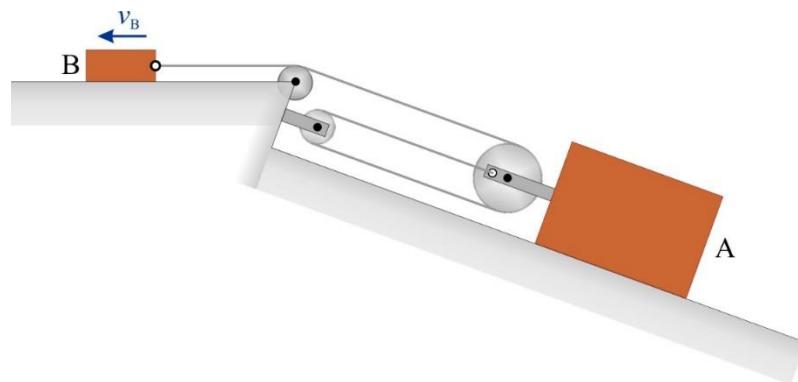


Slika Z.2.16. Zadatak 2.16.

Odgovor:  $v_A = 2 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 2.17.** Čestica B giba se brzinom  $v_B = 1,5 \text{ m/s}$  po horizontalnoj podlozi, te s pomoću užeta i sustava koloturnika povlači česticu A uz kosinu (slika Z.2.17).

Odrediti brzinu kojom se čestica A giba uz kosinu.



Slika Z.2.17. Zadatak 2.17.

Odgovor:  $v_A = 0,5 \text{ m/s}$ .

## 2.3. KRIVOCRTNO GIBANJE ČESTICE

Za definiranje krivocrtnog gibanja čestice u prostoru najčešće se primjenjuju sljedeća tri načina:

- a) vektorski način
- b) analitički način
- c) prirodni način.

### 2.3.1. Vektorski način definiranja gibanja

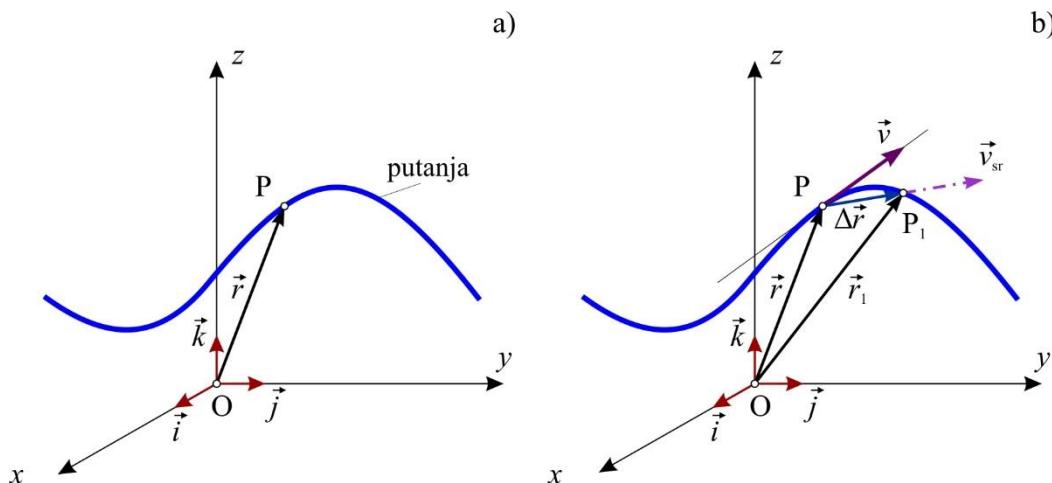
Položaj čestice P u proizvolnjem trenutku vremena može se definirati s pomoću vektora  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$  s početkom u ishodištu usvojenog koordinatnog sustava. Taj vektor naziva se još i radius vektor položaja čestice P, a u općem slučaju mijenja se po pravcu, smjeru i veličini tijekom vremena. Stoga se kaže da vektor  $\vec{r}$  predstavlja vektorskiju funkciju skalarnog argumenta  $t$ , tj.:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ ili}$$

$$\vec{r} = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.28)$$

gdje su  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  jedinični vektori (ortovi) u pravcu triju nepomičnih osi koordinatnog sustava Oxyz, pa prema tome konstantni po intenzitetu, pravcu i smjeru.

Ako je zadana funkcija neprekinuta i najmanje dvaput derivabilna, kaže se da predstavlja jednadžbu krivocrtnog gibanja čestice u vektorskome obliku. Putanja čestice dobije se spajanjem vrhova radius vektora položaja  $\vec{r}$  i još se naziva hodograf radius vektora položaja (sl. 2.20.a).



Slika 2.20. Krivocrtno gibanje čestice: a) putanja čestice; b) brzina čestice.

#### 2.3.1.1. Vektor brzine čestice

Neka se promatrana čestica u trenutku  $t$  nalazi u položaju P koji je određen vektorom položaja  $\vec{r}$ , a u trenutku  $t_1$  u položaju  $P_1$  određenom vektorom položaja  $\vec{r}_1$ . Tada je vektorom  $\overrightarrow{PP_1} = \Delta\vec{r}$  određen pomak čestice P u vremenskom intervalu  $\Delta t = t_1 - t$  (sl. 2.20.b).

Vektor srednje brzine čestice definira se kao omjer:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\overrightarrow{PP_1}}{t_1 - t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.29)$$

Pravac vektora  $\vec{v}_{sr}$  poklapa se s pravcem vektora  $\overrightarrow{PP_1}$ , dok se smjer tog vektora podudara sa smjerom gibanja čestice.

Brzinom čestice P u proizvoljnom trenutku vremena naziva se vektorska veličina  $\vec{v}$  kojoj teži vektor srednje brzine  $\vec{v}_{sr}$  kada vremenski interval  $\Delta t$  teži nuli:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}_{sr}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (2.30)$$

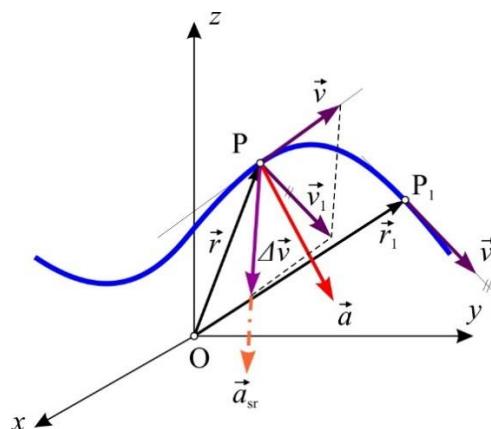
gdje se, radi jednostavnosti, derivacija funkcije po parametru  $t$  označava točkom iznad funkcije ( $\dot{\vec{r}} = d\vec{r}/dt$ ,  $\dot{y} = dy/dt$ , i slično).

Prema tome, vektor brzine čestice u proizvoljnom trenutku vremena jednak je prvoj derivaciji radijusa položaja čestice po vremenu. Budući da se u graničnom slučaju pravac sekante  $PP_1$  poklapa s pravcem tangente, vektor brzine čestice pada u pravac tangente na putanju i usmijeren je u smjeru gibanja čestice.

### 2.3.1.2. Vektor ubrzanja čestice

Promjenu intenziteta i pravca vektora brzine pri krivocrtnom gibanju karakterizira vektor ubrzanja čestice.

Promotre li se dva uzastopna položaja čestice P (P i  $P_1$ ) s pripadajućim brzinama  $\vec{v}$  i  $\vec{v}_1$ , očito je da će u promatranom vremenskom intervalu  $\Delta t = t_1 - t$  brzina čestice dobiti priraštaj  $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ . Koristeći se pravilom paralelograma, može se u točki P odrediti vektor  $\Delta \vec{v}$ . Također se može zaključiti da će taj vektor biti uvijek usmijeren u konkavnu stranu krivulje (sl. 2.21).



Slika 2.21. Ubrzanje čestice

Vektor srednjeg ubrzanja čestice definira se kao omjer:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.31)$$

Ubrzanjem čestice P u proizvoljnom trenutku vremena naziva se vektorska veličina  $\vec{a}$  kojoj teži vektor srednjeg ubrzanja  $\vec{a}_{sr}$  kada vremenski interval  $\Delta t$  teži nuli:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{a}_{sr}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (2.32)$$

Prema tome, vektor ubrzanja čestice u proizvoljnom trenutku vremena jednak je prvoj derivaciji vektora brzine ili drugoj derivaciji radijusa vektora položaja po vremenu.

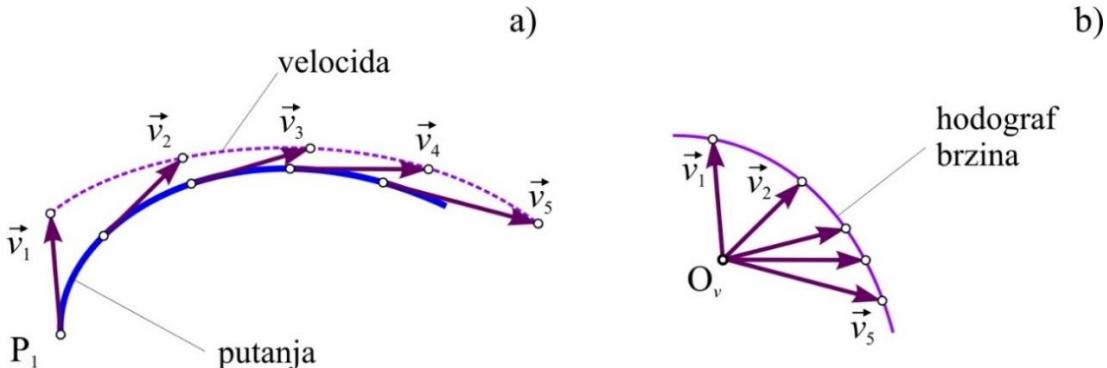
Ako je putanja čestice ravninska krivulja, tada vektor ubrzanja leži u istoj ravnini i usmjeren je u konkavnu stranu krivulje. Ako je pak putanja prostorna krivulja, tada ubrzanje leži u tzv. oskulatornoj ravnini koja je definirana tangentom i glavnom normalom na putanju u zadanoj točki.

### 2.3.1.3. *Velocida i hodograf brzina čestice*

Pri proučavanju ravninskih gibanja, i to naročito pri primjeni grafičkih postupaka, susreću se u kinematici pojmovi velocida i hodograf brzina, koji će se ovdje definirati.

Velocidom se naziva krivulja koja prolazi vrhovima vektora brzina nanesenima u odgovarajućim točkama putanje (sl. 2.22.a).

Vektori brzina, naneseni paralelno samima sebi iz jednog ishodišta, određuju svojim vrhovima krivulju koja se naziva hodograf brzina (sl. 2.22.b).



Slika 2.22. a) *Velocida*; b) *hodograf brzina*.

### 2.3.1.4. *Teorem o projekcijama derivacije vektora*

Teorem o projekcijama derivacije vektora glasi:

Projekcija derivacije vektora na neku nepomičnu os jednaka je derivaciji projekcije zadanog vektora na tu istu os.

Neka je zadan vektor  $\vec{c}$  kao funkcija vremena i neka je vektor  $\vec{d}$  njegova derivacija po vremenu. Po definiciji je:

$$\vec{d} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{d}_{sr}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{c}}{\Delta t} = \frac{d\vec{c}}{dt}. \quad (2.33)$$

Korištenjem teorema o projekcijama vektora na os, može se pisati:

$$d_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c_{1x} - c_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta c_x}{\Delta t} = \frac{dc_x}{dt}. \quad (2.34)$$

Ovdje valja naglasiti da gore rečeno ne vrijedi i za intenzitet, odnosno modul vektora, jer u općem slučaju:

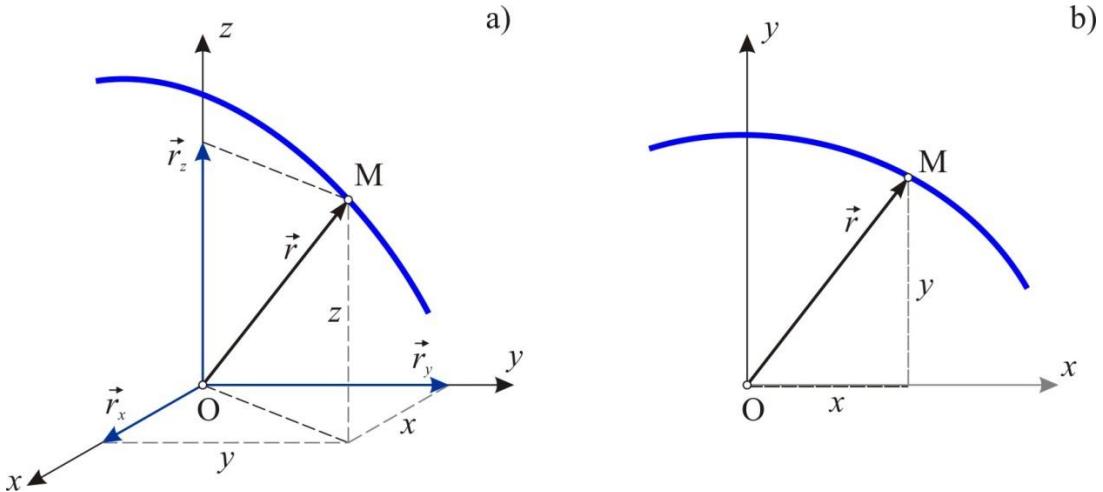
$$|\vec{d}| \neq \frac{d|\vec{c}|}{dt}. \quad (2.35)$$

To je lako pokazati na primjeru kružnog gibanja kod kojega je intenzitet radijus vektora položaja konstantan, tj.  $|\vec{r}| = \text{const.}$ , ali je vektor položaja funkcija vremena  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  i vrijedi:

$$\frac{d|\vec{r}|}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0. \quad (2.36)$$

### 2.3.2. Analitički način definiranja gibanja čestice

#### 2.3.2.1. Putanja, brzina i ubrzanje čestice u pravokutnim koordinatama



Slika 2.23. a) Položaj čestice u prostoru; b) položaj čestice u ravnini.

Položaj čestice u prostoru može se u potpunosti definirati trima pravokutnim koordinatama  $x$ ,  $y$  i  $z$  (slika 2.23.a). Shodno tome i gibanje čestice u prostoru bit će u potpunosti određeno ako su poznate funkcije vremena:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (2.37)$$

koje, s obzirom na prirodu gibanja čestice, moraju biti neprekinute i barem dva puta derivabilne.

Gibanje čestice u ravnini određeno je jednakostima:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (2.38)$$

Jednadžbe (2.37) i (2.38) predstavljaju putanju odnosno trajektoriju čestice u parametarskom obliku. Izlučivanjem vremena  $t$  iz prve od jednadžba (2.38)  $t = \phi(x)$  i uvrštanjem u drugu dobije se jednadžba putanje čestice u ravnini:

$$y = y(\phi(x)). \quad (2.39)$$

Na osnovi teorema o projekcijama derivacije vektora mogu se napisati izrazi za određivanje projekcija vektora brzine na koordinatne osi:

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}, \quad v_y = \frac{dr_y}{dt}, \quad v_z = \frac{dr_z}{dt}. \quad (2.40)$$

Kako je vidljivo sa slike 2.23, projekcije vektora položaja na koordinatne osi jednake su koordinatama čestice, tj.

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z,$$

odakle slijedi da je:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \quad (2.41)$$

tj. projekcije brzina na pojedine koordinatne osi jednake su prvim derivacijama odgovarajućih koordinata čestice po vremenu.

Poznavajući projekcije brzine može se odrediti intenzitet vektora brzine i njegov pravac (odnosno kutovi  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  koje pravac vektora brzine zatvara s pojedinim koordinatnim osima), kako slijedi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (2.42)$$

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}. \quad (2.43)$$

Na sličan način mogu se odrediti i projekcije vektora ubrzanja na pojedine koordinatne osi. Imajući u vidu definiciju vektora ubrzanja, može se pisati:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \quad (2.44)$$

tj. projekcije vektora ubrzanja na koordinatne osi jednake su prvim derivacijama po vremenu projekcija vektora brzine ili pak drugim derivacijama odgovarajućih koordinata čestice po vremenu. Slično kao kod brzina, intenzitet i pravac ubrzanja mogu se odrediti prema izrazima:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.45)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a}. \quad (2.46)$$

Prema tome, ako je gibanje čestice zadano u pravokutnom (Descartesovu) koordinatnom sustavu jednadžbama (2.37) ili (2.38), onda se brzina čestice određuje prema izrazima (2.40) do (2.43), a ubrzanje prema (2.44) do (2.46). Kod ravinskog gibanja otpadaju treće projekcije koje se odnose na os  $z$ .

### Primjer 2.12.

Vektor brzine čestice koja započinje gibanje iz ishodišta mijenja se prema zakonu:

$$\vec{v} = 16t^2 \vec{i} + 4t^3 \vec{j} + (5t + 2) \vec{k} \text{ m/s,}$$

gdje je  $t$  dano u sekundama. Odrediti vektor ubrzanja čestice i intenzitet tog vektora u trenutku  $t_1=2$  s. Kolike su koordinate položaja čestice u tom trenutku?

*Rješenje:*

Vektor ubrzanja čestice dobije se prema (2.32):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [16t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j} + (5t+2)\vec{k}] = 32t\vec{i} + 12t^2\vec{j} + 5\vec{k} \text{ m/s}^2$$

i u trenutku  $t_1=2$  s glasi:

$$\vec{a} = 64\vec{i} + 48\vec{j} + 5\vec{k} \text{ m/s}^2,$$

a iznos ubrzanja je prema (2.45):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{64^2 + 48^2 + 5^2} = 80,16 \text{ m/s}^2.$$

Koordinate vektora brzine su:

$$v_x = 16t^2, \quad v_y = 4t^3, \quad v_z = 5t + 2,$$

pa su koordinate položaja čestice, zbog (2.41):

$$dx = v_x dt = 16t^2 dt, \text{ pa je } x = \int 16t^2 dt = \frac{16}{3}t^3 + C_1;$$

$$dy = v_y dt = 4t^3 dt, \text{ pa je } y = \int 4t^3 dt = t^4 + C_2;$$

$$dz = v_z dt = (5t+2) dt, \text{ pa je } z = \int (5t+2) dt = \frac{5}{2}t^2 + 2t + C_3.$$

Konstante integracije  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  određuju se iz uvjeta da se u početnom trenutku ( $t=0$ ) čestica nalazi u ishodištu koordinatnog sustava te je  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ , pa slijedi da su i sve konstante integracije jednake nuli.

Konačno je:

$$x = \frac{16}{3}t^3 \text{ m}, \quad y = t^4 \text{ m}, \quad z = \frac{5}{2}t^2 + 2t,$$

pa je u trenutku  $t_1=2$  s:

$$x(2) = 42,67 \text{ m}, \quad y(2) = 16 \text{ m}, \quad z(2) = 14.$$

### Primjer 2.13.

Gibanje čestice u ravnini zadano je parametarskim jednadžbama:

$$x = 3t^2 - 6t, \quad y = 4t^2 - 8t,$$

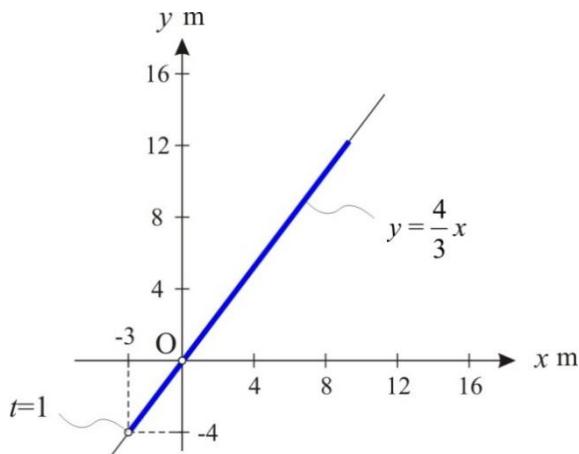
gdje su  $x$  i  $y$  dani u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje čestice.

*Rješenje:*

Da bi se odredila putanja, potrebno je najprije eliminirati parametar  $t$  iz gornjih jednadžba. Pomnoži li se prva jednadžba s 4, a druga s 3, bit će desne strane tako dobivenih jednadžba jednake, odakle slijedi:

$$4x = 3y \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{4}{3}x.$$

Prema tome, putanja je pravac koji prolazi ishodištem i koji s osi  $x$  zatvara kut  $\alpha$ , pri čemu je  $\tan \alpha = 4/3$  (sl. 2.24).



Slika 2.24. Primjer 2.13: putanja čestice.

Brzina i ubrzanje čestice odredit će se prema izrazima (2.37) do (2.42):

$$v_x = \dot{x} = 6t - 6, \quad v_y = \dot{y} = 8t - 8, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10(t-1) \text{ m/s}$$

$$a_x = \ddot{x} = 6, \quad a_y = \ddot{y} = 8, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \text{ m/s}^2.$$

Iz zadanih parametarskih jednadžba i dobivenih rezultata mogu se izvesti sljedeći zaključci:

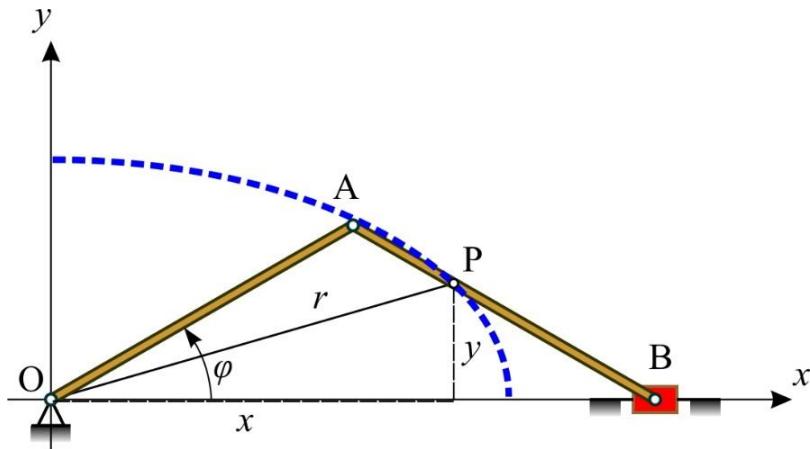
- u trenutku  $t_0 = 0$  s čestica se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, brzina joj je  $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , dok joj ubrzanje iznosi  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;
- brzina čestice bit će jednaka nuli u trenutku  $t_1 = 1$  s, i u tom će se trenutku čestica početi vraćati ka ishodištu O;
- čestica će se ponovno naći u ishodištu u trenutku  $t_2 = 2$  s, i od tog trenutka će se stalno udaljavati od ishodišta;
- pravci brzine i ubrzanja poklapaju se s pravcem putanje čestice.

### Primjer 2.14.

Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje čestice P elipsografa prikazanoga na slici 2.25 ako se kut  $\varphi$ , što ga poluga OA zatvara s osi  $x$ , mijenja prema zakonu:

$$\varphi = \omega t \quad (\omega = \text{const.}).$$

Zadano:  $\overline{OA} = \overline{AB} = 3l$ ;  $\overline{AP} = l$



Slika 2.25. Primjer 2.14.

Rješenje:

Potrebno je najprije odrediti koordinate čestice P u funkciji vremena. Budući da je trokut OAB jednakokračan, bit će kut uz vrh B tog trokuta jednak kutu  $\varphi$ . Koordinate čestice P sada su:

$$x = 3l \cos \varphi + l \cos \varphi \quad y = 2l \sin \varphi$$

$$x = 4l \cos \omega t \quad y = 2l \sin \omega t .$$

Dijeljenjem prve jednadžbe s  $4l$ , druge s  $2l$ ; kvadriranjem obiju i zbrajanjem, dobije se putanja čestice P:

$$\frac{x^2}{16l^2} + \frac{y^2}{4l^2} = 1,$$

što je centralna elipsa s poluosima  $4l$  i  $2l$ .

Brzina i ubrzanje čestice P bit će prema (2.41 i 2.42) te (2.44 i 2.45):

$$v_x = \dot{x} = -4l\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = 2l\omega \cos \omega t$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2l\omega \sqrt{4\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t};$$

$$a_x = \ddot{x} = -4l\omega^2 \cos \omega t = -x\omega^2, \quad a_y = \ddot{y} = -2l\omega^2 \sin \omega t = -y\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2l\omega^2 \sqrt{4\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = \overline{OM}\omega^2 = r\omega^2.$$

Brzina čestice P mijenja se tijekom vremena u granicama od  $2l\omega$  do  $4l\omega$ , dok je ubrzanje proporcionalno udaljenosti same čestice od ishodišta O. Korištenjem izraza (2.46):

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{r} = -\frac{x}{r}$$

može se pokazati da je vektor ubrzanja za vrijeme gibanja uvijek usmjeren duž pravca OP ka točki O.



**Zadatak 2.18.** Čestica se giba u ravnini Oxy tako da joj se vektor brzine mijenja prema zakonu

$$\vec{v} = (2t + 3)\vec{i} + (t^2 - 2)\vec{j},$$

gdje je brzina  $v$  u metrima po sekundi, a vrijeme  $t$  u sekundama.

Ako se čestica u početnom trenutku ( $t_0 = 0$ ) nalazila u položaju  $x_0 = 2 \text{ m}$  i  $y_0 = 4/3 \text{ m}$ , odrediti položaj te iznos brzine i ubrzanja čestice u trenutku  $t_1 = 2 \text{ s}$ .

*Odgovor:*  $x_1 = 12 \text{ m}$ ,  $y_1 = 0 \text{ m}$ ,  $v_1 = 7,28 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 4,472 \text{ m/s}^2$ .

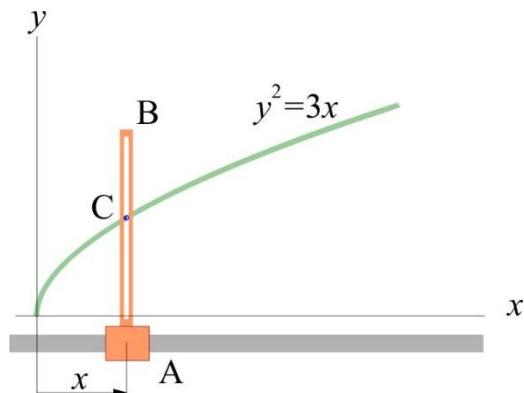
**Zadatak 2.19.** Zadane su parametarske jednadžbe gibanja čestice

$$x = 2 \sin \frac{2\pi t}{3}, \quad y = -3 \cos \frac{2\pi t}{3},$$

gdje su  $x$  i  $y$  dani u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Potrebno je odrediti: a) jednadžbu putanje čestice, b) iznos brzine i ubrzanja čestice u trenutku  $t_1 = 6 \text{ s}$ .

*Odgovor:* a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  - elipsa b)  $v_1 = \frac{4\pi}{3} = 4,189 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = \frac{4\pi^2}{3} = 13,159 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 2.20.** Čestica C dovodi se u gibanje duž žlijeba oblika parabole  $y^2 = 3x$  s pomoću klizača AB (sl. Z.2.20).



Slika Z.2.20. Zadatak 2.20.

Ako se klizač AB giba duž vodilice prema zakonu

$$x = 3 \cdot t^2,$$

gdje je  $x$  dano u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama, potrebno je odrediti položaj čestice te iznos njene brzine i ubrzanja u trenutku  $t_1 = 1 \text{ s}$ .

*Odgovor:*  $x_1 = 3 \text{ m}$ ,  $y_1 = 3 \text{ m}$ ,  $v_1 = 6,71 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 6 \text{ m/s}^2$ .

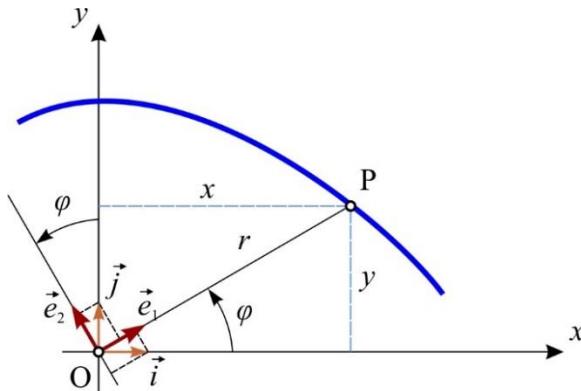
### 2.3.2.2. Putanja, brzina i ubrzanje čestice u polarnim koordinatama

Ravninsko gibanje čestice može se opisati i u polarnim koordinatama. Ako su poznate koordinate  $r$  i  $\varphi$  čestice P:

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t) \quad (2.47)$$

kao neprekinute i najmanje dvaput derivabilne funkcije vremena, tada je gibanje čestice P u ravnini potpuno određeno. Veza između polarnih i pravokutnih koordinata slijedi sa slike 2.26:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (2.48)$$



Slika 2.26. Gibanje u polarnim koordinatama

Da bi se odredila brzina i ubrzanje čestice u polarnim koordinatama, potrebno je u razmatranjima uvesti dva nova jedinična vektora:

$\vec{e}_1$  - usmjeren duž spojnica ishodišta i čestice u zadanim trenutku;

$\vec{e}_2$  - okomito na vektor  $\vec{e}_1$ .

Ta dva vektora mogu se izraziti preko jediničnih vektora  $\vec{i}$  i  $\vec{j}$  nepokretnog koordinatnog sustava Oxy prema slici 2.26:

$$\vec{e}_1 = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \quad \vec{e}_2 = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi. \quad (2.49)$$

S obzirom na to da je kut  $\varphi$  funkcija vremena, to su  $\vec{e}_1$  i  $\vec{e}_2$  promjenjivi vektori. Derivacije tih vektora po vremenu su:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= -\vec{i} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \vec{j} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_2 = \dot{\varphi} \vec{e}_2 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} &= -\vec{i} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} - \vec{j} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_1 = -\dot{\varphi} \vec{e}_1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

jer je:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{0}.$$

Vektor položaja čestice P moguće je napisati u obliku:

$$\vec{r} = r\vec{e}_1.$$

Derivacijom gornjeg izraza po vremenu dobije se vektor brzine čestice:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d}{dt}(\vec{r}) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_1) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_1 + r\frac{d}{dt}(\vec{e}_1) \\ &= \dot{r}\vec{e}_1 + r\dot{\phi}\vec{e}_2\end{aligned}\quad (2.51)$$

koji je sastavljen od dviju međusobno okomitih komponenata:

$$\vec{v}_r = v_r \vec{e}_1 = \dot{r}\vec{e}_1 \text{ - radijalna komponenta brzine}$$

$$\vec{v}_c = v_c \vec{e}_2 = r\dot{\phi}\vec{e}_2 \text{ - cirkularna komponenta brzine.}$$

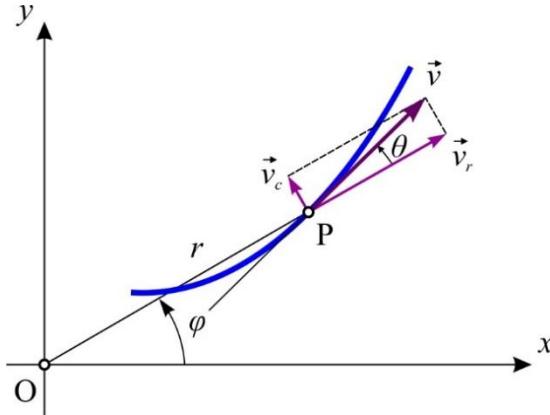
Radijalna komponenta vektora brzine karakterizira promjenu intenziteta radijusa vektora položaja čestice P, dok cirkularna karakterizira promjenu pravca tog vektora (sl. 2.27).

Intenzitet brzine moguće je odrediti iz jednakosti:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2} \quad (2.52)$$

pri čemu je kut što ga vektor brzine zatvara s koordinatom  $r$ :

$$\tan \theta = \frac{v_c}{v_r} = \frac{r\dot{\phi}}{\dot{r}}. \quad (2.53)$$



Slika 2.27. Radijalna i cirkularna komponenta brzine

Derivacijom izraza za brzinu čestice u polarnim koordinatama po vremenu dobije se vektor ubrzanja čestice P:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_1 + r\dot{\phi}\vec{e}_2) = \ddot{r}\vec{e}_1 + \dot{r}\frac{d}{dt}(\vec{e}_1) + r\ddot{\phi}\vec{e}_2 + r\dot{\phi}\frac{d}{dt}(\vec{e}_2) = \\ &= \ddot{r}\vec{e}_1 + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_2 + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_2 + r\ddot{\phi}\vec{e}_2 - r\dot{\phi}^2\vec{e}_1\end{aligned}$$

ili, konačno:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_1 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_2. \quad (2.54)$$

Radijalna i cirkularna komponenta ubrzanja su dakle:

$$\vec{a}_r = a_r \vec{e}_1 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_1, \quad (2.55)$$

$$\vec{a}_c = a_c \vec{e}_2 = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_2. \quad (2.56)$$

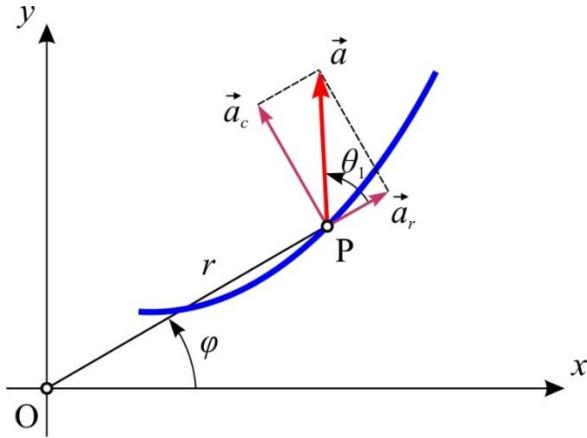
Intenzitet vektora ubrzanja određen je izrazom:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}, \quad (2.57)$$

dok se iz jednakosti

$$\tan \vartheta_1 = \frac{a_c}{a_r} = \frac{r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}}{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2} \quad (2.58)$$

određuje kut što ga vektor ubrzanja zatvara s koordinatom  $r$  (sl. 2.28).



Slika 2.28. Radijalna i cirkularna komponenta ubrzanja

### Primjer 2.15.

Gibanje čestice u ravnini zadano je u polarnim koordinatama:

$$r = 2 \cos \varphi; \quad \varphi = 4t,$$

gdje je  $r$  u metrima,  $\varphi$  u radijanima, a  $t$  u sekundama. Odrediti brzinu i ubrzanje čestice te jednadžbe putanje i hodografa brzina u pravokutnim koordinatama.

*Rješenje:*

Korištenjem izraza za određivanje brzine i ubrzanja čestice (2.51) i (2.54) dobije se:

$$v_r = \dot{r} = -8 \sin 4t, \quad v_c = r\dot{\varphi} = 8 \cos 4t$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -64 \cos 4t, \quad a_c = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = -64 \sin 4t$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_c^2} = 64 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

S pomoću poznatih veza između pravokutnih i polarnih koordinata dobije se:

$$x = r \cos \varphi = 2 \cos^2 \varphi, \quad y = r \sin \varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$$

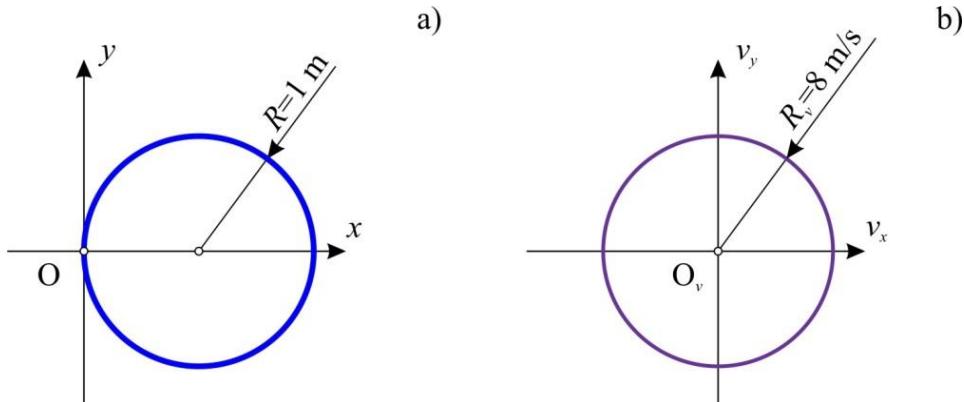
ili, nakon kvadriranja jednadžba i njihova zbrajanja:

$$x^2 + y^2 = 2 \cos^2 \varphi (2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) = 2x \text{ ili } x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

što, nakon srušenja na puni kvadrat, daje traženu jednadžbu putanje:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Putanja je dakle kružnica radijusa 1 m, središte koje je pomaknuto po osi  $x$  za 1 m (sl. 2.29.a).



Slika 2.29. Primjer 2.15: a) putanja; b) hodograf brzina.

Projekcija brzine i ubrzanja na osi  $x$  i  $y$  su (prema pravilu o derivaciji složene funkcije):

$$v_x = \dot{x} = 4 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi} = -8 \sin 2\varphi,$$

$$v_y = \dot{y} = -2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} + 2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} = 8 \cos 2\varphi;$$

$$a_x = \ddot{x} = -16 \cos 2\varphi \cdot \dot{\varphi} = -64 \cos 2\varphi,$$

$$a_y = \ddot{y} = -16 \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi} = -64 \sin 2\varphi.$$

Kvadriranjem konačnih izraza za projekcije brzina i zbrajanjem dobije se jednadžba hodografa brzina (sl. 2.29.b):

$$v_x^2 + v_y^2 = 8^2.$$



**Zadatak 2.21.** Zadane su parametarske jednadžbe gibanja čestice

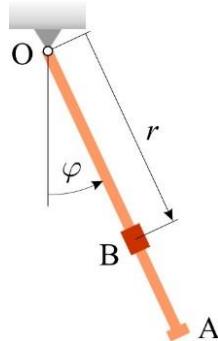
$$r = 0,5e^{2t}, \quad \varphi = 4t,$$

gdje je  $r$  dano u metrima, kut  $\varphi$  u radijanima, a vrijeme  $t$  u sekundama.

Potrebno je odrediti jednadžbu putanje čestice te radijalnu i cirkularnu komponentu brzine odnosno ubrzanja u funkciji vremena  $t$ .

*Odgovor:*  $r = 0,5e^{\frac{\varphi}{2}}$  - logaritamska spirala,  $v_r = e^{2t}$ ,  $v_c = 2e^{2t}$ ,  $a_r = -6e^{2t}$ ,  $a_c = 8e^{2t}$ .

**Zadatak 2.22.** Poluga OA njiše se oko zgloba O tako da se kut  $\varphi$  mijenja prema zakonu  $\varphi = (2/\pi)\sin \pi t$ , gdje je kut  $\varphi$  dan u radijanima, a vrijeme  $t$  u sekundama (slika Z.2.22).



Slika Z.2.22. Zadatak 2.22.

Duž poluge OA giba se klizač B kojemu je udaljenost od zgloba O dana izrazom:

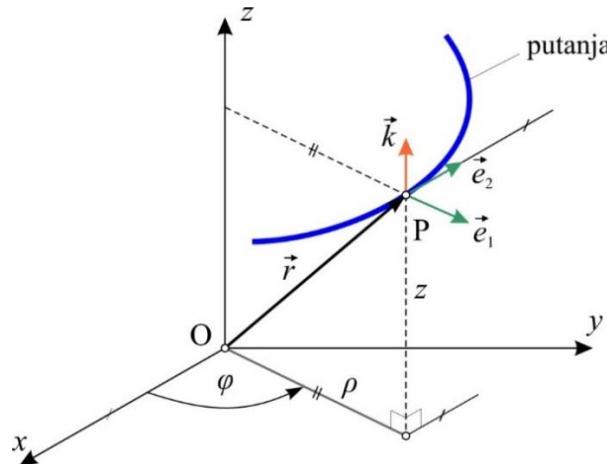
$$r = \frac{100}{t+4},$$

gdje je  $r$  dano u centimetrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti iznos brzine i ubrzanja klizača B u trenutku  $t_1 = 1$  s.

*Odgovor:*  $v_{r1} = -4 \text{ cm/s}$ ,  $v_{c1} = -40 \text{ cm/s}$ ,  $v_1 = 40,2 \text{ cm/s}$ ;  
 $a_{r1} = 78,4 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_{c1} = 16 \text{ cm/s}^2$ ,  $a_{c1} = 80,02 \text{ cm/s}^2$ .

### 2.3.2.3. Putanja, brzina i ubrzanje čestice u cilindričnim koordinatama

Cilindrične su koordinate kombinacija polarnih ( $\rho, \varphi$ ) i jedne pravokutne (Descartesove) koordinate (najčešće je riječ o z koordinati), kako je to prikazano na slici 2.30.



Slika 2.30. Gibanje čestice u cilindričnim koordinatama

Umjesto koordinate  $r$  ovdje se koristi polarna koordinata  $\rho$ , s obzirom na to da se ta koordinata ne poklapa s radijus vektorom položaja čestice P ( $\vec{r}$ ). Položaj čestice P u prostoru određen je dakle trima parametarskim jednadžbama gibanja:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t). \quad (2.59)$$

Gibanje čestice P može se zamisliti kao zbroj gibanja u ravnini ( $\rho, \varphi$ ) i paralelnog pomaka te ravnine duž osi z.

Na temelju izraza izvedenih za pravokutne i polarne koordinate mogu se, bez posebnog izvođenja, napisati izrazi za brzinu i ubrzanje u cilindričnim koordinatama, kako slijedi:

$$\vec{v} = v_\rho \vec{e}_1 + v_c \vec{e}_2 + v_z \vec{k} \quad (2.60)$$

$$\vec{a} = a_\rho \vec{e}_1 + a_c \vec{e}_2 + a_z \vec{k}, \quad (2.61)$$

gdje su komponente vektora brzine, odnosno vektora ubrzanja:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_c = \rho \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z} \quad (2.62)$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2, \quad a_c = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (2.63)$$

Odgovarajući intenziteti ovih vektora su:

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_c^2 + v_z^2} \quad (2.64)$$

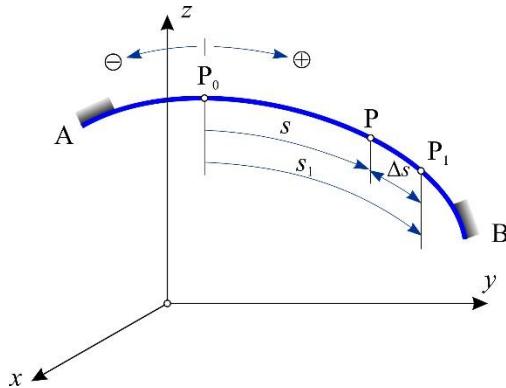
$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_c^2 + a_z^2}. \quad (2.65)$$

### 2.3.3. Prirodni način definiranja gibanja čestice

#### 2.3.3.1. Određivanje brzine čestice

Ako je putanja čestice unaprijed poznata, može se primijeniti i prirodni način definiranja gibanja čestice.

Neka se čestica P giba u sustavu Oxyz duž poznate putanje AB i neka je točkom  $P_0$  na toj putanji određen početni položaj čestice P. Usvoji li se uz to i pozitivan, odnosno negativan smjer gibanja čestice, bit će položaj čestice P na putanji AB jednoznačno određen krivocrtnom koordinatom  $s$  (slika 2.31).



Slika 2.31. Prirodni način definiranja gibanja čestice

Jednadžba:

$$s = f(t) \quad (2.66)$$

izražava pri tom zakon gibanja (zakon puta) čestice P po putanji.

Iz gore navedenog slijedi da je za prirodni način definiranja gibanja čestice neophodno poznavati:

- a) putanju čestice;
- b) početak (ishodište) prirodnog koordinatnog sustava na putanji kao i pozitivan odnosno negativan smjer gibanja odnosno prirasta krivocrtne koordinate  $s$ ;
- c) zakon puta u obliku  $s = f(t)$ .

Ovdje valja naglasiti da krivocrtna koordinata  $s$  predstavlja trenutnu udaljenost čestice P od ishodišta  $P_0$  i da se, u općem slučaju, ta udaljenost razlikuje od ukupno prevaljenog puta do tog trenutka vremena. Ako čestica P u vremenskom intervalu  $\Delta t$  prevali put  $\Delta s = s_1 - s$  na putanji tada će brojčana vrijednost srednje brzine biti:

$$v_{sr} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (2.67)$$

a prelaskom na granični slučaj dobit će se brojčana vrijednost brzine u proizvoljnom trenutku vremena:

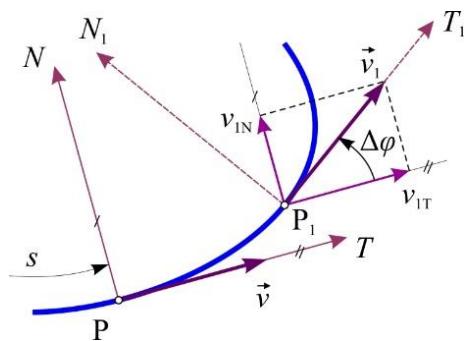
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (2.68)$$

tj. intenzitet brzine u proizvoljnom trenutku vremena jednak je prvoj derivaciji krivocrtne koordinate  $s$  po vremenu.

Vektor brzine, koji pravcem pada u pravac tangente na putanju, usmjeren je u pozitivnom smjeru (smjer porasta koordinate  $s$ ) ako je  $v > 0$ , a u negativnom smjeru ako je  $v < 0$ .

### 2.3.3.2. Tangencijalno i normalno ubrzanje

Vektor ubrzanja leži u takozvanoj oskulatorijskoj ravnini (ravnini određenoj tangentom T i glavnom normalom N na putanju čestice) pa je za određivanje vektora ubrzanja dovoljno odrediti projekcije toga vektora na dvije po volji odabранe osi koje leže u toj ravnini.



Slika 2.32. Promjena vektora brzine čestice

Neka su te osi baš tangenta T na putanju, kojoj se smjer poklapa s prirastom koordinate  $s$ , te glavna normala N, koja je okomita na T i usmjerena ka središtu zakrivljenosti putanje (sl. 2.32). Odabrane osi sijeku se u točki P pod pravim kutom i gibaju se zajedno s česticom u prostoru.

Prema definiciji, vektor ubrzanja je:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{a}_{sr}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.69)$$

Na osnovi teorema o projekcijama vektora, bit će:

$$a_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1T} - v_T}{\Delta t}, \quad a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1N} - v_N}{\Delta t} \quad (2.70)$$

Sa slike 2.32 mogu se odrediti projekcije vektora brzine  $\vec{v}$  i  $\vec{v}_1$  na tangentu i normalu na putanju, kako slijedi:

$$v_T = v, \quad v_N = 0, \quad v_{1T} = v_1 \cos \Delta\varphi, \quad v_{1N} = v_1 \sin \Delta\varphi$$

gdje su  $v$  i  $v_1$  intenziteti vektora brzina u trenutku  $t$  i  $t_1$ . Sada se ove jednakosti mogu uvrstiti u izraze (2.70). Uzme li se pri tom u obzir da se, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , čestica P<sub>1</sub> približava točki P, te da istovremeno

$$\Delta\varphi \rightarrow 0, \quad \Delta s \rightarrow 0, \quad v_1 \rightarrow v, \quad \cos \Delta\varphi \rightarrow 1 \quad \text{te} \quad \sin \Delta\varphi \rightarrow \Delta\varphi$$

bit će:

$$a_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1T} - v_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1N} - v_N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \sin \Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t}$$

Proširivanjem drugog od limesa na kraju izraza za  $a_N$  s  $\Delta\varphi / \Delta\varphi$  i s  $\Delta s / \Delta s$  dobije se

$$a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Kut  $\Delta\varphi$  između tangenata na putanju u položajima P i P<sub>1</sub> naziva se kontingencki kut.

Granična vrijednost  $\kappa$  (kapa) omjera  $\Delta\varphi / \Delta s$  kada  $\Delta s$  teži nuli:

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad (2.71)$$

naziva se zakrivljenost krivulje u promatranoj točki. Recipročna vrijednost zakrivljenosti jest radijus zakrivljenosti  $\rho$ , tj.

$$\rho = \frac{1}{\kappa}. \quad (2.72)$$

Zbog (2.71) i (2.72) izraz za normalno ubrzanje čestice postaje:

$$a_N = v \cdot 1 \cdot \kappa \cdot v = v^2 \cdot \kappa = \frac{v^2}{\rho}.$$

Konačno se može napisati:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_N = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.73)$$

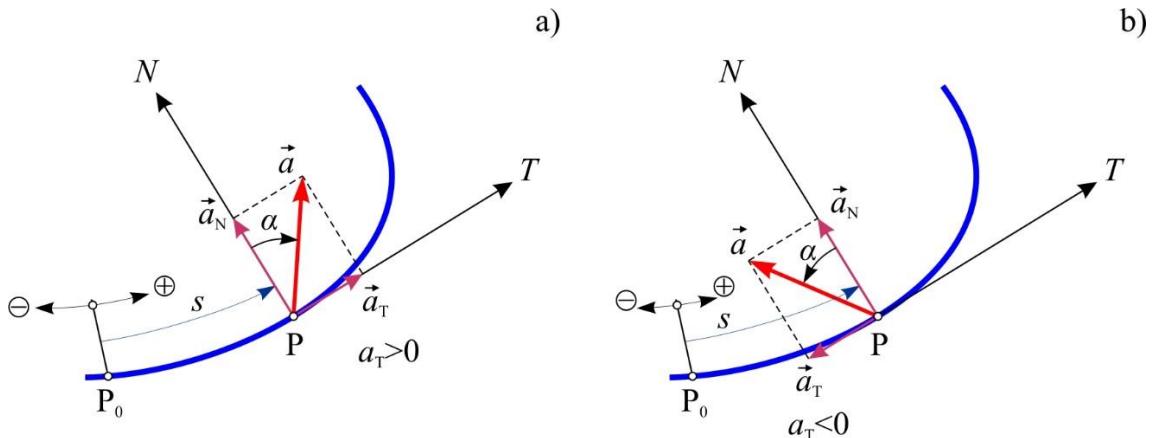
S obzirom na izraze (2.73) mogu se izvući zaključci koji slijede.

Tangencijalno ubrzanje čestice (projekcija vektora ubrzanja na tangentu na putanju) jednako je derivaciji intenziteta vektora brzine, odnosno drugoj derivaciji krivocrtne koordinate  $s$  po vremenu  $t$ .

Normalno ubrzanje čestice (projekcija vektora ubrzanja na glavnu normalu) jednako je omjeru između kvadrata brzine čestice i radijusa zakrivljenosti putanje u promatranom trenutku vremena. Kako je iz definicije vidljivo, normalna je komponenta ubrzanja uvijek pozitivna.

Ove dvije komponente vektora ubrzanja, tangencijalna i normalna, nazivaju se prirodnim komponentama ubrzanja pokretne čestice.

Komponenta  $\vec{a}_N$  vektora ubrzanja usmjerena je uvijek u konkavnu stranu putanje, dok smjer komponente  $\vec{a}_T$  ovisi o predznaku tangencijalnog ubrzanja (sl. 2.33.a i b).



Slika 2.33. Normalno i tangencijalno ubrzanje

Ukupno ubrzanje dobije se kao dijagonala pravokutnika konstruiranoga nad komponentama  $\vec{a}_N$  i  $\vec{a}_T$ . Intenzitet ubrzanja bit će:

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}. \quad (2.74)$$

Kut  $\alpha$  između vektora ubrzanja i glavne normale određen je izrazom:

$$\alpha = \arctan \frac{|a_T|}{a_N}. \quad (2.75)$$

Ako je gibanje čestice zadano u pravokutnim, polarnim ili cilindričnim koordinatama, prirodne komponente ubrzanja određuju se na sljedeći način:

- najprije se odredi tangencijalno ubrzanje prema izrazu  $a_T = dv/dt$  što daje:

- u pravokutnim koordinatama:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \right) = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \quad (2.76)$$

- u polarnim koordinatama:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2} \right) = \frac{\dot{r}\ddot{r} + r\dot{\phi}(\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})}{\sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2}} \quad (2.77)$$

- u cilindričnim koordinatama:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2} \right) = \frac{\dot{r}\ddot{r} + r\dot{\phi}(\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2}}. \quad (2.78)$$

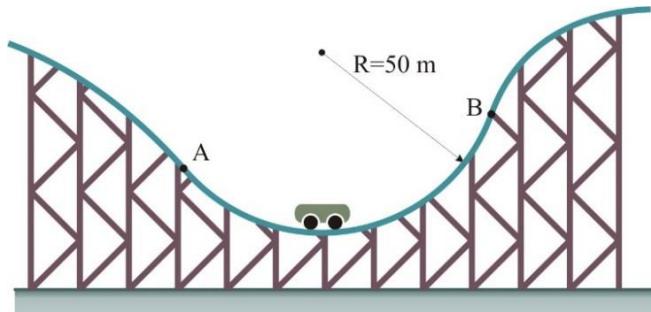
Nazivnici na desnim stranama izraza (2.76) do (2.78) za izračun tangencijalne komponente ubrzanja  $a_T$  predstavljaju u stvari brzinu  $v$  čestice u razmatranom trenutku.

Normalno ubrzanje čestice sada je:

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}. \quad (2.79)$$

### Primjer 2.16.

Odrediti najveću brzinu koju smije doseći vagon na dijelu AB tobogana u zabavnom parku (sl. 2.34), gdje radijus zakrivljenosti iznosi  $R = 50$  m, ako najveće normalno ubrzanje ne smije biti veće od trostrukе vrijednosti gravitacijskog ubrzanja.



Slika 2.34. Primjer 2.16.

*Rješenje:*

Normalno ubrzanje vagona dano je drugim od izraza (2.73):

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

pa se, budući da ovo ubrzanje ne smije biti veće od  $3g$ , može pisati

$$a_N = \frac{v^2}{R} \leq 3g,$$

odakle slijedi najveća dopuštena brzina vagona:

$$v^2 \leq 3Rg = 3 \cdot 50 \cdot 9,81 = 1471,5$$

$$v \leq \sqrt{1471,5} = 38,36 \text{ m/s} .$$

### Primjer 2.17.

Zadane su parametarske jednadžbe gibanja čestice

$$x = 2t + 3, \quad y = 4t^2 + 12t + 11,$$

gdje su  $x$  i  $y$  dani u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama.

Odrediti putanju čestice, a zatim, u trenutku  $t_1 = 0,5 \text{ s}$ , položaj čestice, njenu brzinu i ubrzanje te radijus zakrivljenosti putanje.

*Rješenje:*

Za određivanje putanje čestice potrebno je eliminirati vrijeme  $t$  iz parametarskih jednadžba gibanja. U tom se smislu druga od parametarskih jednadžba može napisati u obliku:

$$y = (4t^2 + 12t + 9) + 2 = (2t + 3)^2 + 2 .$$

Budući da je izraz u zagradi jednak varijabli  $x$ , konačno je

$$y = x^2 + 2 ,$$

pa se zaključuje da je putanja čestice parabola.

Projekcije brzine i ubrzanja čestice na osi koordinatnog sustava su, prema (2.41) i (2.44),

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 8t + 12; \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 8 .$$

U trenutku  $t_1 = 0,5 \text{ s}$  bit će

$$x_1 = 4 \text{ m}; \quad y_1 = 18 \text{ m}$$

$$v_{x1} = 2 \text{ m/s}; \quad v_{y1} = 16 \text{ m/s}; \quad v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{2^2 + 16^2} = 16,125 \text{ m/s}$$

$$a_{x1} = 0 \text{ m/s}^2; \quad a_{y1} = 8 \text{ m/s}^2; \quad a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8 \text{ m/s}^2 .$$

Radius zakrivljenosti putanje u trenutku  $t_1 = 0,5 \text{ s}$  slijedi iz drugog od izraza (2.73)

$$\rho_1 = v_1^2 / a_{N1}$$

s tim da je normalno ubrzanje dano izrazom (2.79)

$$a_{N1} = \sqrt{a_1^2 - a_{T1}^2} ,$$

pri čemu je tangencijalno ubrzanje prema (2.76)

$$a_{T1} = \frac{v_{x1}a_{x1} + v_{y1}a_{y1}}{v_1} = \frac{2 \cdot 0 + 16 \cdot 8}{16,125} = 7,938 \text{ m/s}^2 .$$

Slijedi:

$$a_{N1} = \sqrt{a_1^2 - a_{T1}^2} = \sqrt{8^2 - 7,938^2} = 0,992 \text{ m/s}^2,$$

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{N1}} = \frac{16,125^2}{0,992} = 262 \text{ m}.$$



**Zadatak 2.23.** Zadane su parametarske jednadžbe gibanja čestice

$$x = 3 - 4 \cos \frac{3\pi t}{2}, \quad y = 5 + 2 \sin \frac{3\pi t}{2},$$

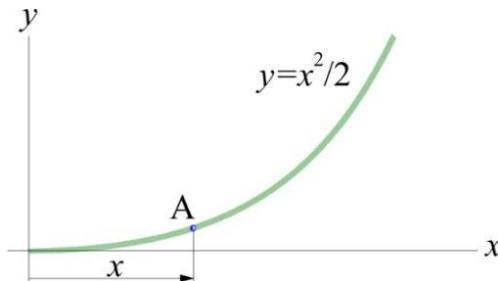
gdje su  $x$  i  $y$  dani u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Potrebno je odrediti jednadžbu putanje čestice, iznos njene brzine i ubrzanja te radijus zakrivljenosti putanje u trenutku  $t_1 = 1 \text{ s}$ .

*Odgovor:*  $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$  - elipsa,  $v_1 = 18,85 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 44,41 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho_1 = 8 \text{ m}$ .

**Zadatak 2.24.** Čestica A giba se duž žlijeba oblika parabole  $y = x^2/2$  tako da joj se koordinata  $x$  mijenja prema zakonu

$$x = \frac{1}{2} t^{\frac{3}{2}},$$

gdje je  $x$  dano u metrima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti položaj čestice, iznos njene brzine i ubrzanja te radijus zakrivljenosti putanje u trenutku  $t_1 = 4 \text{ s}$ .



Slika Z.2.24. Zadatak 2.24.

*Odgovor:*  $x_1 = 4 \text{ m}$ ,  $y_1 = 8 \text{ m}$ ,  $v_1 = 6,185 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 3,006 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho = 70,09 \text{ m}$ .

**Zadatak 2.25.** Zadane su parametarske jednadžbe gibanja čestice

$$r = \frac{1}{2} t + 1, \quad \varphi = \frac{1}{4} t + \frac{1}{2},$$

gdje je  $r$  dano u metrima, kut  $\varphi$  u radijanima, a vrijeme  $t$  u sekundama.

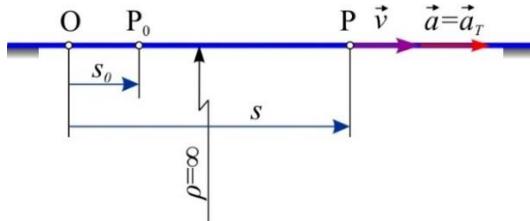
Potrebno je odrediti jednadžbu putanje čestice, iznos njene brzine i ubrzanja te radijus zakrivljenosti putanje u trenutku  $t_1 = 1 \text{ s}$ .

*Odgovor:*  $r = 2\varphi$  - Arhimedova spirala,  $v_1 = 0,625 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 0,267 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho = 2,441 \text{ m}$ .

### 2.3.3.3. Neki posebni slučajevi gibanja čestice

- **Pravocrtno gibanje čestice**

Koristeći se rezultatima dobivenim u prethodnom poglavlju, promotrit će se gibanje čestice za slučaj kada je putanja pravac, što je već obrađeno u poglavlju 2.2 ovih skripta. S obzirom na poznatu putanju (sl. 2.35) primijenit će se prirodni način proučavanja gibanja čestice.



Slika 2.35. *Pravocrtno gibanje čestice*

U ovom slučaju gibanja bit će radijus zakrivljenosti putanje u bilo kojoj točki  $\rho = \infty$ , odakle slijedi da je normalna komponenta ubrzanja:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0$$

pa je ukupno ubrzanje čestice jednako tangencijalnom ubrzanju, tj.

$$a_T = \frac{dv}{dt}.$$

Budući da se u razmatranom slučaju mijenja samo intenzitet brzine, a ne i njezin pravac, zaključuje se da tangencijalna komponenta ubrzanja karakterizira promjenu intenziteta vektora brzine. Ako je tangencijalno ubrzanje jednako nuli, to znači da je intenzitet brzine konstantan, odnosno da se čestica giba jednoliko pravocrtno. Valja napomenuti da je jednoliko pravocrtno gibanje jedini slučaj gibanja kod kojega je ukupno ubrzanje za sve vrijeme gibanja jednako nuli.

- **Jednoliko i jednoliko promjenljivo krivocrtno gibanje**

Ako se čestica P giba po krivocrtnoj putanji tako da je:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{te} \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \neq 0,$$

onda je

$$v = \text{const.} \quad \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{const.}}$$

pri čemu zakon gibanja čestice po putanji ima oblik:

$$s = s_0 + vt.$$

Čestica P vrši u tom slučaju jednoliko krivocrtno gibanje brzinom konstantnog intenziteta, ali s totalnim ubrzanjem različitim od nule, jer je:

$$a = a_N = \frac{v^2}{\rho}.$$

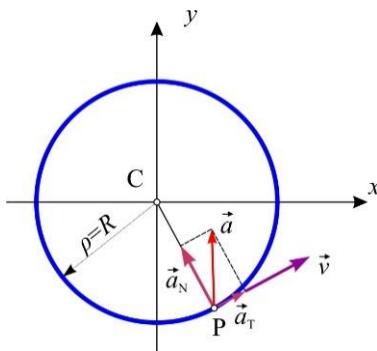
Prema tome, pri jednolikom krivocrtnom gibanju čestice ukupno ubrzanje čestice jednako je normalnom ubrzaju i karakterizira promjenu pravca vektora brzine pokretne čestice. To je ujedno i osnovna razlika između jednolikog pravocrtnog i jednolikog krivocrtnog gibanja čestice.

Ako se čestica giba po krivocrtnoj putanji tako da je i  $a_T = \text{const.} \neq 0$ , kaže se da vrši jednoliko ubrzano ili jednolikou usporeno krivocrtno gibanje, pri čemu je:

$$v = v_0 + a_T t$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_T \cdot t^2.$$

Poseban slučaj krivocrtnog gibanja čestice jest kružno gibanje koje nastaje u slučaju da je  $\rho = R = \text{const.}$ , što znači da se čestica giba po kružnoj putanji.

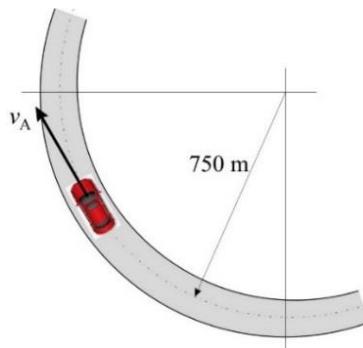


Slika 2.36. Kružno gibanje čestice: brzina i ubrzanje.

Gibanje čestice po kružnoj putanji može biti jednoliko, jednolikou ubrzano ili usporeno te u općem slučaju proizvoljno promjenljivo, ovisno o iznosu i karakteru tangencijalnog ubrzanja. Vektor ubrzanja čestice P određen je, kao kod svakog krivocrtnog gibanja, geometrijskim tj. vektorskim zbrojem tangencijalnog i normalnog ubrzanja, s tim što je u ovom slučaju normalna komponenta ubrzanja usmjerena uvijek ka centru kružne putanje (sl. 2.36).

### Primjer 2.18.

Vozač automobila, koji ulazi u zavoj polumjera zakrivljenosti  $R = 750 \text{ m}$  brzinom od  $v_A = 108 \text{ km/h}$  (sl. 2.37), započinje kočiti tako da se 5 sekunda nakon početka kočenja brzina automobila smanji na  $v_{A1} = 72 \text{ km/h}$ .



Slika 2.37. Primjer 2.18: Putanja i brzina automobila.

Pretpostavljajući da se automobil usporava jednoliko (konstantnim tangencijalnim ubrzanjem), odrediti ukupno ubrzanje automobila u trenutku početka kočenja.

*Rješenje:*

U prvom će se koraku brzine automobila iz km/h izraziti u m/s:

$$v_A = \frac{108}{3,6} = 30 \text{ m/s}, \quad v_{A1} = \frac{72}{3,6} = 20 \text{ m/s}, \quad \text{jer je } 1 \text{ km/h} = 1 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}.$$

Ako je usporenje automobila jednoliko, tada je veza između brzine u trenutku  $t_1 = 5 \text{ s}$  i one u trenutku početka kočenja dana izrazom:

$$v_{A1} = v_A + a_T t_1,$$

odakle je

$$a_T = \frac{v_{A1} - v_A}{t_1} = \frac{20 - 30}{5} = -2 \text{ m/s}^2.$$

Kako je normalno ubrzanje u trenutku započinjanja kočenja

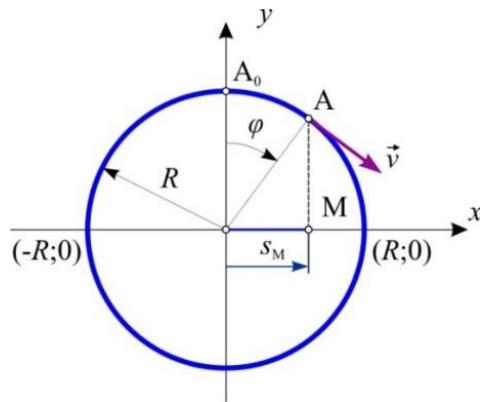
$$a_N = \frac{v_A^2}{R} = \frac{30^2}{750} = 1,2 \text{ m/s}^2,$$

to je ukupno ubrzanje automobila u tom trenutku

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \sqrt{1,2^2 + (-2)^2} = 2,33 \text{ m/s}^2.$$

### Primjer 2.19.

Čestica A giba se jednoliko ( $v = \text{const.}$ ) po kružnici radijusa  $R$ , pri čemu je početni položaj čestice  $A_0$  dan koordinatama  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = R$  (sl. 2.38). Odrediti zakon gibanja čestice M, koja predstavlja projekciju čestice A na os x, ako se koordinata  $s$  čestice M mjeri od ishodišta O(0;0). Skicirati i kotirati osnovne kinematičke dijagrame gibanja čestice M te odrediti ovisnost njezina ubrzanja o putu  $s$ .



Slika 2.38. Primjer 2.19.

*Rješenje:*

Prirodna koordinata  $s$  čestice M mijenja se u funkciji kuta  $\varphi$  (sl. 2.38):

$$s_M = R \sin \varphi$$

pri čemu je:

$$\varphi = \frac{\widehat{AA}_0}{R}.$$

Budući da duljina luka  $\widehat{AA}_0$  odgovara koordinati  $s_A$  čestice A, to je:

$$\widehat{AA}_0 = s_A = \int v dt = vt.$$

Uvede li se oznaka

$$\omega = v/R ,$$

bit će:

$$\varphi = \omega t \quad \text{te} \quad s_M = R \sin \omega t .$$

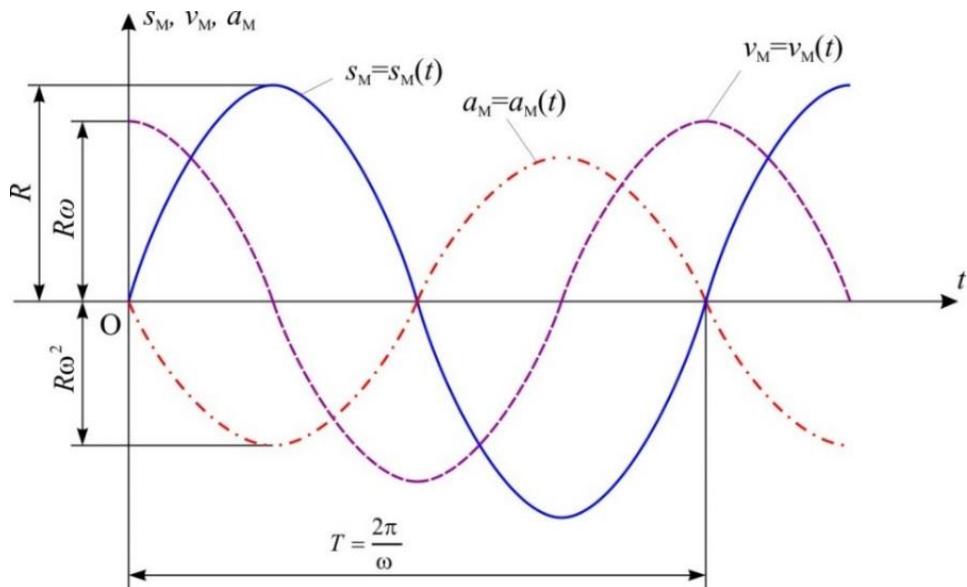
Brzina odnosno ubrzanje čestice M jest:

$$v_M = \dot{s}_M = R\omega \cos \omega t ; \quad a_M = a_{TM} = \ddot{s}_M = -R\omega^2 \sin \omega t .$$

Odgovarajući kinematički dijagrami prikazani su na slici 2.39.

Iz dobivenih rezultata slijedi veza između ubrzanja čestice M i puta  $s_M$ :

$$a_M = -\omega^2 s_M .$$



Slika 2.39. Primjer 2.19: osnovni kinematički dijagrami.

Ubrzanje je, dakle, proporcionalno i uvijek usmjereno suprotno prirastu puta, što predstavlja definiciju jednostavnog pravocrtnog harmonijskog gibanja. Ovo gibanje često se susreće u tehničkoj praksi (neka oscilatorna gibanja, gibanja pojedinih dijelova nekih alatnih strojeva i slično).

Veličina R naziva se amplituda puta.

Čestica se od početnog položaja giba do najudaljenijeg mesta  $s_M = R$ , vraća se kroz početni položaj i ponovno udaljava do mesta  $s_M = -R$  te ponovno dolazi u početnu točku.

Vrijeme potrebno za taj ciklus gibanja iznosi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s} \quad (2.80)$$

i naziva se period harmonijskog gibanja.

Recipročna vrijednost perioda jest frekvencija  $f$  harmonijskog gibanja, a mjeri se u hercima:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\text{s}} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ Hz}. \quad (2.81)$$



**Zadatak 2.26.** Biciklist vozi po kružnoj biciklističkoj stazi radiusa  $R$ . Polazeći iz stanja mirovanja, biciklist ubrzava konstantnim tangencijalnim ubrzanjem tako da nakon 20 sekunda od početka gibanja dostigne brzinu od 36 km/h.

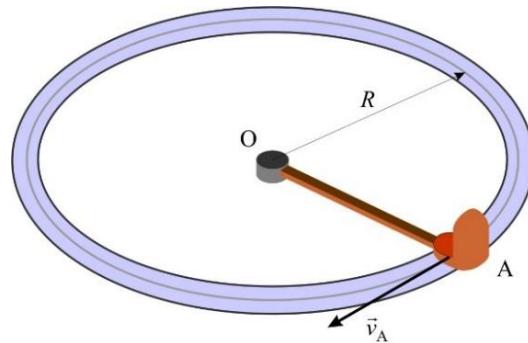
Odrediti koliki je radius biciklističke staze ako je u trenutku postizanja brzine od 36 km/h iznos njegovog ukupnog ubrzanja  $a_1 = 1,5 \text{ m/s}^2$ .

*Odgovor:*  $R = 70,71 \text{ m}$ .

**Zadatak 2.27.** Na kraju poluge OA vrtuljka u zabavnom parku nalazi se sjedalica za posjetitelja kojoj se u periodu ubrzavanja brzina mijenja prema zakonu

$$v = 1,5t,$$

gdje je brzina  $v$  dana u metrima po sekundi, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti brzinu i ubrzanje sjedalice u trenutku  $t_1 = 6 \text{ s}$  ako je duljina poluge  $\overline{OA} = R = 4 \text{ m}$ . Dimenzije sjedalice zanemariti.



Slika Z.2.27. Zadatak 2.27.

*Odgovor:*  $v_1 = 9 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 20,31 \text{ m/s}^2$ .

### 2.3.4. Kosi hitac

Neka čestica počinje gibanje početnom brzinom  $\vec{v}_0$  pod kutom  $\alpha_0$  prema horizontali (sl. 2.40). Analizirat će se gibanje te čestice uz uvjet da je njeni ubrzani u smjeru negativne osi  $y$  i jednako gravitacijskom. Neka se čestica u početnom trenutku nalazila u ishodištu koordinatnog sustava.

Jednadžbe gibanja čestice u promatranom koordinatnom sustavu su:

$$\ddot{x} = a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad \ddot{y} = a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g,$$

gdje je  $g$  gravitacijsko ubrzanje ( $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Integriranjem se dobije:

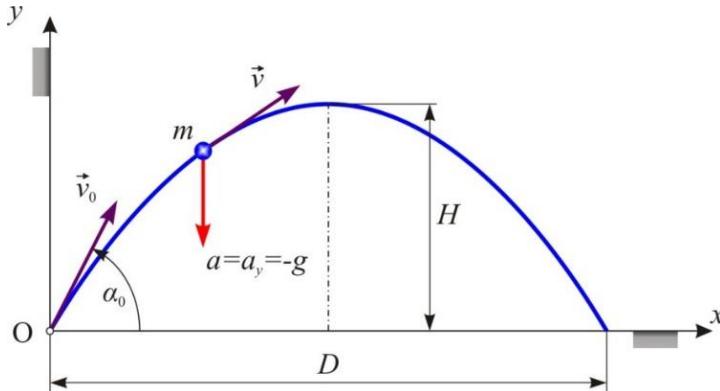
$$\dot{x} = C_1; \quad \dot{y} = -gt + C_2,$$

gdje su, s obzirom na početne uvjete gibanja,

$$\text{za } t = 0 \quad \dot{x}(0) = v_x(0) = v_0 \cos \alpha_0, \quad \dot{y}(0) = v_y(0) = v_0 \sin \alpha_0$$

konstante integracije:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha_0; \quad C_2 = v_0 \sin \alpha_0.$$



Slika 2.40. Kosi hitac

Slijede izrazi za projekcije brzine čestice u odnosu na osi  $x$  i  $y$ :

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos \alpha_0 \quad \text{i} \quad \dot{y} = v_y = -gt + v_0 \sin \alpha_0. \quad (2.82)$$

Integriranjem izraza za brzine čestice dobiju se parametarske jednadžbe gibanja čestice:

$$x = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t + C_3; \quad y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t + C_4,$$

gdje su, zbog zadanih početnih uvjeta,

$$\text{za } t = 0 \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

konstante integracije  $C_3$  i  $C_4$  jednake nuli. (Ako bi čestica započela gibanje iz neke točke  $P_0$  s koordinatama  $x_0$  i  $y_0$ , tada bi konstante integracije bile  $C_3 = x_0$  i  $C_4 = y_0$ .)

Konačno, parametarske jednadžbe gibanja su:

$$x = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t; \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha_0 \cdot t. \quad (2.83)$$

Eliminiranjem vremena  $t$  iz prve jednadžbe

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \quad (2.84)$$

i uvrštavanjem u drugu dobiva se jednadžba putanje čestice pri kosom hitcu:

$$y = x \cdot \tan \alpha_0 - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha_0}. \quad (2.85)$$

Čestica izbačena početnom brzinom  $v_0$  pod kutom  $\alpha_0$  (*kut elevacije*) prema horizontali (*kosihitac*) opisuje dakle paraboličnu putanju.

Karakteristične vrijednosti za tu putanju su domet  $D$  (nulta točka parabole za  $x \neq 0$ ) i visina penjanja  $H$  (koordinata  $y$  tjemena parabole).

Iz uvjeta  $y = 0$  i  $x \neq 0$  dobije se domet  $D$ :

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha_0, \quad (2.86)$$

dok je visina  $H$ , zbog simetričnosti parabole, koordinata  $y$  na mjestu

$$x = D/2$$

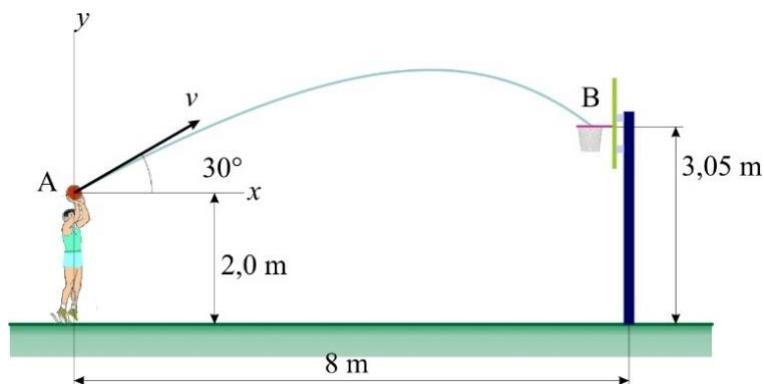
što nakon uvrštavanja u (2.85) i sređivanja daje:

$$H = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha_0. \quad (2.87)$$

Najveći domet uz istu početnu brzinu dobije se za kut elevacije  $\alpha_0 = 45^\circ$  jer je tada  $\sin 2\alpha_0 = 1$ .

### Primjer 2.20.

Košarkaš gada tricu s udaljenosti 8 m od koša (sl. 2.41). Odrediti kojom brzinom košarkaš mora izbaciti loptu pod kutom od  $30^\circ$  u odnosu na horizontalu pa da pogodi koš. Koju će najveću visinu u odnosu na pod doseći lopta u toj putanji? Otpor zraka zanemariti.



Slika 2.41. Primjer 2.20.

*Rješenje:*

Postavi li se koordinatni sustav u točku izbačaja lopte, tada će se lopta gibati po zakonu parabole (2.85):

$$y = x \cdot \tan \alpha_0 - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha_0}$$

pa je potrebno odrediti uz koju će početnu brzinu  $v_0$  ta parabola proći točkom B (10; 1,05).

Iz gornje je jednadžbe

$$\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} = x \tan \alpha_0 - y,$$

a recipročna vrijednost dobivene jednadžbe je

$$\frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}{gx^2} = \frac{1}{x \tan \alpha_0 - y},$$

odakle je

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2 \cos^2 \alpha_0 (x \tan \alpha_0 - y)}.$$

Odnosno

$$v_0 = \pm \sqrt{\frac{gx^2}{2 \cos^2 \alpha_0 (x \tan \alpha_0 - y)}},$$

gdje smisla ima samo pozitivan korijen, pa nakon uvrštavanja zadane početne vrijednosti za kut  $\alpha_0$ , te koordinata točke B, slijedi tražena brzina izbačaja lopte:

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 8^2}{2 \cdot \cos^2 30^\circ \cdot (8 \cdot \tan 30^\circ - 1,05)}} = 10,83 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

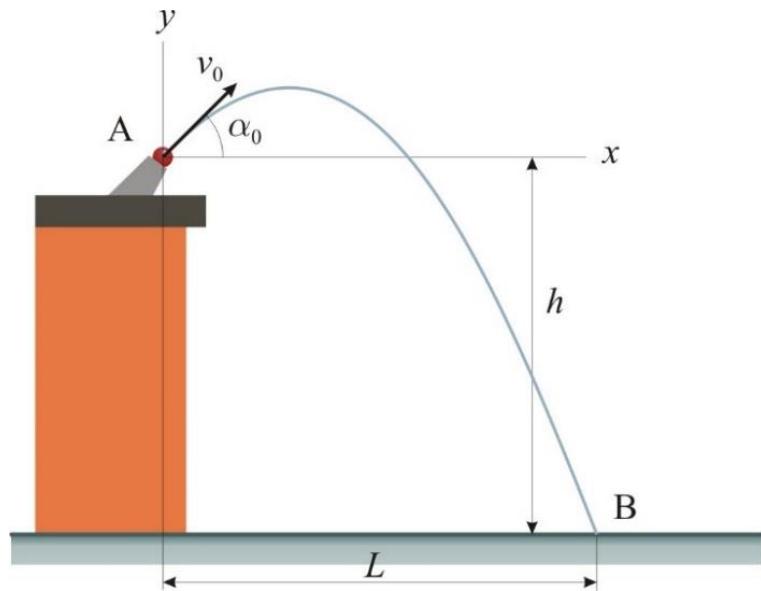
Najveću će visinu lopta doseći u tjemenu parabole. Ta visina jednaka je zbroju koordinate y u tjemenu parabole, što je dano izrazom (2.87), i početne visine lopte u odnosu na pod:

$$H = y_{\max} + 2 = \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \alpha_0 + 2 = \frac{10,83^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \sin^2 30^\circ + 2 = 3,49 \text{ m}.$$

### Primjer 2.21.

Projektil je ispaljen s vrha zgrade početnom brzinom  $v_0 = 100 \text{ m/s}$  pod kutom od  $\alpha_0 = 45^\circ$  (sl. 2.42). Odrediti, zanemarujući otpor zraka, na kojoj će udaljenosti od zgrade projektil udariti o tlo u točki B ako je visina zgrade  $h = 60 \text{ m}$ .

Kolika će biti brzina projektila u tom trenutku?



Slika 2.42. Primjer 2.21.

*Rješenje:*

S obzirom na postavljeni koordinatni sustav, putanja po kojoj će se gibati projektil dana je izrazom (2.85):

$$y = x \cdot \tan \alpha_0 - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha_0}.$$

Ako se u tu jednadžbu uvrste zadane vrijednosti, imajući u vidu da je u točki B

$$y_B = -h = -60 \text{ m}, \text{ bit će}$$

$$-60 = x \tan 45^\circ - \frac{9,81 \cdot x^2}{2 \cdot 100^2 \cdot \cos^2 45^\circ}, \text{ odnosno } -60 = x - 0,000981x^2$$

pa se dobije kvadratna jednadžba

$$0,000981x^2 - x - 60 = 0,$$

rješenja koje su

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 0,000981 \cdot 60}}{2 \cdot 0,000981} = \frac{1 \pm \sqrt{1,23544}}{0,001962} = \frac{1 \pm 1,1115}{0,001962},$$

a traži se pozitivno rješenje, pa je

$$x_B = L = \frac{2,1115}{0,001962} = 1076,2 \text{ m}.$$

Projekcije vektora brzine u točki B dane su izrazima (2.82)

$$v_{Bx} = v_0 \cos \alpha_0 \quad \text{i} \quad v_{By} = -gt + v_0 \sin \alpha_0,$$

a vrijeme potrebno da projektil dođe u točku B izrazom (2.84)

$$t = \frac{x_B}{v_0 \cos \alpha_0} = \frac{1076,2}{100 \cdot \cos 45^\circ} = 15,22 \text{ s}.$$

Uvrštavanjem ovog vremena u izraze za projekcije brzina dobije se

$$v_{Bx} = v_0 \cos \alpha_0 = 100 \cdot 0,7071 = 70,71 \text{ m/s}$$

$$v_{By} = -9,81 \cdot 15,22 + 100 \cdot 0,7071 = -78,60 \text{ m/s},$$

pa je iznos brzine projektila u točki B:

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = \sqrt{70,71^2 + (-78,60)^2} = 105,72 \text{ m/s}.$$



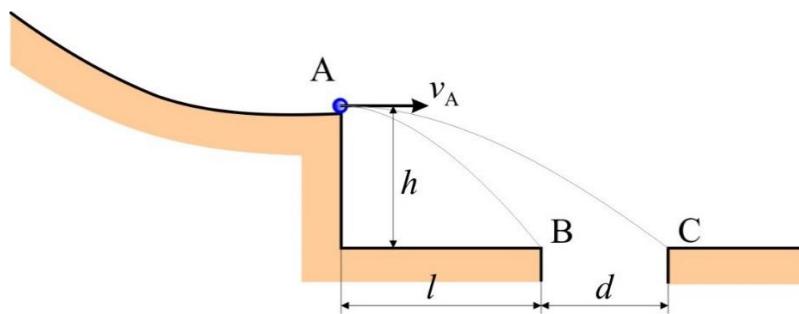
**Zadatak 2.28.** Dvije su lopte istovremeno bačene vertikalno uvis. Lopta A bačena je početnom brzinom  $v_{A0} = 15 \text{ m/s}$  s platforme koja se nalazi 5 metara iznad poda, dok je lopta B bačena s poda početnom brzinom od  $v_{B0} = 20 \text{ m/s}$ .

Odrediti: a) nakon koliko će se vremena obje lopte naći na istoj visini iznad poda, b) kolika će biti brzina točke B u trenutku kada lopta A dosegne maksimalnu visinu.

*Odgovor:* a)  $t_1 = 1 \text{ s}$ , b)  $v_{B2} = v_{B0} - v_{A0} = 5 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 2.29.** Čelične kuglice ispuštaju se iz spremnika niz vodilicu koju napuštaju u točki A koja se nalazi na visini  $h = 1 \text{ m}$  iznad poda.

Kuglice moraju pasti u otvor BC u podu širine  $d = 1 \text{ m}$ . Rub B otvora nalazi se na udaljenosti  $l = 2 \text{ m}$  od zida (sl. Z.2.29).



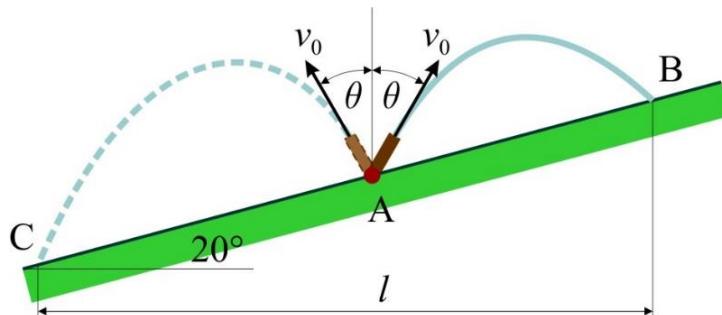
Slika Z.2.29. Zadatak 2.29.

Odrediti u kojim se granicama može mijenjati brzina kuglice u točki A pa da kuglica upadne u predviđeni otvor. Brzina kuglice u točki A je horizontalna.

*Odgovor:*  $4,429 \text{ m/s} \leq v_A \leq 6,644 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 2.30.** Naprava za zalijevanje travnjaka izbacuje vodu brzinom  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ . Sapnica naprave može se zakretati za kut  $\theta = \pm 30^\circ$  u odnosu na vertikalu (sl. Z.2.30).

Odrediti horizontalnu projekciju udaljenosti ( $l = ?$ ) između točaka C i B do kojih će dosezati voda pri zalijevanju travnjaka.

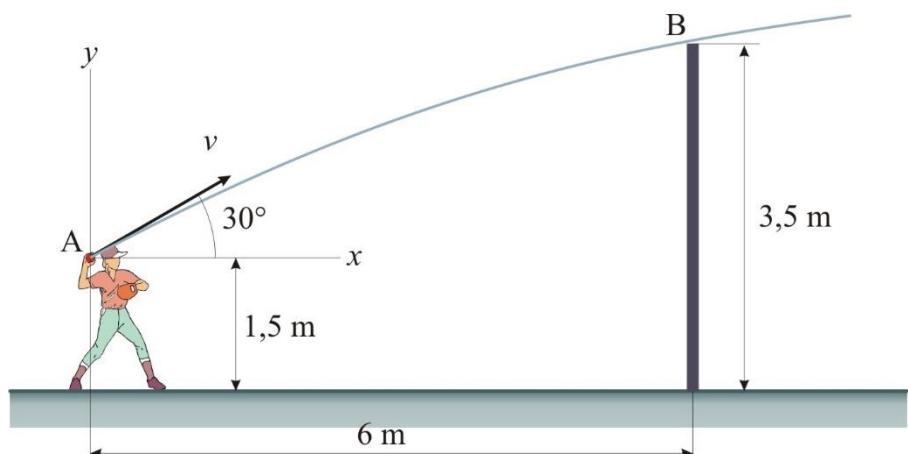


Slika Z.2.30. Zadatak 2.30.

Odgovor:  $l = 39,726 \text{ m}$ .

**Zadatak 2.31.** Dječak se nalazi na udaljenosti 6 metara od zida visokog 3,5 metara (sl. Z.2.31) i pokušava preko zida prebaciti lopticu.

Ako dječak lopticu izbacuje s visine od 1,5 metara brzinom  $v$  pod kutom od  $30^\circ$  u odnosu na horizontalu, treba odrediti: a) kolika je minimalna brzina  $v$  kojom dječak treba izbaciti lopticu pa da prebaci zid, b) koliki je radijus putanje kamena u trenutku prelaska preko zida.



Slika Z.2.31. Zadatak 2.31.

Odgovor: a)  $v_0 = 11,03 \text{ m/s}$ , b)  $\rho_l = 12,44 \text{ m}$ .

# 3. DINAMIKA ČESTICE

## 3.1. OSNOVNI ZADATCI DINAMIKE ČESTICE

U dinamici čestice rješavaju se dva osnovna zadatka:

- 1) *poznat je zakon gibanja čestice, a treba odrediti silu koja je prouzrokovala to gibanje* (prvi, direktni zadatak);
- 2) *pozнате су sile koje djeluju na česticu, a treba odrediti zakon gibanja čestice* (drugi, inverzni zadatak).

## 3.2. DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE GIBANJA ČESTICE

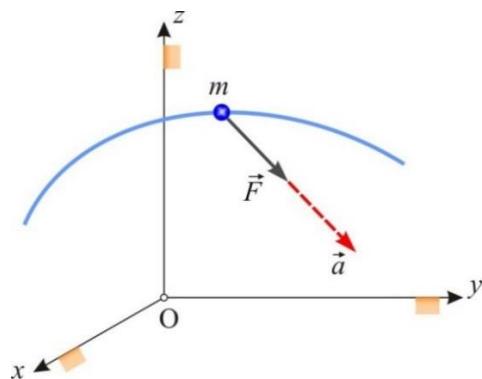
### 3.2.1. Diferencijalne jednadžbe gibanja u analitičkom obliku

Vektorska jednadžba (1.2) koja izražava drugi Newtonov zakon u vektorskem obliku

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

i u kojoj sila  $\vec{F}$  predstavlja resultantu svih sila koje djeluju na česticu,  $m$  je masa čestice, a  $\vec{a}$  vektor ubrzanja čestice, može se prikazati i s pomoću skalarnih jednadžba, ovisno o konkretnom problemu i odabranom koordinatnom sustavu.

Na slici 3.1 prikazana je čestica mase  $m$  na putanji u proizvoljnem trenutku vremena. Vektor rezultante poklapa se po pravcu i smjeru s vektorom ubrzanja, ali je za  $m$  puta veći.



Slika 3.1. Čestica mase  $m$  na putanji

#### 3.2.1.1. Pravokutne koordinate

U pravokutnom (Descartesovu) koordinatnom sustavu vektori sile i ubrzanja, izraženi preko svojih koordinata, jesu:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

pa slijede diferencijalne jednadžbe gibanja čestice:

$$F_x = m\ddot{x}; \quad F_y = m\ddot{y}; \quad F_z = m\ddot{z}, \quad (3.1)$$

odnosno

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (3.2)$$

gdje je  $\vec{F} = \vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$  - rezultanta svih vanjskih sila koje djeluju na česticu.

Ako se čestica giba u ravnini  $Oxy$ , bit će

$$F_x = m\ddot{x}; \quad F_y = m\ddot{y} \quad (3.3)$$

jer je  $F_z = 0$ .

U slučaju pravocrtnog gibanja duž osi  $x$  diferencijalna jednadžba glasi:

$$F_x = m\ddot{x} \quad (3.4)$$

jer je u tom slučaju  $F_y = F_z = 0$ .

### 3.2.1.2. Polарне координате

Ako se ravninsko gibanje čestice prikazuje u polarnim koordinatama  $r$  i  $\varphi$ , sila  $\vec{F}$  izražena preko radijalne i cirkularne komponente glasi:

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_1 + F_c \vec{e}_2$$

tako da uz

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_1 + a_c \vec{e}_2 = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_1 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \vec{e}_2$$

diferencijalne jednadžbe gibanja u polarnim koordinatama glase:

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2); \quad F_c = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}). \quad (3.5)$$

### 3.2.1.3. Prirodne koordinate

Budući da se vektor rezultante poklapa s vektorom ubrzanja, vektor  $\vec{F}$  će se u prirodnom koordinatnom sustavu prikazati s pomoću dviju komponenata: *normalne*  $\vec{F}_N$  i *tangencijalne*  $\vec{F}_T$  pa će odgovarajuće jednadžbe gibanja biti:

$$F_N = m \frac{v^2}{\rho}; \quad F_T = m\ddot{s}. \quad (3.6)$$

Ako se rješava 1. zadatak dinamike, tj. iz poznatog zakona gibanja određuje sila, do rezultata se dolazi jednostavnim deriviranjem odgovarajućih jednadžba gibanja.

Postupak pronalaženja zakona gibanja kada je poznata rezultanta svih sila koje na česticu djeluju znatno je teži. Naime, diferencijalne jednadžbe gibanja moći će se integrirati samo u nekim posebnim slučajevima, jer je u općem slučaju sila funkcija vremena  $t$ , brzine  $v$  i položaja ( $x, y$  i  $z$  u pravokutnim;  $r$  i  $\varphi$  u polarnim te  $s$  u prirodnim koordinatama).

### Primjer 3.1.

Zadane su parametarske jednadžbe gibanja čestice mase  $m = 4 \text{ kg}$

$$x = 4 \cos t \text{ m} ; \quad y = 3 \sin t \text{ m} .$$

Odrediti silu  $F$  koja uzrokuje to gibanje kao funkciju vremena.

*Rješenje:*

Prema izrazima (3.1) projekcije sile u odnosu na koordinatne osi su:

$$F_x = m\ddot{x} ; \quad F_y = m\ddot{y} .$$

Budući da je

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -4 \cos t ; \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -3 \sin t ,$$

bit će:

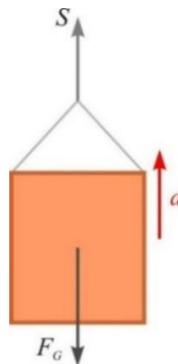
$$F_x = -4m \cdot \cos t ; \quad F_y = -3m \cdot \sin t$$

ili

$$\vec{F} = -16 \cos t \cdot \vec{i} - 12 \sin t \cdot \vec{j} \text{ N} .$$

### Primjer 3.2.

Dizalo težine  $F_G$  podiže se ubrzanjem  $a$  (sl. 3.2). Odrediti silu u užetu.



Slika 3.2. Primjer 3.2.

*Rješenje:*

Dizalo se u promatranom slučaju može smatrati česticom mase  $m = F_G / g$  pa, ako se umjesto veze užetom doda odgovarajuća sila  $S$  veze, bit će prema drugoj od jednadžba (3.3):

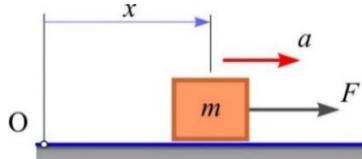
$$ma = S - F_G$$

odakle je:

$$S = ma + F_G = F_G \left( \frac{a}{g} + 1 \right) .$$

### Primjer 3.3.

Čestica mase  $m = 10 \text{ kg}$  giba se iz stanja mirovanja po glatkoj horizontalnoj podlozi pod djelovanjem sile  $F$  koja se mijenja proporcionalno vremenu:  $F = 6t \text{ N}$ , kako je to prikazano na slici 3.3. Odrediti zakon gibanja čestice.



Slika 3.3. Primjer 3.3.

*Rješenje:*

Zbog poznate putanje čestice (pravac) koristit će se prirodne koordinate za koje je prema (3.3):

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F .$$

Množenjem ove jednakosti s  $dt$  i integriranjem dobije se:

$$mv = \int F dt = \int 6t dt = 3t^2 + C_1 .$$

Budući da je u trenutku  $t = 0$  brzina čestice jednaka nuli, slijedi da je i konstanta integracije  $C_1 = 0$  pa se, dijeljenjem gornje jednadžbe s  $m$  i uvrštavanjem zadane vrijednosti, dobije zakon promjene brzine:

$$v = 0,3t^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Zbog  $v = dx/dt$  nakon separacije varijabla i integriranja slijedi:

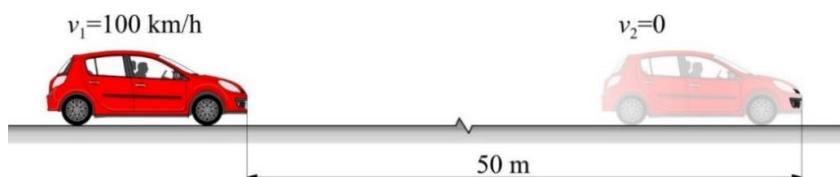
$$x = \int v dt = \int 0,3t^2 dt = 0,1t^3 + C_2 .$$

Ako se čestica u početnom trenutku nalazi u ishodištu, tj. ako je u trenutku  $t = 0$  i koordinata  $x = 0$ , bit će i konstanta integracije  $C_2 = 0$  pa je zakon gibanja čestice:

$$x = 0,1t^3 \text{ m} .$$

### Primjer 3.4.

Za vrijeme provjere kočionog sustava automobil mase  $m = 1500 \text{ kg}$  s početne brzine od  $v_1 = 100 \text{ km/h}$  zaustavi se nakon 50 metara. Pretpostavljajući da se automobil usporavao jednolikom ( $a = \text{const.}$ ), odrediti silu kočenja.



Slika 3.4. Primjer 3.4.

*Rješenje:*

Budući da se automobil giba konstantnim ubrzanjem, koristit će se veza između brzine čestice i koordinate položaja čestice dana izrazom (2.22):

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a(x_2 - x_1)$$

odakle je ubrzanje čestice

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(x_2 - x_1)},$$

pa, kako je  $v_1 = 100 \text{ km/h} = 100 / 3,6 \text{ m/s} = 27,78 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 0$  te  $x_2 - x_1 = 50 \text{ m}$ , slijedi

$$a = \frac{0 - 27,78^2}{2 \cdot 50} = -7,716 \text{ m/s}^2.$$

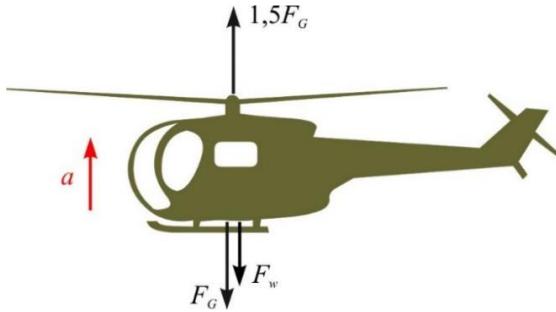
Sila kočenja sada je:

$$F = m \cdot a = 1500 \cdot (-7,716) = -11574 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = -11574 \text{ N}$$

i usmjeren je u suprotnu stranu od smjera gibanja automobila.

### Primjer 3.5.

Vučna sila propelera helikoptera težine  $F_G$  (sl. 1.4), pri njegovu vertikalnom podizanju, iznosi  $1,5F_G$ . Otpor zraka izražava se relacijom:  $F_w = kF_G v$ , gdje je  $k$  konstantna veličina.



Slika 3.5. Primjer 3.5.

Odrediti brzinu helikoptera u funkciji vremena te najveću brzinu koju može postići pri podizanju.

*Rješenje:*

Dimenzije helikoptera mogu se ovdje zanemariti, pa će diferencijalna jednadžba gibanja biti:

$$ma = \frac{F_G}{g} a = 1,5F_G - F_G - kF_G v$$

ili, nakon množenja s  $\frac{g}{F_G}$  i zbog  $a = \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{dt} = 0,5g - kgv.$$

Separacijom varijabla dobije se sljedeća diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dv}{1-2kv} = \frac{1}{2} g dt,$$

a nakon integriranja lijeve i desne strane dobije se:

$$\int \frac{dv}{1-2kv} = \left( \begin{array}{l} 1-2kv = u \\ -2kdv = du \end{array} \right) = -\frac{1}{2k} \ln(1-2kv) = \int \frac{1}{2} g dt = \frac{1}{2} gt + C.$$

Iz početnog uvjeta, prema kojem je za  $t = 0$  brzina  $v = 0$ , slijedi da je:  $C = -(1/2k)\ln 1 = 0$ , pa je nakon sređivanja:

$$\ln(1-2kv) = -kgt.$$

Antilogaritmiranjem se dolazi do brzine  $v$  kao funkcije vremena:

$$v = \frac{1}{2k} (1 - e^{-kgt}).$$

Maksimalna brzina koju može postići helikopter dobije se kao granična vrijednost gornjeg izraza kada vrijeme  $t$  teži beskonačno:

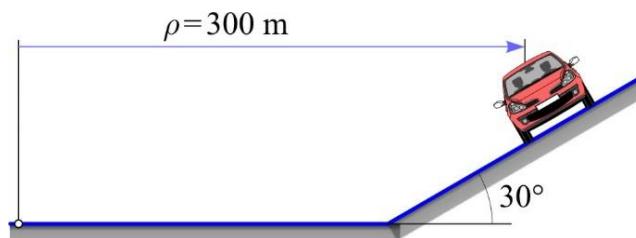
$$v_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v = \frac{1}{2k} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-\infty}) = \frac{1}{2k}$$

jer drugi član u zagradi u tom slučaju teži nuli.

### Primjer 3.6.

Sportski automobil mase  $m$  giba se po kružnoj pisti radijusa zakrivljenosti  $\rho$  konstantnom brzinom  $v$ . Pista je nagnuta za kut od  $30^\circ$  prema horizontali. Koeficijent trenja između guma automobila i piste iznosi  $\mu = 0,35$ .

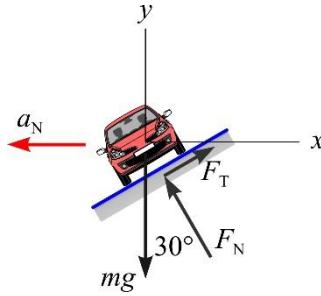
Odrediti najveću brzinu kojom se može gibati automobil pa da ne nastupi bočno proklizavanje.



Slika 3.6. Primjer 3.6.

*Rješenje:*

Automobil oslobođen veza s ucrtanim vanjskim silama i reakcijama veza prikazan je na slici 3.7.



Slika 3.7. Automobil oslobođen veza

Automobil se giba konstantnom brzinom po kružnoj putanji, pa je njegovo ukupno ubrzanje jednako normalnom ubrzaju ( $a_T = dv/dt = 0$ ), te se mogu postaviti sljedeće jednadžbe gibanja:

$$ma_N = F_N \sin 30^\circ + F_T \cos 30^\circ$$

$$0 = -mg + F_N \cos 30^\circ - F_T \sin 30^\circ$$

pri čemu je u graničnom slučaju, neposredno prije proklizavanja automobila,

$$F_T = \mu F_N.$$

Iz druge od jednadžba gibanja slijedi:

$$F_N = \frac{mg}{\cos 30^\circ - \mu \sin 30^\circ}$$

što nakon uvrštavanja u prvu od jednadžba gibanja daje:

$$ma_N = mg \frac{\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - \mu \sin 30^\circ}.$$

Dijeljenjem te jednadžbe s  $m$ , te imajući u vidu da je  $a_N = v^2 / \rho$ , slijedi:

$$\frac{v^2}{\rho} = g \frac{\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - \mu \sin 30^\circ},$$

odnosno

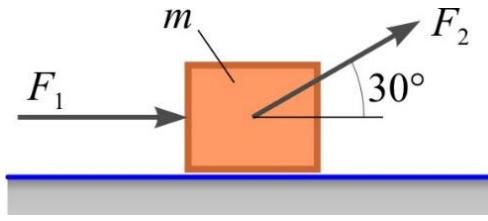
$$v = \sqrt{\rho g \frac{\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ}{\cos 30^\circ - \mu \sin 30^\circ}} = \sqrt{300 \cdot 9,81 \frac{0,5 + 0,35 \cdot 0,866}{0,866 - 0,35 \cdot 0,5}} = 58,5 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

ili izraženo u kilometrima po satu

$$v = 58,5 \cdot 3,6 = 210,5 \text{ km/h}.$$



**Zadatak 3.1.** Čestica mase  $m = 60 \text{ kg}$  giba se iz stanja mirovanja po glatkoj horizontalnoj podlozi pod djelovanjem dviju sila,  $F_1 = 120 \text{ N}$  i  $F_2 = 40\sqrt{3} \text{ N}$  (sl. Z.3.1).

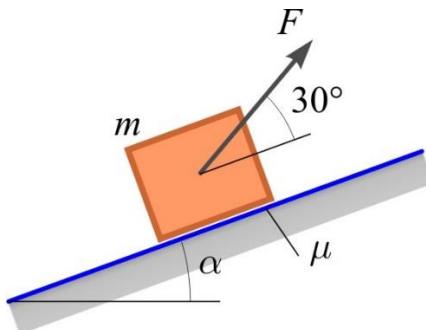


Slika Z.3.1. *Zadatak 3.1.*

Odrediti zakon gibanja čestice. Kolika će biti brzina čestice u trenutku  $t_1 = 4 \text{ s}$ ?

*Odgovor:*  $x = 3t^2/2 \text{ m}$ ;  $v_1 = 12 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.2.** Čestica mase  $m = 50 \text{ kg}$  giba se uz hrapavu kosinu kuta nagiba  $\alpha = 20^\circ$ . Na česticu djeluje sila  $F = 400 \text{ N}$  (sl. Z.3.2).

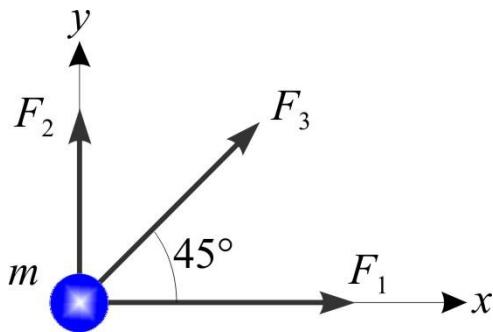


Slika Z.3.2. *Zadatak 3.2.*

Ako je koeficijent trenja klizanja između čestice i podloge  $\mu = 0,2$ , odrediti zakon promjene brzine čestice ako joj je početna brzina bila  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ .

*Odgovor:*  $v = 2 + 2,529 \cdot t \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.3.** Na česticu mase  $m = 20 \text{ kg}$  koja se nalazi na glatkoj horizontalnoj podlozi djeluje sustav od triju sučeljenih sila  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_3$  (sl. Z.3.3).

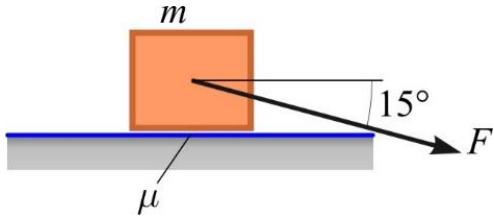


Slika Z.3.3. *Zadatak 3.3.*

Intenziteti prvih dviju sila su  $F_1 = 60 \text{ N}$  i  $F_2 = 80 \text{ N}$ . Odrediti intenzitet sile  $F_3$  i ubrzanje čestice ako je poznato da se čestica giba pravocrtno duž koordinatne osi  $x$ .

*Odgovor:*  $F_3 = -113,2 \text{ N}$ ,  $a = a_x = -1 \text{ m/s}^2$ .

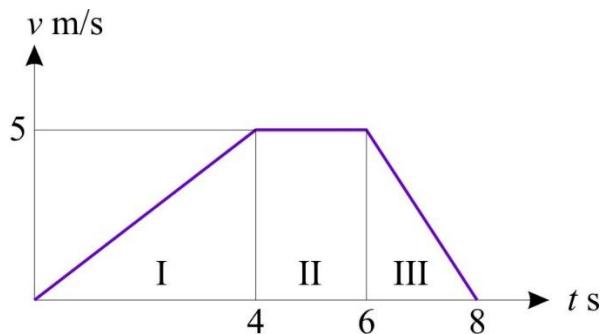
**Zadatak 3.4.** Ako se čestica mase  $m = 200 \text{ kg}$  pod djelovanjem sile  $F = 500 \text{ N}$  (sl. Z.3.4) giba konstantnom brzinom, odrediti koliki je koeficijent trenja ( $\mu = ?$ ) između čestice i podloge.



Slika Z.3.4. Zadatak 3.4.

Odgovor:  $\mu = 0,231$ .

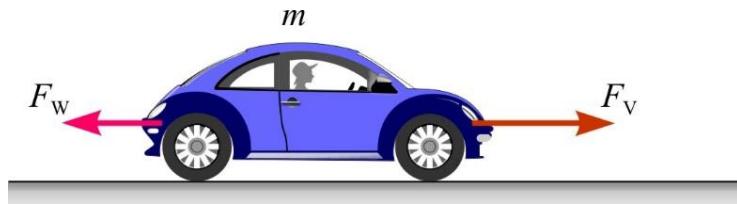
**Zadatak 3.5.** Poznat je zakon promjene brzine ( $v - t$ ) čestice mase  $m = 8 \text{ kg}$  pri njezinu pravocrtnom gibanju (sl. Z.3.5). Odrediti i skicirati kako se mijenja iznos rezultante sila koje djeluju na česticu u razmatranom periodu.



Slika Z.3.5. Zadatak 3.5.

Odgovor:  $F_I = 10 \text{ N}$ ;  $F_{II} = 0 \text{ N}$ ;  $F_{III} = -20 \text{ N}$ .

**Zadatak 3.6.** Na automobil mase  $m = 1250 \text{ kg}$  djeluje vučna sila iznosa  $F_V = 6,5 \text{ kN}$  (sl. Z.3.6).



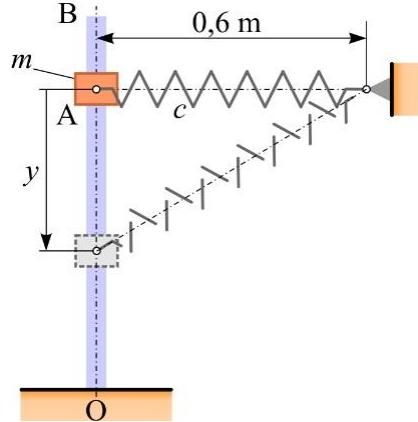
Slika Z.3.6. Zadatak 3.6.

Ako je sila otpora  $F_W$  jednaka jednoj dvadesetini težine automobila, odrediti brzinu automobila nakon što prevali put od  $x_1 = 100 \text{ m}$  iz stanja mirovanja.

Odgovor:  $v_1 = 30,69 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.7.** Klizač A mase  $m = 2 \text{ kg}$  vezan je za oslonac O s pomoću opruge konstante krutosti  $c = 50 \text{ N/m}$  (sl. Z.3.7).

Klizač se giba duž glatke vertikalne vodilice OB iz početnog položaja u kojem je opruga bila nerastegnuta.



Slika Z.3.7. Zadatak 3.7.

Odrediti ubrzanje klizača u funkciji njegova položaja  $a = a(y)$  ako je duljina nerastegnute opruge  $l_0 = 0,6 \text{ m}$ .

$$\text{Odgovor: } a = 9,81 - 25y \cdot \left(1 - 0,6/\sqrt{0,6^2 + y^2}\right) \text{ m/s}^2.$$

### 3.2.2. D'Alembertov princip (princip dinamičke ravnoteže)

Prebacivanjem člana s desne strane osnovne diferencijalne jednadžbe  $\vec{F} = m\vec{a}$ , u kojoj je  $\vec{F}$  rezultanta svih vanjskih sila koje djeluju na česticu, na desnu stranu dobije se:

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = \vec{0}$$

ili uvođenjem oznake  $\vec{F}_{\text{in}} = -m\vec{a}$

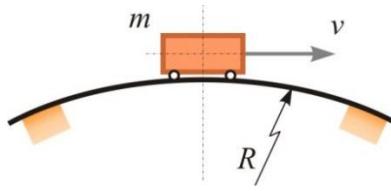
$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{in}} = \vec{0}. \quad (3.7)$$

Jednadžba (3.7) predstavlja *uvjet dinamičke ravnoteže čestice*, pri čemu je vektor  $\vec{F}_{\text{in}}$  *inercijska sila* i nema odlike stvarne sile. To je fiktivna sila, koja sa stvarnim silama stoji u dinamičkom smislu u ravnoteži. Po francuskom fizičaru i matematičaru, koji je prvi uočio mogućnosti takva zapisivanja jednadžbe gibanja, naziva se ovaj postulat *D'Alembertovim principom*.

S pomoću D'Alembertova principa može se svaki zadatak dinamike rješiti korištenjem poznatih principa i metoda statike. Naime, jednadžba (3.7), koja uz vanjske sile uključuje i inercijsku, dovoljan je uvjet dinamičke ravnoteže s obzirom na to da se radi o konkurentnom sustavu sila.

#### Primjer 3.7.

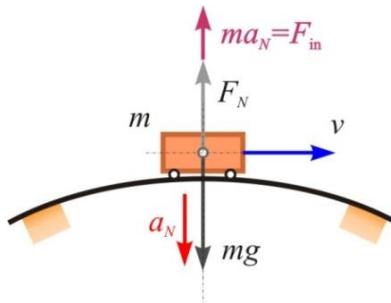
Automobil mase  $m$  prelazi konveksno ispučenje mosta polumjera zakrivljenosti  $R$  brzinom  $v$  (sl. 3.8). Odrediti silu pritiska automobila na most u trenutku kad se nalazi na njegovoj najvišoj točki. Pri kojoj bi se brzini automobil odvojio od mosta?



Slika 3.8. Primjer 3.7.

*Rješenje:*

Na slici 3.9 prikazane su sve vanjske aktivne i vanjske pasivne sile koje u promatranom položaju djeluju na automobil.



Slika 3.9. Dinamička ravnoteža automobila

Tim silama dodana je i inercijska sila zbog normalnog ubrzanja automobila.

Sila pritiska automobila na most jednaka je normalnoj reakciji  $\vec{F}_N$  mosta. Budući da je riječ o kolinearnom sustavu sila, jednadžba dinamičke ravnoteže glasi:

$$F_N + F_{in} - mg = 0,$$

pri čemu je intenzitet inercijske sile:

$$F_{in} = ma_N = \frac{mv^2}{R}$$

pa je:

$$F_p = F_N = mg - F_{in} = m\left(g - a_N\right) = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

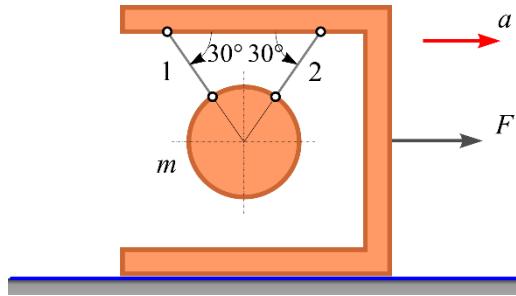
U trenutku odvajanja automobila od mosta bit će sila pritiska automobila na most jednaka nuli, pa iz uvjeta

$$g - \frac{v^2}{R} = 0$$

slijedi da je najmanja brzina pri kojoj će se automobil odvojiti od mosta:  $v = \sqrt{Rg}$ .

### Primjer 3.8.

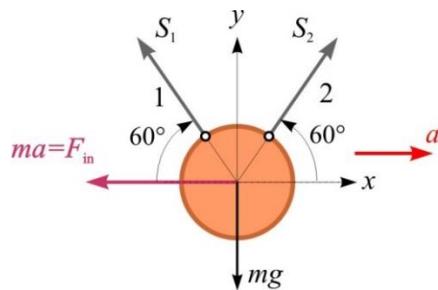
Sustav na slici, koji se sastoji od okvira unutar kojega je ovješen disk mase  $m$ , ubrzava se konstantnim ubrzanjem  $a$  pod djelovanjem sile  $F$  (sl. 3.10). Odrediti sile u užadima 1 i 2 ako je zadano:  $m = 30 \text{ kg}$ ,  $a = 2 \text{ m/s}^2$ .



Slika 3.10. Primjer 3.8.

*Rješenje:*

Ako se disk oslobodi veza, dodaju vanjske aktivne sile, reakcije veza i inercijska sila suprotna smjeru vektora ubrzanja (slika 3.11), mogu se postaviti uvjeti dinamičke ravnoteže diska:



Slika 3.11. Dinamička ravnoteža diska

$$\sum F_x = 0: -S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ - F_{in} = 0$$

$$\sum F_y = 0: S_1 \sin 60^\circ + S_2 \sin 60^\circ - mg = 0.$$

Jednadžbe dinamičke ravnoteže sada se mogu napisati u obliku:

$$-S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ = ma$$

$$S_1 \sin 60^\circ + S_2 \sin 60^\circ = mg.$$

Množenjem gornje jednadžbe sa  $\sin 60^\circ$ , a donje s  $\cos 60^\circ$  pa njihovim zbrajanjem dobije se

$$2S_2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = ma \sin 60^\circ + mg \cos 60^\circ = m(a \sin 60^\circ + g \cos 60^\circ)$$

odakle je

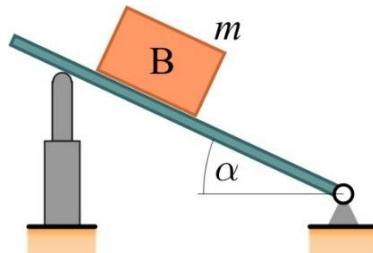
$$S_2 = m \frac{a \sin 60^\circ + g \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ} = 30 \cdot \frac{2 \cdot 0,866 + 9,81 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5 \cdot 0,866} = 229,9 \text{ N}$$

pa iz druge od jednadžba dinamičke ravnoteže slijedi:

$$S_1 = \frac{mg}{\sin 60^\circ} - S_2 = \frac{30 \cdot 9,81}{0,866} - 229,9 = 339,8 - 229,9 = 109,9 \text{ N}.$$



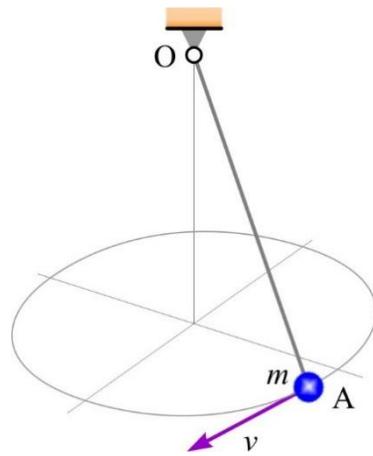
**Zadatak 3.8.** Ako blok B mase  $m = 6 \text{ kg}$  klizi niz hrapavu zakretnu podlogu konstantnom brzinom kada je kut  $\alpha = 20^\circ$ , odrediti ubrzanje bloka kada je kut  $\alpha = 45^\circ$  (sl. Z.3.8).



Slika Z.3.8. Zadatak 3.8.

Odgovor:  $a = 4,412 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 3.9.** Čestica A mase  $m = 3 \text{ kg}$  vezana je koncem duljine  $\overline{OA} = l = 1 \text{ m}$  za oslonac O. Čestica se giba po kružnoj putanji u horizontalnoj ravnini brzinom  $v$  (sl. Z.3.9).

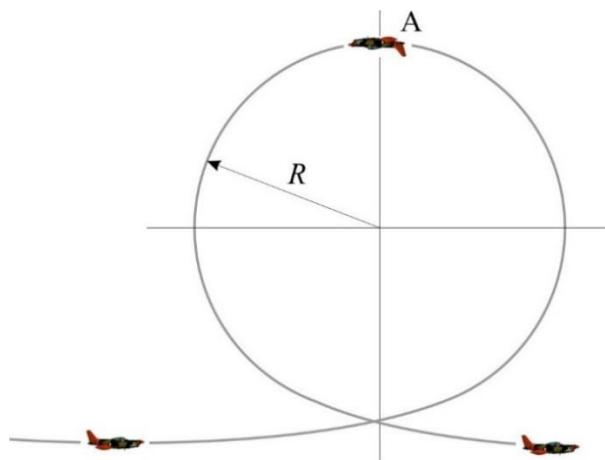


Slika Z.3.9. Zadatak 3.9.

Odrediti kojom se najvećom brzinom smije gibati čestica ako konac ne može podnijeti silu veću od  $36 \text{ N}$ .

Odgovor:  $v_{\max} = 1,995 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.10.** Pilot mase  $m = 70 \text{ kg}$  izvodi svojim zrakoplovom vertikalnu kružnu petlju (*looping*) radijusa  $R = 200 \text{ m}$  (sl. Z.3.10).



Slika Z.3.10. Zadatak 3.10.

Odrediti silu pritiska pilota na sjedalo zrakoplova ako je brzina zrakoplova konstantna i iznosi  $v = 75 \text{ m/s}$ .

Odgovor:  $F_p = 1282 \text{ N}$ .

### 3.3. OPĆI ZAKONI DINAMIKE ČESTICE

Pri rješavanju niza problema u dinamici, umjesto metoda integriranja diferencijalnih jednadžba gibanja, primjenjuju se *opći zakoni dinamike*.

Značaj ovih zakona je u tome što oni daju ovisnost između osnovnih dinamičkih karakteristika gibanja tijela, proučavajući samo onu stranu problema koja je od praktičnog interesa. Primjenom ovih zakona izbjegava se proces integriranja čime se pojednostavljuje postupak rješavanja pojedinog zakona.

#### 3.3.1. Količina gibanja. Impuls sile

Osnovni zakon dinamike, zapisan vektorski, glasi:

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Budući da je:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

uvrštavanjem u vektorski zapis osnovnog zakona dinamike i množenjem s  $dt$  dobije se

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt. \quad (3.8)$$

Integriranjem lijeve strane jednadžbe (3.8) unutar intervala  $t_1$  do  $t_2$  dobije se:

$$\int_{t_1}^{t_2} m d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (3.9)$$

pri čemu se umnožak mase čestice i vektora njene trenutačne brzine naziva *količina gibanja*  $\vec{B}$ :

$$\vec{B} = m\vec{v}. \quad (3.10)$$

Količina gibanja je vektorska veličina, a dimenzija joj je  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  ili  $\text{N} \cdot \text{s}$ .

Integriranjem desne strane jednadžbe (3.8) unutar intervala  $t_1$  do  $t_2$  dobije se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{I}, \quad (3.11)$$

a dobivena veličina naziva se *impuls sile*.

Dakle, impulsom sile naziva se vektorska veličina koja je jednaka određenom integralu iz umnoška vektora sile i diferencijala vremena. Impuls sile, prema (3.11), mjeri se u  $\text{N} \cdot \text{s}$ .

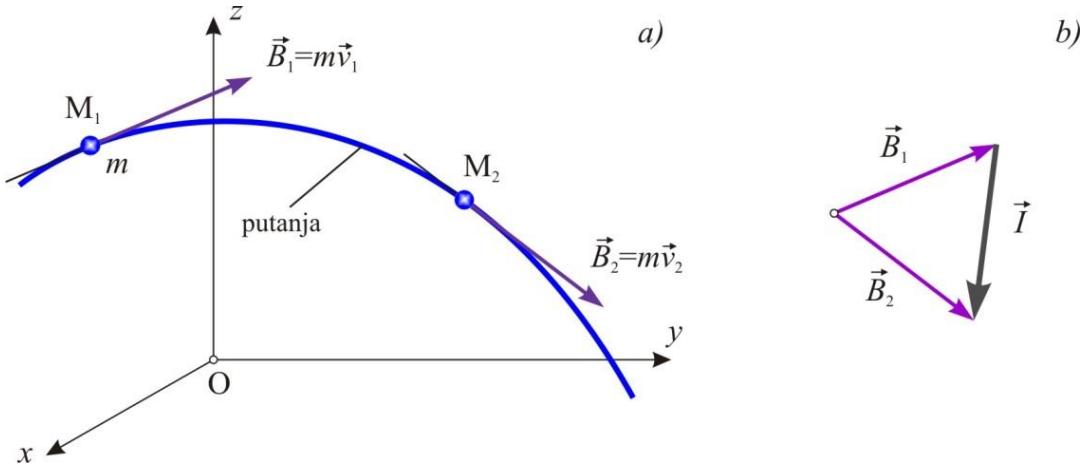
Deriviranjem jednadžbe (3.11) po vremenu dobije se:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.12)$$

ili derivacija količine gibanja čestice po vremenu jednaka je rezultanti svih sila koje na djeluju na tu česticu.

### 3.3.1.1. Zakon o promjeni količine gibanja

Taj zakon glasi: *Promjena količine gibanja u nekom vremenskom intervalu  $t_1$  do  $t_2$  jednaka je impulsu sile koja je prouzrokovala to gibanje u istom vremenskom intervalu* (sl. 3.12).



Slika 3.12. *Promjena količine gibanja*

Ovaj će se zakon prikazati u vektorskem zapisu izjednačavanjem izraza (3.9) i (3.11), nastalih integracijom osnovnog zakona dinamike:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

ili

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \vec{I}. \quad (3.13)$$

Vektorska jednadžba (3.13) može se izraziti i preko projekcija:

$$\begin{aligned} B_{2x} - B_{1x} &= I_x = \int_1^2 F_x dt \\ B_{2y} - B_{1y} &= I_y = \int_1^2 F_y dt \\ B_{2z} - B_{1z} &= I_z = \int_1^2 F_z dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ako je vektor rezultante svih sila jednak nuli, bit će:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{0},$$

odakle je:

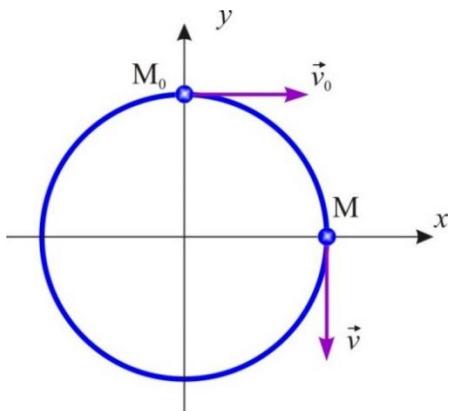
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \vec{0} \quad \text{ili} \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Zaključuje se: *Ako je rezultanta sile koja djeluju na česticu jednak nuli, tada je vektor količine gibanja konstantan.*

To je zakon o održanju količine gibanja i predstavlja samo drugačiju formulaciju drugog Newtonova zakona, a može se primijeniti i za bilo koju od skalarnih jednadžba (3.14).

### Primjer 3.9.

Čestica mase  $m = 1 \text{ kg}$  giba se konstantnom brzinom  $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  po kružnoj putanji (sl. 3.13). Odrediti impuls sile koja djeluje na česticu za vrijeme u kojem će čestica doći iz položaja  $M_0$  u položaj  $M$ .



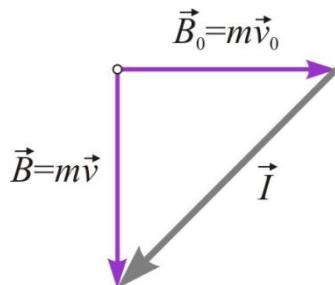
Slika 3.13. Primjer 3.9.

*Rješenje:*

Prema zakonu o promjeni količine gibanja bit će:

$$\vec{I} = \vec{B} - \vec{B}_0,$$

gdje je s  $\vec{B}$  označen vektor količine gibanja u položaju  $M$ , a s  $\vec{B}_0$  u položaju  $M_0$ .



Slika 3.14. Grafičko rješenje

Grafičko rješenje zadatka prikazano je na slici 3.14, odakle slijedi i intenzitet impulsa:

$$I = \sqrt{B^2 + B_0^2} = m\sqrt{v^2 + v_0^2} = \sqrt{2}mv$$

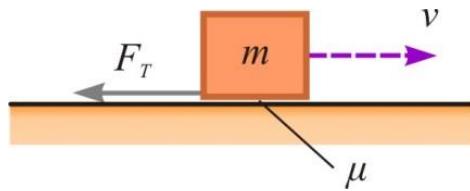
ili

$$I = 2\sqrt{2} \text{ N} \cdot \text{s}.$$

### Primjer 3.10.

Čestica mase  $m$ , koja se giba po hrapavoj horizontalnoj podlozi, ima u početnom trenutku brzinu  $v$  (sl. 3.15). Koeficijent trenja između čestice i podlage je  $\mu$ .

Odrediti nakon koliko će se vremena čestica zaustaviti.



Slika 3.15. Primjer 3.10.

*Rješenje:*

Zakon o promjeni količine gibanja za os  $x$  glasi:

$$B_x - B_{x0} = I_x.$$

Iz uvjeta zadatka očito je da će brzina čestice na kraju gibanja biti jednaka nuli. Ukupni impuls jednak je impulsu sile trenja:

$$I_x = \int F_x dt = -\int F_T dt = -F_T t = -\mu mg t,$$

jer je  $F_T = \mu mg = \text{const.}$  i usmjerena je suprotno od smjera gibanja.

Zakon o promjeni količine gibanja za os  $x$  sada je:

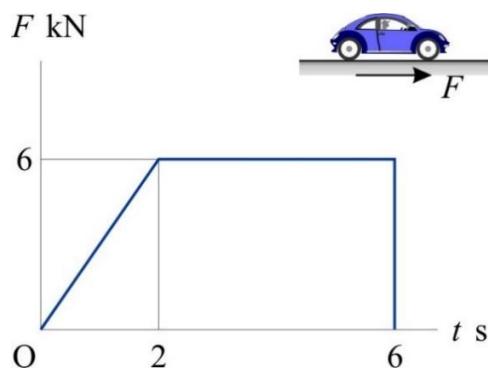
$$0 - mv = -\mu mg t$$

pa je vrijeme potrebno za zaustavljanje čestice:

$$t = \frac{v}{\mu g}.$$

### Primjer 3.11.

Pogonski kotači automobila mase  $m = 1500 \text{ kg}$  proizvode vučnu silu iznos koje se mijenja prema dijagramu prikazanome na slici 3.16. Odrediti brzinu automobila u trenutku  $t_1 = 6 \text{ s}$  ako je njegova brzina u početnom trenutku bila jednaka nuli.



Slika 3.16. Primjer 3.11.

*Rješenje:*

Zakon o promjeni količine gibanja u smjeru gibanja automobila glasi:

$$B_{1x} - B_{0x} = I_x .$$

Količina gibanja u trenutku  $t_1 = 6$  s je

$$B_{x1} = mv_1 = 1500 \cdot v_1 ,$$

dok je u početnom trenutku količina gibanja jednaka nuli ( $B_{x0} = 0$ ).

Impuls sile u periodu od 0 do 6 s jednak je

$$I_x = \int F dt$$

što odgovara ukupnoj površini ispod  $F-t$  krivulje, pa vrijedi:

$$I_x = 6 \cdot 2 / 2 + 6 \cdot 4 = 30 \text{ kNm/s} = 30000 \text{ Nm/s} .$$

Sada je:

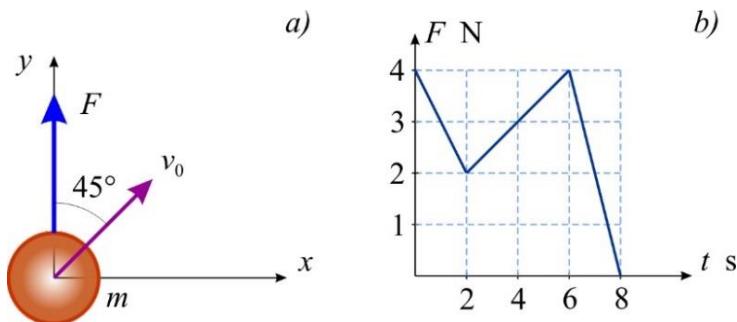
$$1500 \cdot v_1 = 30000$$

odakle je

$$v_1 = \frac{30000}{1500} = 20 \text{ m/s} .$$



**Zadatak 3.11.** Čestica mase  $m = 4 \text{ kg}$  giba se u horizontalnoj ravnini brzinom  $v_0 = 5\sqrt{2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  kada na nju započne djelovati sila  $F$  (sl. Z.3.11.a) intenzitet koje se mijenja prema dijagramu prikazanome na slici Z.3.11.b.



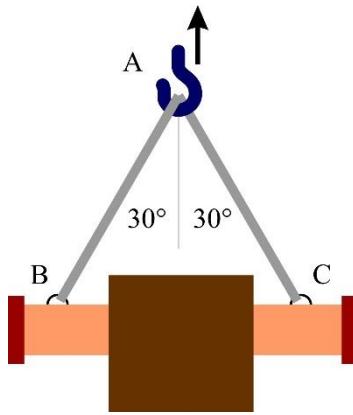
Slika Z.3.11. Zadatak 3.11.

Odrediti iznos brzine čestice u trenutku prestanka djelovanja sile.

Odgovor:  $v_1 = 16,29 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.12.** Dio brodskog uređaja mase  $m = 800 \text{ kg}$  podiže se iz stanja mirovanja i u vremenskom periodu od 4 s postigne brzinu od  $2 \text{ m/s}$  ubrzavajući se jednoliko (sl. Z.3.12).

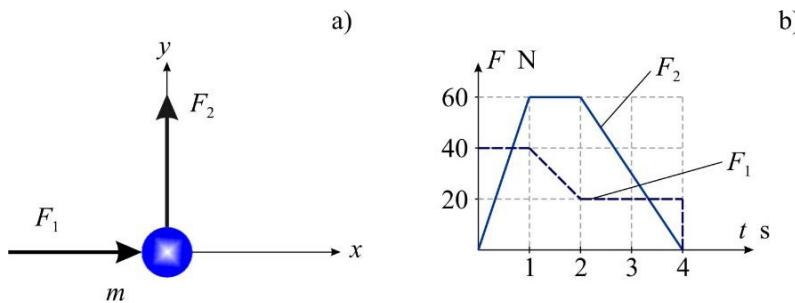
Odrediti silu u užetu BAC koja će se pojaviti pri tom podizanju.



Slika Z.3.12. Zadatak 3.12.

Odgovor:  $S = 8248 \text{ N}$ .

**Zadatak 3.13.** Čestica mase  $m = 20 \text{ kg}$  nalazi se u stanju mirovanja na glatkoj horizontalnoj podlozi kada na nju započnu djelovati sile  $F_1$  i  $F_2$  (sl. Z.3.13.a) intenzitet kojih se mijenja prema dijagramu prikazanom na slici Z.3.13.b.

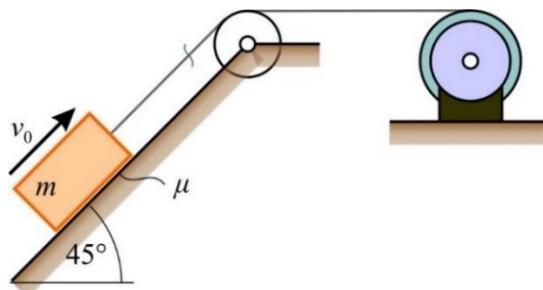


Slika Z.3.13. Zadatak 3.13.

Odrediti vektor brzine čestice u trenutku prestanka djelovanja sila.

Odgovor:  $\vec{v} = 5,5 \cdot \vec{i} + 7,5 \cdot \vec{j} \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.14.** Blok mase  $m$  povlači se uz hrapavu kosinu uz pomoć elektromotora konstantnom brzinom  $v_0 = 6 \text{ m/s}$  (sl. Z.3.14).



Slika Z.3.14. Zadatak 3.14.

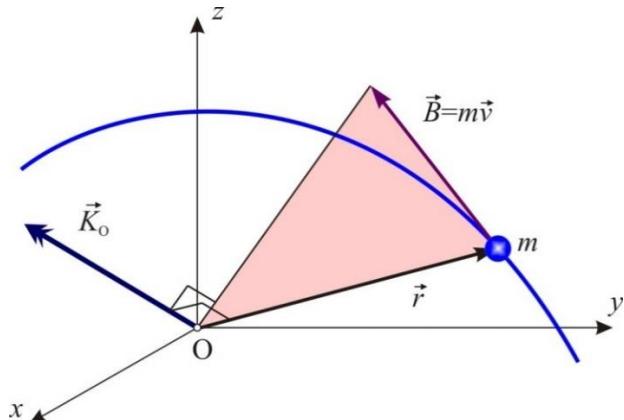
Odrediti nakon koliko će se vremena, nakon pucanja užeta, blok prestati gibati uz kosinu i početi kliziti natrag ako je koeficijent trenja između bloka i kosine  $\mu = 0,15$ .

Odgovor:  $t_1 = 0,752 \text{ s}$ .

### 3.3.2. Moment količine gibanja (kinetički moment)

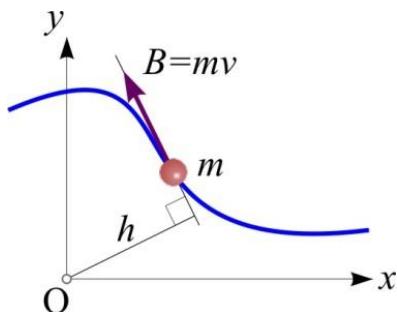
Moment količine gibanja (kinetički moment) za neku nepomičnu točku u prostoru jest vektorska veličina koja je jednaka vektorskom produktu iz radijusa vektora položaja čestice s obzirom na tu točku i vektora količine gibanja (sl. 3.17):

$$\vec{K}_o = \vec{r} \times \vec{B} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.15)$$



Slika 3.17. Moment količine gibanja

Jedinica kinetičkog momenta je  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ili  $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ . Vektor momenta količine gibanja okomit je na vektore  $\vec{r}$  i  $\vec{B}$  ( $\vec{r}$  i  $\vec{v}$ ).



Slika 3.18. Moment količine gibanja kod ravninskog gibanja

Ako se čestica giba u ravnini (npr. Oxy , sl. 3.18), tada se moment količine gibanja može izraziti u skalarnoj formi:

$$K_0 = B \cdot h = mv \cdot h. \quad (3.16)$$

### **3.3.2.1. Zakon o promjeni momenta količine gibanja**

Derivira li se izraz (3.16) po vremenu, dobije se:

$$\frac{dK_o}{dt} = \frac{d}{dt}(B \cdot h) = \frac{d}{dt}(mv \cdot h) = m \frac{dv}{dt} \cdot h = ma \cdot h$$

ili

$$\frac{dK_o}{dt} = F \cdot h = M_o^F. \quad (3.17)$$

Dakle, derivacija momenta količine gibanja za točku O po vremenu jednaka je momentu rezultante svih sila koje djeluju na česticu za tu istu točku.

Taj zakon naziva se *zakon o promjeni momenta količine gibanja*.

Zakon o održanju momenta količine gibanja glasi: *Moment količine gibanja za proizvoljnu točku je konstantan ako je moment rezultante svih sila koje djeluju na česticu za tu istu točku jednak nuli*. Naime, uz  $M_O = 0$ , iz izraza (3.17) slijedi:

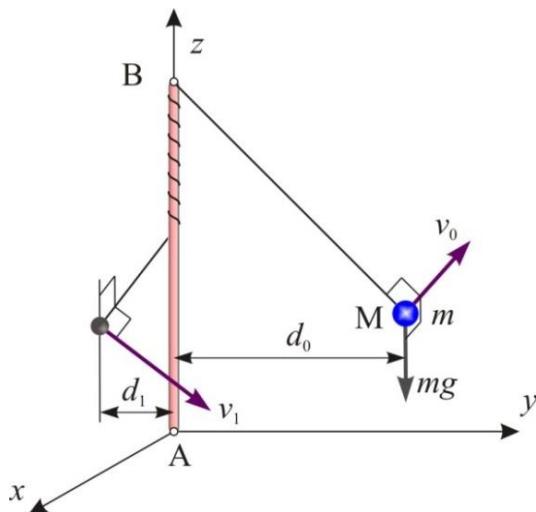
$$\frac{dK_O}{dt} = 0$$

ili

$$K_O = \text{konst.} \quad (3.18)$$

### Primjer 3.12.

Čestica mase  $m$  privezana je za tanki konac BM i giba se tako da se konac namata na tanki vertikalni štap. U početnom trenutku brzina čestice je  $v_0$ ,  $\vec{v}_0 \perp ABM$ , a njena udaljenost od štapa je  $d_0$  (sl. 3.19). Odrediti, zanemarujući debeljinu štapa, brzinu  $v_1$  čestice u trenutku kada njena udaljenost od štapa bude  $d_1$ .



Slika 3.19. Primjer 3.12.

*Rješenje:*

Kuglica se giba u ravnini (paralelnoj Oxy). Na kuglicu djeluju dvije vanjske sile: težina  $F_G$  kao vanjska aktivna sila i sila reakcije užeta  $S$  (pasivna sila). Moment ovih sila za os  $z$  jednak je nuli. S pomoću izraza (3.18) dobije se:

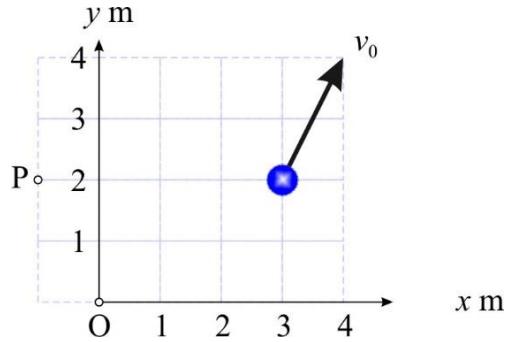
$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^{\vec{F}} = 0 \text{ ili } dK_z = \text{konst.}$$

Dalje je:  $mv_1 d_1 = mv_0 d_0$  ili konačno:

$$v_1 = v_0 \cdot (d_0/d_1).$$



**Zadatak 3.15.** Čestica mase  $m = 5 \text{ kg}$  u trenutku prikazanom na slici Z.3.15 ima brzinu  $v_0 = 10 \text{ m/s}$ . Odrediti moment količine gibanja čestice: a) u odnosu na os  $z$  kroz ishodište koordinatnog sustava, b) u odnosu na os  $z_1$  kroz točku P.



Slika Z.3.15. Zadatak 3.15.

Odgovor: a)  $K_{Oz} = 89,44 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ ; b)  $K_{Pz} = 178,89 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ .

### 3.3.3. Kinetička energija. Mehanički rad i snaga

*Kinetičkom energijom (ili živom silom) naziva se skalarna veličina koja je jednaka polovini umnoška mase čestice i kvadrata intenziteta njene brzine:*

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.19)$$

a dimenzija joj je  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  ili  $\text{N} \cdot \text{m}$ .

Množenjem vektorske jednadžbe

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

skalarno s diferencijalom radijus vektora položaja  $d\vec{r}$  dobije se:

$$m\vec{a} \circ d\vec{r} = \vec{F} \circ d\vec{r}. \quad (3.20)$$

Član na lijevoj strani jednadžbe (3.20) može se preuređiti, kako slijedi:

$$m\vec{a} \circ d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \circ d\vec{r} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \circ d\vec{v} = m\vec{v} \circ d\vec{v} = mv dv \cdot \cos(\vec{v}, d\vec{v}) = mv dv$$

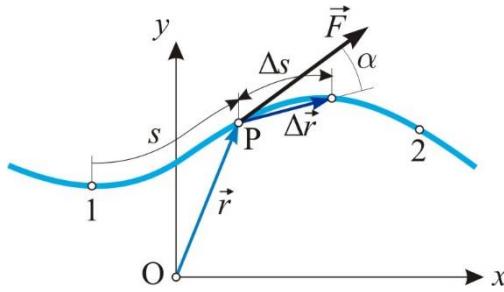
pa će, za sve slučajeve kada je masa konstantna, biti:

$$m\vec{a} \circ d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_k \quad (3.21)$$

što je, dakle, diferencijal kinetičke energije čestice.

Član na desnoj strani jednadžbe (3.20) predstavlja *diferencijal rada sile*  $dW$  (slika 3.20):

$$dW = \vec{F} \circ d\vec{r}. \quad (3.22)$$



Slika 3.20. Diferencijal rada sile

Integriranjem jednadžbe (3.22) od položaja 1 do položaja 2 dobije se rad sile  $\vec{F}$  na tom pomaku:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_1^2 F \cdot \cos \alpha \cdot dr = \int_1^2 F \cdot \cos \alpha \cdot ds , \quad (3.23)$$

gdje je uzeto  $dr \cong ds$ , dok je  $\alpha$  kut između vektora  $\vec{F}$  i  $d\vec{r}$ . Ako se vektori  $\vec{F}$  i  $d\vec{r}$  izraze preko svojih koordinata, bit će:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_1^2 (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) . \quad (3.24)$$

Jedinica za rad je  $N \cdot m$  ili  $J$  (Joul - džul).

*Snagom*  $P$  naziva se veličina koja kazuje kojom brzinom sila obavlja rad, i dana je jednadžbom:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \circ \vec{v} . \quad (3.25)$$

Snaga je trenutačna veličina i mjeri se u  $N \cdot m \cdot s^{-1} = J \cdot s^{-1} = W$  (Watt - vat).

### 3.3.3.1. Zakon o promjeni kinetičke energije

Uvrštavanjem izraza (3.21) i (3.22) u (3.20) dobije se:  $dE_k = dW$ , što nakon integriranja od položaja 1 do položaja 2 daje:

$$E_{k2} - E_{k1} = \int_1^2 dW = W \quad (3.26)$$

ili

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W . \quad (3.27)$$

Jednadžba (3.26) odnosno (3.27) izražava *zakon o promjeni kinetičke energije*, koji glasi: *Promjena (priраст) kinetičke energije pri pomaku čestice iz položaja 1 u položaj 2 jednaka je radu vanjskih sila koje na nju djeluju na tom pomaku.*

### 3.3.3.2. Neki primjeri izračunavanja rada

#### - Rad sile teže

Neka se čestica mase  $m$  pomakne iz položaja  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  u položaj  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

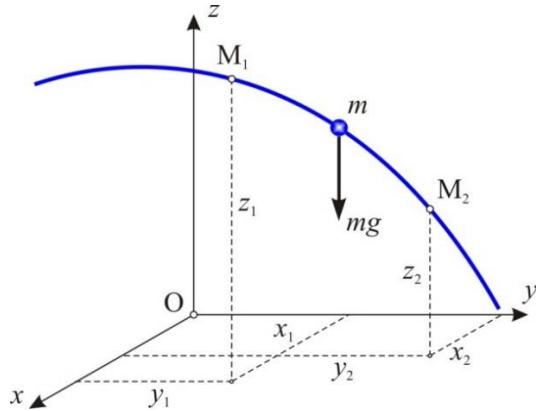
Za koordinatni sustav prikazan na slici 3.21 bit će:

$$W_G = \int_1^2 (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) = \int_1^2 (-mgdz) = -mg(z_2 - z_1)$$

ili, uz  $h = z_1 - z_2$ ,

$$W_G = mgh. \quad (3.28)$$

Prema tome, rad sile teže jednak je umnošku iz intenziteta sile i negativne razlike visina krajnjeg i početnog položaja.



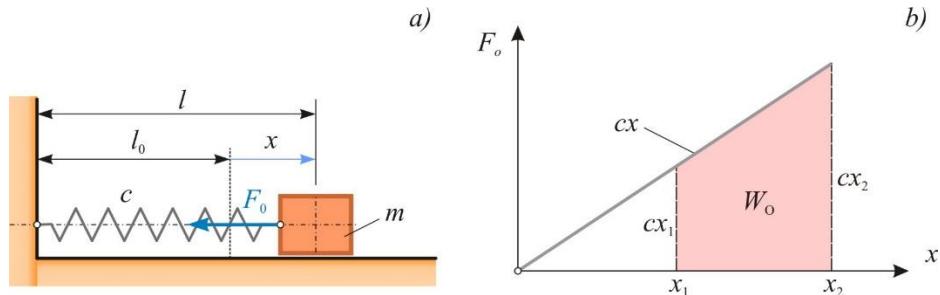
Slika 3.20. Rad sile teže

Iz dobivenih rezultata zaključuje se da rad sile teže ne ovisi o obliku putanje čestice. Sile koje imaju to svojstvo nazivaju se *konzervativne (potencijalne) sile*.

Može se zaključiti i sljedeće: *Rad konzervativnih sila na zatvorenoj putanji jednak je nuli*.

#### - Rad sile elastičnosti (sile u opruzi)

Neka je čestica mase  $m$  vezana oprugom konstante krutosti  $c$ . Duljina opruge u nerastegnutom stanju je  $l_0$  (sl. 3.22.a).



Slika 3.22. Rad sile elastičnosti

Ako se opruga rastegne na duljinu  $l$ , tada se veličina  $x$  ( $x = l - l_0$ ) zove produljenje opruge.

Sila elastičnosti koja se pri tom javlja u opruzi proporcionalna je nastalom produljenju:

$$F_o = cx$$

i usmjerena u suprotnom smjeru.

Odredit će se sada rad te sile pri pomaku čestice iz položaja  $M_1(x_1)$  u položaj  $M_2(x_2)$ :

$$W_o = \int_1^2 (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) = \int_{x_1}^{x_2} (-cx \cdot dx) = -\frac{c}{2} x^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{c}{2} (x_2^2 - x_1^2). \quad (3.29)$$

Isti rezultat može se dobiti i izračunavanjem osjenčane površine u dijagramu na slici 3.22.b.

Budući da je, prema (3.29), rad sile u opruzi funkcija samo koordinata početnog i krajnjeg položaja, zaključuje se da je i to konzervativna sila.

### - Rad sile trenja

Sila trenja pada uvijek u tangentu na putanju i usmjerena je u suprotnu stranu od one u koju se pomici čestica. Istovremeno, sila trenja kolinearna je s diferencijalom pomaka  $ds$ .

Rad te sile, prema izrazu (3.23), jest:

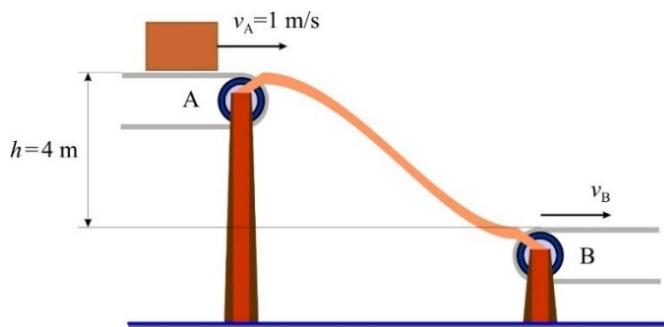
$$W = - \int_1^2 F_T ds = - \int_1^2 \mu F_N ds. \quad (3.30)$$

Očito je rad sile trenja ovisan o duljini i obliku putanje te o tome da sila trenja nije konzervativna (potencijalna) sila.

### Primjer 3.13.

Paket mase  $m$  dovodi se pokretnom trakom brzinom  $v_A = 1 \text{ m/s}$  do točke A gdje prelazi na rampu s pomoću koje se spušta na niži nivo skladišta gdje ga u točki B prihvata donja pokretna traka (sl. 3.23). Odrediti potrebnu brzinu donje pokretne trake ( $v_B = ?$ ) pa da u točki B ne nastupi klizanje paketa po traci.

Trenje između paketa i rampe te otpor zraka može se zanemariti.



Slika 3.23. Primjer 3.13.

*Rješenje:*

Da ne bi nastupilo klizanje paketa po donjoj pokretnoj traci, brzine paketa i trake u točki B moraju biti jednake.

Brzina paketa u točki B odredit će se s pomoću zakona o promjeni kinetičke energije (3.27):

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A-B}.$$

Rad vanjskih sila jednak je radu sile težine paketa na putu od točke A do B:

$$W = W_G = mgh.$$

Nakon uvrštavanja dobivenog izraza u prvu jednadžbu, pa množenjem dobivenog s  $2/m$  slijedi:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gh,$$

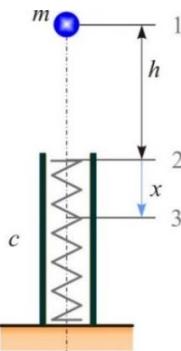
odnosno brzina paketa u točki B i potrebna brzina donje trake jest:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh} = \sqrt{1 + 2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,915 \text{ m/s}.$$

### Primjer 3.14.

Čestica mase  $m$  pada s visine  $h$  u cijev u kojoj se nalazi opruga konstante krutosti  $c$  (sl. 3.24). Odrediti:

- brzinu kuglice na ulasku u cijev,
- najveće skraćenje opruge  $x$ ,
- skraćenje opruge  $x_0$  koje bi nastalo ispuštanjem čestice s visine  $h=0$ .



Slika 3.24. Primjer 3.14.

*Rješenje:*

Položaj čestice na visini  $h$  označit će se s 1, položaj na ulazu u cijevi s 2, a pri najvećem skraćenju opruge s 3.

- Brzina na ulazu u cijev odredit će se s pomoću zakona o promjeni kinetičke energije (3.27):

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W,$$

gdje je  $v_1 = 0$  (početna brzina čestice).

Rad vanjskih sila jednak je radu sile teže:

$$W = W_G = mgh$$

i pozitivan je za  $z_2 < z_1$ . Dalje je:

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

- Kod najvećeg skraćenja opruge bit će brzina čestice  $v_3 = 0$  pa zakon o promjeni kinetičke energije za položaj 2 i 3 glasi:

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = -\frac{1}{2}mv_2^2 = W,$$

gdje je  $W = W_G + W_o$ , pri čemu je:

$$W_G = mgh_1 = mgx; \quad W_o = -\frac{c}{2}(x_3^2 - x_2^2) = -\frac{c}{2}(x^2 - 0) = -\frac{c}{2}x^2.$$

Uvrštavanjem u gornji izraz za promjenu kinetičke energije dobije se:

$$-\frac{c}{2}x^2 + mgx = -\frac{1}{2}mv_2^2 = -mgh$$

ili

$$-\frac{c}{2}x^2 + mgx + mgh = 0.$$

Uzima se ono rješenje dobivene kvadratne jednadžbe koje je veće od nule:

$$x = \frac{mg}{c} + \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\right)^2 + \frac{2hmg}{c}}.$$

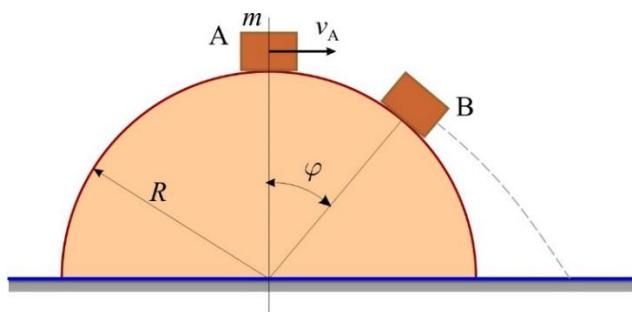
- c) U gornjem izrazu omjer  $x_{st} = mg/c$  predstavlja staticki progib opruge zbog težine  $mg$  čestice. Iz tog izraza slijedi da će skraćenje opruge u slučaju ispuštanja čestice s visine  $h=0$  biti:

$$x_0 = \frac{2mg}{c} = 2x_{st}.$$

Dakle, ako se na nerastegnutu oprugu postavi čestica mase  $m$ , skraćenje opruge bit će jednako dvostrukom statickom progibu. Kada ne bi bilo otpora gibanju, čestica bi vibrirala oko položaja ravnoteže. No u realnoj situaciji, zahvaljujući kakvim-takvim otporima, vibracije će se prigušiti, a čestica će se umiriti u položaju  $x = x_{st}$ .

### Primjer 3.15.

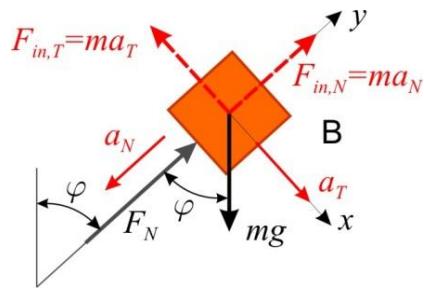
Čestica mase  $m$  gurnuta je iz položaja A brzinom  $v_A = \sqrt{gR/4}$  po glatkoj površini polucilindra radijusa  $R$  (sl. 3.25). Odrediti pri kolikom će se kutu  $\varphi$  čestica odvojiti od podloge i slobodno poletjeti zrakom.



Slika 3.25. Primjer 3.15.

*Rješenje:*

Da bi se čestica u položaju B odvojila od podloge, mora normalna reakcija podloge u tom položaju biti jednaka nuli. Stoga je potrebno česticu oslobođiti veza i razmotriti njenu dinamičku ravnotežu (sl. 3.26).



Slika 3.26. Dinamička ravnoteža čestice

Jednadžba dinamičke ravnoteže u smjeru osi  $y$  glasi:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{in,N} + F_N - mg \cos \varphi = 0,$$

pa, ako normalna reakcija polucilindra mora biti jednaka nuli ( $F_N = 0$ ), slijedi potreban iznos inercijske sile  $F_{in,N}$ :

$$F_{in,N} = mg \cos \varphi,$$

odnosno, kako je  $F_{in,N} = ma_N = mv_B^2 / R$ , slijedi:

$$m \frac{v_B^2}{R} = mg \cos \varphi \quad \text{ili} \quad v_B^2 = gR \cos \varphi.$$

Brzina čestice u položaju B dobije se iz zakona o promjeni kinetičke energije:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A-B}.$$

Rad vanjskih sila jednak je radu sile težine paketa na putu od točke A do B:

$$W = W_G = mgh = mgR(1 - \cos \varphi),$$

pa slijedi:

$$v_B^2 = v_A^2 + 2gR(1 - \cos \varphi) \quad \text{ili} \quad gR \cos \varphi = v_A^2 + 2gR(1 - \cos \varphi).$$

Nakon uvrštavanja brzine čestice u položaju A slijedi:

$$gR \cos \varphi + 2gR \cos \varphi = \frac{gR}{4} + 2gR \quad \text{ili}$$

$$3\cos \varphi = \frac{9}{4}, \quad \text{odnosno} \quad \cos \varphi = \frac{3}{4}$$

pa je kut kod kojega će se čestica odvojiti od podloge

$$\varphi = 41,4^\circ.$$

### Primjer 3.16.

Čovjek mase  $m = 80 \text{ kg}$  uspinje se stepeništem na kat (sl. 3.26) za 4 sekunde. Ako je visina kata 2,8 m, odrediti snagu koju čovjek treba uložiti pri uspinjanju.



Slika 3.27. Primjer 3.16.

Za koliko će vremena žarulja snage 75 Wata potrošiti istu količinu energije?

*Rješenje:*

1. *način:* Težina čovjeka je

$$F_G = mg = 80 \cdot 9,81 = 784,8 \text{ N},$$

dok je prosječna brzina kojom se čovjek uspinje na kat

$$v = \frac{h}{t} = \frac{2,8}{4} = 0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

pa je potrebna snaga za uspinjanje prema (3.25)

$$P = F_G \cdot v = 784,8 \cdot 0,7 = 549,4 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 549,4 \text{ W}.$$

2. *način:* Rad koji čovjek treba uložiti pri uspinjanju je

$$W = mgh = 80 \cdot 9,81 \cdot 2,8 = 2197,4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

pa, kako je snaga brzina izvođenja rada, slijedi:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{2197,4}{4} = 549,4 \text{ N} \cdot \text{m/s} = 549,4 \text{ W}.$$

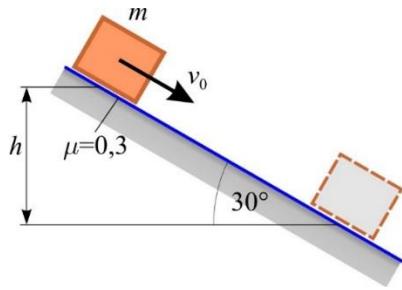
Žarulja od 75 W potrošit će jednaku količinu energije kao i čovjek pri uspinjanju u vremenu od

$$t_z = \frac{W}{P_z} = \frac{2197,4}{75} = 29,3 \text{ s}.$$

*Zaključak:* Gasite svjetlo kada vam nije potrebno.



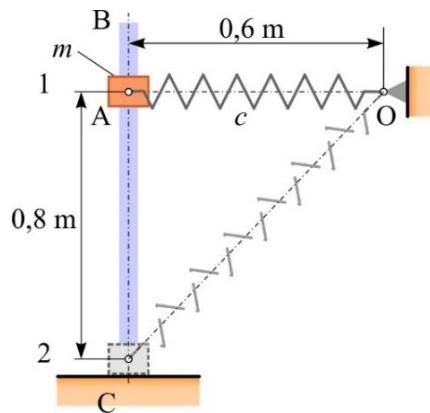
**Zadatak 3.16.** Čestica mase  $m$  klizi niz hrapavu kosinu (sl. Z.3.16). Ako je brzina čestice kada se nalazi na visini  $h = 1 \text{ m}$  jednaka  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ , odrediti njenu brzinu u trenutku kad se spusti niz kosinu za visinu  $h$ .



Slika Z.3.16. Zadatak 3.16.

Odgovor:  $v_1 = 5,042 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.17.** Klizač A mase  $m = 4 \text{ kg}$  vezan je za oslonac O s pomoću opruge konstante krutosti  $c = 100 \text{ N/m}$  (sl. Z.3.17). Klizač se giba duž glatke vertikalne vodilice BC iz početnog položaja (1) u kojem mu je brzina bila jednaka nuli.

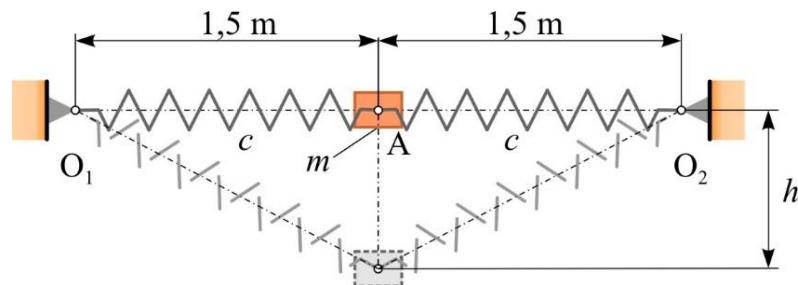


Slika Z.3.17. Zadatak 3.17.

Odrediti brzinu klizača kada stigne u položaj 2 ako je duljina nerastegnute opruge  $l_0 = 0,5 \text{ m}$ .

Odgovor:  $v_2 = 3,114 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.18.** Čestica mase  $m = 10 \text{ kg}$  pušta se iz stanja mirovanja, iz položaja u kojemu su opruge  $O_1A$  i  $O_2A$  horizontalne (sl. Z.3.18). Opruge imaju jednake konstante krutosti  $c = 500 \text{ N/m}$ , a u početnom su položaju nerastegnute.

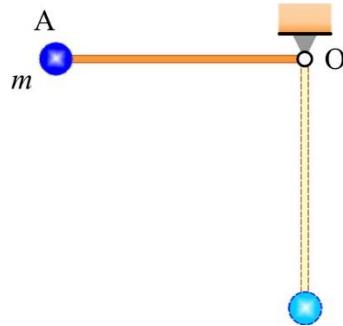


Slika Z.3.18. Zadatak 3.18.

Odrediti brzinu čestice kad se spusti za iznos  $h = 1 \text{ m}$ .

Odgovor:  $v_1 = 3,233 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.19.** Čestica A mase  $m = 12 \text{ kg}$  vezana je za oslonac O s pomoću tankog štapa duljine  $l = 0,75 \text{ m}$  i zanemarive mase (sl. Z.3.19). Sustav se pušta iz stanja mirovanja u kojem je štap OA horizontalan.

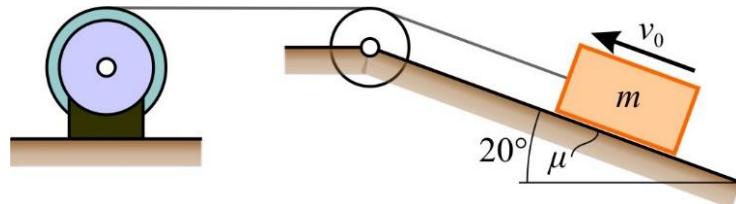


Slika Z.3.19. Zadatak 3.19.

Odrediti iznos reakcije u osloncu O pri prolasku štapa kroz vertikalni položaj.

*Odgovor:*  $F_O = 353,2 \text{ N}$ .

**Zadatak 3.20.** Elektromotor s pomoću užeta povlači teret A mase  $m = 250 \text{ kg}$  konstantnom brzinom  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  uz hrapavu kosinu (sl. Z.3.20). Koeficijent trenja klizanja iznosi  $\mu = 0,3$ .



Slika Z.3.20. Zadatak 3.20.

Odrediti potrebnu snagu elektromotora.

*Odgovor:*  $P = 7650,9 \text{ W}$ .

### 3.3.3. Potencijalna energija

Dio sila koje se javljaju u tehniči funkcije su samo položaja čestice u prostoru. Tako npr. gravitacijska sila Zemlje ovisi samo o položaju čestice u odnosu na Zemljino središte; sila elastične veze (opruge) na česticu o udaljenosti od položaja u kojem je opruga nerastegnuta; sila uzgona o položaju uronjene čestice i slično.

Za svaku od tih sila može se naći funkcija  $E_p$ , za koju vrijedi:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}, \quad (3.31)$$

tj. parcijalna derivacija funkcije  $E_p$  po nekoj od koordinata daje odgovarajuću komponentu sile.

Funkcija  $E_p$  naziva se *potencijalnom energijom*, a uvjet da ona postoji slijedi iz izraza (3.28), jer mora biti:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}. \quad (3.32)$$

Sile koje zadovoljavaju uvjet (3.32) jesu *potencijalne (konzervativne sile)*. Već je rečeno da rad takvih sila ne ovisi o putanji čestice. Ako se (3.31) uvrsti u (3.24), dobit će se:

$$W = - \int_1^2 \left( \frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \right) dx = - \int_1^2 dE_p = -(E_{p2} - E_{p1}), \quad (3.33)$$

odnosno rad konzervativnih sila jednak je razlici potencijala. Iz jednadžbe (3.33) izravno slijedi da je rad konzervativnih sila na zatvorenoj putanji jednak nuli.

#### 3.3.3.4. Zakon o održanju mehaničke energije

Uvrsti li se u jednadžbu (3.26), koja izražava zakon o promjeni kinetičke energije čestice, izraz za rad konzervativnih sila (3.33), dobit će se:

$$E_{k2} - E_{k1} = -(E_{p2} - E_{p1})$$

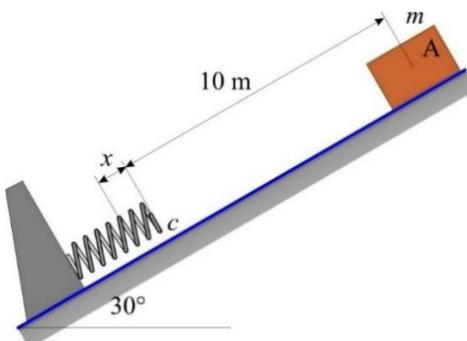
ili nakon sređivanja:

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} = \text{const.} \quad (3.34)$$

Jednakost (3.34) izražava *zakon o održavanju mehaničke energije: Zbroj kinetičke i potencijalne energije ima na svakom mjestu putanje, odnosno u svakom trenutku gibanja istu vrijednost*. Taj zakon vrijedi samo za konzervativne sile.

#### Primjer 3.17.

Teret mase  $m=10 \text{ kg}$  pušten je iz stanja mirovanja niz idealno glatku kosinu kuta nagiba  $\alpha=30^\circ$  (sl. 3.28). Nakon što prevali put od 10 m, teret udara o oprugu konstante krutosti  $c=5 \text{ kN/m}$ . Odrediti za koliko će se skratiti opruga ( $x=?$ ) u trenutku kada brzina tereta postane jednaka nuli.



Slika 3.28. Primjer 3.17.

*Rješenje:*

Trenje se u ovom slučaju može zanemariti pa se u sustavu javljaju samo konzervativne sile (težina tereta i sile u opruzi).

Stoga se može primijeniti zakon o održanju mehaničke energije, dan izrazom (3.34):

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} = \text{const.},$$

gdje je s 0 označen početni položaj tereta, a s 1 položaj u kojem će se teret na trenutak zaustaviti nakon udara u oprugu.

Kinetička energija tereta u oba razmatrana položaja jednaka je nuli pa slijedi da je  $E_{p0} = E_{p1}$ , gdje je potencijalna energija u položaju 0 jednaka potencijalnoj energiji tereta, dok je potencijalna energija u položaju 1 jednaka potencijalnoj energiji akumuliranoj u opruzi konstante krutosti  $c$ :

$$E_{p0} = mgh = mg(10+x)\sin 30^\circ, \quad E_{p1} = \frac{1}{2}cx^2.$$

Slijedi da je:

$$\frac{1}{2}cx^2 = mg(10+x)\sin 30^\circ \text{ ili } \frac{1}{2}cx^2 - (mg \sin 30^\circ) \cdot x - 10mg \sin 30^\circ = 0,$$

odnosno

$$5000x^2/2 = 10 \cdot 9.81 \cdot 0.5 \cdot x = 10 \cdot 10 \cdot 9.81 \cdot 0.5 = 0$$

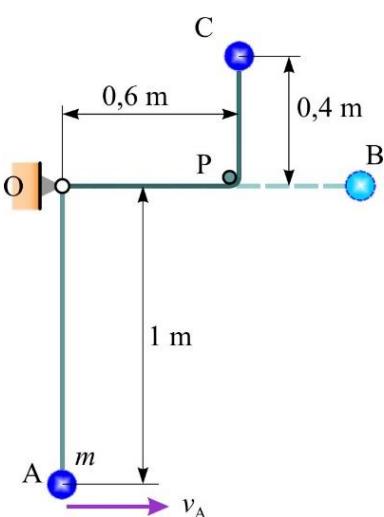
$$2500x^2 - 49,05 \cdot x - 490,5 = 0.$$

Rješenje dobivene kvadratne jednadžbe, pri čemu smisla ima samo pozitivni  $x$ , jest:

$$x = \frac{49,05 + \sqrt{49,05^2 + 4 \cdot 2500 \cdot 490,5}}{2 \cdot 2500} = \frac{49,05 + 2215,3}{5000} = 0,453 \text{ m}.$$



**Zadatak 3.21.** Kuglica mase  $m = 1 \text{ kg}$  visi na kraju užeta OA (sl. Z.3.21). U jednom se trenutku kuglici narine brzina  $v_A = 6 \text{ m/s}$ , a pri prolazu kroz horizontalni položaj uže se savije oko cijevi P zanemariya promjera.



Slika Z.3.21. Zadatak 3.21.

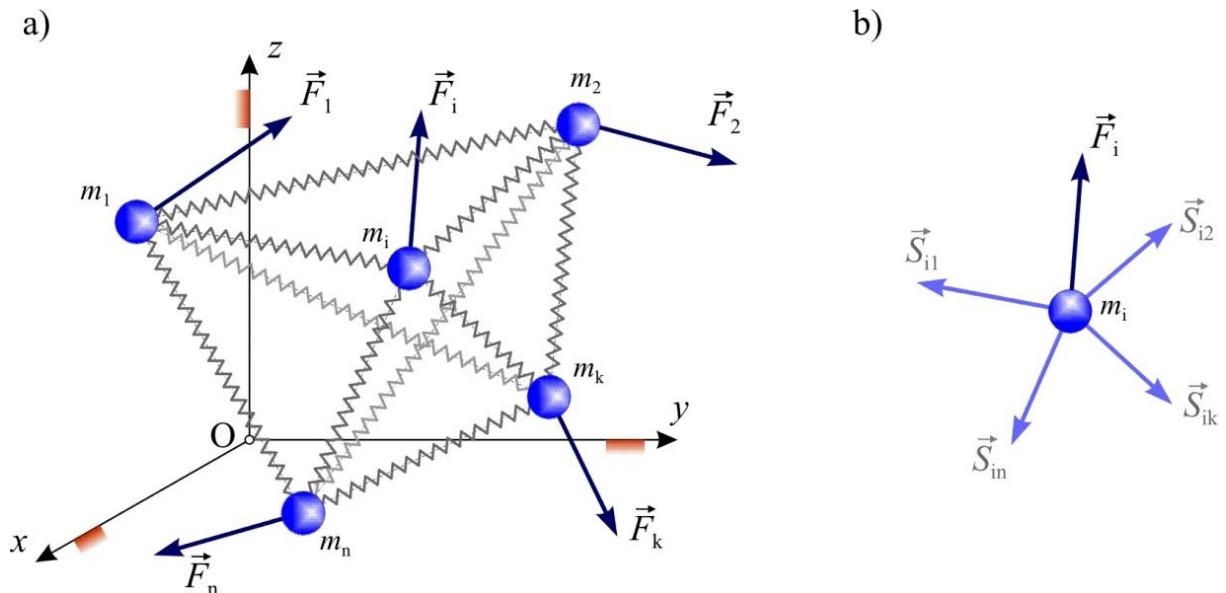
Odrediti: a) brzinu kuglice u položaju C, b) silu u užetu u tom položaju.

Odgovor: a)  $v_C = 2,921 \text{ m/s}$ ; b)  $S = 11,5 \text{ N}$ .

## 3.4. DINAMIKA SUSTAVA ČESTICA

### 3.4.1. Vanjske i unutarnje sile sustava

*Sustavom čestica naziva se skup međusobno povezanih čestica u kojem gibanje pojedine čestice ovisi o gibanju svih ostalih čestica.* Veze među česticama u sustavu mogu biti *krute*, *elastične* i *kinematske*, a nazivaju se *unutarnje veze*. Promotrit će se sustav sastavljen od n čestica masa  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$  (sl. 3.29.a). Djelovanje okoline na taj sustav čestica može se prikazati s n sila, od kojih svaka predstavlja rezultantu vanjskih sila za promatrano česticu, a sve te sile zajedno jesu vanjske sile sustava. Oslobođenjem i-te čestice od veza s ostalim česticama treba umjesto svake veze dodati odgovarajuću silu veze, kojih za tu česticu može biti n-1 (sl. 3.29.b).



Slika 3.29. *Sustav čestica*

Tako se npr. pri oslobođenju veze i-te čestice s j-tom dobije sila  $\vec{S}_{ij}$  kao posljedica djelovanja čestice j na česticu i. Sve te sile nazivaju se *unutarnjim* i mjerodavne su, zajedno s vanjskom silom  $\vec{F}_i$ , za gibanje i-te čestice.

Bez obzira na vrstu veze unutarnje se sile javljaju u parovima (prema 3. Newtonovu zakonu o akciji i reakciji), tako da je:

$$\vec{S}_{ij} = -\vec{S}_{ji}. \quad (3.35)$$

Zbog činjenice da sile  $\vec{S}_{ij}, \vec{S}_{ji}, \dots$ , ne postoje, kao i zbog (3.35), za cijeli sustav vrijedit će:

$$\sum_i \sum_j \vec{S}_{ij} = \vec{0}, \quad (3.36)$$

a bit će i suma momenata unutarnjih sila za po volji odabranu točku O jednaku nuli:

$$\sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{S}_{ij} = \vec{0}. \quad (3.37)$$

### 3.4.2. Opći zakoni dinamike sustava čestica

Kod upoznavanja općih zakona dinamike čestice navedena je mogućnost prikazivanja jedne vektorske jednadžbe s pomoću triju projekcija te jednadžbe na osi odabranog koordinatnog sustava, pa se to ovdje neće posebno isticati.

#### 3.4.2.1. Zakon o gibanju centra mase

Iz statike je poznato da se centar mase, koji je u tehničkim problemima istovjetan s težištem, izračunava prema izrazima:

$$mx_C = \sum m_i x_i; \quad my_C = \sum m_i y_i; \quad mz_C = \sum m_i z_i, \quad (3.38)$$

odnosno prema izrazima:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}, \quad (3.39)$$

gdje je s  $m$  označena ukupna masa sustava  $m = \sum m_i$ . Izrazi (3.39) mogu se prikazati vektorskog jednadžbom:

$$m\vec{r}_C = \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (3.40)$$

ili pak u obliku:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (3.41)$$

Diferencijalna jednadžba gibanja i-te čestice glasi:

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{S}_{ij} = m_i \vec{a}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i, \quad (3.42)$$

pa će, nakon zbrajanja, za sustav čestica vrijediti:

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{S}_{ij} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i. \quad (3.43)$$

Drugi član s lijeve strane gornje jednadžbe jednak je nuli (prema izrazu 3.36), dok se dvostrukim deriviranjem jednadžbe (3.40) po vremenu dobije:

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (3.44)$$

pa iz (3.43) konačno slijedi:

$$\vec{F}_R = \sum_i \vec{F}_i = m\ddot{\vec{r}}_C. \quad (3.45)$$

Jednadžba (3.45) izražava *zakon gibanja centra mase*, koji glasi: *centar mase giba se kao čestica ukupne mase  $m$  pod djelovanjem sile  $\vec{F}_R$  koja predstavlja glavni vektor svih vanjskih sila koje djeluju na sustav*. Taj zakon u analitičkom obliku glasi:

$$ma_{Cx} = F_{Rx}; \quad ma_{Cy} = F_{Ry}; \quad ma_{Cz} = F_{Rz}. \quad (3.46)$$

### 3.4.2.2. Zakon o održanju centra masa

Kada je glavni vektor svih vanjskih sila koje djeluju na promatrani sustav čestica jednak nuli (nul vektoru), tj. ako je  $\vec{F}_R = \vec{0}$ , tada je:

$$m\vec{v}_C = m\dot{\vec{r}}_C = \overrightarrow{const}. \quad (3.47)$$

što znači da se u tom slučaju centar mase giba jednoliko pravocrtno ili pak miruje. Ako centar mase ima u početnom trenutku brzinu koja je jednaka nuli, bit će zbog (3.47):

$$\dot{\vec{r}}_C = \vec{0},$$

odnosno:

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{const}. \quad (3.48)$$

Jednadžba (3.48) izražava *zakon o održanju centra masa*, prema kojemu čestice u sustavu mogu mijenjati svoj međusobni položaj, ali se položaj centra masa neće promijeniti ako je glavni vektor vanjskih sila koje djeluju na sustav jednak nuli.

Ako je projekcija rezultante vanjskih sila koje djeluju na sustav čestica na neku os (npr. os  $x$ ) jednak nuli i ako je početna brzina centra mase u smjeru te osi jednaka nuli  $\dot{x}_{C0} = 0$ , tada će vrijediti zakon o održanju centra mase u smjeru te osi, odnosno

$$mx_C = \sum m_i x_i = const. \quad (3.49)$$

Dakle, u ovom slučaju čestice u sustavu mogu mijenjati svoj međusobni položaj, ali će koordinata  $x_C$  položaja centra masa ostati nepromijenjena.

Ako je u početnom trenutku koordinata  $x$  položaja čestice 1  $x_1$ , čestice 2  $x_2$ , i tako dalje do zadnje čestice  $n$  s koordinatom  $x_n$ , tada će u promatranom trenutku te koordinate biti  $x_1 + \Delta x_1$ ,  $x_2 + \Delta x_2, \dots$ , do  $x_n + \Delta x_n$ .

S obzirom na (3.38) i (3.49) može se pisati:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = m_1 (x_1 + \Delta x_1) + m_2 (x_2 + \Delta x_2) + \dots + (x_n + \Delta x_n)$$

ili nakon sređivanja:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = 0 \quad (3.50)$$

pa se može zaključiti kako je suma umnožaka masa pojedinih čestica i prirasta njihovih apsolutnih pomaka jednaka nuli.

U skraćenom zapisu izraz (3.50) glasi:

$$\sum m_i \Delta x_i = 0. \quad (3.51)$$

### 3.4.2.3. Zakon o promjeni količine gibanja

Količina gibanja i-te čestice je  $\vec{B}_i = m_i \vec{v}_i$ , a suma količine gibanja svih čestica predstavlja ukupnu količinu gibanja sustava:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i,$$

ili

$$\vec{B} = m \vec{v}_C = m \dot{\vec{r}}_C. \quad (3.52)$$

Prema zakonu o promjeni količine gibanja za i-tu česticu vrijedi:

$$\vec{B}_{i2} - \vec{B}_{i1} = \int_1^2 \vec{F}_i dt + \sum_j \int_1^2 \vec{S}_{ij} dt,$$

što zbrojeno za sve čestice sustava daje:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i dt + \sum_i \sum_j \int_1^2 \vec{S}_{ij} dt.$$

Budući da je drugi član na desnoj strani jednak nuli, slijedi:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i dt = \int_1^2 \vec{F}_R dt. \quad (3.53)$$

Jednadžba (3.53) jest vektorski zapisan *zakon o promjeni količine gibanja sustava čestica: Prirast količine gibanja sustava čestica u nekom vremenskom intervalu jednak je sumi impulsa svih vanjskih sila u tom intervalu (što odgovara impulsu glavnog vektora svih sila).*

Deriviranjem izraza (650) po vremenu dobije se:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \vec{F}_R, \quad (3.54)$$

tj. derivacija količine gibanja sustava čestica po vremenu jednaka je glavnom vektoru svih sila koje na taj sustav djeluju.

U posebnom slučaju, kada je  $\vec{F}_R = \vec{0}$ , bit će količina gibanja sustava konstantan vektor:

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_1 = \overrightarrow{const.}, \quad (3.55)$$

a taj zakon zove se *zakon o održanju količine gibanja sustava čestica*. Prema tom zakonu pojedine čestice mogu mijenjati brzine, ali tako da količina gibanja sustava ostane nepromijenjena.

#### 3.4.2.4. Zakon o promjeni momenta količine gibanja

Moment količine gibanja i-te čestice za nepomičnu točku O je:

$$\vec{K}_{\text{O}i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

pa se, vektorskim zbrajanjem, dobije za cijeli sustav:

$$\vec{K}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i . \quad (3.56)$$

Deriviranjem izraza (3.56) po vremenu slijedi:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right) = \sum_i \left( \dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \right) \quad (3.57)$$

pri čemu je, zbog  $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$ , prvi član u zagradi na lijevoj strani jednak nuli.

S pomoću jednadžbe (3.43) izraz (3.57) postaje:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{S}_{ij} ,$$

gdje je drugi član na desnoj strani jednak nuli, pa je konačno:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_O^{\vec{F}_i} \quad (3.58)$$

što izražava *zakon o promjeni momenta količine gibanja sustava čestica: Derivacija momenta količine gibanja sustava za točku O po vremenu jednaka je glavnom vektoru momenta svih sila za tu istu točku.*

*Zakon o održanju momenta količine gibanja* slijedi iz jednadžbe (3.58). Naime, kada je glavni vektor momenta svih sila za točku O jednak nuli, tada je moment količine gibanja sustava čestica za tu istu točku konstantan vektor:

$$\vec{K}_{O2} = \vec{K}_{O1} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (3.59)$$

#### 3.4.2.5. Zakon o promjeni kinetičke energije

Kinetička energija i-te čestice je:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

pa će ukupna kinetička energija sustava biti:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 . \quad (3.60)$$

*Zakon o promjeni kinetičke energije sustava* sada je:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2 = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \circ d\vec{r}_i + \sum_i \sum_j \int_1^2 \vec{S}_{ij} \circ d\vec{r} \quad (3.61)$$

ili skraćeno:

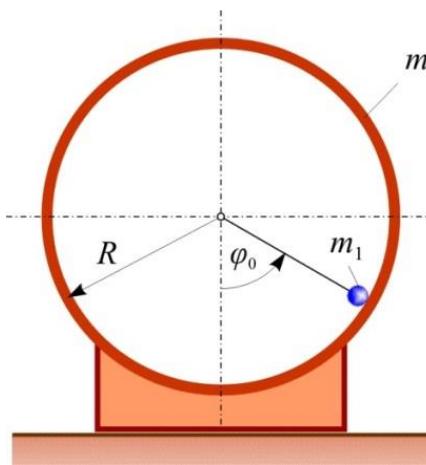
$$E_{k2} - E_{k1} = W. \quad (3.62)$$

Dakle, *prirast kinetičke energije sustava čestica, od položaja 1 do položaja 2, jednak je radu svih vanjskih i unutarnjih sila sustava.*

Rad unutarnjih sila jednak je nuli samo ako su veze u sustavu krute.

### Primjer 3.18.

U cilindru mase  $m_2$  nalazi se čestica mase  $m_1$  (sl. 3.30). U početnom trenutku sustav je mirovao, a čestica se nalazila u položaju definiranom kutom  $\varphi_0$ . Cilindar se može pomicati translatorno po glatkoj horizontalnoj podlozi. Odrediti za koliko će se pomaknuti cilindar kada čestica dođe u najniži položaj.



Slika 3.30. Primjer 3.18.

*Rješenje:*

Na sustav djeluju težine čestice i cilindra  $m_1g$  i  $m_2g$  te normalna reakcija podloge. Projekcija glavnog vektora vanjskih sila na os  $x$  jednaka je nuli, tj.  $F_{Rx} = 0$ . Budući da je u početnom trenutku sustav mirovao, primijenit će se zakon o održanju centra mase (3.51):

$$\sum m_i \Delta x_i = 0$$

što u ovom primjeru daje:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 = 0.$$

Označi li se s  $\Delta x = \Delta x_2$  absolutni pomak cilindra, koji je ujedno i prijenosni pomak čestice, bit će absolutni pomak čestice:

$$\Delta x_1 = \Delta x - R \sin \varphi_0,$$

pa slijedi:

$$m_1 (\Delta x - R \sin \varphi_0) + m_2 \Delta x_2 = 0,$$

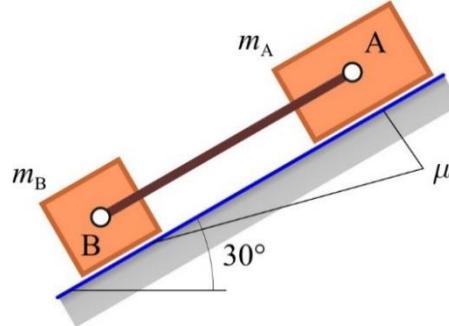
odnosno:

$$\Delta x = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \sin \varphi_0.$$

### Primjer 3.19.

Blokovi A i B, masa  $m_A = 20 \text{ kg}$  i  $m_B = 15 \text{ kg}$  vezani su štapom zanemarive mase (sl. 3.31).

Sustav je pušten iz stanja mirovanja niz hrapavu kosinu ( $\mu = 0,25$ ).

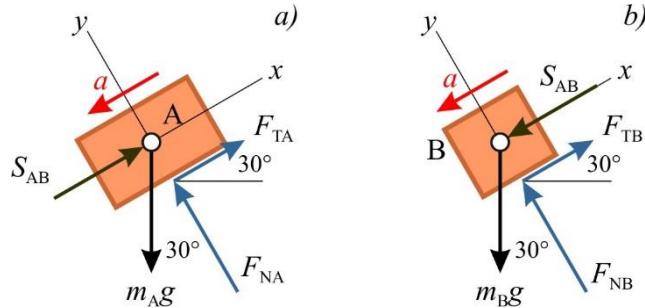


Slika 3.31. Primjer 3.19.

Odrediti put koji će prevaliti blokovi u prvih 5 sekunda gibanja i iznos sile u štalu AB.

*Rješenje:*

Terete A i B treba oslobođiti od veza te ucrtati sile koje na njih djeluju (sl. 3.32.a i b).



Slika 3.32. Tereti oslobođeni veza: a) teret A, b) teret B.

Za teret A mogu se napisati sljedeće jednadžbe gibanja:

$$-m_A a = -m_A g \sin 30^\circ + S_{AB} + F_{TA} \quad (1)$$

$$0 = F_{NA} - m_A g \cos 30^\circ. \quad (2)$$

Za teret B te jednadžbe glase:

$$-m_B a = -m_B g \sin 30^\circ - S_{AB} + F_{TB} \quad (3)$$

$$0 = F_{NB} - m_B g \cos 30^\circ. \quad (4)$$

Iz jednadžba (2) i (4) slijedi:

$$F_{NA} = m_A g \cos 30^\circ, \quad F_{NB} = m_B g \cos 30^\circ,$$

pa je

$$F_{\text{TA}} = \mu \cdot F_{\text{NA}} = \mu \cdot m_A g \cos 30^\circ, \quad F_{\text{TB}} = \mu \cdot F_{\text{NB}} = \mu \cdot m_B g \cos 30^\circ.$$

Sada se jednadžbe (1) i (3) mogu napisati u obliku:

$$m_A a = m_A g \sin 30^\circ - S_{\text{AB}} - \mu \cdot m_A g \cos 30^\circ \quad (1')$$

$$m_B a = m_B g \sin 30^\circ + S_{\text{AB}} - \mu \cdot m_B g \cos 30^\circ, \quad (3'),$$

a nakon zbrajanja jednadžba (1') i (3') slijedi:

$$(m_A + m_B) \cdot a = (m_A + m_B) \cdot g \sin 30^\circ - (m_A + m_B) \cdot \mu \cdot g \cos 30^\circ$$

$$a = g \cdot (\sin 30^\circ - \mu \cdot \cos 30^\circ) = 9,81 \cdot (0,5 - 0,25 \cdot \sqrt{3}/2) = 2,781 \text{ m/s}^2.$$

Budući da je ubrzanje konstantno, put prevaljen u prvih 5 sekunda gibanja je

$$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,781 \cdot 5^2 = 36,76 \text{ m}.$$

Sila u štapu AB slijedi iz jednadžbe (1'):

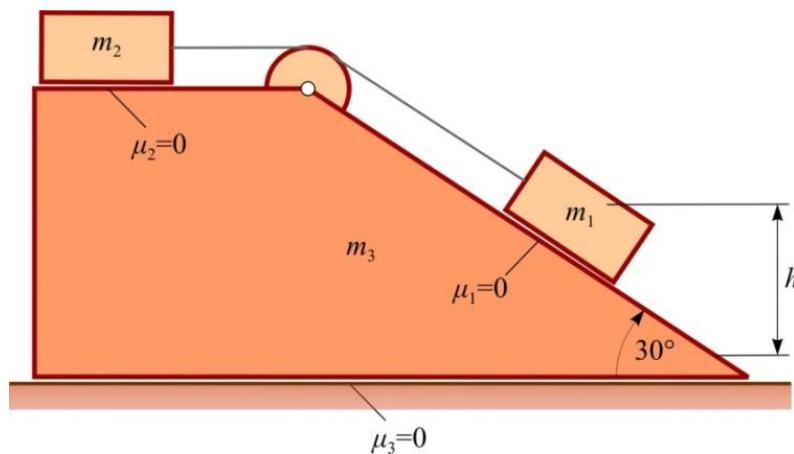
$$S_{\text{AB}} = m_A (g \sin 30^\circ - \mu \cdot g \cos 30^\circ - a) = 0.$$

Iz rezultata je očevidno da se sustav mogao razmatrati kao jedna čestica ukupne mase  $(m_A + m_B)$ .

### Primjer 3.20.

Duž kosine klina oblika trapeza i mase  $m_3$ , koji leži na glatkoj horizontalnoj podlozi, mogu se gibati čestice masa  $m_1$  i  $m_2$  (sl. 3.33). Čestice su međusobno povezane tankim užetom. Odrediti: a) koliki će biti pomak klina kad se čestica 1 spusti za visinu  $h$  iz stanja mirovanja; b) kolika će u tom trenutku biti brzina klina?

Zadano:  $m_1 = 3m$ ;  $m_2 = m$ ;  $m_3 = 2m$ ;  $h = 1 \text{ m}$ .



Slika 3.33. Primjer 3.20.

Rješenje:

a) **Pomak klini.** Kako je podloga po kojoj se giba klin glatka, bit će projekcija rezultante vanjskih sila na os  $x$  jednaka nuli, tj.  $F_{Rx} = 0$ . Budući da je u početnom trenutku sustav mirovao, primijenit će se zakon o održanju centra mase (3.51):

$$\sum m_i \Delta x_i = 0,$$

što u ovom primjeru daje:

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0,$$

pri čemu su absolutni pomaci čestica 1 odnosno 2:

$$\Delta x_1 = \Delta x_3 + h / \tan 30^\circ, \quad \Delta x_2 = \Delta x_3 + h / \sin 30^\circ$$

jer je  $h / \tan 30^\circ$  horizontalni pomak koji bi imala čestica 1 kada bi klin mirovao (relativni pomak čestice 1), a  $h / \sin 30^\circ$  horizontalni pomak koji bi imala čestica 2 kada bi klin mirovao (relativni pomak čestice 2), a pomak klini je za obje čestice prijenosni pomak.

Slijedi da je

$$\Delta x_3 = -\frac{m_1 / \tan 30^\circ + m_2 / \sin 30^\circ}{m_1 + m_2 + m_3} h = -1,199 \cdot h = -1,199 \text{ m.}$$

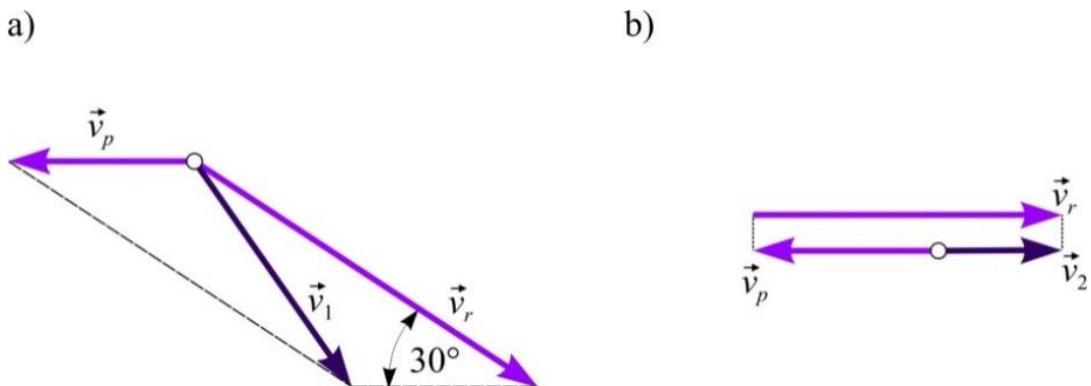
b) **Brzina klini.** Budući da je zadan pomak i početna brzina čestica, primijenit će se zakon o promjeni kinetičke energije sustava čestica (3.62):

$$E_k - E_{k0} = W.$$

Kinetička energija sustava na početku gibanja jednaka je nuli tako da gornji izraz, razvijen, glasi:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = W_{G1} + W_{G2} + W_{G3} \quad (\text{A})$$

gdje su  $v_1$ ,  $v_2$  i  $v_3$  brzine čestica 1 i 2, odnosno klini 3 u krajnjem položaju. Ovdje, međutim, treba voditi računa o tome da su svi opći zakoni izvedeni za absolutne pomake, absolutne brzine i absolutna ubrzanja. Tako će brzina klini  $v_3$ , koja jest njegova absolutna brzina, biti prijenosna brzina za čestice 1 i 2. Relativna brzina tih čestica, zbog veze užetom, međusobno je jednak po iznosu.



Slika 3.34. Primjer 3.20: absolutne brzine čestica 1 i 2.

Apsolutne brzine dobiju se vektorskim zbrajanjem prijenosne i relativne brzine (sl. 3.34.a i 3.34.b).

Iz prikazanih slika brzina slijedi:

$$v_1 = \sqrt{v_3^2 + v_r^2 - 2v_3v_r \cos 30^\circ} ;$$

$$v_2 = v_r - v_3 .$$

Radovi vanjskih sila su:

$$W_{G1} = m_1 gh = 3mgh ; \quad W_{G2} = 0 ; \quad W_{G3} = 0 ,$$

pa jednadžba (A) postaje:

$$\frac{1}{2} 3mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} 2mv_3^2 = 3mgh$$

ili nakon množenja s 2 i dijeljenja s  $m$ :

$$3v_1^2 + v_2^2 + 2v_3^2 = 6gh . \quad (\text{B})$$

Očeviđno je da će se uvrštavanjem dobivenih izraza za brzine u jednadžbu (B) dobiti jedna jednadžba s dvije nepoznate veličine:  $v_3$  i  $v_r$ .

Potrebno je, dakle, primijeniti još jedan od općih zakona dinamike sustava čestica.

Kako je projekcija glavnog vektora sila na os  $x$  jednaka nuli, može se napisati zakon o održanju količine gibanja u pravcu te osi:

$$B_x - B_{0x} = 0 \quad \text{ili} \quad B_x = B_{0x} = 0 ,$$

jer je sustav u početku mirovao.

Dalje je:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} - m_3 v_{3x} = 0 ,$$

$$m_1 \left( v_r \cos 30^\circ - v_3 \right) + m_2 (v_r - v_3) - m_3 v_3 = 0$$

ili nakon uvrštavanja zadanih vrijednosti:

$$3m \left( v_r \frac{\sqrt{3}}{2} - v_3 \right) + m(v_r - v_3) - 2mv_3 = 0 ,$$

pa nakon kraćenja s  $m$  i množenja s 2:

$$3\sqrt{3}v_r - 6v_3 + 2v_r - 2v_3 - 4v_3 = 0$$

odakle je

$$v_r = \frac{12}{3\sqrt{3} + 2} v_3 = 1,668v_3 .$$

Brzine čestica 1 i 2 sada su:

$$v_1 = 0,945v_3; \quad v_2 = 0,668v_3.$$

Dalje je, iz (B):

$$3(0,945v_3)^2 + (0,668v_3)^2 + 2v_3^2 = 6gh, \text{ ili } 5,126v_3^2 = 6gh$$

$$v_3 = 1,08\sqrt{gh} = 3,383 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



**Zadatak 3.22.** Kovčeg mase  $m_1 = 30 \text{ kg}$  bačen je brzinom  $v_0 = 4 \text{ m/s}$  na kolica mase  $m_2 = 80 \text{ kg}$  koja su do tog trenutka mirovala (sl. Z.3.22).

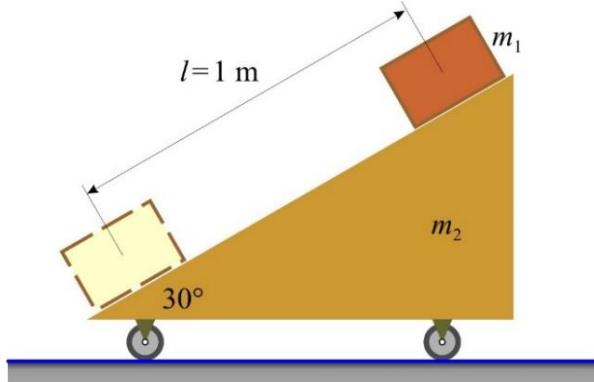


Slika Z.3.22. *Zadatak 3.22.*

Zanemarujući trenje između kotača kolica i podloge, odrediti brzinu kovčega i kolica u trenutku kad se kovčeg zaustavi na kolicima.

*Odgovor:*  $v_1 = 1,091 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.23.** Teret mase  $m_1 = 30 \text{ kg}$  nalazi se na kosini prizme mase  $m_2 = 70 \text{ kg}$  koja se s pomoću kotačića može kotrljati bez klizanja po horizontalnoj podlozi (sl. Z.3.23).



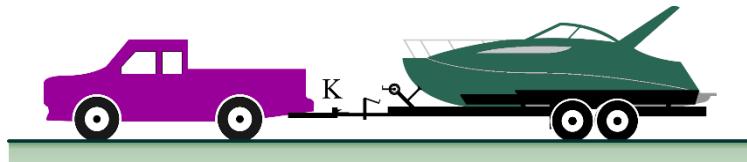
Slika Z.3.23. *Zadatak 3.23.*

Odrediti pomak prizme u trenutku kad se teret spusti niz prizmu za  $l = 1 \text{ m}$ . Sustav je u početnom trenutku pridržavan u stanju mirovanja (položaj na slici Z.3.26).

*Odgovor:*  $\Delta x_2 = 0,26 \text{ m}$ .

**Zadatak 3.24.** Kamionet mase  $m_1 = 2200 \text{ kg}$  giba se duž ravnog dijela ceste brzinom  $v_1 = 20 \text{ m/s}$  i vuče za sobom brod mase  $m_2 = 800 \text{ kg}$ . Masa prikolice (*trajlera*) na kojoj je

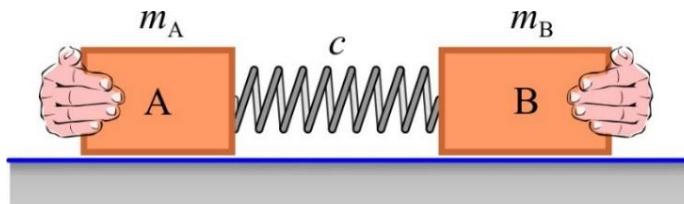
vezan brod jest  $m_3 = 130 \text{ kg}$  (sl. 3.24). Zbog prepreke uočene na kolniku vozač započinje kočenje i uspijeva zaustaviti kamionet nakon 60 metara; kočioni sustav na prikolici ne radi. Izračunati prosječnu silu kočenja ( $F_W$ ) i horizontalnu silu na kuku K ( $F_K$ ).



Slika Z.3.24. Zadatak 3.24.

Odgovor:  $a = -3,333 \text{ m/s}^2$ ,  $F_W = 10433 \text{ N}$ ,  $F_K = 3100 \text{ N}$ .

**Zadatak 3.25.** Opruga konstante krutosti  $c = 2000 \text{ N/m}$  čvrsto je vezana za blok A mase  $m_A = 20 \text{ kg}$ . Blokom B mase  $m_B = 15 \text{ kg}$  radnik je sabio oprugu za 200 mm (sl. Z.3.25). U jednom trenutku radnik ispusti sustav iz ruku.

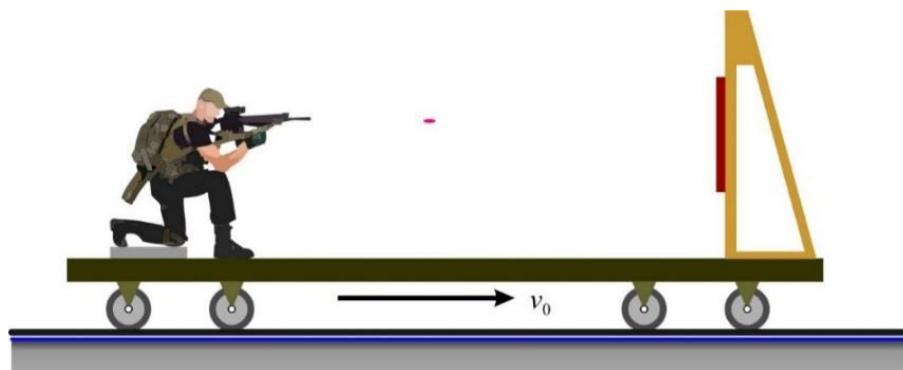


Slika Z.3.25. Zadatak 3.25.

Zanemarujući trenje između blokova i podloge, odrediti brzinu bloka B u trenutku kada izgubi kontakt s oprugom.

Odgovor:  $v_B = 2,606 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.26.** Strijelac se nalazi na platformi koja se giba po tračnicama brzinom  $v_0 = 2 \text{ m/s}$ . Strijelac gađa metu na platformi i u jednom trenutku ispaljuje metak mase  $m_2 = 0,15 \text{ kg}$  brzinom  $v_2 = 1000 \text{ m/s}$  u odnosu na platformu. Izračunati brzinu platforme: a) ako strijelac pogodi metu koja zaustavlja metak, b) ako strijelac promaši metu, a masa svega što se na platformi nalazi iznosi  $m_1 = 300 \text{ kg}$  (sl. Z.3.26).



Slika Z.3.26. Zadatak 3.26.

Odgovor: a)  $v_1 = 2 \text{ m/s}$ ; b)  $v_2 = 1,5 \text{ m/s}$ .

### 3.5. OSNOVE TEORIJE UDARA

#### 3.5.1. Osnovna jednadžba teorije udara

Pri gibanju tijela pod djelovanjem do sada upoznatih sila brzine točaka tijela mijenjale su se kontinuirano, tj. funkcija  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  bila je neprekinuta i derivabilna.

Promotri li se promjena količine gibanja čestice u nekom kratkom vremenskom intervalu  $\tau$ , bit će:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \int_0^\tau \vec{F} dt \cong \vec{F}_{sr} \cdot \tau, \quad (3.63)$$

gdje je  $\vec{F}_{sr}$  srednja sila u intervalu  $\tau$ .

Ako je  $\tau$  vrlo maleno (reda veličina 1/1000 s) bit će i impuls  $\vec{I} = \vec{F}_{sr} \cdot \tau$  mala veličina. To nadalje znači da će i prirast vektora brzine  $\Delta\vec{v}$  u tom intervalu biti malen (odnosno težiti nuli).

Međutim, ako se u promatranom vremenskom intervalu  $\tau$  pojave jako velike sile (reda veličina  $1/\tau$ ), bit će odgovarajući impuls sile, a prema tome i prirast brzine – konačna veličina.

*Pojava pri kojoj se brzina čestice (tijela) u vrlo malom vremenskom intervalu promjeni za konačnu veličinu naziva se udar.*

Sile koje izazivaju ovakve, konačne promjene brzina u kratkom vremenskom intervalu  $\tau$  nazivaju se *udarne sile*.

U dalnjem izlaganju označavat će se brzina prije djelovanja udarnih sile s  $\vec{v}$ , a nakon udara s  $\vec{v}'$ .

Prepostavi li se da na česticu za vrijeme udara, osim udarnih, djeluje i niz neudarnih sile, čije se djelovanje zamjenjuje rezultantom  $\vec{F}_r$ , ukupni impuls je:

$$\vec{I} = \int_0^\tau \vec{F}_u dt + \int_0^\tau \vec{F}_r dt = \vec{I}_u + (\vec{F}_r)_{sr} \cdot \tau, \quad (3.64)$$

gdje je  $(\vec{F}_r)_{sr}$  srednja rezultanta neudarnih sila u intervalu  $\tau$ .

Veličina  $(\vec{F}_r)_{sr} \cdot \tau$  može se zanemariti u odnosu na  $\vec{I}_u$ , odnosno utjecaj neudarnih sile na promjenu količine gibanja za trajanja udara se zanemaruje. Zakon o promjeni količine gibanja glasi:

$$m\vec{v}' - m\vec{v} = \vec{I}_u \quad (3.65)$$

ili u analitičkom obliku:

$$mv'_x - mv_x = I_{ux}, \quad mv'_y - mv_y = I_{uy}, \quad mv'_z - mv_z = I_{uz}. \quad (3.66)$$

Može se zaključiti sljedeće: *Promjena količine gibanja čestice pri udaru jednaka je impulsu svih udarnih sila koje na česticu djeluju.*

Jednadžba (3.65) ili (3.66) predstavlja *osnovnu jednadžbu teorije udara*. Označi li se put koji će čestica prevaliti za vrijeme udara s  $s_u$ , bit će:

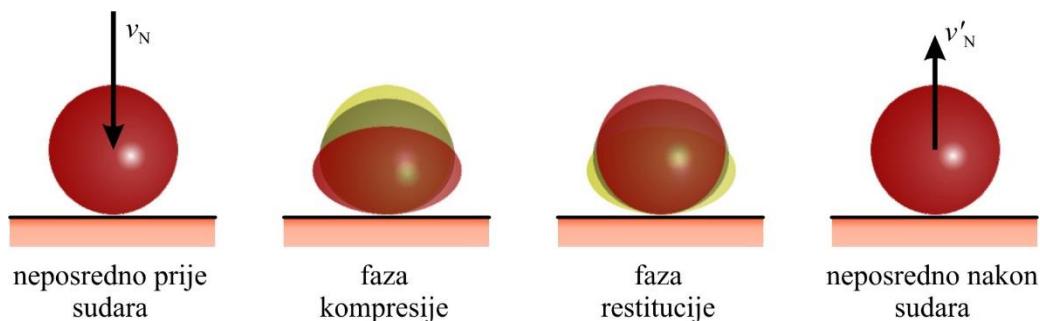
$$s_u = \int_0^\tau v dt = v_{sr} \cdot \tau . \quad (3.67)$$

Budući da je veličina  $v_{sr}$  konačna veličina, vrijednost  $s_u$  može se zanemariti. Uzima se, dakle, da nema pomaka čestice za vrijeme udara.

### 3.5.2. Koeficijent udara

Teorija udara uvodi u razmatranja i elastična svojstva tijela. Uvođenjem elastičnih svojstava tijela odstupa se od hipoteze o apsolutno krutom tijelu i u analizi uvodi čvrsto deformabilno tijelo. U tom smislu proces udara podijeljen je u dvije karakteristične faze (sl. 3.35):

- 1) *faza kompresije* – u kojoj cijelokupna kinetička energija prelazi u potencijalnu energiju deformiranih tijela;
- 2) *faza restitucije* – u kojoj unutarnje elastične sile nastoje povratiti prvotni oblik tijela.



Slika 3.35. *Faze sudara*

U fazi restitucije akumulirana potencijalna energija prelazi ponovno u kinetičku, ali samo djelomično. Naime, dio energije ostaje „zarobljen“ u trajno deformiranom tijelu, dok se dio izgubi na zagrijavanje tijela. Prema tome, brzina tijela (čestice) nakon udara bit će u općem slučaju manja od njegove brzine prije udara.

Koeficijent udara u teoriju udara uveo je Newton, a definira se na sljedeći način:

*Koeficijent udara (restitucije) k predstavlja omjer relativnih brzina točaka koje se sudaraju, nakon udara i prije udara, u smjeru normale udara.*

$$k = \left( \frac{\dot{v}_r}{v_r} \right)_N . \quad (3.68)$$

Ovaj koeficijent određuje se eksperimentalno, a njime su obuhvaćena elastična svojstva tijela. Iz definicije koeficijenta restitucije slijedi da  $k$  poprima vrijednosti:

$$0 \leq k \leq 1. \quad (3.69)$$

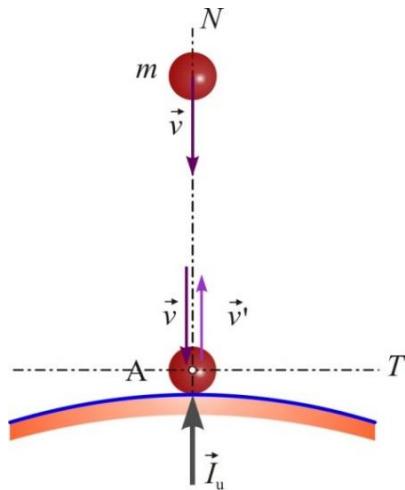
Kada je  $k = 0$ , to znači da je relativna brzina u pravcu normale nakon udara jednaka nuli – udar je *idealno plastičan*.

Ako je  $k = 1$ , iz jednakosti (3.68) slijedi da su relativne brzine prije udara i nakon njega jednake – udar je *idealno elastičan*.

### 3.5.3. Udar čestice o nepomičnu pregradu

### **3.5.3.1. Normalni udar**

Neka se čestica mase  $m$  giba brzinom  $\vec{v}$  duž normale AN na nepomičnu površinu (sl. 3.36).



Slika 3.36. Udar čestice o nepomičnu pregradu

U trenutku dolaska čestice u položaj A nastaje udar. Taj udar je *normalan* zato što se pravac brzine poklapa s pravcem normale. Kako je brzina površine jednaka nuli, iz (3.68) slijedi:

$$k = \frac{v'}{v}$$

pa je:

$$v' = kv. \quad (3.70)$$

Ako se odabere pozitivan smjer normale prema gore, jednadžba (3.65), projicirana na normalu, glasi:

$$mv' - (-mv) = I_u,$$

odakle slijedi veličina udarnog impulsa:

$$I_u = m(v' + v) = (1+k)mv. \quad (3.71)$$

**Impuls udarne sile je, prema definiciji:**

$$I_u = \int_0^\tau F_u dt = (F_u)_{sr} \cdot \tau,$$

pa je srednja vrijednost udarne reakcije površine:

$$(F_u)_{sr} = \frac{I_u}{\tau}. \quad (3.72)$$

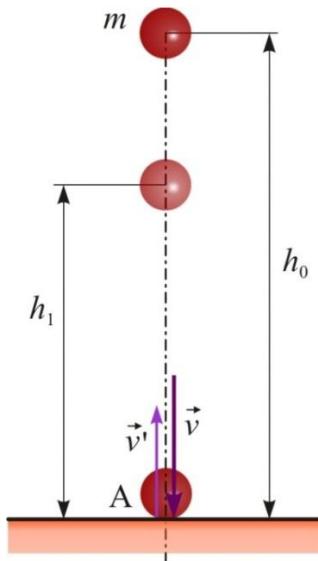
Gubitak kinetičke energije pri udaru jednak je razlici kinetičkih energija prije udara i nakon njega:

$$\Delta E_k = E_k - E'_k, \quad (3.73)$$

što u promatranom slučaju iznosi:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v^2 - v'^2) = \frac{1}{2}(1-k^2)mv^2. \quad (3.74)$$

Rezultati, dobiveni promatranjem normalnog udara čestice o nepomičnu pregradu, mogu se iskoristiti za eksperimentalno određivanje koeficijenta udara  $k$ .



Slika 3.37. Eksperimentalno određivanje koeficijenta udara

Pusti li se čestica mase  $m$  s visine  $h_0$  da udari o nepomičnu površinu, kako je to prikazano na slici 3.37, njena će brzina neposredno prije udara biti:

$$v = \sqrt{2gh_0}.$$

Nakon udara čestica će doseći visinu  $h_1 < h_0$ , što znači da je neposredno nakon udara njena brzina bila:

$$v' = \sqrt{2gh_1}.$$

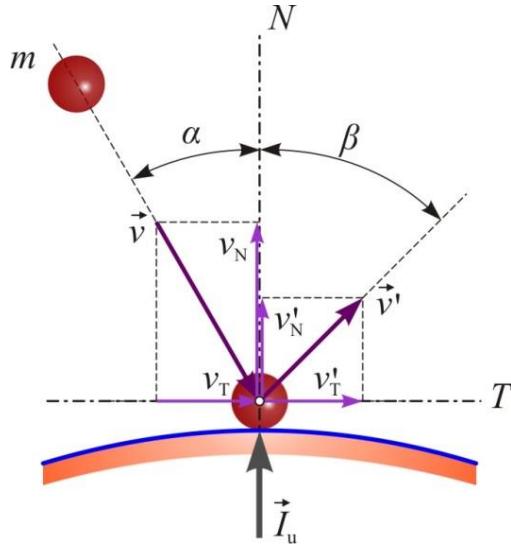
Koeficijent restitucije sada je:

$$k = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}. \quad (3.75)$$

Na ovaj način određeni koeficijenti restitucije su:  $k = 8/9$  za slonovu kost;  $k = 5/9$  za čelik,  $k = 1/2$  za drvo, i tako dalje.

### 3.5.3.2. Kosi udar

Ovdje će se proučiti takav udar čestice o glatku nepomičnu podlogu kod kojega se pravac brzine čestice prije udara  $\vec{v}$  ne poklapa s normalom  $N$  u točki udara, nego s njom gradi kut  $\alpha$  (sl. 3.38). Kut  $\alpha$  naziva se *upadni kut*.



Slika 3.38. *Kosi udar čestice*

Nakon udara brzina čestice bit će  $\vec{v}'$ , a njen pravac gradi kut  $\beta$  s normalom  $N$ ; naziva se *kut odbijanja* i u općem slučaju je  $\beta \neq \alpha$ .

Osnovna jednadžba teorije udara, projicirana na normalu i tangentu udara, glasi:

$$mv'_N - (-mv_N) = I_u \quad (a)$$

$$mv'_T - mv_T = 0, \quad (b)$$

dok je koeficijent restitucije:

$$k = \frac{v'}{v_N} \quad (3.76)$$

Budući da su odgovarajuće projekcije brzina:

$$v_N = v \cos \alpha; \quad v_T = v \sin \alpha; \quad v'_N = v' \cos \beta; \quad v'_T = v' \sin \beta,$$

iz jednadžba (a) i (b) slijedi:

$$\begin{aligned} I_u &= m(v_N + v'_N) = (1+k)mv_N = (1+k)mv \cos \alpha; \\ v'_T &= v_T \quad \text{ili} \quad v' \sin \beta = v \sin \alpha, \end{aligned}$$

tj. kod kosog udara čestice o glatku nepomičnu pregradu nema promjene tangencijalne komponente brzine.

Uvrštenjem posljednje jednakosti u (3.76) dobije se:

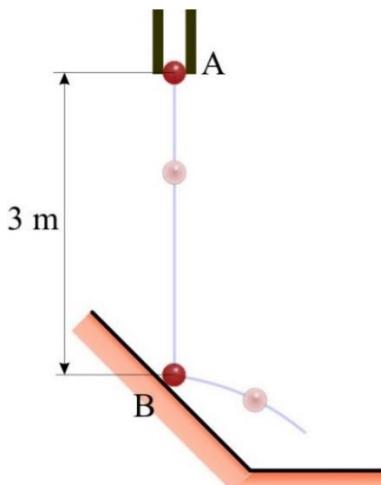
$$k = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}, \quad (3.77)$$

odnosno *koeficijent restitucije kod kosog udara čestice o glatku nepomičnu pregradu jednak je omjeru tangensa kuta upada i kuta odbijanja*. Gubitak kinetičke energije sada se može odrediti prema (3.74).

### Primjer 3.21.

Uređaj za ispitivanje kvalitete čeličnih kugli ispušta bez početne brzine kuglice mase  $m$  s visine od 3 m na idealno glatku kosinu kuta nagiba  $45^\circ$  (sl. 3.39). Koeficijent restitucije između kugle i kosine je  $k = 0,8$ . Odrediti:

- brzinu kojom će kuglica udariti u točku B,
- brzinu kojom će se kuglica odbiti od kosine u točki B,
- kut koji će neposredno nakon udara brzina čestice zatvarati s horizontalom.



Slika 3.39. Primjer 3.21.

*Rješenje:*

- Brzina udara kuglice o podlogu u točki B slijedi iz zakona o promjeni kinetičke energije danog izrazom (3.27):

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mg \cdot h_{AB}$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2g \cdot h_{AB} = 0 + 2 \cdot 9,81 \cdot 3 = 58,86, \text{ pa je } v_B = \sqrt{58,86} = 7,67 \text{ m/s.}$$

- Budući da se radi o kosom udaru čestice o glatku podlogu (sl. 3.40), bit će brzine kuglice u smjeru tangente udara nakon udara i prije njega jednake:

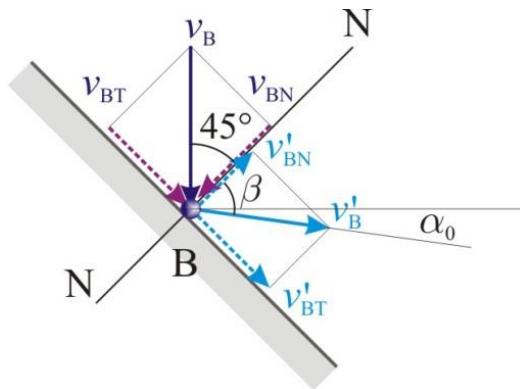
$$v_{BT}' = v_{BT} = v_B \sin 45^\circ = 7,672 \cdot 0,707 = 5,424 \text{ m/s.}$$

Brzina kuglice u smjeru normale sudara neposredno nakon sudara je (3.76):

$$v_{BN}' = k \cdot v_{BN} = k \cdot v_B \cos 45^\circ = 0,8 \cdot 7,672 \cdot 0,707 = 4,339 \text{ m/s}$$

pa je brzina kuglice nakon sudara:

$$\dot{v}_B = \sqrt{(\dot{v}_{BN})^2 + (\dot{v}_{BT})^2} = \sqrt{4,339^2 + 5,424^2} = 6,946 \text{ m/s}.$$



Slika 3.40. Brzine kuglice prije udara i nakon njega

c) Kut što ga brzina  $\dot{v}_B$  zatvara s normalom sudara slijedi iz izraza (3.77):

$$\tan \beta = \frac{\tan 45^\circ}{k} = \frac{1}{0,8} = 1,25$$

$$\beta = 51,34^\circ,$$

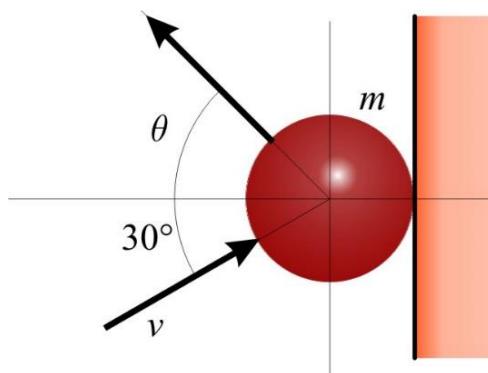
pa je kut što ga  $\dot{v}_B$  zatvara s horizontalom (sl. 3.35):

$$\alpha_0 = \beta - 45^\circ = 6,34^\circ.$$



**Zadatak 3.27.** Čestica mase  $m = 2 \text{ kg}$  udara o vertikalni zid brzinom  $v = 12 \text{ m/s}$  (sl. Z.3.27).

Poznato je da nakon udara u zid pravac brzine čestice  $v'$  zatvara s horizontalom kut  $\theta = 45^\circ$ .

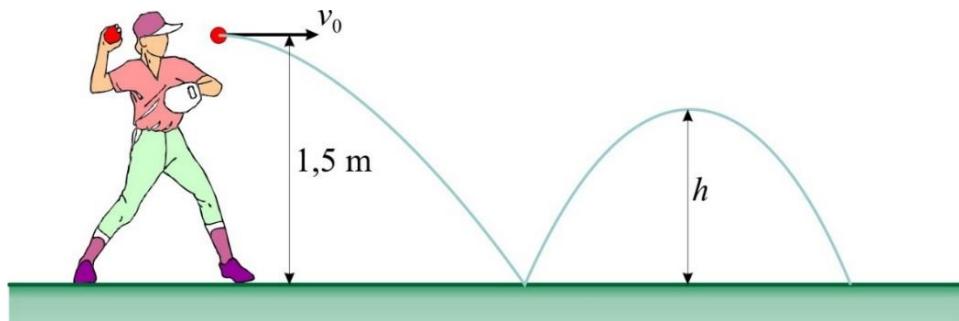


Slika Z.3.27. Zadatak 3.27.

Zanemarujući trenje na mjestu udara, odrediti: a) koeficijent restitucije, b) gubitak kinetičke energije pri udaru.

Odgovor: a)  $k = 0,577$ ; b)  $\Delta E_k = 72 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

**Zadatak 3.28.** Djevojka izbacuje lopticu brzinom  $v_0 = 20 \text{ m/s}$  s visine 1,5 m iznad tla. Pravac brzine  $v$  je horizontalan (sl. Z.3.28).



Slika Z.3.28. Zadatak 3.28.

Ako je koeficijent restitucije između loptice i tla  $k = 0,8$ , odrediti visinu  $h$  koju će loptica dosegnuti nakon prvog odskoka.

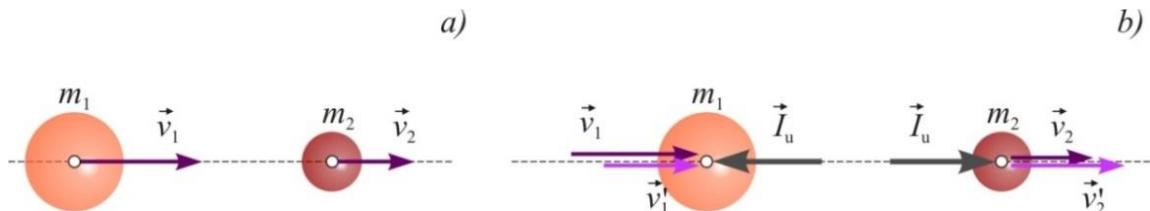
Odgovor:  $h = 0,96 \text{ m}$ .

### 3.5.4. Sudar dviju čestica

#### 3.5.4.1. Normalni sudar

Neka se dvije čestice, masa  $m_1$  i  $m_2$  gibaju pravocrtno brzinama  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  i neka te brzine padaju u isti pravac. Pod pretpostavkom da je  $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$  nastupit će sudar. Sa slike 3.41.a vidljivo je da se normalna na mjestu udara poklapa s pravcem brzina  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$ , pa se zato i kaže da je sudar normalan.

Nakon sudara brzine čestica bit će  $\vec{v}'_1$  i  $\vec{v}'_2$ , a njihov je smjer na slici 3.41.b prepostavljen. Čestice djeluju jedna na drugu impulsima jednakog intenziteta, suprotno usmjerenima duž istog pravca djelovanja.



Slika 3.41. Normalni sudar dviju čestica

Zakon o promjeni količine gibanja za svaku od čestica glasi:

$$m_1 \dot{v}_1 - m_1 v_1 = -I_u \quad (a)$$

$$m_2 \dot{v}_2 - m_2 v_2 = I_u, \quad (b)$$

a zbrajanjem tih jednadžba dobije se:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (c)$$

tj. zbroj količina gibanja čestica prije sudara i nakon njega ostaje nepromijenjen. Koeficijent restitucije jednak je omjeru relativnih brzina čestica nakon sudara i prije sudara:

$$k = \left( \frac{\dot{v}_r}{v_r} \right)_N = \frac{\dot{v}_2 - \dot{v}_1}{v_1 - v_2}. \quad (3.78)$$

Rješenjem jednadžba (c) i (3.78) dobiju se brzine  $v'_1$  i  $v'_2$  nakon sudara, a zatim se iz (a) ili (b) odredi impuls udara.

Ako je neka od brzina dobivena s negativnim predznakom, to samo znači da joj je smjer pogrešno prepostavljen.

Gubitak kinetičke energije kod ovog sudara bit će:

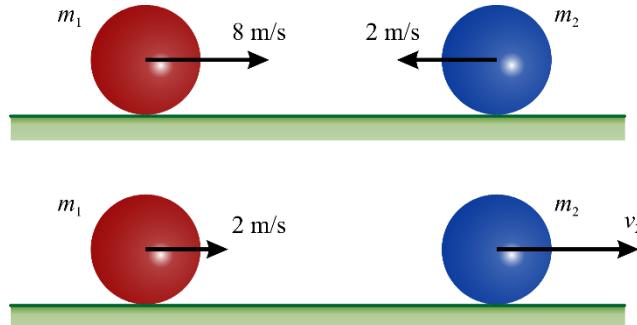
$$\Delta E_k = E_k - E'_k, \quad (3.79)$$

gdje je:

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2); \quad E'_k = \frac{1}{2} (m_1 v'_1^2 + m_2 v'_2^2).$$

### Primjer 3.22.

Poznate su brzine čestica masa  $m_1 = 3 \text{ kg}$  i  $m_2 = 2 \text{ kg}$  neposredno prije sudara, te brzina čestice 1 neposredno nakon sudara (sl. 3.42). Odrediti brzinu čestice 2 nakon sudara i gubitak kinetičke energije pri sudaru. Koliki je u zadanom primjeru koeficijent sudara?



Slika 3.42. Primjer 3.22.

*Rješenje:*

Količina gibanja sustava čestica je konstantna, a brzina čestice 2 nakon sudara mora biti u desno

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad \text{ili} \quad 3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot v'_2$$

odakle je brzina čestice 2 neposredno nakon sudara

$$v'_2 = (3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2) / 2 = 7 \text{ m/s}.$$

Kinetička energija čestica prije sudara, odnosno nakon njega je

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 = 100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 100 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7^2 = 55 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 55 \text{ N} \cdot \text{m},$$

pa je gubitak kinetičke energije pri sudaru (3.51)

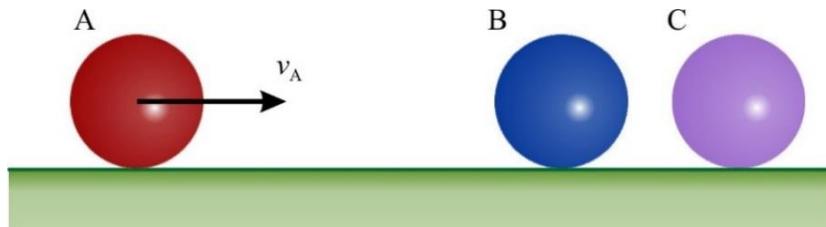
$$\Delta E_k = E_k - E'_k = 100 - 55 = 45 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Koeficijent restitucije dan je izrazom (3.68)

$$k = \left( \frac{\dot{v}_r}{v_r} \right)_N = \frac{7-2}{8+2} = 0,5 .$$



**Zadatak 3.29.** Kuglica A giba se brzinom  $v_A = 10 \text{ m/s}$  po horizontalnoj podlozi i udara u kuglicu B koja je do tog trenutka mirovala. Do kuglice B miruje i kuglica C (sl. Z.3.29). Sve kuglice imaju jednaku masu, a koeficijent restitucije iznosi  $k = 0,85$ .

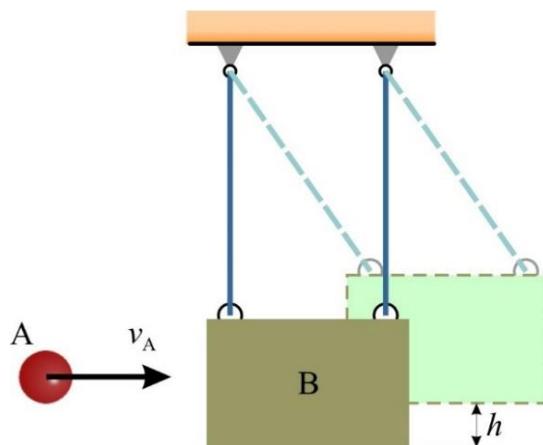


Slika Z.3.29. *Zadatak 3.29.*

Zanemarujući trenje između kuglica i podloge, odrediti brzinu kuglice C nakon sudara.

*Odgovor:*  $v'_C = 8,556 \text{ m/s}$ .

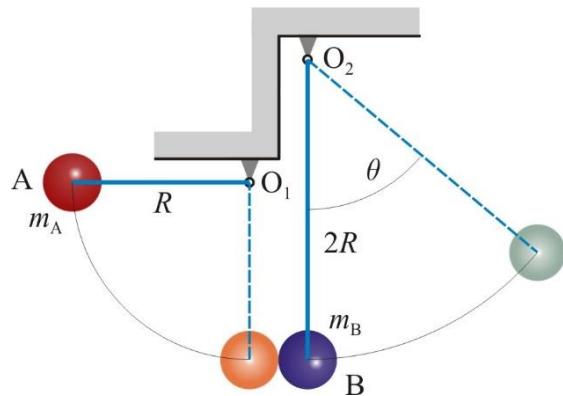
**Zadatak 3.30.** Kugla mase  $m_A = 10 \text{ kg}$  gibajući se pravocrtno udara brzinom  $v_A = 32 \text{ m/s}$  u sanduk s pijeskom ukupne mase  $m_B = 150 \text{ kg}$  koji je do tog trenutka mirovao. Sanduk je ovješen za strop s pomoću dva tanka užeta zanemarive mase (sl. Z.3.30). Ako kugla probije sanduk i ostane u pijesku, odrediti do koje će se visine podići sanduk nakon tog sudara.



Slika Z.3.30. *Zadatak 3.30.*

*Odgovor:*  $h = 0,204 \text{ m}$ .

**Zadatak 3.31.** Čestica A mase  $m_A = 2 \text{ kg}$  vezana je užetom zanemarive mase za oslonac O, dok čestica B mase  $m_B = 3 \text{ kg}$  visi na užetu O<sub>2</sub>B zanemarive mase (sl. Z.3.31). U jednom se trenutku čestica A pusti, dolaskom u vertikalni položaj udara u česticu B. Ako je koeficijent restitucije  $k = 0,7$ , odrediti najveći kut  $\theta$  koji će doseći uže na kojem je čestica B nakon sudara.



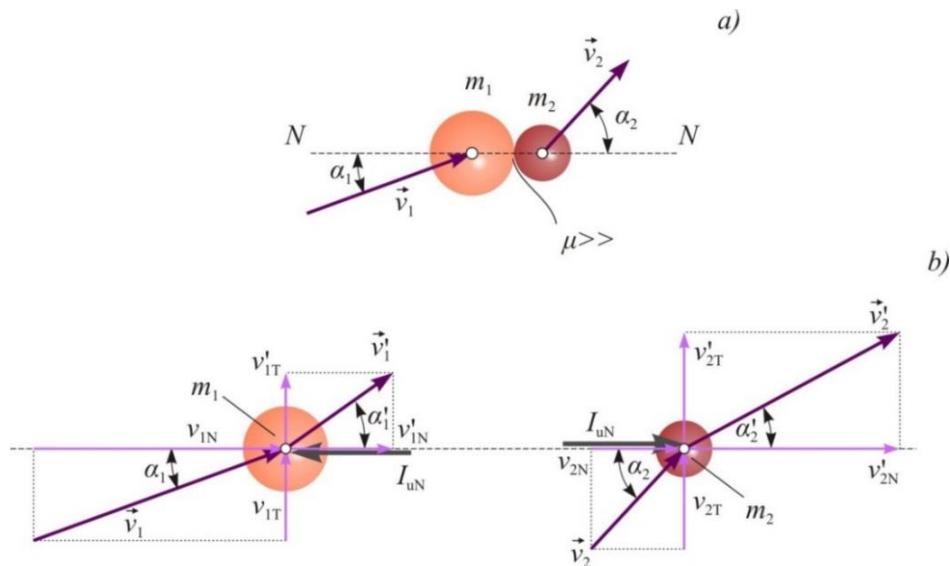
Slika Z.3.31. Zadatak 3.31.

Odgovor:  $\theta = 39,75^\circ$ .

### 3.5.4.2. Kosi sudar

#### - Sudar glatkih čestica

Takav sudar prikazan je na slici 3.43.a. Mase čestica koje se sudaraju su  $m_1$  i  $m_2$ , a njihove brzine  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$ . Vektori  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  ne padaju na pravac normale u točki sudara, već s njom zatvaraju kutove  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ .



Slika 3.43. Kosi sudar dviju glatkih čestica

Na slici 3.43.b prikazane su čestice 1 i 2 s pretpostavljenim brzinama nakon sudara  $\vec{v}'_1$  i  $\vec{v}'_2$  te odgovarajućim udarnim impulsima. Kada je trenje na mjestu sudara zanemarivo, nema impulsa u smjeru tangente T. Osnovna jednadžba teorije udara, projicirana na tangentu i normalu, za svaku od čestica glasi:

$$m_1 v'_1 - m_1 v_{1N} = -I_u, \quad (a)$$

$$m_1 v_{1T} - m_1 v_{1T} = 0, \quad (b)$$

$$m_2 v_{2N} - m_2 v_{2N} = I_u, \quad (c)$$

$$m_2 v_{2T} - m_2 v_{2T} = 0. \quad (d)$$

Iz jednadžba (b) i (d) slijedi da se projekcije brzina čestica na tangentu sudara neće promijeniti. Zbrajanjem jednadžba (a) i (c) dobije se:

$$m_1 v_{1N} + m_2 v_{2N} = m_1 v_{1N} + m_2 v_{2N} \quad (e)$$

što znači da nema promjene količine gibanja sustava pri sudaru.

Koeficijent restitucije, prema definiciji, dan je izrazom (3.68):

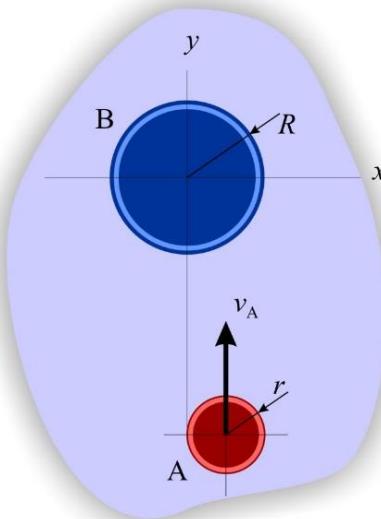
$$k = \left( \frac{v_r}{v_r} \right)_N = \frac{v_{2N} - v_{1N}}{v_{1N} - v_{2N}}. \quad (f)$$

Iz jednadžba (e) i (f) određuju se tražene projekcije brzina  $v_{1N}$  i  $v_{2N}$ , dok se gubitak kinetičke energije računa prema jednadžbi (3.69), pri čemu je:

$$v_1'^2 = v_{1N}^2 + v_{1T}^2; \quad v_2'^2 = v_{2N}^2 + v_{2T}^2.$$

### Primjer 3.23.

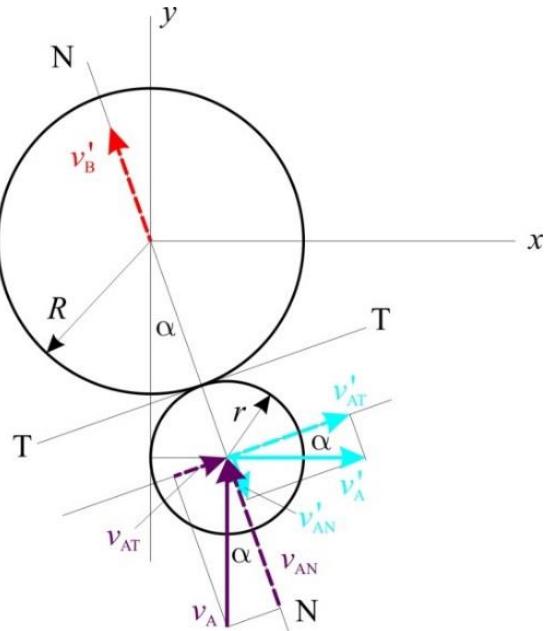
Disk A radijusa  $r = 20 \text{ mm}$  i mase  $m_A = 1 \text{ kg}$  klizi po glatkoj horizontalnoj podlozi brzinom  $v_A$  i udara u disk B radijusa  $R = 40 \text{ mm}$  i mase  $m_B = 3 \text{ kg}$  koji je do tog trenutka mirovao (sl. 3.44). Ako se nakon sudara disk A giba brzinom  $v_A' = 1 \text{ m/s}$  udesno, paralelno s osi  $x$ , odrediti brzinu diska B nakon sudara i koeficijent restitucije  $k$ . Trenje pri sudaru može se zanemariti.



Slika 3.44. Primjer 3.23.

*Rješenje:*

Na slici 3.45 prikazane su brzine diskova prije sudara i nakon njega.



Slika 3.45. Brzine diskova prije sudara i nakon njega

Budući da su poznati pravci brzina prije sudara i nakon njega, može se pisati:

$$v_{AN} = v_A \cos \alpha, \quad v_{AT} = v_A \sin \alpha, \quad v_{AN}' = v_A' \sin \alpha, \quad v_{AT}' = v_A' \cos \alpha$$

$$v_{BN} = v_B, \quad v_{BN}' = v_{BT} = v_{BT}' = 0,$$

gdje je sa slike 3.44

$$\sin \alpha = \frac{r}{r+R} = \frac{20}{20+40} = \frac{1}{3}, \text{ pa je kut } \alpha = 19,47^\circ.$$

Slijedi da je:

$$v_{AN} = 4 \cos 19,47^\circ = 3,771 \text{ m/s}, \quad v_{AT} = 4 \sin 19,47^\circ = 1,333 \text{ m/s}$$

$$v_{AN}' = 1 \sin 19,47^\circ = 0,333 \text{ m/s}, \quad v_{AT}' = 1 \cos 19,47^\circ = 0,943 \text{ m/s}.$$

Za razmatrani se sudar može postaviti zakon o promjeni količine gibanja u smjeru normale sudara:

$$(-m_A v_{AN}' + m_B v_B') - m_A v_{AN} = 0,$$

odakle je

$$m_B v_B' = m_A v_{AN} + m_A v_{AN}', \quad \text{ili} \quad 3 \cdot v_B' = 1 \cdot v_{AN} + 1 \cdot v_{AN}'$$

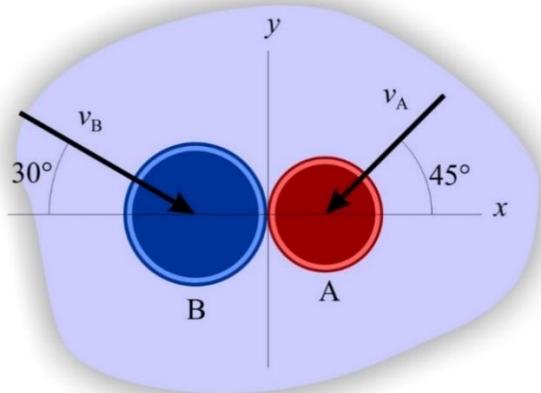
$$v_B' = \frac{3,771 + 0,333}{3} = 1,368 \text{ m/s}.$$

Sada se s pomoću izraza (3.68) izračunava koeficijent restitucije:

$$k = \left( \frac{v_r}{v_r} \right)_N = \frac{v_{AN} + v_B}{v_{AN}} = \frac{0,333 + 1,368}{3,771} = 0,451.$$



**Zadatak 3.32.** Dvije čestice, A mase  $m_A = 1 \text{ kg}$  i B mase  $m_B = 2 \text{ kg}$ , imaju neposredno prije sudara brzine  $v_A = 8 \text{ m/s}$  i  $v_B = 4 \text{ m/s}$  (sl. Z.3.32).

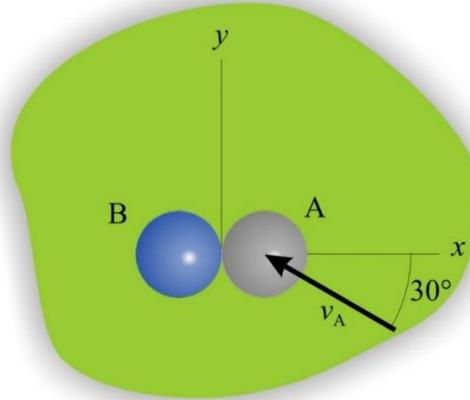


Slika Z.3.32. *Zadatak 3.32.*

Koeficijent restitucije je  $k = 0,5$ . Zanemarujući trenje pri sudaru, odrediti komponente brzine čestice A u smjeru normale, odnosno tangente sudara neposredno nakon sudara.

*Odgovor:*  $v'_{AN} = 2,471 \text{ m/s}$ ;  $v'_{AT} = 4 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 3.33.** Igrač biljara udara u kuglicu A koja potom brzinom  $v_A$  udara u kuglicu B. Kuglica B je do tog trenutku mirovala na stolu (sl. Z.3.33). Kuglice su jednakih masa.



Slika Z.3.33. *Zadatak 3.33.*

Koliki bi trebao biti koeficijent restitucije pa da se kuglica A nakon sudara nastavi gibati duž osi  $y$ ?

*Odgovor:*  $k = 1$ .

- Sudar čestica s trenjem

Ako na mjestu sudara postoji i trenje koje se ne može zanemariti, doći će do pojave impulsa trenja, a samim tim i do promjene projekcija brzina u smjeru tangente sudara. Ovdje će se razmotriti samo granični slučaj, kada je trenje na mjestu sudara dovoljno veliko da ne nastupi klizanje (sl. 3.46.a i b).

Ako je trenje na mjestu udara dovoljno veliko da ne nastupi klizanje, bit će projekcije brzina čestica na tangentu nakon sudara međusobno jednake:

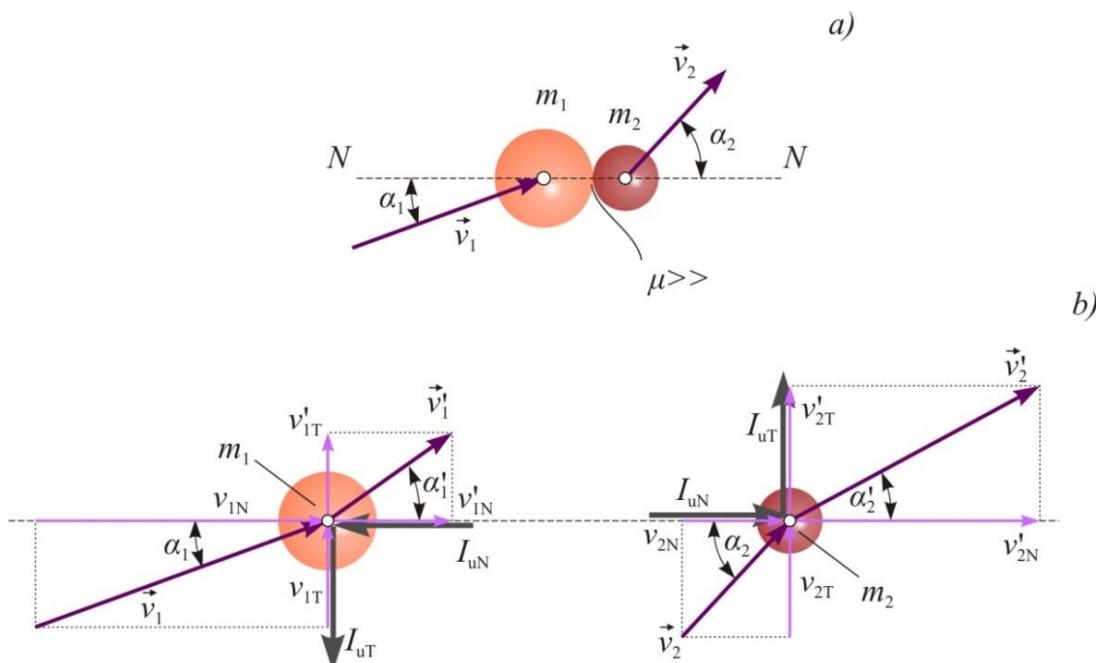
$$\dot{v}_{1T} = \dot{v}_{2T}, \quad (a)$$

a promjena količine gibanja obiju čestica u pravcu tangente je:

$$m_1 \dot{v}_{1T} - m_1 v_{1T} = I_t \quad (b)$$

$$m_2 \dot{v}_{2T} - m_2 v_{2T} = -I_t. \quad (c)$$

Rješenjem tih triju jednadžba dobiju se veličine  $\dot{v}_{1T}$ ,  $\dot{v}_{2T}$  i  $I_t$ . Sve ostale nepoznate veličine određuju se na prethodno opisan način.



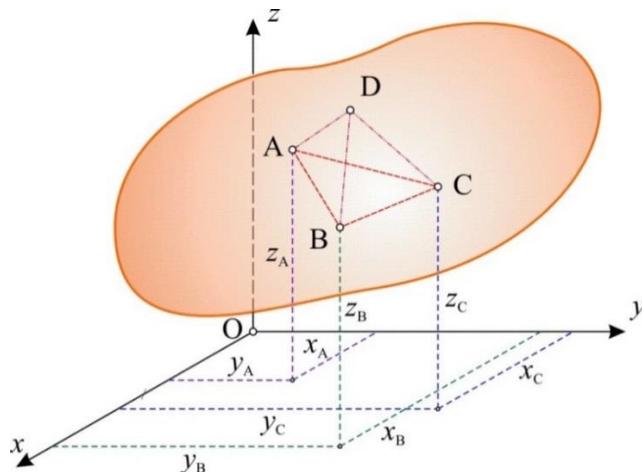
Slika 3.46. Kosi sudar dviju čestica s trenjem

# 4. KINEMATIKA KRUTOG TIJELA

## 4.1. OSNOVNI ZADATCI KINEMATIKE KRUTOG TIJELA. STUPNJEVI SLOBODE GIBANJA KRUTOG TIJELA

Pod *krutim tijelom* u mehanici se razumijeva tijelo koje ne mijenja svoj geometrijski oblik niti volumen, tj. udaljenost se između dviju po volji odabranih točaka tog tijela ne mijenja. Pri općem gibanju krutog tijela sve njegove točke opisuju različite putanje i imaju u svakom trenutku različite kinematičke značajke. Postoje međutim i kinematičke značajke koje su zajedničke, kako za kruto tijelo, tako i za svaku njegovu točku.

Položaj točke u prostoru jednoznačno je određen s tri pravokutne koordinate  $x$ ,  $y$  i  $z$ , tj. s tri nezavisna podatka. Iako se kruto tijelo sastoji od beskonačno mnogo točaka, lako je dokazati da je njegov položaj u prostoru potpuno određen sa šest nezavisnih podataka.



Slika 4.1. Položaj krutog tijela u prostoru

Uoče li se tri točke krutog tijela A, B i C, koje ne leže na istom pravcu, njihov položaj određen je s devet podataka (sl. 4.1). Budući da je, prema definiciji, udaljenost među točkama nepromjenljiva veličina, koordinate odabranih točaka moraju zadovoljiti tri jednakosti (4.1):

$$\begin{aligned} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 &= \overline{AB}^2 \\ (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 &= \overline{BC}^2 \\ (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 &= \overline{AC}^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Odatle slijedi da je samo šest od devet zadanih podataka nezavisno. Odabere li se još jedna točka, npr. D, pojavljuju se i tri nova podatka koja određuju njen položaj, ali koja također moraju zadovoljiti sustav (4.1) kojim se izražava osnovno svojstvo krutog tijela izrečeno u gornjoj definiciji. Prema tome, pri gibanju krutog tijela položaj svih njegovih točaka u odnosu na točke A, B i C jednoznačno je određen, odakle slijedi, uzimajući u obzir jednakost (4.1), da

je položaj krutog tijela u prostoru u proizvoljnom sustavu referencije potpuno određen sa šest nezavisnih parametara.

*Broj nezavisnih parametara, s pomoću kojih je jednoznačno određen položaj krutog tijela u prostoru u odnosu na proizvoljno odabrani koordinatni sustav, naziva se broj stupnjeva slobode krutog tijela.*

U kinematici se proučavaju gibanja ne samo slobodnih nego i djelomično vezanih krutih tijela pa je određivanje broja stupnjeva slobode gibanja od velikog značaja pri definiranju gibanja tijela ili sustava tijela u prostoru.

Dva su osnovna zadatka koja rješava kinematika krutog tijela:

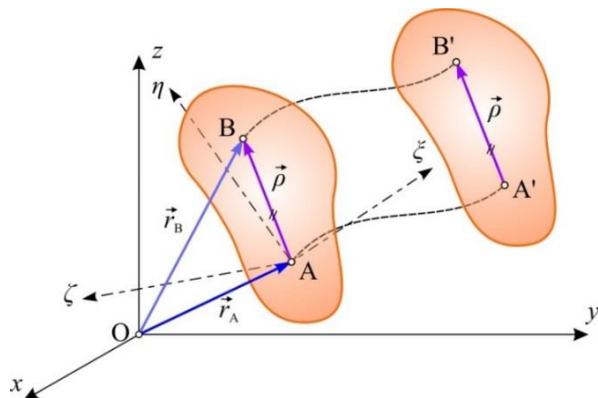
1. utvrđivanje matematičkih metoda za definiranje položaja krutog tijela pri gibanju u prostoru, a u donosu na odabrani referentni sustav;
2. određivanje kinematičkih značajaka krutog tijela u cijelosti i svake njegove točke posebno, a na osnovi poznatih jednadžba gibanja.

## 4.2. ELEMENTARNA GIBANJA KRUTOG TIJELA

Elementarna gibanja krutog tijela su translatoryno i rotacijsko gibanje i iz njih se mogu izvesti sva ostala gibanja djelomično vezanih krutih tijela.

### 4.2.1. Translatorno gibanje krutog tijela

*Translatornim gibanjem krutog tijela naziva se takvo gibanje pri kojem spojnica dviju po volji odabranih točaka tijela ostaje sama sebi paralelna u tijeku cijelog perioda gibanja.*



Slika 4.2. Translatorno gibanje krutog tijela

Translacija krutog tijela može biti pravocrtna ili krivocrtna u zavisnosti od oblika putanje koju izvodi jedna njegova točka, a pri translatornom gibanju sve točke krutog tijela opisuju identične putanje.

Veže li se za tijelo, koje se giba translatorno u odnosu na odabrani koordinatni sustav referencije Oxyz, pokretni koordinatni sustav  $A\xi\eta\rho$  i na tijelu uoče dvije točke A i B (sl. 4.2), onda je položaj tih točaka u odnosu na nepomični koordinatni sustav određen radijus vektorima  $\vec{r}_A$  i  $\vec{r}_B$ .

Položaj točke B u odnosu na točku A u pokretnom sustavu referencije određen je vektorom položaja  $\vec{\rho}$ . S obzirom na definiciju translatornog gibanja očito je da je vektor  $\vec{\rho}$  konstantnog intenziteta i pravca, tj. to je konstantan vektor.

Prema slici 4.2 može se pisati:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}, \quad (4.2)$$

dok je, prema definiciji, vektor brzine točke B određen prvom derivacijom vektora  $\vec{r}_B$  po vremenu, pa slijedi:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{\rho}) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

jer je derivacija vektora  $\vec{\rho}$  po vremenu jednaka nultom vektoru. Dalje je

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A. \quad (4.3)$$

Deriviranjem jednadžbe (4.3) po vremenu dobije se:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

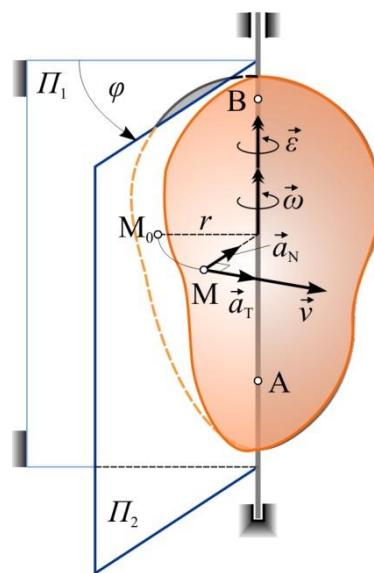
ili

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A \quad (4.4)$$

na osnovi čega se zaključuje da se pri translatornom gibanju krutog tijela sve točke gibaju na isti način, imaju identične putanje, vektore brzina i vektore ubrzanja.

#### 4.2.2. Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

*Rotacijom krutog tijela oko nepomične osi naziva se takvo gibanje tijela pri kojem bilo koje dvije točke tijela, po volji odabrane na toj osi, ostaju stalno nepomične (sl. 4.3).*



Slika 4.3. Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

Pravac koji prolazi tim dvjema točkama naziva se *os rotacije*. Budući da je udaljenost između točaka krutog tijela nepromjenljiva, očito je da će pri rotaciji sve točke koje pripadaju osi rotacije mirovati, dok će sve ostale točke opisivati kružne putanje u ravninama okomitim na os rotacije, a sa središtem upravo na toj osi.

To je dakle tipičan primjer gibanja djelomično vezanog krutog tijela čije je pomicanje u prostoru ograničeno postojanjem dviju nepomičnih točaka (A i B).

Položaj tijela pri rotaciji oko nepomične osi određen je *kutom rotacije*  $\varphi$ , koji se mjeri od nepomične referentne ravnine  $\pi_1$ , koja prolazi kroz os AB tijela. Istovremeno, za os AB vezana je i pokretna ravnina  $\pi_2$ , čvrsto vezana za kruto tijelo tako da rotira zajedno s njim. Ta se ravnina u početnom trenutku ( $t_0 = 0$ ) poklapa s  $\pi_1$ , a u trenutku  $t$  zatvara s njom kut  $\varphi$  koji se mjeri u radijanima. Očito je da se i svaka druga ravnina čvrsto vezana za kruto tijelo zakrenula za kut  $\varphi$  od svog početnog položaja u promatranome vremenskom intervalu. Jednadžba:

$$\varphi = \varphi(t) \quad (4.5)$$

izražava prema tome *zakon rotacije krutog tijela oko nepomične osi*. S obzirom na prirodu gibanja mora ova funkcija biti neprekinuta i najmanje dvaput derivabilna.

Položaj krutog tijela pri rotaciji oko nepomične osi određen je dakle samo jednim nezavisnim parametrom, kutom  $\varphi$ , što znači da tijelo u tom slučaju ima samo jedan stupanj slobode gibanja.

#### 4.2.2.1. Kutna brzina i kutno ubrzanje

Proučavanje gibanja krutog tijela kao cjeline provodi se na osnovi analize promjene kuta rotacije  $\varphi$ .

*Srednjom kutnom brzinom*  $\omega_{sr}$  *tijela naziva se omjer između prirasta kuta rotacije*  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  *i vremenskog intervala*  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

*Kutnom brzinom*  $\omega$  *tijela naziva se veličina kojoj teži srednja kutna brzina kada vremenski interval*  $\Delta t$  *teži nuli*:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad (4.7)$$

tj. *kutna brzina tijela koje rotira oko nepomične osi jednaka je po intenzitetu prvoj derivaciji kuta rotacije po vremenu*.

Kutna brzina mjeri se u radijanima po sekundi ili kraće 1/s, tj.  $s^{-1}$ . *Promjenu* kutne brzine tijekom vremena karakterizira fizikalna veličina koja se naziva *kutno ubrzanje tijela*.

*Srednjim kutnim ubrzanjem*  $\varepsilon_{sr}$  *tijela naziva se omjer između prirasta kutne brzine*  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  *i vremenskog intervala*  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\varepsilon_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (4.8)$$

*Kutnim ubrzanjem*  $\varepsilon$  *tijela naziva se veličina kojoj teži srednje kutno ubrzanje kada vremenski interval*  $\Delta t$  *teži nuli:*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}, \quad (4.9)$$

tj. *kutno ubrzanje tijela koje rotira oko nepomične osi jednako je po intenzitetu prvoj derivaciji kutne brzine, odnosno drugoj derivaciji kuta rotacije po vremenu.*

Kutno ubrzanje mjeri se u radijanima po sekundi na kvadrat ili kraće  $1/s^2$  (odnosno  $s^{-2}$ ).

Kutna brzina i kutno ubrzanje tijela koje rotira oko nepomične osi jesu vektorske veličine.

Pravac vektora kutne brzine  $\vec{\omega}$  poklapa se s osi rotacije, a usmjeren je tako da promatrač s njegova vrha vidi zakretanje krutog tijela u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (pravilo desne ruke), dok mu je intenzitet određen izrazom (4.7).

Pravac vektora kutnog ubrzanja poklapa se s pravcem kutne brzine, dok mu smjer zavisi od predznaka intenziteta (izraz 4.9) i bit će jednak smjeru vektora kutne brzine ako je  $\varepsilon > 0$ .

*Jednolikom rotacijom* naziva se takva rotacija krutog tijela oko nepomične osi pri kojoj je intenzitet kutnog ubrzanja jednak nuli, tj.  $\varepsilon = 0$ . Tada je:

$$\omega = \omega_0 = \text{const.}$$

$$\varphi = \varphi_0 = \omega t. \quad (4.10)$$

Ako je za  $t = t_0$  kut  $\varphi_0 = 0$ , bit će:  $\varphi = \omega t$ , odakle je

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

Kut rotacije (u jedinici vremena) može se izraziti i u funkciji *brzine vrtnje n* krutog tijela (raniji naziv bio je *broj okretaja*), pa će za tijelo, koje se okreće oko osi  $n$  puta u minuti, biti:

$$\varphi_{\min} = 2\pi n \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

pa je kutna brzina tijela:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ s}^{-1}. \quad (4.11)$$

*Jednoliko promjenljivom rotacijom* naziva se rotacija krutog tijela oko nepomične osi pri kojoj je

$$\varepsilon = \text{const.} \neq 0$$

pa je:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

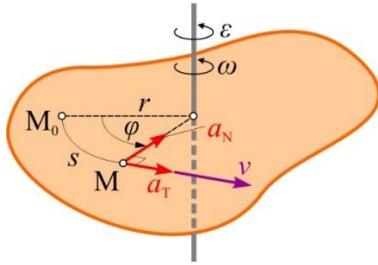
$$\varphi = \varphi_0 + \omega t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2. \quad (4.12)$$

Rotacija kod koje je  $\varepsilon > 0$  naziva se *jednoliko ubrzana*, a kod koje je  $\varepsilon < 0$  *jednoliko usporena*.

Ako je  $\varepsilon = \varepsilon(t) \neq \text{const.}$ , kaže se da je rotacija tijela oko nepomične osi nejednoliko promjenljiva.

#### 4.2.2.2. Brzina i ubrzanje točaka tijela pri rotaciji oko nepomične osi

U prethodnom dijelu određene su značajke rotacije tijela kao cjeline, dok će se u ovom dijelu promatrati kinematičke značajke pojedinih točaka tijela.



Slika 4.4. Točka M pri rotaciji tijela oko nepomične osi

Uoči li se neka točka M na udaljenosti  $r$  od osi rotacije (sl. 4.4), očito je da ta udaljenost predstavlja ujedno i radijus kružne putanje po kojoj će se točka gibati. Zakon gibanja točke M po putanji glasi:

$$s = r\varphi(t) \quad (4.13)$$

pa je intenzitet brzine točke:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} = r\omega, \quad (4.14)$$

tj. intenzitet brzine točke M krugog tijela, koje rotira oko nepomične osi, jednak je umnošku iz udaljenosti  $r$  te točke od osi rotacije i kutne brzine  $\omega$  tijela.

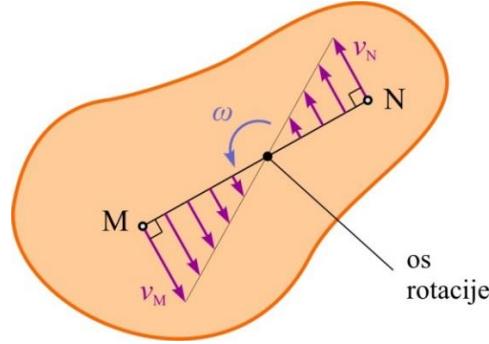
Kutna brzina  $\omega$  jest kinematička značajka tijela kao cjeline, pa su brzine pojedinih točaka tijela pri njegovoj rotaciji oko nepomične osi proporcionalne udaljenosti tih točaka od osi rotacije (sl. 4.5). Budući da su putanje točaka tijela koje rotira kružne, ubrzanje po volji odabrane točke M izražava se preko prirodnih komponenata ubrzanja (sl. 4.6).

Intenzitet tangencijalne komponente ubrzanja dan je izrazom:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon = r\ddot{\varphi}, \quad (4.15)$$

dok je normalno ubrzanje:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2. \quad (4.16)$$



Slika 4.5. Brzine točaka krutog tijela pri rotaciji oko nepomične osi

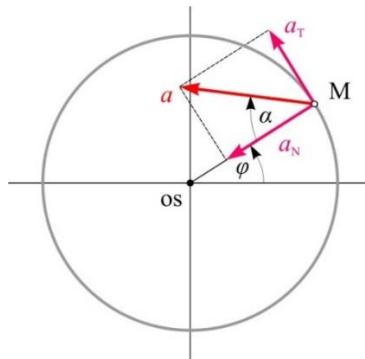
Tangencijalno ubrzanje uvijek je usmjereno duž tangente na putanju, dok je normalno usmjereno duž radijusa  $r$  putanje ka osi rotacije (sl. 4.6).

Ukupno ubrzanje bit će:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\omega^4}$$

ili

$$a = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.17)$$



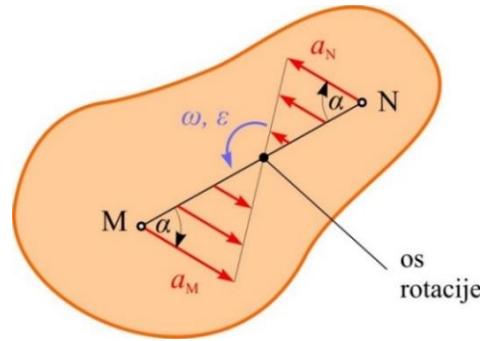
Slika 4.6. Prirodne komponente ubrzanja točke

Kut što ga vektor ubrzanja zatvara s radijusom  $r$  određen je izrazom:

$$\tan \alpha = \frac{|a_T|}{a_N} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \quad (4.18)$$

i mjeri se od radijusa  $r$  u suprotnom smjeru od smjera  $\varepsilon$ .

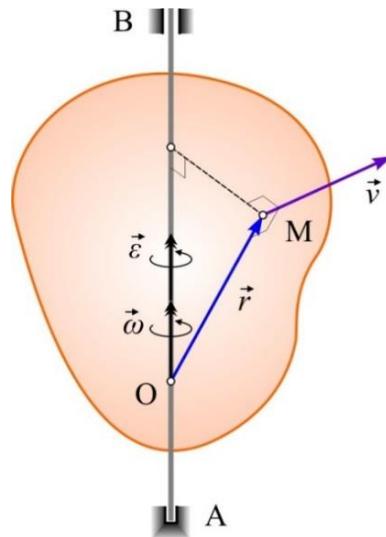
S obzirom na to da su  $\varepsilon$  i  $\omega$  zajedničke značajke svih točaka rotirajućeg tijela, to iz (4.17) i (4.18) proizlazi da će ukupna ubrzanja svih točaka tijela biti proporcionalna njihovim udaljenostima od osi rotacije te da će graditi isti kut  $\alpha$  s radiusima rotacija kružnih putanja koje te točke opisuju (sl. 4.7).



Slika 4.7. Ubrzanja točaka krutog tijela pri rotaciji oko nepomične osi

#### 4.2.2.3. Vektorski izrazi za brzinu i ubrzanje točaka pri rotaciji tijela oko nepomične osi

Neka kruto tijelo prikazano na slici 4.8 rotira kutnom brzinom  $\omega$  i kutnim ubrzanjem  $\varepsilon$ . Tada su vektori  $\vec{\omega}$  i  $\vec{\varepsilon}$  usmjereni od točke O ka točki B.



Slika 4.8. Vektor kutne brzine i vektor kutnog ubrzanja

Radius vektor  $\vec{r}$ , s početkom u nepomičnoj točki O, koji određuje položaj promatrane točke M u prostoru, pomnožen vektorski slijeva s vektorom kutne brzine  $\vec{\omega}$ , daje vektorski izraz za brzinu točke M (Eulerova formula):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (4.19)$$

Deriviranjem tog izraza po vremenu dobije se:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.20)$$

U izrazu (4.20) prvi član na desnoj strani  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  jest tangencijalna, a drugi  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  normalna komponenta vektora ubrzanja.

Lako je pokazati da su intenziteti brzine i ubrzanja koji se dobiju prema izrazima (4.19) i (4.20) identični onima dobivenima s pomoću izraza (4.14), (4.15) i (4.16).

### Primjer 4.1.

Zamašnjak, koji je imao brzinu vrtnje  $n = 180 \text{ min}^{-1}$ , rotira jednoliko usporeno po isključivanju motora i zaustavi se nakon  $t_1 = 60 \text{ s}$ . Odrediti broj okretaja koje je za to vrijeme napravio zamašnjak.

*Rješenje:*

Budući da zamašnjak rotira jednoliko usporeno, bit će (uzimajući da je  $\varphi_0 = 0$ ):

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t .$$

Početna kutna brzina iznosi:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 180}{30} = 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

dok je u trenutku  $t_1 = 60 \text{ s}$  kutna brzina  $\omega$  jednaka nuli, tj.:

$$0 = 6\pi + \varepsilon t_1 = 6\pi + 60\varepsilon ,$$

pa je:

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} .$$

Ukupni kut koji će opisati jedan radijus zamašnjaka za perioda zaustavljanja jest:

$$\varphi_1 = \varphi(t_1) = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2 = 6\pi \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{10} \cdot 60^2 = 180\pi \text{ rad} .$$

Dijeljenjem ukupnog kuta  $\varphi_1$  s  $2\pi$  dobit će se ukupni broj okretaja koji će načiniti zamašnjak pri zaustavljanju:

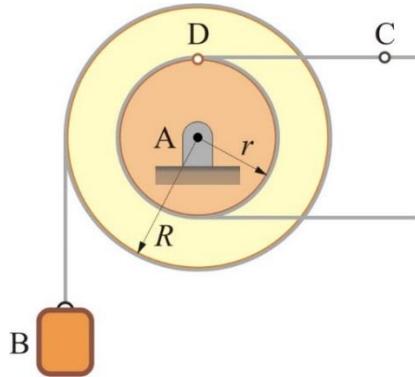
$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = 90 .$$

### Primjer 4.2.

Teret B visi na kraju nerastezljiva užeta koje je namotano na bubenj radijusa  $R$ . Bubanj je povezan s remenicom radijusa  $r$  s kojom rotira oko nepomične osi kroz A. Remeniku pogoni remen kojemu točka C ima u početnom trenutku brzinu  $2 \text{ m/s}$  i ubrzanje  $0,5 \text{ m/s}^2$  (sl. 4.9).

Brzina točke C remena usmjerena je udesno, tako da se teret B podiže, a vektor ubrzanja točke C usmjerjen je u istom smjeru kao i njena brzina.

Odrediti brzinu i ubrzanje točke D na remenici te brzinu i ubrzanje tereta B u početnom trenutku ako je zadano:  $R = 0,5 \text{ m}$ ;  $r = 0,3 \text{ m}$ .



Slika 4.9. Primjer 4.2.

Rješenje:

Brzina točke D na remenici mora biti jednaka brzini točke C na remenu jer bi u suprotnom nastupilo klizanje na mjestu dodira remena i remenice (sl. 4.10):

$$v_D = v_C, \quad \text{odakle nakon deriviranja slijedi} \quad a_D^T = a_C,$$

dok je

$$a_D^N = \frac{v_D^2}{r}.$$

U početnom trenutku bit će:

$$v_D = v_C = 2 \text{ m/s}, \quad a_D^T = a_C = 0,5 \text{ m/s}^2, \quad a_D^N = \frac{v_D^2}{r} = \frac{2^2}{0,3} = 13,33 \text{ m/s}^2$$

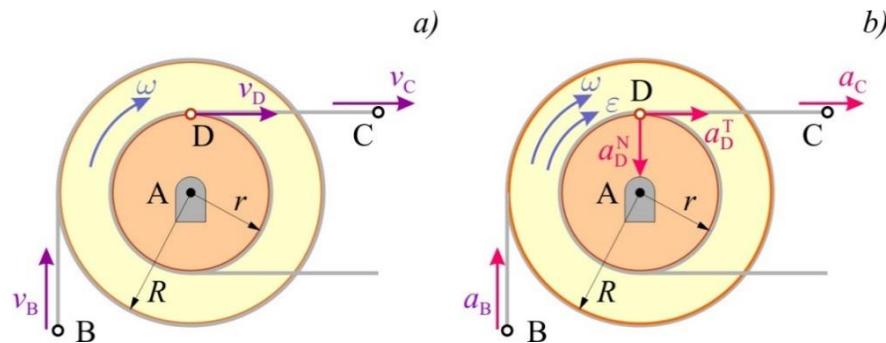
$$a_D = \sqrt{(a_D^T)^2 + (a_D^N)^2} = \sqrt{0,5^2 + 13,33^2} = 13,34 \text{ m/s}^2.$$

Kutna brzina i kutno ubrzanje koloture, odnosno bubenja je

$$\omega = \frac{v_D}{r} = \frac{2}{0,3} = 6,67 \text{ 1/s}, \quad \varepsilon = \frac{a_D^T}{r} = \frac{0,5}{0,3} = 1,67 \text{ 1/s}^2,$$

pa su brzina i ubrzanje tereta (koji moraju biti jednaki brzini, odnosno tangencijalnom ubrzanju točke na obodu bubenja – sl. 4.10):

$$v_B = R\omega = 0,5 \cdot 6,67 = 3,33 \text{ m/s}, \quad a_B = R\varepsilon = 0,5 \cdot 1,67 = 0,83 \text{ m/s}^2.$$



Slika 4.10. Primjer 4.2. a) brzine točaka, b) ubrzanja točaka.



**Zadatak 4.1.** Rotacija zamašnjaka oko osi definirana je izrazom:

$$\varphi = \frac{1}{3}t^3 - 3 \cdot t^2 + 5 \cdot t,$$

gdje je kut rotacije  $\varphi$  dan u radijanima, a vrijeme  $t$  u sekundama. Odrediti kut rotacije, kutnu brzinu i kutno ubrzanje u trenutku  $t_1 = 3$  s.

*Odgovor:*  $\varphi_1 = -3$  rad;  $\omega_1 = -4$  1/s,  $\varepsilon_1 = 0$  1/s<sup>2</sup>.

**Zadatak 4.2.** Elektromotor postiže maksimalnu brzinu vrtnje od 3600 okretaja po minuti 6 sekunda nakon pokretanja. Nakon isključivanja strujne sklopke motoru je trebalo 80 sekunda da se zaustavi. Uzimajući da je i u fazi pokretanja i u fazi zaustavljanja ubrzavanje odnosno usporavanje bilo jednoliko, odrediti koliki je broj okretaja napravio elektromotor u pojedinoj fazi.

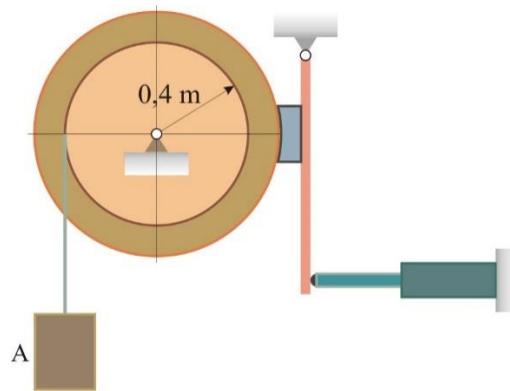
*Odgovor:*  $N_p = 180$  okretaja;  $N_z = 2400$  okretaja.

**Zadatak 4.3.** Zemlja napravi jedan puni okret oko Sunca za 365,24 dana. Prepostavljajući da se Zemlja oko Sunca giba po kružnoj putanji radijusa  $R = 1,415 \cdot 10^{11}$  m, odrediti brzinu i ubrzanje Zemlje.

Koliki je omjer kutnih brzina rotacije Zemlje oko Sunca i rotacije Zemlje oko vlastite osi?

*Odgovor:*  $v_z = 2817,7$  m/s;  $a_z = 0,00561$  m/s<sup>2</sup>;  $\omega_s / \omega_z = 0,00274$ .

**Zadatak 4.4.** Teret A se spuštao brzinom od  $v_A = 5$  m/s kad se uključila automatska kočnica na bubenju (sl. Z.4.4).



Slika Z.4.4. *Zadatak 4.4.*

Ako se od trenutka uključivanja kočnice do zaustavljanja teret spustio za 10 metara, i uz prepostavku jednolikog usporavanja, odrediti vrijeme zaustavljanja i kutno ubrzanje bubnja.

*Odgovor:*  $t_z = 4$  s;  $\varepsilon_B = -3,125$  s<sup>2</sup>.

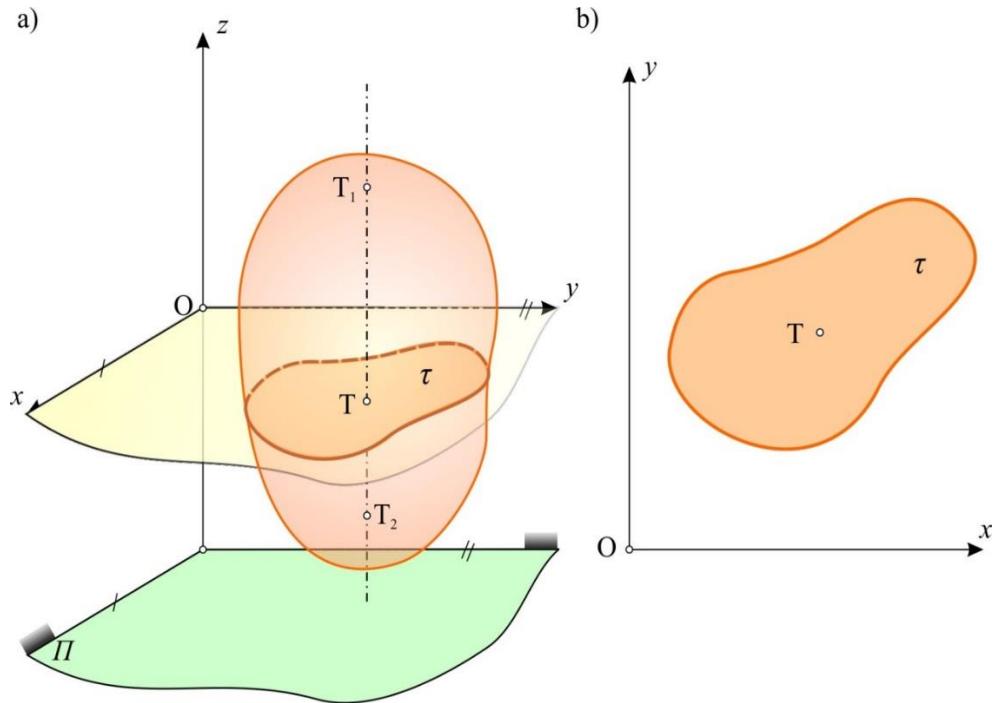
## 4.3. RAVNINSKO GIBANJE KRUTOG TIJELA

### 4.3.1. Jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela

Gibanje krutog tijela pri kojem se sve njegove točke pomiču paralelno prema nekoj nepomičnoj ravnini  $\pi$ , odnosno kad su brzine svih točaka tijela paralelne nepomičnoj ravnini  $\pi$ , naziva se ravninsko (planarno) gibanje krutog tijela.

Ravninsko gibanje vrše mnogi dijelovi mehanizama (npr. kola, koloturnici, stap i stapajica, dijelovi kuliskog mehanizma kod glodalica itd.). Rotacija krutog tijela oko nepomične osi poseban je slučaj ravninskog gibanja.

Pri ravninskom gibanju sve točke tijela koje leže na pravcu  $T_1T_2$ , okomitom na ravninu  $\pi$  (sl. 4.11.a), gibaju se na isti način. Stoga je za proučavanje gibanja krutog tijela kao cijeline dovoljno proučiti gibanje presjeka  $\tau$  tijela s ravninom Oxy paralelnom s nepomičnom ravninom  $\pi$ . U dalnjem radu podudarat će se ravnina Oxy s ravninom crtanja pa će se umjesto cijelog tijela crtati samo njegov presjek  $\tau$  (sl. 4.11.b).



Slika 4.11. Ravninsko gibanje krutog tijela: a) definicija, b) jedan presjek tijela  $\tau$ .

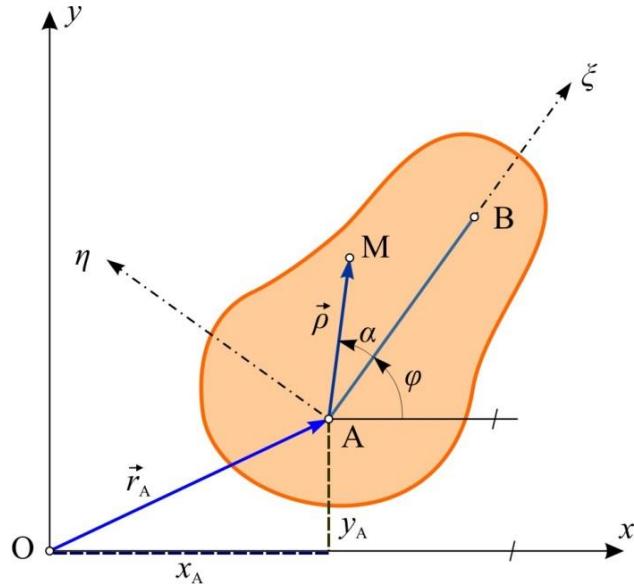
Položaj presjeka  $\tau$  u ravnini Oxy potpuno je određen poznavanjem položaja dviju njegovih točaka (npr. točke A i B) u odnosu na nepomični pravokutni koordinatni sustav. To znači da je potrebno poznavati četiri koordinate ( $x_A, x_B, y_A$  i  $y_B$ ). S obzirom na to da je udaljenost  $l$  između točaka A i B konstantna, što slijedi iz osnovnog svojstva krutog tijela, bit će:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2.$$

To nadalje znači da su od četiriju navedenih koordinata samo tri neovisne, a četvrta se može odrediti iz gornjeg izraza.

Prema tome, gibanje tijela u ravnini određeno je s tri neovisna parametra, tj. tijelo pri planarnom gibanju ima tri stupnja slobode gibanja i to: dvije translacije duž osi  $x$  i  $y$  te jednu rotaciju oko osi okomite na presjek  $\tau$  tijela.

Položaj presjeka  $\tau$  određuje se, umjesto s tri neovisne pravokutne koordinate, položajem proizvoljno odabrane točke A ( $x_A, y_A$ ), koja se naziva *pol*, i kutom  $\varphi$  koji zatvara spojnica AB s osi  $x$  (sl. 4.12).



Slika 4.12. Uz jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela

Na taj način tri jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t) \\ y_A &= y_A(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \tag{4.21}$$

potpuno određuju položaj presjeka  $\tau$  u ravnini i nazivaju se *parametarskim jednadžbama ravninskog gibanja krutog tijela*.

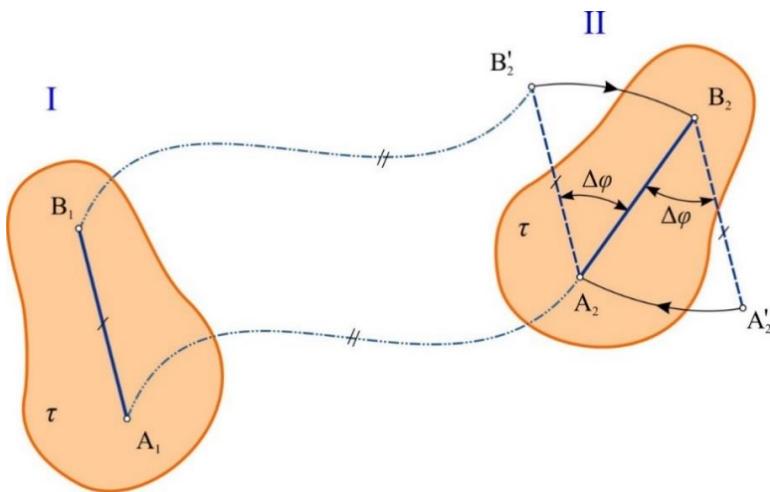
Prve dvije jednadžbe određuju translatorna gibanja presjeka  $\tau$  s kinematičkim značajkama točke odabrane za pol, dok treća prikazuje rotaciju presjeka oko osi okomite na  $\tau$ , a koja prolazi kroz taj odabrani pol.

Jednadžbe gibanja točke M ravne figure  $\tau$ , određene vektorom položaja  $\vec{\rho}$  u pokretnom sustavu  $A\xi\eta$ , bit će:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + \overline{AM} \cos(\alpha + \varphi) \\ y_M &= y_A + \overline{AM} \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned} \tag{4.22}$$

#### 4.3.2. Rastavljanje ravninskog gibanja krutog tijela na translatorno i rotacijsko gibanje

Ravninsko gibanje krutog tijela može se uвijek prikazati s pomoću dva osnovna gibanja: jedne translacije i jedne rotacije oko osi koja prolazi kroz proizvoljno odabranu točku (pol) u ravnini presjeka  $\tau$ . Uoče li se dva uzastopna položaja presjeka  $\tau$  (I i II), određena vremenima  $t_1$  i  $t_2 = t_1 + \Delta t$  (sl. 4.13), vidljivo je da se promatrani presjek može dovesti iz položaja I u položaj II, bilo da se pomakne translatorno u pol A, a zatim zakrene oko pola za kut  $\Delta\varphi$ , bilo da se translatorno pomakne u pol B, a onda zakrene za isti kut  $\Delta\varphi$  i u istom smjeru.



Slika 4.13. Rastavljanje ravninskog gibanja na translatorno i rotacijsko gibanje

Zaključuje se da je ravninsko gibanje krutog tijela potpuno određeno gibanjem pola A i rotacijom presjeka  $\tau$  oko tog pola, pa su kinematičke značajke ravninskog gibanja krutog tijela: brzina i ubrzanje pola A te kutna brzina i kutno ubrzanje tijela.

Promjenom pola mijenjaju se kinematičke značajke translatornog gibanja, dok značajke rotacijskog gibanja ostaju nepromijenjene, tj. one ne ovise o odabiru pola.

#### 4.3.3. Brzine točaka tijela pri ravninskom gibanju

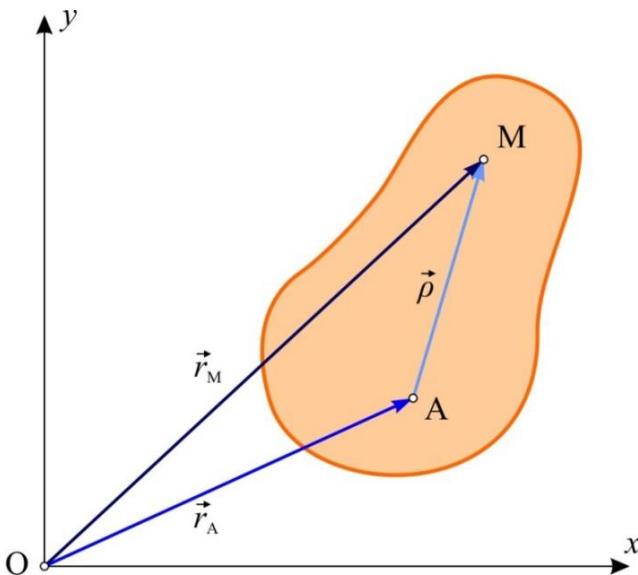
Položaj po volji odabrane točke M, koja leži u presjeku  $\tau$ , potpuno je određen, u koordinatnom sustavu Oxy, vektorskom jednadžbom (sl. 4.14):

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \quad (4.23)$$

Deriviranjem te jednadžbe po vremenu dobije se:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

U dobivenoj jednadžbi član na lijevoj strani predstavlja brzinu točke M; prvi član na desnoj strani brzinu pola A, dok je drugi član na desnoj strani brzina koju bi imala točka M pri rotaciji oko pola A, kada bi taj pol bio nepomičan, i označava se s  $\vec{v}_{MA}$ .



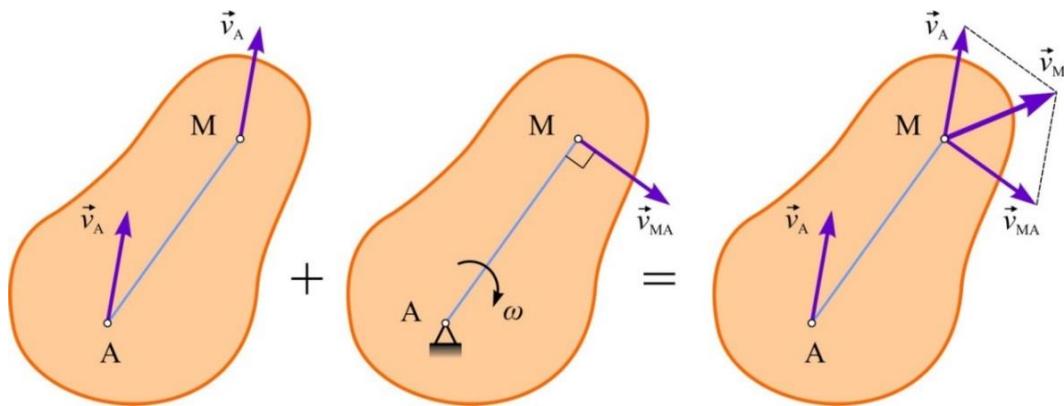
Slika 4.14. Vektor položaja točke M pri ravninskom gibanju

Konačno je:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \quad (4.24)$$

pri čemu je

$$\vec{v}_{MA} = \overline{AM}\omega \text{ i } \vec{v}_{MA} \perp \overline{AM}.$$



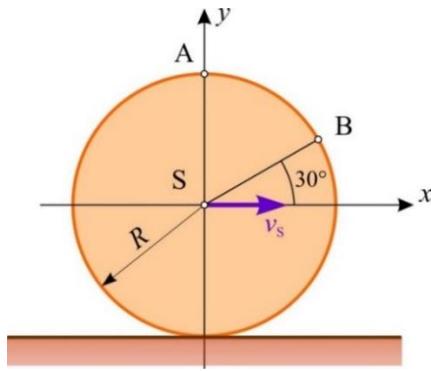
Slika 4.15. Vektor brzine točke M pri ravninskom gibanju

Prema tome, brzina po volji odabrane točke M presjeka jednaka je vektorskom (geometrijskom) zbroju brzine točke A, koja je uzeta za pol, i brzine rotacije točke M oko pola A pri rotaciji presjeka  $\tau$  oko tog pola (sl. 4.15).

### Primjer 4.3.

Kružni disk radijusa  $R = 0,5$  m kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Brzina središta diska mijenja se prema zakonu:  $v_s = 0,5t^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Odrediti brzine točaka A i B na obodu diska u trenutku  $t_1 = 2 \text{ s}$ , kad se te točke nalaze u položaju kako je to prikazano na slici 4.16.



Slika 4.16. Primjer 4.3.

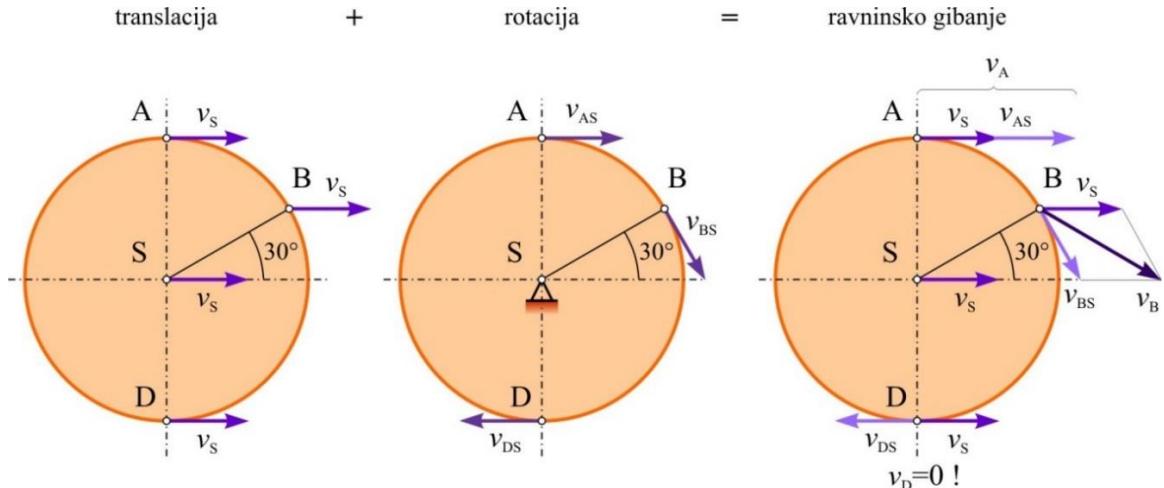
Rješenje:

U trenutku  $t_1 = 2 \text{ s}$  brzina središta diska iznosi:  $v_s = 0,5 \cdot 2^2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Tražene brzine točaka A i B odredit će se zbrajanjem translacije s polom u točki S diska i rotacije oko S.

Koristit će se izraz (4.22), prema kojem je:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_S + \vec{v}_{AS}; \quad \vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{v}_{BS}; \quad \vec{v}_D = \vec{v}_S + \vec{v}_{DS},$$

pri čemu su intenziteti vektora  $\vec{v}_{AS}$ ,  $\vec{v}_{BS}$  i  $\vec{v}_{DS}$  jednaki jer se točke A, B i D nalaze na jednakoj udaljenosti  $R$  od točke S.



Slika 4.17. Određivanje brzina superpozicijom translatornog i rotacijskog gibanja

Na slici 4.17 prikazana je superpozicija translacije brzinom  $v_s$  i rotacije oko pola S. Točka D razmatra se zbog toga što iz uvjeta kotrljanja bez klizanja slijedi da je njena brzina jednaka nuli, te je:

$$v_s - v_{DS} = 0 \text{ ili } v_{DS} = v_s = v_{AS} = v_{BS} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Sada je:

$$v_A = v_s + v_{AS} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_B = \sqrt{v_s^2 + v_{BS}^2 + 2v_s v_{BS} \cos 60^\circ} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,5} = 3,464 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

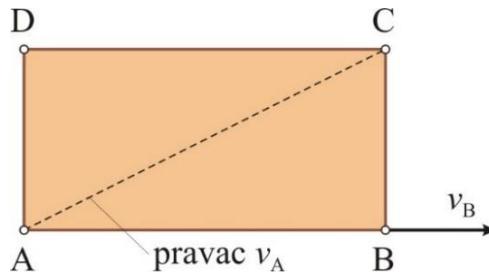
Očito je da nije bilo potrebe za izračunavanjem kutne brzine diska, koja je jednaka:

$$\omega = \frac{v_{DS}}{R} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ s}^{-1}.$$

#### Primjer 4.4.

Pravokutna ploča ABCD giba se u horizontalnoj ravnini. Poznata je brzina točke B ploče,  $v_B = 4 \text{ m/s}$ , te pravac brzine točke A (sl. 4.18).

Odrediti brzinu točke A i kutnu brzinu ploče ako je  $\overline{AB} = 1 \text{ m}$ , a  $\overline{AD} = 0,5 \text{ m}$ .



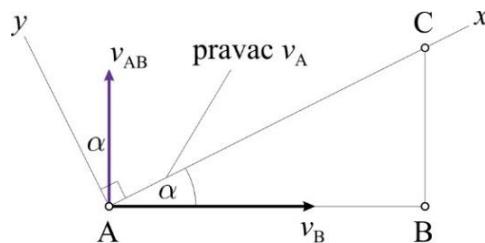
Slika 4.18. Primjer 4.4.

*Rješenje:*

Brzina točke A je prema (4.24):

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}$$

pri čemu je  $\vec{v}_{AB} \perp \overline{AB}$  i  $v_{AB} = \overline{AB} \cdot \omega$ . Ta se vektorska jednadžba može prikazati grafički kako je to prikazano na slici 4.19, na kojoj je smjer vektora  $\vec{v}_{AB}$  prepostavljen.



Slika 4.19. Primjer 4.4: slaganje vektora brzina.

Sa slike 4.19 slijedi:

$$v_A = v_{Ax} = v_B \cdot \cos \alpha + v_{AB} \cdot \sin \alpha$$

$$v_{Ay} = -v_B \cdot \sin \alpha + v_{AB} \cdot \cos \alpha = 0.$$

Budući da je

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2},$$

to je  $\alpha = 26,57^\circ$ , pa je

$$v_{AB} = v_B \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = v_B \cdot \tan \alpha = \frac{v_B}{2} = 2 \text{ m/s},$$

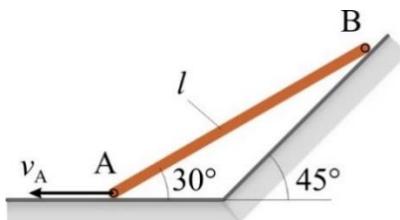
$$\omega = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{2}{1} = 2 \text{ s}^{-1}$$

te konačno

$$v_A = v_B \cdot \cos \alpha + v_{AB} \cdot \sin \alpha = 4 \cdot \cos 26,57^\circ + 2 \cdot \sin 26,57^\circ = 4,472 \text{ m/s}.$$



**Zadatak 4.5.** Štap AB duljine  $l = 1 \text{ m}$  krajem A kliže po horizontalnoj podlozi, a krajem B po kosini.

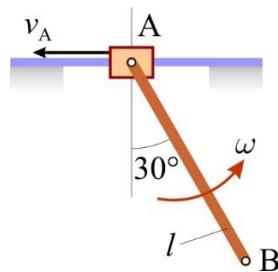


Slika Z.4.5. Zadatak 4.5.

Odrediti brzinu točke B i kutnu brzinu štapa u položaju prikazanom na slici Z.4.5 u kojem je brzina točke A  $v_A = 2 \text{ m/s}$ .

Odgovor:  $v_B = 1,793 \text{ m/s}$ ;  $\omega_{AB} = 1,464 \text{ s}^{-1}$ .

**Zadatak 4.6.** Klizač A giba se po horizontalnoj vodilici brzinom  $v_A = 3 \text{ m/s}$ . Poluga AB duljine  $l = 1 \text{ m}$ , koja je zglobno vezana za klizač, rotira u vertikalnoj ravnini konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ .



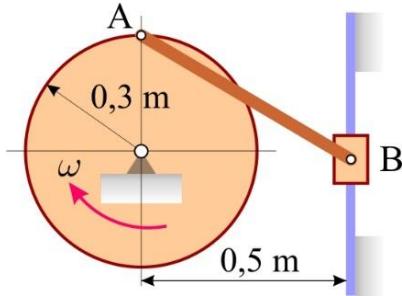
Slika Z.4.6. Zadatak 4.6.

Odrediti brzinu točke B poluge u položaju prikazanom na slici Z.4.6.

Odgovor:  $v_B = 2,053 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 4.7.** Disk polumjera 0,3 m rotira konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$  oko osi kroz oslonac O. U točki A diska zglobno je vezan štap AB duljine  $l = 0,7 \text{ m}$ , koji je drugim krajem

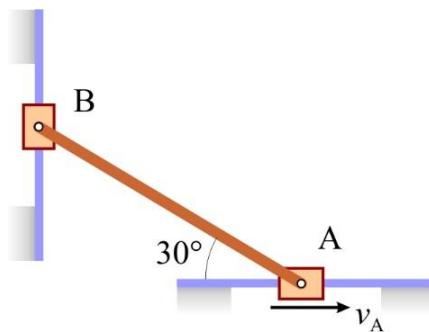
zglobno vezan za klizač B. Odrediti brzinu klizača B i kutnu brzinu štapa u položaju prikazanom na slici Z.4.7.



Slika Z.4.7. Zadatak 4.7.

Odgovor:  $v_B = 1,225 \text{ m/s}$ ;  $\omega_{AB} = 2,449 \text{ s}^{-1}$ .

**Zadatak 4.8.** Klizač A giba se po horizontalnoj vodilici, a klizač B po vertikalnoj. Klizači su međusobno povezani štapom AB duljine  $l = 1 \text{ m}$ . U položaju prikazanom na slici Z.4.8. brzina klizača A je  $v_A = 3 \text{ m/s}$ . Odrediti brzinu klizača B i kutnu brzinu štapa AB.



Slika Z.4.8. Zadatak 4.8.

Odgovor:  $v_B = 5,196 \text{ m/s}$ ;  $\omega_{AB} = 6 \text{ s}^{-1}$ .

#### 4.3.4. Ubrzanja točaka tijela pri ravninskom gibanju

Ubrzanje točke M (slika 4.14) prva je derivacija vektora brzine po vremenu, pa se deriviranjem izraza (4.24) dobije:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\vec{v}_{MA}}{dt},$$

pri čemu drugi član na desnoj strani predstavlja ubrzanje točke M zbog rotacije presjeka oko točke A i obično se prikazuje s pomoću prirodnih komponenata ubrzanja:

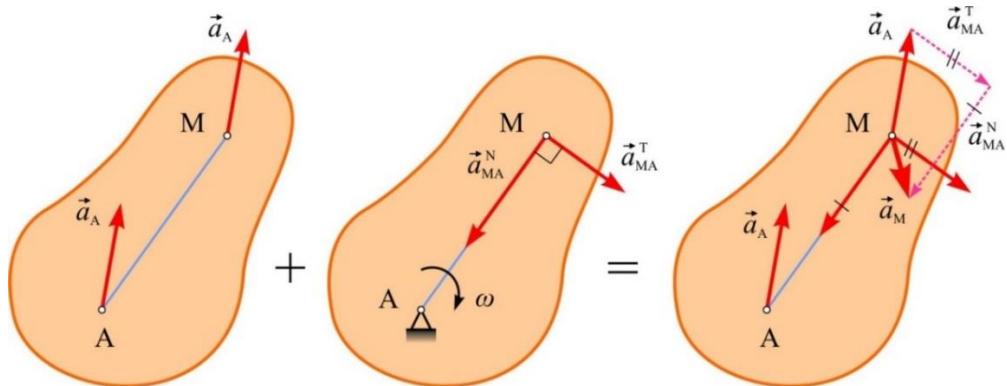
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^N + \vec{a}_{MA}^T \quad (4.25)$$

gdje je:

$a_{MA}^N = \overline{AM}\omega^2$  - normalna komponenta ubrzanja točke M zbog rotacije oko A i usmjerena je duž spojnica AM od M do A;

$\vec{a}_{MA}^T = \overline{AM}\varepsilon$  - tangencijalna komponenta ubrzanja točke M zbog rotacije oko A, okomita je na spojnicu AM i usmjerena u smjeru kutnog ubrzanja  $\varepsilon$  presjeka.

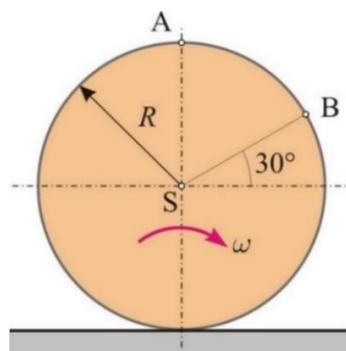
Zaključuje se sljedeće: *Ubrzanje po volji odabrane točke M presjeka tijela jednako je vektorskom (geometrijskom) zbroju ubrzanja točke A, koja je uzeta za pol, i ubrzanja točke M oko pola A pri rotaciji presjeka  $\tau$  oko tog pola* (sl. 4.20).



Slika 4.20. Vektor ubrzanja točke M pri ravninskom gibanju

#### Primjer 4.5.

Kružni disk radijusa  $R = 0,5$  m kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kutna brzina diska mijenja se prema zakonu:  $\omega = t^2$  s $^{-1}$ .



Slika 4.21. Primjer 4.5.

Odredite ubrzanja točaka A i B na obodu diska u trenutku  $t_1 = 2$  s, kad se te točke nalaze u položaju kako je to prikazano na slici 4.21.

*Rješenje:*

Kutno ubrzanje diska je

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 \cdot t,$$

pa će u trenutku  $t_1 = 2$  s biti:

$$\omega_1 = 4 \text{ s}^{-1}, \quad \varepsilon_1 = 4 \text{ s}^{-2}.$$

Budući da se disk kotrlja bez klizanja, brzina točke C (točke diska u dodiru s podlogom) jednaka je nuli, a brzina središta diska S, koje vrši pravocrtno gibanje, jest:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_C + \vec{v}_{SC} = \vec{v}_{SC}$$

$$v_S = R \cdot \omega = 0,5 \cdot t^2,$$

pa je ukupno ubrzanje te točke jednako njezinu tangencijalnom ubrzanju:

$$a_S = \frac{dv_S}{dt} = t$$

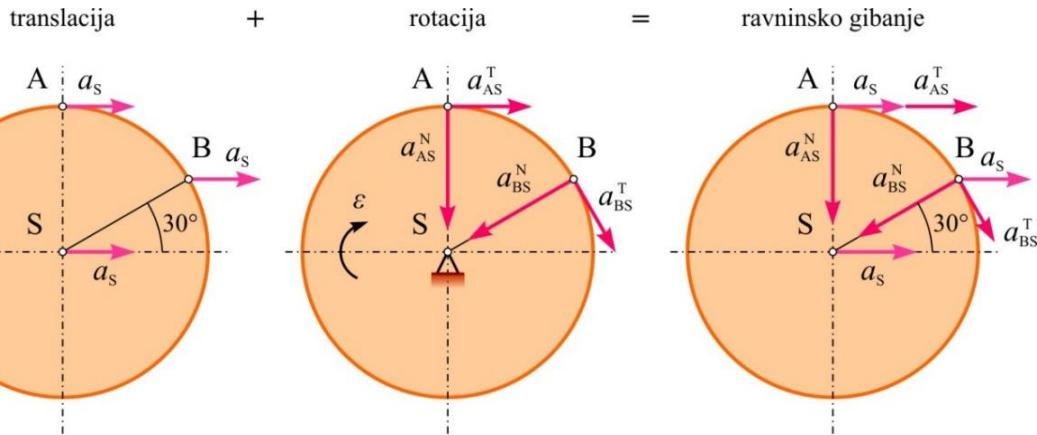
i u trenutku  $t_1 = 2$  s iznosi:

$$a_S = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Slično kao kod određivanja brzina u primjeru 4.3, i ubrzanja točaka A i B odredit će se zbrajanjem translacije s polom u točki S diska i rotacije oko S (sl. 4.22):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_S + \vec{a}_{AS} = \vec{a}_S + \vec{a}_{AS}^N + \vec{a}_{AS}^T$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_S + \vec{a}_{BS} = \vec{a}_S + \vec{a}_{BS}^N + \vec{a}_{BS}^T.$$



Slika 4.22. Određivanje ubrzanja superpozicijom translatornog i rotacijskog gibanja

Točke A i B nalaze se na jednakoj udaljenosti  $R$  od središta S, pa će i ubrzanja tih točaka zbog rotacije tijela oko S biti jednaka po intenzitetu. Normalne komponente su:

$$a_{AS}^N = a_{BS}^N = R\omega^2 = 0,5 \cdot 4^2 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

i usmjerene su radikalno od A, odnosno B, ka točki S. Za određivanje tangencijalnih komponenata potrebno je poznavati kutno ubrzanje  $\epsilon$  diska.

Tražene tangencijalne komponente iznose:

$$a_{AS}^T = a_{BS}^T = R \cdot \epsilon = 0,5 \cdot 4 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Ubrzanje točaka A i B sada je (sl. 4.23):

$$a_A = \sqrt{(a_s + a_{AS}^T)^2 + (a_{AS}^N)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + 8^2} = 8,944 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

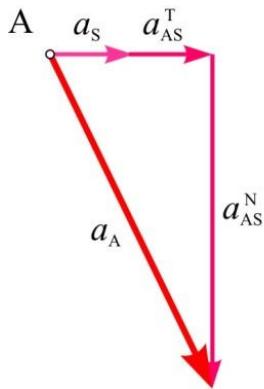
$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{3,928^2 + 5,732^2} = 6,949 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

gdje je:

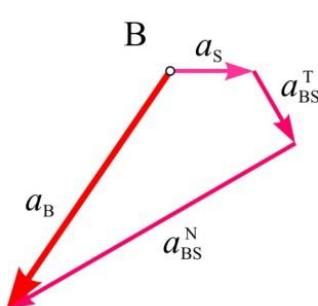
$$a_{Bx} = a_s + a_{BS}^T \cos 60^\circ - a_{BS}^N \cos 30^\circ = 2 + 2 \cdot 0,5 - 8 \cdot 0,866 = -3,928 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_{By} = -a_{BS}^T \sin 60^\circ - a_{BS}^N \sin 30^\circ = -2 \cdot 0,866 - 8 \cdot 0,5 = -5,732 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

ubrzanje točke A:



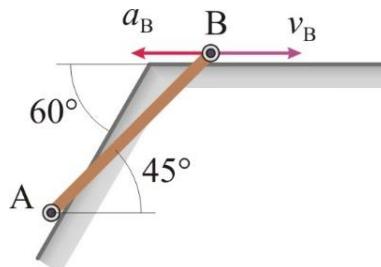
ubrzanje točke B:



Slika 4.23. Ukupna ubrzanja točaka A i B

#### Primjer 4.6.

Štap AB duljine  $l = 0,8 \text{ m}$  ima na svojim krajevima kotačice zanemarivih dimenzija. U položaju na slici poznati su brzina i ubrzanje točke B:  $v_B = 4 \text{ m/s}$  i  $a_B = 4 \text{ m/s}^2$ .



Slika 4.24. Primjer 4.6.

Odrediti ubrzanje točke A u prikazanom položaju.

*Rješenje:*

Ako se za pol odabere točka B (točka s čijim se kinematičkim karakteristikama štap translatira), ubrzanje točke A dano je izrazom (4.25)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB} = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^N + \vec{a}_{AB}^T.$$

Ubrzanje točke B je zadano, dok se pravac ubrzanja točke A poklapa s pravcem kosine duž koje se točka A giba.

Pravac ubrzanja  $\vec{a}_{AB}^N$  poklapa se sa spojnicom AB, smjer mu je od A prema B, a iznos

$$a_{AB}^N = \overline{AB} \cdot \omega^2 = l \cdot \omega^2.$$

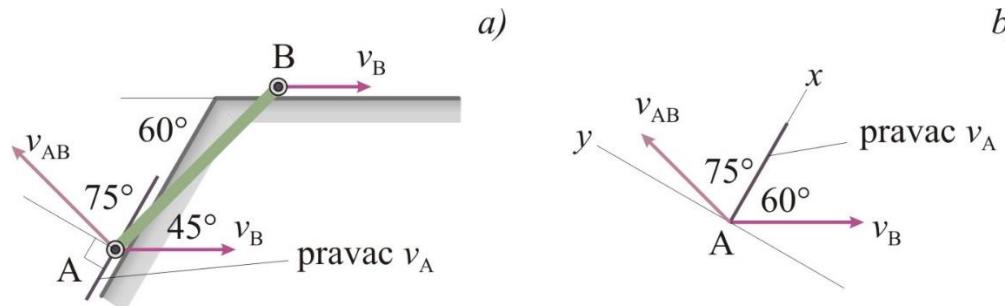
Pravac ubrzanja  $\vec{a}_{AB}^T$  okomit je na spojnicu AB, smjer mu nije poznat, a iznos mu je

$$a_{AB}^T = \overline{AB} \cdot \varepsilon = l \cdot \varepsilon.$$

Kutna brzina štapa jednaka je  $\omega = v_{AB}/l$ , a određuje se slaganjem vektora brzina (4.24)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{AB}.$$

U gornjoj je jednadžbi poznat vektor brzine točke B te pravci brzina  $v_A$  i  $v_{AB}$  (slika 4.25).



Slika 4.25. Brzina točke A: a) plan položaja, b) slaganje brzina.

Sa slike 4.25. slijedi:

$$v_A = v_{Ax} = v_B \cdot \cos 60^\circ + v_{AB} \cdot \cos 75^\circ$$

$$v_{Ay} = -v_B \cdot \sin 60^\circ + v_{AB} \cdot \sin 75^\circ = 0.$$

Iz druge od jednadžba dobije se

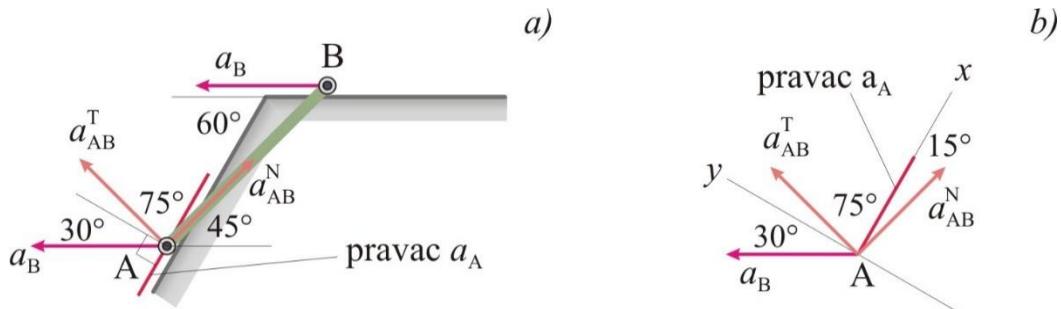
$$v_{AB} = v_B \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 3,586 \text{ m/s},$$

pa je

$$\omega = \frac{v_{AB}}{l} = \frac{3,586}{0,8} = 4,483 \text{ s}^{-1},$$

odnosno

$$a_{AB}^N = l \cdot \omega^2 = 0,8 \cdot 4,483^2 = 16,08 \text{ m/s}^2.$$



Slika 4.26. Ubrzanje točke A: a) plan položaja, b) slaganje ubrzanja.

Slijedi slaganje vektora ubrzanja (sl. 4.26):

$$a_A = a_{Ax} = -a_B \cdot \sin 30^\circ + a_{AB}^N \cdot \cos 15^\circ + a_{AB}^T \cdot \cos 75^\circ$$

$$0 = a_{Ay} = a_B \cdot \cos 30^\circ - a_{AB}^N \cdot \sin 15^\circ + a_{AB}^T \cdot \sin 75^\circ.$$

Iz druge od tih jednadžba je

$$a_{AB}^T \cdot \sin 75^\circ = -a_B \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^N \cdot \sin 15^\circ = -4 \cdot \cos 30^\circ + 16,08 \cdot \sin 15^\circ = 0,697$$

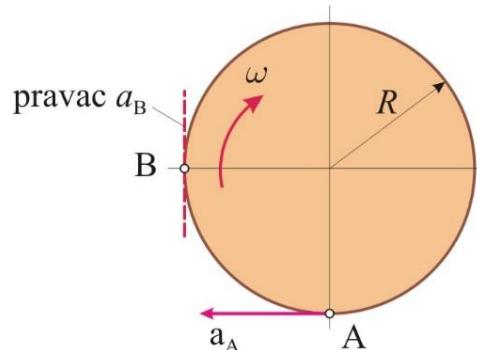
$$a_{AB}^T = 0,697 / \sin 75^\circ = 0,721 \text{ m/s}^2$$

pa iz prve slijedi

$$\begin{aligned} a_A = a_{Ax} &= -a_B \cdot \sin 30^\circ + a_{AB}^N \cdot \cos 15^\circ + a_{AB}^T \cdot \cos 75^\circ = \\ &= -4 \cdot \sin 30^\circ + 16,08 \cdot \cos 15^\circ + 0,721 \cdot \sin 15^\circ = 13,72 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$



**Zadatak 4.9.** Kružni disk radijusa  $R = 0,4 \text{ m}$  giba se u horizontalnoj ravnini. U položaju prikazanom na slici poznato je ubrzanje točke A  $a_A = 3 \text{ m/s}^2$ , pravac ubrzanja točke B i kutna brzina diska  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ .

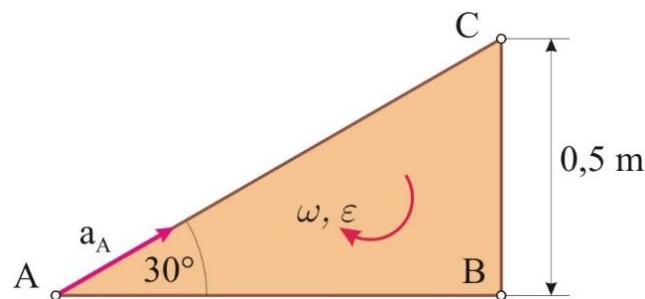


Slika Z.4.9. Zadatak 4.9.

Odrediti ubrzanje točke B diska i njegovo kutno ubrzanje.

*Odgovor:*  $a_B = 0,2 \text{ m/s}^2$ ;  $\varepsilon = 3,5 \text{ s}^{-2}$ .

**Zadatak 4.10.** U položaju prikazanom na slici poznato je ubrzanje točke A  $a_A = 3 \text{ m/s}^2$ , kutna brzina  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$  i kutno ubrzanje  $\varepsilon = 3 \text{ s}^{-2}$  trokutaste ploče (sl. Z.4.10).



Slika Z.4.10. Zadatak 4.10.

Odrediti ubrzanja točaka B i C ploče.

Odgovor:  $a_B = 1,398 \text{ m/s}^2$ ,  $a_C = 3,162 \text{ m/s}^2$ .

#### 4.3.5. Teorem o projekcijama vektora brzina točaka ravne figure

Teorem o projekcijama vektora brzine dviju točaka ravne figure glasi: *projekcije brzina dviju točaka ravne figure na pravac koji prolazi tim dvjema točkama međusobno su jednake.*

Ovaj teorem dade se lako dokazati s pomoću ranije dobivene jednadžbe:

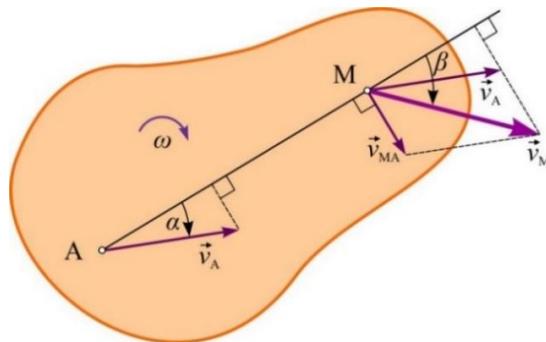
$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}.$$

Uzimajući u obzir da je  $\vec{v}_{MA} \perp \overline{AM}$ , projekcijom gornje jednadžbe na pravac AM (sl. 4.27) slijedi:

$$v_M \cos \beta = v_A \cos \alpha,$$

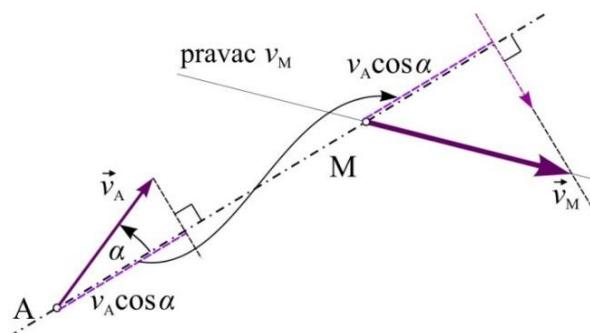
čime je teorem dokazan.

Jednakost projekcija brzina dviju točaka ravne figure slijedi i iz osnovnog svojstva krutog tijela – nepromjenljivosti udaljenosti između dviju njegovih točaka. Tako, kada bi projekcije promatranih brzina na pravac AM bile različite, to bi značilo da se ili točka A približava točki M ili pak da se točka M udaljava od točke A, što prema definiciji krutog tijela nije moguće.



Slika 4.27. Projekcija vektora brzina dviju točaka ravne figure

Iz gornjeg teorema slijedi poznata iako malo upotrebljavana metoda koja služi za određivanje brzina točaka ravne figure – *metoda projiciranih brzina*.



Slika 4.28. Metoda projiciranih brzina

Naime, ako je poznata brzina točke A po intenzitetu, pravcu i smjeru te pravac brzine točke M, moguće je s pomoću teorema o projekcijama brzina odrediti intenzitet i smjer brzine točke M

na način da se projekcija brzine točke A na pravac AM prenese u točku M, a zatim iz vrha projekcije podigne okomica do pravca brzine  $v_M$  (sl. 4.28).

#### 4.3.6. Trenutni pol brzina

*Trenutnim polom brzina  $P_v$  naziva se točka u ravnini presjeka tijela čija je brzina u promatranom trenutku jednaka nuli.*

Ta točka može ležati na samom presjeku ili pak izvan njega, no smatrati će se da je uvijek vezana uz tijelo. S obzirom na izrečenu definiciju i izraz (4.22) bit će prema slici 4.29:

$$\vec{v}_{Pv} = \vec{v}_A + \vec{v}_{PvA} = \vec{0}$$

ili

$$\vec{v}_{PvA} = -\vec{v}_A.$$

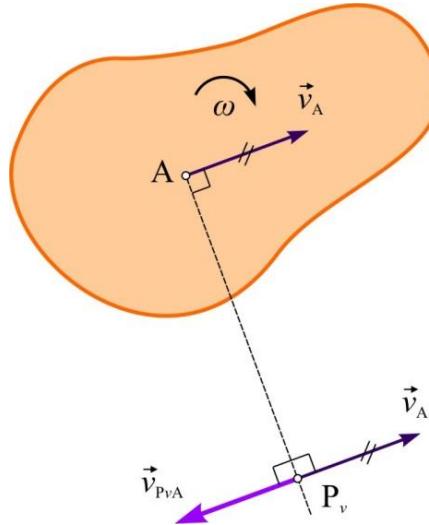
Budući da je  $\vec{v}_{PvA} \perp \overline{AP}_v$ , očito je da se trenutni pol brzina mora nalaziti na pravcu koji prolazi točkom A i okomit je na brzinu  $\vec{v}_A$ .

Intenzitet brzine  $\vec{v}_{PvA}$  dan je izrazom:

$$v_{PvA} = \overline{AP}_v \cdot \omega,$$

i jednak je intenzitetu brzine  $\vec{v}_A$  pa je udaljenost pola od točke A:

$$\overline{AP}_v = \frac{v_{PvA}}{\omega} = \frac{v_A}{\omega}. \quad (4.26)$$



Slika 4.29. *Trenutni pol brzina*

##### 4.3.6.1. Određivanje brzina točaka s pomoću trenutnog pola brzina

Usvoji li se trenutni pol brzina  $P_v$  za pol presjeka tijela, tada će u odabranom trenutku vremena brzina točke A presjeka biti:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_{APv},$$

odakle, s obzirom na to da je  $\vec{v}_{P_v} = \vec{0}$ , slijedi:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{AP_v},$$

tj. brzina po volji odabrane točke tijela u proizvoljnom trenutku vremena jednaka je brzini rotacije koju ta točka ima pri rotaciji presjeka oko trenutnog pola brzina:

$$v_A = \overline{AP_v} \cdot \omega$$

$$v_B = \overline{BP_v} \cdot \omega$$

.....

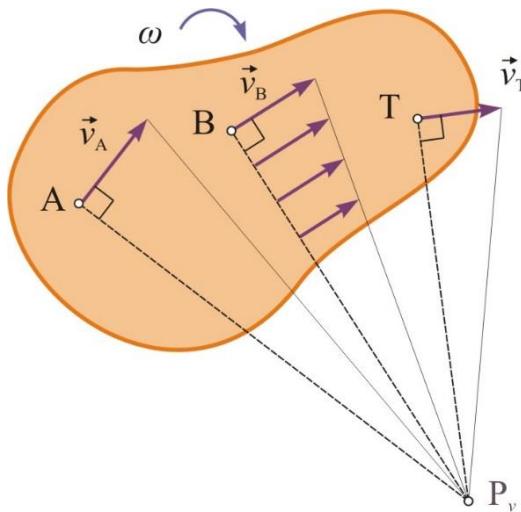
$$v_T = \overline{TP_v} \cdot \omega,$$

tj. intenzitet brzine bilo koje točke presjeka  $\tau$  jednak je produktu između kutne brzine tijela i udaljenosti promatrane točke od trenutnog pola brzina. Navedena udaljenost naziva se još i trenutni radius rotacije.

Iz gornjih izraza slijedi:

$$\frac{v_A}{\overline{AP_v}} = \frac{v_B}{\overline{BP_v}} = \dots = \frac{v_T}{\overline{TP_v}} = \omega, \quad (4.27)$$

tj. intenziteti brzina točaka presjeka proporcionalni su njihovim udaljenostima od trenutnog pola brzina (sl. 4.30).



Slika 4.30. Određivanje brzina točaka s pomoću trenutnog pola brzina

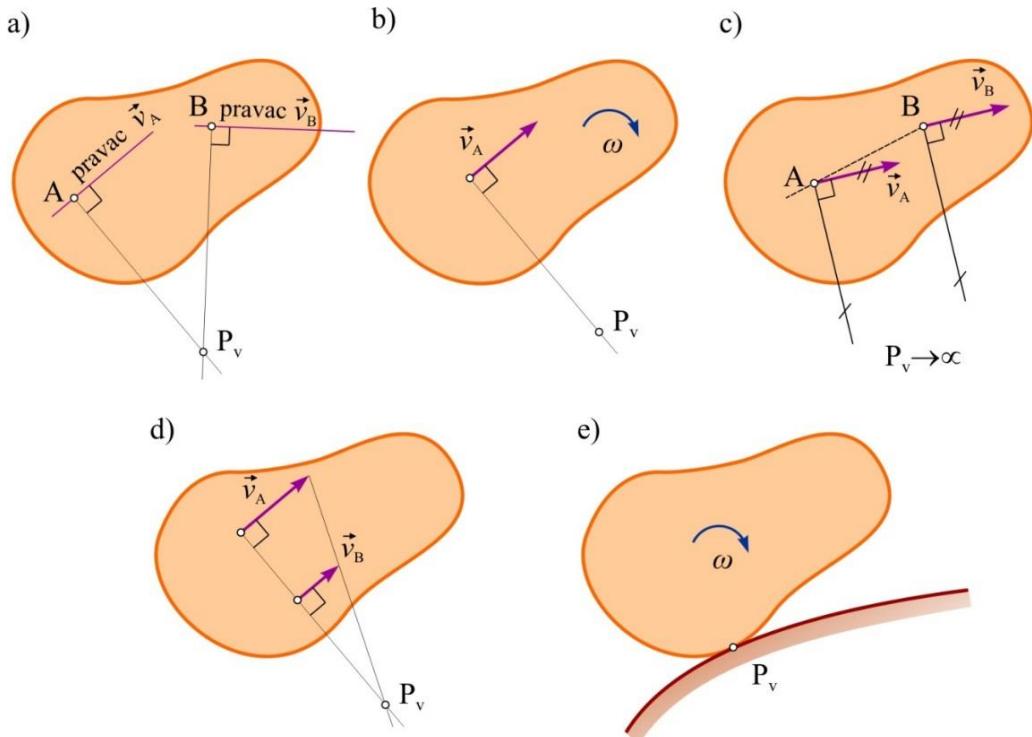
#### 4.3.6.2. Posebni slučajevi određivanja trenutnog pola brzine

Ako su poznati pravci brzina dviju točaka presjeka, koji nisu međusobno paralelni, tada se pol brzina nalazi u presjecištu okomica podignutih na pravce brzina kroz te točke (sl. 4.31.a).

Ako je poznat vektor brzine jedne točke presjeka (npr.  $\vec{v}_A$ ) i kutna brzina  $\omega$  presjeka, tada se trenutni pol brzina nalazi na okomici podignutoj na tu brzinu u smjeru  $\omega$ , a na udaljenosti  $\overline{AP_v} = v_A / \omega$  (sl. 4.31.b).

Trenutni pol brzina presjeka nalazi se u beskonačnosti ako su brzine dviju točaka presjeka paralelne, a spojnica tih dviju točaka nije okomita na pravce brzina.

Tijelo tada vrši translatorno gibanje, a taj je slučaj prikazan na slici 4.31.c.



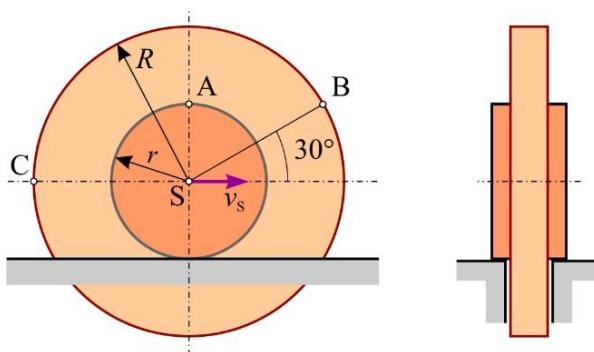
Slika 4.31. Posebni slučajevi određivanja trenutnog pola brzina

Neka su poznate brzine dviju točaka presjeka, neka su međusobno paralelne i okomite na spojnici tih dviju točaka; trenutni pol brzina nalazi se u sjecištu pravca koji prolazi tim točkama i pravca koji prolazi vrhovima njihovih brzina (sl. 4.31.d).

Kad se jedno tijelo kotrlja bez klizanja po površini drugoga, nepomičnog tijela, tada je točka dodira ujedno i trenutni pol brzina jer iz uvjeta kotrljanja slijedi da su brzine točaka na mjestu dodira tijela koja ostvaruju kotrljanje međusobno jednake (sl. 4.31.e).

#### Primjer 4.7.

Kolo sastavljeno od dvaju kružnih diskova radijusa  $r = 0,3 \text{ m}$  i  $R = 0,5 \text{ m}$  kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Brzina središta diska je konstantna i iznosi  $v_s = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

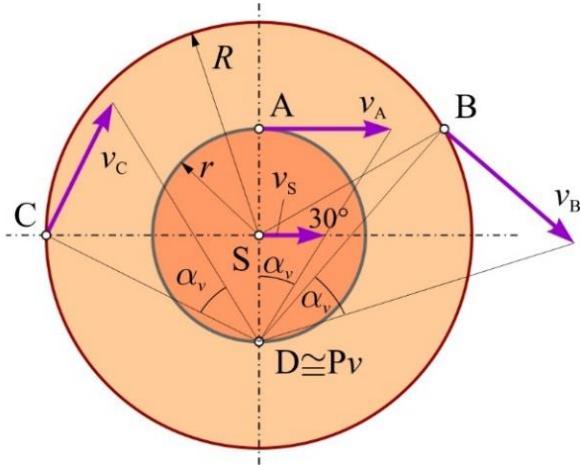


Slika 4.32. Primjer 4.7.

Odrediti s pomoću trenutnog pola brzina brzine točaka A, B i C na obodu diska u trenutku kad se te točke nalaze u položaju kako je to prikazano na slici 4.32.

*Rješenje:*

Budući da se kolo kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi, mora trenutni pol brzina biti u točki koja je u razmatranom trenutku u dodiru s podlogom (sl. 4.31.e); točka D na slici 4.33.



Slika 4.33. Određivanje brzina s pomoću trenutnog pola brzina

Iz poznate brzine točke S kola slijedi njegova kutna brzina:

$$\omega = \frac{v_s}{SP_v} = \frac{v_s}{r} = \frac{6}{0,3} = 20 \text{ s}^{-1}.$$

Brzine točaka A, B i C kola proporcionalne su udaljenosti tih točaka od trenutnog pola brzina:

$$v_A = \overline{AP}_v \cdot \omega = 0,6 \cdot 20 = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_B = \overline{BP}_v \cdot \omega = 0,7 \cdot 20 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_C = \overline{CP}_v \cdot \omega = 0,583 \cdot 20 = 11,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

jer je (sl. 4.33):

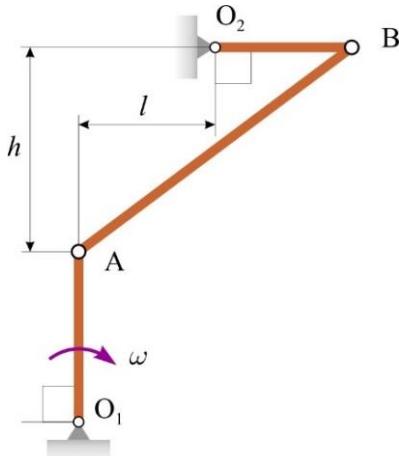
$$\overline{AP}_v = 2 \cdot r = 0,6 \text{ m}$$

$$\overline{BP}_v = \sqrt{(r + R \cdot \sin 30^\circ)^2 + (R \cdot \cos 30^\circ)^2} = \sqrt{(0,3 + 0,5 \cdot 0,5)^2 + (0,5 \cdot 0,866)^2} = 0,7 \text{ m}$$

$$\overline{CP}_v = \sqrt{r^2 + R^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,5^2} = 0,583 \text{ m}.$$

#### Primjer 4.8.

Ravninski mehanizam sastavljen je od triju štapova: O<sub>1</sub>A, AB i O<sub>2</sub>B. Štap O<sub>1</sub>A rotira konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti s pomoću trenutnog pola brzina brzinu točke B u položaju prikazanom na slici 4.34. Kolike su u tom trenutku kutne brzine štapova AB i O<sub>2</sub>B. Zadano:  $\overline{O_1A} = 0,5 \text{ m}$ ,  $\overline{AB} = 1 \text{ m}$ ,  $\overline{O_2B} = 0,4 \text{ m}$ ,  $h = 0,6 \text{ m}$ ,  $l = 0,4 \text{ m}$ .



Slika 4.34. Primjer 4.8.

Rješenje:

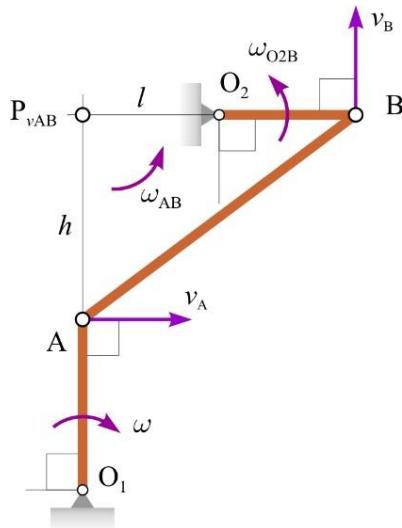
Brzina točke A okomita je na štap  $O_1A$ , dok je brzina točke B okomita na štap  $O_2B$ . Budući da točke A i B pripadaju i štalu AB, trenutni pol brzina toga štapa nalazi se u presjecištu okomica na pravce brzina u točkama A i B (slučaj prikazan na slici 4.31.a), kako je to prikazano na slici 4.35.

Brzina točke A je

$$v_A = \overline{O_1A} \cdot \omega = 0,5 \cdot 4 = 2 \text{ m/s},$$

a kako ta točka pripada i štalu AB, to je

$$v_A = h \cdot \omega_{AB} = 0,6 \cdot \omega_{AB}.$$



Slika 4.35. Primjer 4.8: Određivanje brzina s pomoću trenutnog pola brzina.

Slijedi kutna brzina štapa AB:

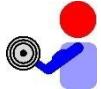
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{h} = \frac{2}{0,6} = 3,33 \text{ s}^{-1},$$

odnosno brzina točke B:

$$v_B = \left( l + \overline{O_2B} \right) \cdot \omega_{AB} = (0,4 + 0,4) \cdot 3,33 = 2,67 \text{ m/s}.$$

Kutna brzina štapa  $O_2B$  sada je

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{\overline{O_2B}} = \frac{2,67}{0,4} = 6,67 \text{ s}^{-1}.$$



**Zadatak 4.11.** Riješiti zadatak 4.5 (str. 138) s pomoću trenutnog pola brzina.

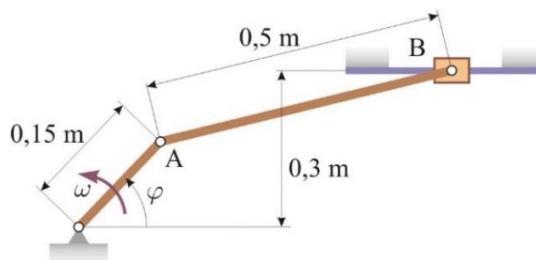
*Odgovor:*  $v_B = 1,793 \text{ m/s}$ ;  $\omega_{AB} = 1,464 \text{ s}^{-1}$ .

**Zadatak 4.12.** Riješiti zadatak 4.8 (str. 139) s pomoću trenutnog pola brzina.

*Odgovor:*  $v_B = 5,196 \text{ m/s}$ ;  $\omega_{AB} = 6 \text{ s}^{-1}$ .

**Zadatak 4.13.** Poluga OA mehanizma prikazanog na slici Z.4.13. rotira konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$  i s pomoću štapa AB pomiče klizač B duž horizontalne vodilice.

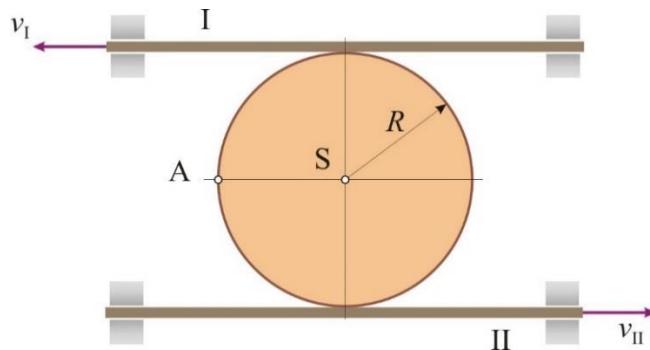
Odrediti brzinu klizača B u položaju u kojem je  $\varphi = 0$ .



Slika Z.4.13. Zadatak 4.13.

*Odgovor:*  $v_B = 1,125 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 4.14.** Vodilice I i II gibaju se konstantnim brzinama  $v_I = 2 \text{ m/s}$  i  $v_{II} = 4 \text{ m/s}$ , a po njima se kotrlja bez klizanja disk radijusa  $R = 0,25 \text{ m}$ .

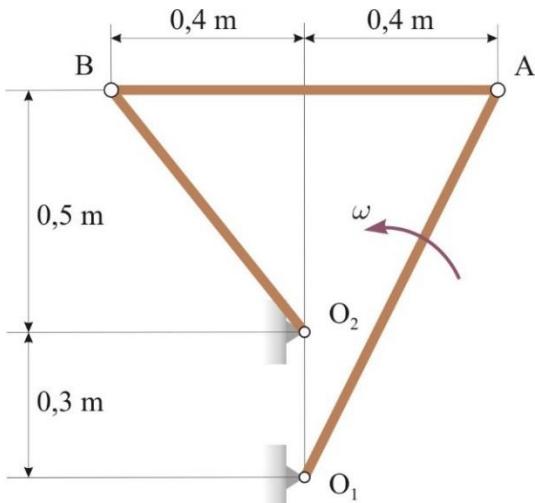


Slika Z.4.14. Zadatak 4.14.

Odrediti kutnu brzinu diska te brzine točaka S i A u položaju prikazanom na slici Z.4.14.

*Odgovor:*  $\omega_{AB} = 11,98 \text{ s}^{-1}$ ,  $v_S = 1 \text{ m/s}$ ;  $v_A = 3,155 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 4.15.** Poluga O<sub>1</sub>A mehanizma prikazanoga na slici rotira oko oslonca O<sub>1</sub> konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti brzinu točke B u zadanom položaju.



Slika Z.4.15. Zadatak 4.15.

Odgovor:  $v_B = 10,236 \text{ m/s}$ .

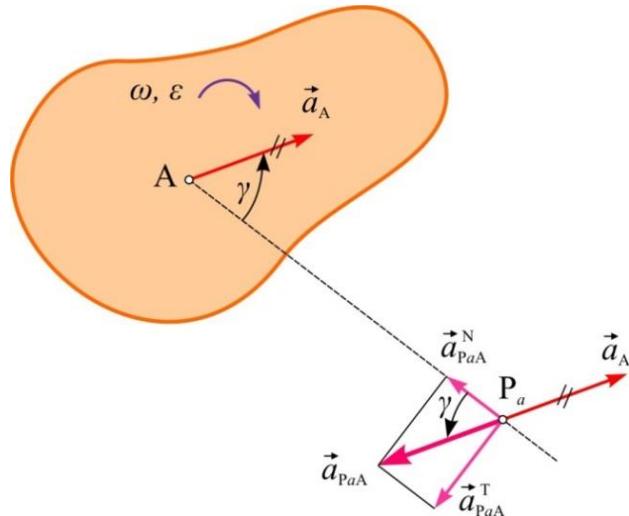
#### 4.3.7. Trenutni pol ubrzania

Trenutnim polom ubrzanja  $P_a$  naziva se točka u ravnini presjeka tijela čije je ubrzanje u promatranom trenutku jednako nuli.

Ubrzanje trenutnog pola brzina, prema (4.25), iznosi:

$$\vec{a}_{Pv} = \vec{a}_A + \vec{a}_{PvA}^N + \vec{a}_{PvA}^T$$

i u općem slučaju ravninskog gibanja nije jednako nuli, pa trenutni pol brzina nije ujedno i trenutni pol ubrzanja.



Slika 4.36. Trenutni pol ubrzanja

Točka  $P_a$  mora zadovoljiti sljedeći uvjet:

$$\vec{a}_{Pa} = \vec{a}_A + \vec{a}_{PaA}^N + \vec{a}_{PaA}^T = \vec{0}$$

ili

$$\vec{a}_{\text{PaA}}^N + \vec{a}_{\text{PaA}}^T = -\vec{a}_A.$$

Ta vektorska jednakost prikazana je grafički (sl. 4.36).

Kut  $\gamma$ , što ga vektor ubrzanja točke A zatvara s pravcem na kojem se nalazi pol ubrzanja, određen je izrazom:

$$\tan \gamma = \frac{a_{\text{PaA}}^T}{a_{\text{PaA}}^N} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (4.28)$$

Taj kut se nanosi od vektora ubrzanja  $\vec{a}_A$  u smjeru  $\varepsilon$ .

Budući da je:

$$a_{\text{PaA}}^N = \overline{AP}_a \cdot \omega^2; \quad a_{\text{PaA}}^T = \overline{AP}_a \cdot \varepsilon,$$

bit će intenzitet ubrzanja  $\vec{a}_{\text{PaA}}$ :

$$a_{\text{PaA}} = \sqrt{\overline{AP}_a^2 + \varepsilon^2} = a_A,$$

odakle slijedi udaljenost pola ubrzanja od točke A:

$$\overline{AP}_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (4.29)$$

#### 4.3.7.1. Određivanje ubrzanja točaka pomoću trenutnog pola ubrzanja

Usvoji li se trenutni pol brzina  $P_a$  za pol presjeka tijela, tada će u odabranom trenutku vremena ubrzanje točke A presjeka biti:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{P_a} + \vec{a}_{AP_a},$$

odakle, s obzirom na to da je  $\vec{a}_{P_a} = \vec{0}$ , slijedi:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AP_a},$$

tj. *ubrzanje po volji odabrane točke tijela u proizvolnjem trenutku vremena jednako je ubrzanju koju ta točka ima pri rotaciji presjeka oko trenutnog pola brzina*:

$$a_A = \sqrt{\overline{AP}_a^2 + \varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$a_B = \sqrt{\overline{BP}_a^2 + \varepsilon^2 + \omega^4}$$

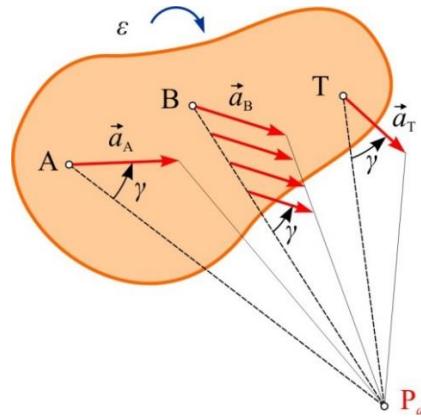
.....

$$a_T = \sqrt{\overline{TP}_a^2 + \varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Iz gornjeg izraza slijedi:

$$\frac{a_A}{\overline{AP}_a} = \frac{a_B}{\overline{BP}_a} = \dots = \frac{a_T}{\overline{TP}_a} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (4.30)$$

tj. intenziteti ubrzanja točaka presjeka  $\tau$  proporcionalni su njihovim udaljenostima od trenutnog pola ubrzanja (sl. 4.37).



Slika 4.37. Određivanje ubrzanja točaka s pomoću trenutnog pola ubrzanja

Pravac vektora ubrzanja pojedine točke (npr. točke A) zatvara sa spojnicom te točke s polom ubrzanja kut  $\gamma$ :

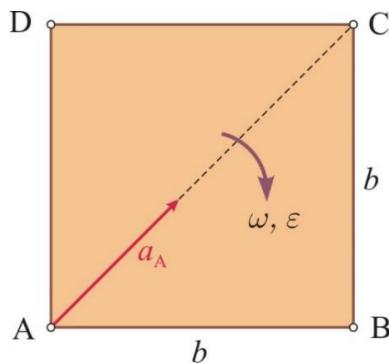
$$\gamma = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

koji se mjeri od spojnica u smjeru suprotnom od smjera  $\varepsilon$ .

#### Primjer 4.9.

Kvadratna ploča giba se u horizontalnoj ravnini. Poznata je kutna brzina ploče  $\omega$ , njeno kutno ubrzanje  $\varepsilon$  i ubrzanje točke A. Odrediti ubrzanja točaka B, C i D ploče u položaju na slici 4.38 s pomoću trenutnog pola ubrzanja.

Zadano:  $b = 1 \text{ m}$ ,  $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 4 \text{ s}^{-2}$ ,  $a = 4\sqrt{2} \text{ m/s}^2$ .



Slika 4.38. Primjer 4.9.

Rješenje:

Kut što ga vektor ubrzanja točke A zatvara sa spojnicom te točke s trenutnim polom ubrzanja ploče dan je izrazom (4.28):

$$\tan \gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{4}{2^2} = 1, \text{ odakle je } \gamma = 45^\circ;$$

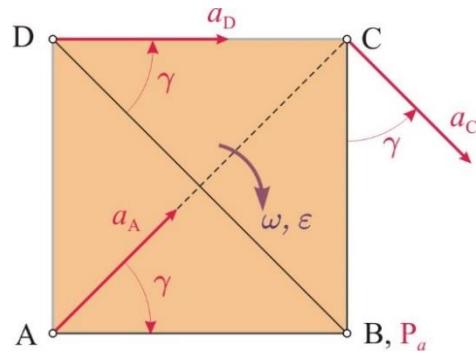
a mjeri se od vrha vektora  $\vec{a}_A$  u smjeru kutnog ubrzanja  $\varepsilon$ .

Udaljenost trenutnog pola ubrzanja od točke A dana je izrazom (4.29):

$$\overline{AP}_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4^2 + 2^4}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 1 \text{ m}.$$

Zaključuje se da se trenutni pol ubrzanja poklapa s točkom B ploče te da je ubrzanje točke B u razmatranom trenutku jednako nuli.

Pravac ubrzanja točke C zatvara kut  $\gamma = 45^\circ$  sa spojnicom točke C s točkom B (trenutnim polom ubrzanja) mjereno u smjeru suprotnom od smjera kutnog ubrzanja  $\varepsilon$  (sl. 4.39). Na isti se način dolazi i do pravca ubrzanja točke D.



Slika 4.39. Primjer 4.9: Određivanje ubrzanja s pomoću trenutnog pola ubrzanja.

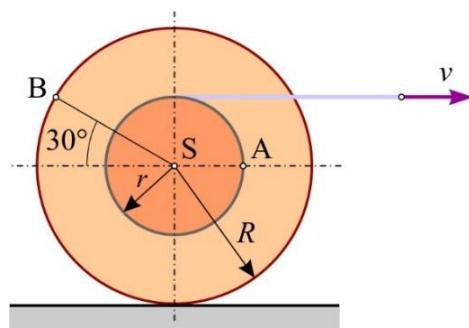
Intenziteti ubrzanja točaka C i D su

$$a_C = \overline{CP}_a \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 1 \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

$$a_D = \overline{DP}_a \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8 \text{ m/s}^2.$$



**Zadatak 4.16.** Kolo sastavljeno od dvaju diskova radijusa  $R = 0,5 \text{ m}$  i  $r = 0,2 \text{ m}$  kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi (sl. Z.4.16). Na manji disk kola namotano je uže koje se povlači konstantnom brzinom  $v = 4 \text{ m/s}$ .



Slika Z.4.16. Zadatak 4.16.

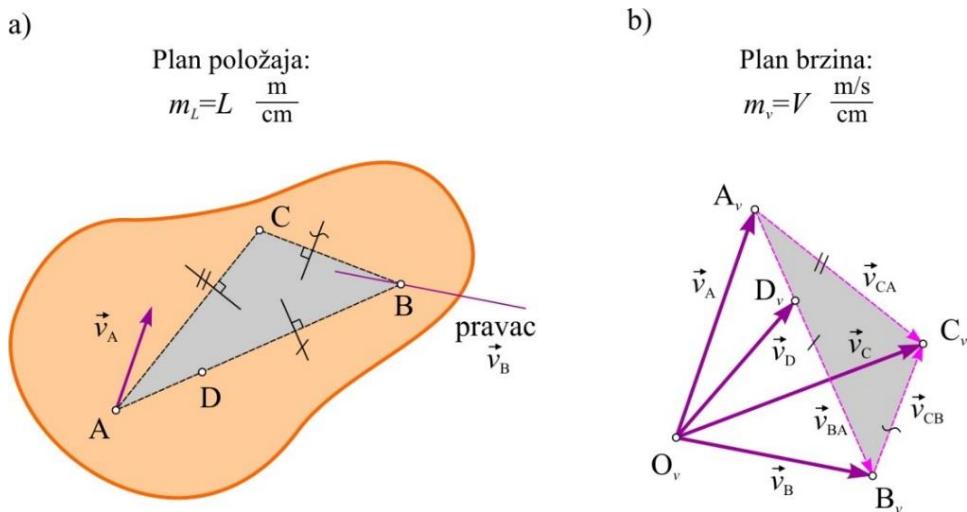
Odrediti ubrzanja točaka A i B s pomoću trenutnog pola ubrzanja.

Odgovor:  $a_A = 6,53 \text{ m/s}^2$ ;  $a_B = 16,33 \text{ m/s}^2$ .

#### 4.3.8. Plan brzina i plan ubrzanja

Vektori brzine i ubrzanja često se u analizi ravninskih mehanizama određuju analitički ili grafički s pomoću *plana brzina* i *plana ubrzanja*. Kod ravninskog gibanja tijela obično je poznata brzina jedne njegove točke i pravac brzine neke druge. Tijelo koje vrši ravninsko gibanje crta se u odgovarajućem mjerilu duljina, a ta se slika naziva *plan položaja*.

Neka je poznat vektor brzine točke A tijela ( $\vec{v}_A$ ) i pravac brzine točke B (sl. 4.40.a).



Slika 4.40. Metoda plana brzina: a) plan položaja, b) plan brzina.

Sa strane plana položaja odabere se točka  $O_v$  i iz te se točke nanosi vektor  $\vec{v}_A$  u odabranom mjerilu brzina  $m_v$ . Također se, iz točke  $O_v$ , nanese i pravac paralelan s pravcem brzine točke B. Osnovna vektorska jednadžba, koja služi za crtanje plana brzina, jest (4.24):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

Budući da je pravac vektora  $\vec{v}_{BA}$  poznat ( $\vec{v}_{BA} \perp \overline{AB}$ ), povlači se iz vrha  $A_v$  u planu brzina pravac okomit na spojnicu AB. Na taj način dobiva se točka  $B_v$  koja predstavlja vrh brzine  $\vec{v}_B$ . Iz trokuta  $O_v A_v B_v$  određuju se intenziteti  $v_B$  i  $v_{BA}$ . Intenzitet i smjer vektora  $\vec{v}_{BA}$  mogu poslužiti za izračunavanje veličine i smjera kutne brzine:

$$\omega = \frac{v_{BA}}{\overline{AB}},$$

a smjer joj slijedi smjer vektora  $\vec{v}_{BA}$ .

Brzina proizvoljno odabrane točke C tijela može se sada odrediti na dva načina. Prvi podrazumijeva korištenje dviju vektorskih jednadžba:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} \quad i \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}.$$

Na taj način dobiju se u planu brzina (sl. 4.40.b) dva pravca u čijem je presjecištu točka  $C_v$  – vrh vektora brzine točke C.

Brzina točke C može se odrediti i s pomoću gore izračunane kutne brzine  $\omega$  tijela:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}$$

pri čemu je

$$v_{CA} = \overline{AC} \cdot \omega.$$

Brzina neke točke D, koja leži na pravcu koji prolazi točkama A i B, može se odrediti i na sljedeći način:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA} \quad i \quad \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB},$$

a, budući da je  $v_{DA} = \overline{AD} \cdot \omega$ , te  $v_{DB} = \overline{BD} \cdot \omega$ , vrijedit će omjer:

$$v_{DA} : \overline{AD} = v_{DB} : \overline{BD},$$

ili

$$\overline{A_v D_v} : \overline{AD} = \overline{B_v D_v} : \overline{BD},$$

tj. vrh brzine točke D ( $D_v$ ) leži na pravcu koji prolazi  $A_v$  i  $B_v$  u planu brzina i dijeli tu duljinu u istom omjeru kao i točka duljine AB u planu položaja.

Ne treba posebno dokazivati da je trokut ABC sličan trokutu  $A_v B_v C_v$  (to su dva trokuta s međusobno okomitim stranicama), te da je trokut  $A_v B_v C_v$  zakrenut za  $90^\circ$  u odnosu na trokut ABC i to u smjeru kutne brzine  $\omega$ .

Za konstrukciju plana ubrzanja potrebno je poznavati ubrzanje jedne točke tijela, njegovu kutnu brzinu (određuje se pomoću plana brzina) i pravac ubrzanja druge točke tijela.

Neka je poznato ubrzanje točke A, kutna brzina tijela  $\omega$  i pravac ubrzanja točke B (sl. 4.41.a). Sa strane plana položaja odabire se točka  $O_a$  iz koje se u mjerilu ubrzanja nanosi  $\vec{a}_A$ , te pravac ubrzanja točke B. Za pronalaženje ubrzanja  $\vec{a}_B$  koristi se vektorska jednadžba (4.25):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^N + \vec{a}_{BA}^T.$$

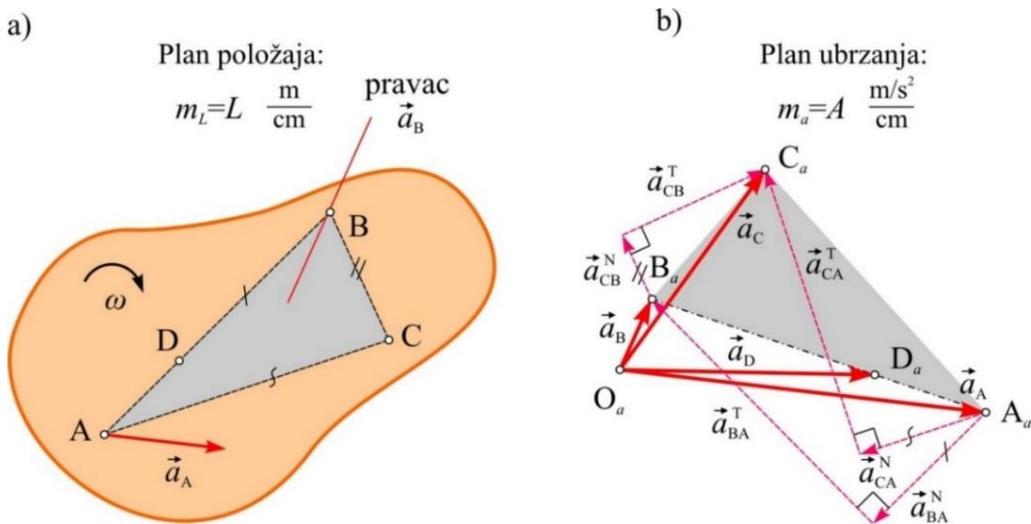
Vektor  $(\vec{a}_{BA}^N)$  pada u pravac AB i usmjeren je od B ka A, dok mu je intenzitet:

$$a_{BA}^N = \overline{AB} \cdot \omega^2.$$

Ta se komponenta nadovezuje, u mjerilu, na ubrzanje  $\vec{a}_A$ , dok se na nju nadovezuje pravac ubrzanja  $\vec{a}_{BA}^T$  koji je okomit na spojnicu AB. U presjecištu tog pravca s pravcem ubrzanja  $\vec{a}_B$  nalazi se vrh  $B_a$  (sl. 4.41.b).

Mjeranjem, i množenjem s mjerilom ubrzanja, određuju se zatim intenziteti vektora  $\vec{a}_B$  i  $\vec{a}_{BA}^T$  te smjer i veličina kutnog ubrzanja:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^T}{\overline{AB}}.$$



Slika 4.41. Metoda plana ubrzanja: a) plan položaja, b) plan ubrzanja.

Za određivanje ubrzanja točke C mogu se koristiti jednadžbe:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^N + \vec{a}_{CA}^T$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^N + \vec{a}_{CB}^T$$

ili samo prva jednadžba korištenjem gore izračunanog kutnog ubrzanja  $\varepsilon$ :

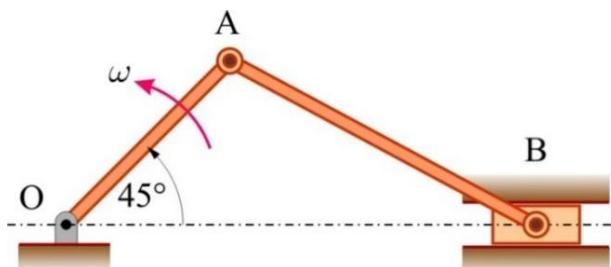
$$a_{CA}^T = \overline{AC} \cdot \varepsilon.$$

Slično kao kod plana brzina može se pokazati da vrh ubrzanja točke D, koja leži na spojnici AB, leži i na spojnici  $A_aB_a$  te da ju siječe u istom omjeru u kojem točka D siječe duljinu AB.

I ovdje se može pokazati da je trokut  $A_aB_aC_a$  sličan trokutu ABC.

#### Primjer 4.10.

Poluga OA mehanizma rotira oko nepomične osi kroz zglob O konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti analitički brzinu i ubrzanje klizača B te kutnu brzinu i kutno ubrzanje poluge AB s pomoću plana brzina, odnosno plana ubrzanja u položaju prikazanom na slici 4.42.



Slika 4.42. Primjer 4.10.

Zadano:  $\overline{OA} = 0,4 \text{ m}$ ,  $\overline{AB} = 0,6 \text{ m}$ .

Rješenje:

Brzina točke A okomita je na spojnicu OA i iznosi:

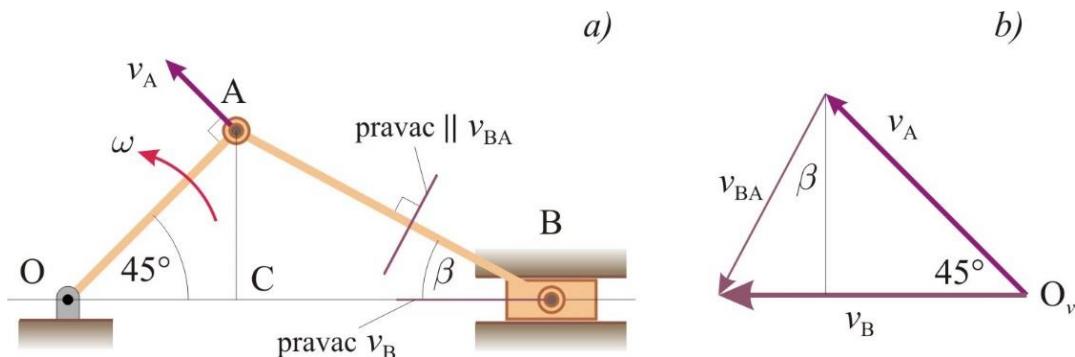
$$v_A = \overline{OA} \cdot \omega = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ m/s}.$$

Brzina točke B dobit će se s pomoću vektorske jednadžbe:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

u kojoj je poznato da je pravac vektora  $\vec{v}_B$  horizontalan te da je pravac vektora  $\vec{v}_{BA}$  okomit na spojnicu AB (sl. 4.43.a). Slaganjem vektora  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  i  $\vec{v}_{BA}$  dobije se plan brzina prikazan na slici 4.43.b.

Trenutni pol brzina poluge AB dobije se kao presjecište okomica na pravce brzina dviju točaka poluge, A i B (sl. 4.29), jer je brzina točke A okomita na spojnicu OA, dok je brzina točke B jednak brzini klizača koji se giba pravocrtno i horizontalna je.



Slika 4.43: a) plan položaja; b) plan brzina.

Sa slike 4.43.a slijedi:

$$\overline{AC} = \overline{OA} \cdot \sin 45^\circ = 0,4 \cdot 0,707 = 0,283 \text{ m}$$

$$\sin \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{0,283}{0,6} = 0,4717, \text{ pa je } \beta = 28,14^\circ.$$

Sada je iz plana brzina (sl. 4.43.b):

$$v_{BA} \cdot \cos \beta = v_A \sin 45^\circ, \text{ odnosno}$$

$$v_{BA} = v_A \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\cos \beta} = 2 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\cos 28,14^\circ} = 1,604 \text{ m/s},$$

pa je

$$v_B = v_A \cos 45^\circ + v_{BA} \sin \beta = 2 \cdot \cos 45^\circ + 1,604 \cdot \sin 28,14^\circ = 2,17 \text{ m/s}.$$

Slijedi kutna brzina štapa AB kojoj se smjer poklapa sa smjerom kazaljke na satu:

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{\overline{AB}} = \frac{1,604}{0,6} = 2,673 \text{ s}^{-1}.$$

Ubrzanje točke B odredit će se s pomoću plana ubrzanja korištenjem vektorske jednadžbe:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^N + \vec{a}_{BA}^T.$$

Budući da je kutna brzina poluge OA konstantna, njen je kutno ubrzanje jednako nuli, pa je ubrzanje točke A jednako njenom normalnom ubrzaju:

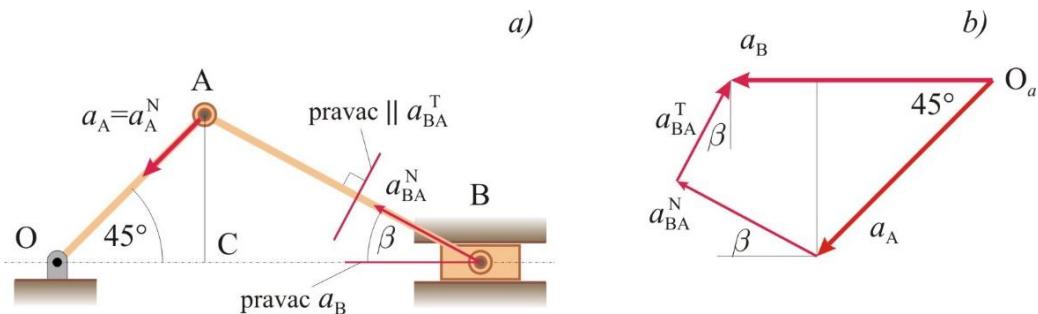
$$a_A = a_A^N = \overline{OA} \cdot \omega^2 = 0,4 \cdot 5^2 = 10 \text{ m/s}^2.$$

Pravac ubrzanja točke B je horizontalan, pravac normalnog ubrzanja točke B u odnosu na točku A poklapa se sa spojnicom AB, a smjer tog ubrzanja je od A ka B, dok je pravac tangencijalnog ubrzanja točke B u odnosu na točku A okomit na spojnicu AB (sl. 4.44.a).

Intenzitet ubrzanja  $\vec{a}_{BA}^N$  je

$$a_{BA}^N = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}^2 = 0,6 \cdot 2,673^2 = 4,284 \text{ m/s}^2.$$

Slaganje vektora ubrzanja u plan ubrzanja prikazano je na slici 4.44.b.



Slika 4.44: a) plan položaja; b) plan ubrzanja.

Sa slike 4.44.b slijedi:

$$a_{BA}^T \cos \beta + a_{BA}^N \sin \beta = a_A \sin 45^\circ$$

$$a_B = a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^N \cos \beta - a_{BA}^T \sin \beta.$$

Iz prve od tih jednadžba dobije se:

$$a_{BA}^T = \frac{a_A \sin 45^\circ - a_{BA}^N \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{10 \cdot \sin 45^\circ - 4,284 \cdot \sin 28,14^\circ}{\cos 28,14^\circ} = 5,728 \text{ m/s}^2,$$

pa iz druge slijedi:

$$a_B = 10 \cdot \cos 45^\circ + 4,284 \cdot \cos 28,14^\circ - 5,728 \cdot \sin 28,14^\circ = 8,15 \text{ m/s}^2.$$

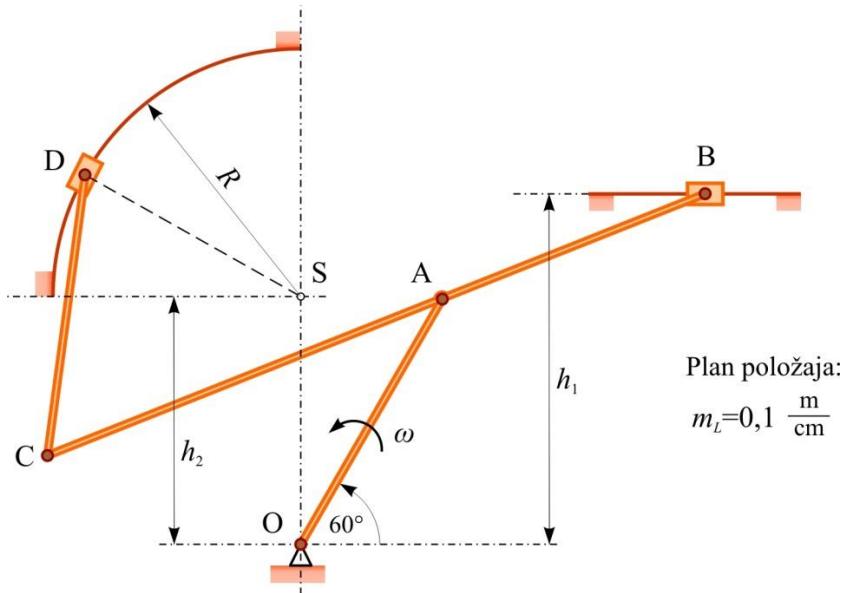
Kutno ubrzanja  $\varepsilon_{AB}$  sada je

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^T}{\overline{AB}} = \frac{5,728}{0,6} = 9,547 \text{ s}^{-2},$$

a smjer mu je suprotan od smjera kazaljke na satu.

### Primjer 4.11.

Odredite brzine i ubrzanja točaka A, B, C i D mehanizma, u položaju prikazanom na slici 4.45, korištenjem metoda plana brzina i ubrzanja. Zadano:  $\overline{OA} = \overline{AB} = 0,4 \text{ m}$ ;  $\overline{AC} = 0,6 \text{ m}$ ;  $\overline{CD} = 0,4 \text{ m}$ ;  $h_1 = 0,5 \text{ m}$ ;  $h_2 = 0,35 \text{ m}$ ;  $R = 0,35 \text{ m}$ ;  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ .



Slika 4.45. Primjer 11.

Rješenje:

Zadani mehanizam prikazan je na slici 4.45 u mjerilu duljina:

$$m_L = \frac{0,1 \text{ m}}{\text{cm}}.$$

Na slici 4.46.a prikazan je plan brzina u mjerilu brzina:

$$m_v = \frac{0,5 \text{ m/s}}{\text{cm}}.$$

Brzine karakterističnih točaka mehanizma, prikazane na tom planu brzina, određene su na sljedeći način:

*Brzina točke A:* Točka A zajednička je članovima OA i ABC mehanizma. Njena brzina okomita je na spojnicu OA i slijedi smjer kutne brzine  $\omega$ , dok joj je intenzitet:

$$v_A = \overline{OA} \cdot \omega = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

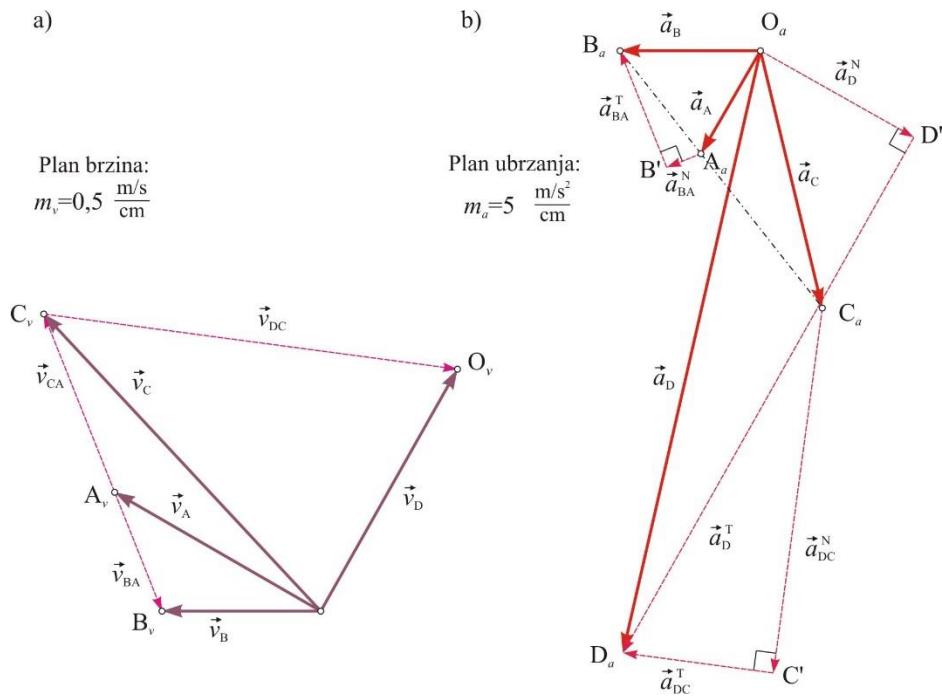
*Brzina točke B:* Poznat je pravac brzine točke B (točka B vrši pravocrtno gibanje). S pomoću osnovne vektorske jednadžbe:  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ , pri čemu je  $\vec{v}_{BA} \perp \overline{AB}$ , dobije se u planu brzina točka  $B_v$  kao sjecište pravca  $\vec{v}_B$ , nanesenog iz točke  $O_v$ , i pravca  $\vec{v}_{BA}$ , nanesenog iz vrha  $A_v$ , brzine  $\vec{v}_A$ . Mjerenjem i množenjem s mjerilom brzina dobije se:

$$v_B = \overline{O_v B_v} \cdot m_v = 2,6 \cdot 0,5 = 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_{BA} = \overline{A_v B_v} \cdot m_v = 2,2 \cdot 0,5 = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

pa je kutna brzina člana ABC, kojoj se smjer poklapa sa smjerom kazaljke na satu:

$$\omega_{ABC} = \frac{v_{BA}}{\overline{AB}} = 2,8 \text{ s}^{-1}.$$



Slika 4.46. Primjer 4.11: a) plan brzina; b) plan ubrzanja.

*Brzina točke C:* Vrh brzine točke C leži na istom pravcu na kojem se nalaze vrhovi  $A_v$  i  $B_v$ , pri čemu vrijedi omjer:

$$\overline{A_v C_v} : \overline{A_v B_v} = \overline{AC} : \overline{AB} = 0,6 : 0,4 = 1,5 ,$$

odnosno:

$$\overline{A_v C_v} = 1,5 \cdot \overline{A_v B_v} = 1,5 \cdot 2,2 = 3,3 \text{ cm},$$

pa je:

$$v_C = \overline{O_v C_v} \cdot m_v = 6,8 \cdot 0,5 = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} .$$

*Brzina točke D:* Poznavanjem pravca brzine točke D (tangenta na kružnu putanju) i s pomoću vektorske jednadžbe:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC}, \quad \vec{v}_{DC} \perp \overline{CD}$$

dobiju se u planu brzina dva pravca, čije je sjecište vrh brzine  $\vec{v}_D$ . Sada se mogu odrediti brzina točke D, brzina točke D u odnosu na C i kutna brzina štapa CD kojoj se smjer poklapa sa smjerom kazaljke na satu:

$$v_D = \overline{O_v D_v} \cdot m_v = 4,6 \cdot 0,5 = 2,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_{DC} = \overline{C_v D_v} \cdot m_v = 7,0 \cdot 0,5 = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$\omega_{CD} = \frac{v_{CD}}{CD} = \frac{3,5}{0,4} = 8,8 \text{ s}^{-1}.$$

Plan ubrzanja prikazan je na slici 4.46.b, a uz mjerilo ubrzanja:

$$m_a = 5 \frac{\text{m/s}^2}{\text{cm}} = 2,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

konstruiran je na dalje opisan način.

*Ubrzanje točke A:* Točka A vrši kružno gibanje pa joj je ubrzanje prikazano s pomoću prirodnih komponenata:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^N + \vec{a}_A^T.$$

Tangencijalna komponenta ubrzanja točke A jednaka je nuli (jer je  $\varepsilon = d\omega/dt = 0$ ), pa je:

$$a_A = a_A^N = \overline{OA} \cdot \omega^2 = 0,4 \cdot 5^2 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

a usmjereno je radijalno od O ka A.

*Ubrzanje točke B:* Vektor ubrzanja točke B pada u pravac njene putanje, a za određivanje intenziteta koristit će se i vektorska jednadžba:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^N + \vec{a}_{BA}^T$$

gdje je:

$$a_{BA}^N = \overline{AB} \cdot \omega_{ABC}^2 = 0,4 \cdot 2,8^2 = 3,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

i usmjereno je od B ka A, dok je  $a_{BA}^T \perp \overline{AB}$ , pa se u presjecištu pravca ubrzanja točke B i pravca  $\vec{a}_{BA}^T$  nalazi vrh  $B_a$ . Dalje je:

$$a_B = \overline{O_a B_a} \cdot m_a = 2,5 \cdot 5 = 12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2};$$

$$a_{BA}^T = \overline{B' B_a} \cdot m_a = 2,2 \cdot 5 = 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ te}$$

$$\varepsilon_{ABC} = \frac{a_{BA}^T}{\overline{AB}} = \frac{11}{0,4} = 27,5 \text{ s}^{-2},$$

pri čemu je smjer kutnog ubrzanja  $\varepsilon_{ABC}$  suprotan od smjera kazaljke na satu.

*Ubrzanje točke C:* Vrh ubrzanja točke C leži na istom pravcu na kojem su i vrhovi ubrzanja točaka A i B, a položaj mu se određuje iz omjera:

$$\overline{A_a C_a} : \overline{A_a B_a} = \overline{AC} : \overline{AB} = 0,6 : 0,4 = 1,5$$

pa je:

$$\overline{A_a C_a} = 1,5 \overline{A_a B_a} = 1,5 \cdot 2,25 = 3,4 \text{ cm}.$$

Ubrzanje točke C iznosi:

$$a_C = \overline{O_a C_a} \cdot m_a = 4,6 \cdot 5 = 23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

*Ubrzanje točke D:* Za izračunavanje ubrzanja točke D korištene su vektorske jednadžbe:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_D^N + \vec{a}_D^T \quad \text{i} \quad \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^N + \vec{a}_{DC}^T.$$

Intenzitet komponente  $\vec{a}_D^N$  je:

$$a_D^N = \frac{v_D^2}{R} = \frac{2,3^2}{0,35} = 15,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

a usmjeren je radijalno ka središtu S putanje točke D.

Pravac  $\vec{a}_D^T$  okomit je na  $\vec{a}_D^N$ . Intenzitet ubrzanja  $\vec{a}_{DC}^N$  iznosi:

$$a_{DC}^N = \overline{CD} \cdot \omega_{CD}^2 = 0,4 \cdot 8,8^2 = 31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

a sam vektor usmjeren je duž spojnice CD od D ka C. Imajući u vidu da je  $\vec{a}_{DC}^T \perp \overline{CD}$ , dolazi se do točke  $D_a$  kao sjecišta pravaca  $\vec{a}_{DC}^T$  i  $\vec{a}_D^T$ .

Dalje je:

$$a_D = \overline{O_a D_a} \cdot m_a = 10,4 \cdot 5 = 52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

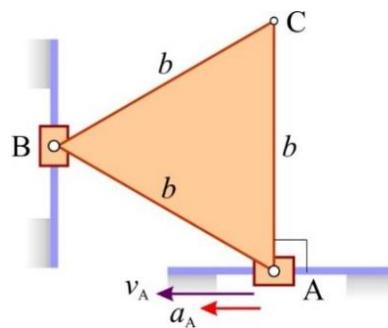
$$a_{DC}^T = \overline{CD_a} \cdot m_a = 2,7 \cdot 5 = 13,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{a_{DC}^T}{\overline{CD}} = \frac{13,5}{0,4} = 33,8 \text{ s}^{-2},$$

pri čemu je smjer kutnog ubrzanja  $\varepsilon_{CD}$  suprotan od smjera kazaljke na satu.



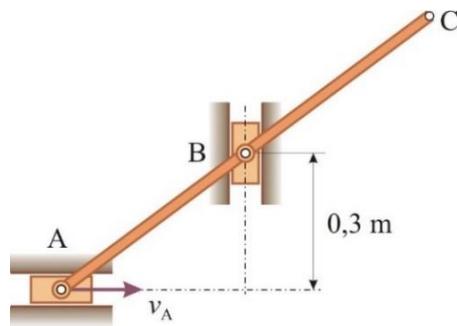
**Zadatak 4.17.** Ploča oblika istostraničnog trokuta vezana je zglobom A za horizontalni klizač, a zglobom B za vertikalni. U položaju prikazanom na slici Z.4.17, kada je stranica AC vertikalna, poznata je brzina i ubrzanje klizača A. Odrediti brzine i ubrzanja točaka B i C ploče ako je zadano:  $b = 0,4 \text{ m}$ ,  $v_A = 2 \text{ m/s}$ ,  $a_A = 2 \text{ m/s}^2$ .



Slika Z.4.17. Zadatak 4.17.

Odgovor:  $v_B = 3,464 \text{ m/s}$ ,  $v_C = 2 \text{ m/s}$ ,  $a_B = 76,53 \text{ m/s}^2$ ,  $a_C = 78,28 \text{ m/s}^2$ .

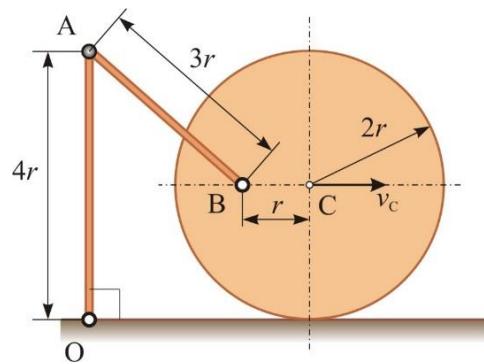
**Zadatak 4.18.** Štap ABC vezan je zglobovima A i B za horizontalni, odnosno vertikalni klizač. Brzina klizača A je konstantna i iznosi  $v_A = 4 \text{ m/s}$ . Zadano:  $\overline{AB} = \overline{AC} = 0,5 \text{ m}$ . Odrediti brzine i ubrzanja točaka B i C štapa.



Slika Z.4.18. Zadatak 4.18.

Odgovor:  $v_B = 5,333 \text{ m/s}$ ,  $v_C = 11,39 \text{ m/s}$ ,  $a_B = 148,1 \text{ m/s}^2$ ,  $a_C = 296,2 \text{ m/s}^2$ .

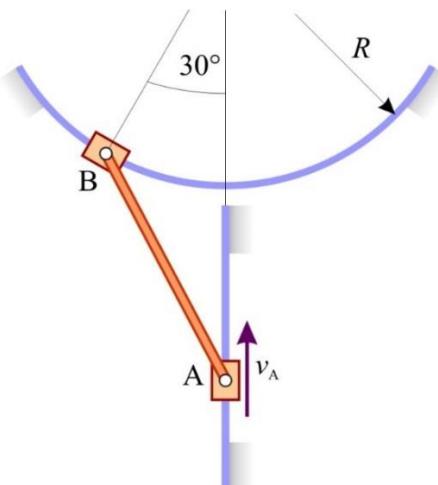
**Zadatak 4.19.** Disk radijusa  $2r$  kotrlja se bez klizanja po podlozi. Brzina središta diska je konstantna. U točki B zglobno je vezan štap AB koji je zglobom A vezan za polugu OA. Poluga može rotirati oko oslonca O. Odrediti brzine i ubrzanja točaka A i B u položaju prikazanom na slici Z.4.19 ako je zadano:  $v_C = 2 \text{ m/s}$ ,  $r = 0,25 \text{ m}$ .



Slika Z.4.19. Zadatak 4.19.

Odgovor:  $v_A = 1,106 \text{ m/s}$ ,  $v_B = 2,236 \text{ m/s}$ ,  $a_A = 6,248 \text{ m/s}^2$ ,  $a_B = 4 \text{ m/s}^2$ .

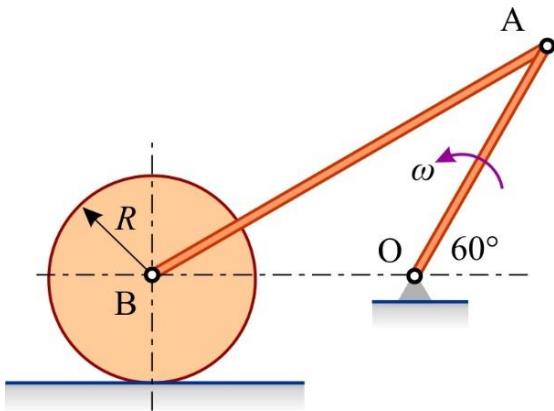
**Zadatak 4.20.** Klizač A giba se po vertikalnoj vodilici konstantnom brzinom  $v_A = 2 \text{ m/s}$ , a klizač B po kružnoj radijusa  $R = 1 \text{ m}$  (sl. Z.4.20). Klizači su povezani štamom AB duljine  $l = 1 \text{ m}$ . Odrediti brzinu i ubrzanje klizača B u položaju na slici.



Slika Z.4.20. Zadatak 4.20.

Odgovor:  $v_B = 2 \text{ m/s}$ ,  $a_B = 8 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 4.21.** Ravninski mehanizam sastoji se od štapa OA i AB te kružnog diska radijusa  $R$  (sl. Z.4.21). Štap OA rotira konstantnom kutnom brzinom  $\omega$  oko oslonca O. U točki B toga štapa zglobno je povezan štap AB koji je zglobom B vezan za središte kružnog diska. Disk se po horizontalnoj podlozi kotrlja bez klizanja. Odrediti brzinu i ubrzanje točke B te kutnu brzinu i kutno ubrzanje diska u položaju prikazanom na slici ako je zadano:  $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\overline{OA} = 0,4 \text{ m}$ ,  $\overline{AB} = 0,8 \text{ m}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$ .

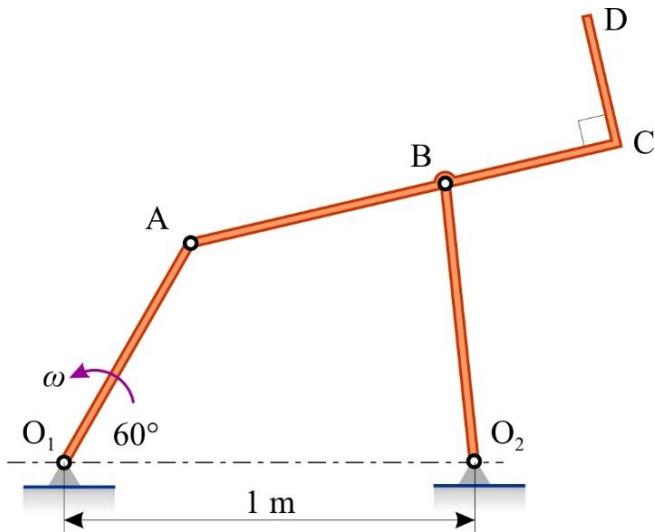


Slika Z.4.21. Zadatak 4.21.

Odgovor:  $v_B = 1 \text{ m/s}$ ,  $a_B = 4,509 \text{ m/s}^2$ ,  $\omega_D = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_D = 18,04 \text{ s}^{-2}$ .

**Zadatak 4.22.** Ravninski mehanizam prikazan na slici Z.4.22 sastavljen je od triju štapa:  $O_1A$ ,  $O_2B$  i  $ABCD$ . Štap  $O_1A$  vezan je zglobom  $O_1$ , a štap  $O_2B$  zglobom  $O_2$  za podlogu. Kutna brzina  $\omega$  štapa  $O_1A$  je konstantna. Odrediti brzine točaka B, C i D te ubrzanje točke B mehanizma u prikazanom položaju.

Zadano:  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\overline{O_1A} = 0,6 \text{ m}$ ,  $\overline{O_2B} = 0,8 \text{ m}$ ,  $\overline{AB} = 0,8 \text{ m}$ ,  $\overline{BC} = 0,4 \text{ m}$ ,  $\overline{CD} = 0,4 \text{ m}$ .



Slika Z.4.22. Zadatak 4.22.

Odgovor:  $v_B = 2,1 \text{ m/s}$ ;  $v_C = 1,9 \text{ m/s}$ ,  $v_D = 1,15 \text{ m/s}$ ,  $a_B = 14,3 \text{ m/s}^2$ .

# 5. SLOŽENO GIBANJE ČESTICE

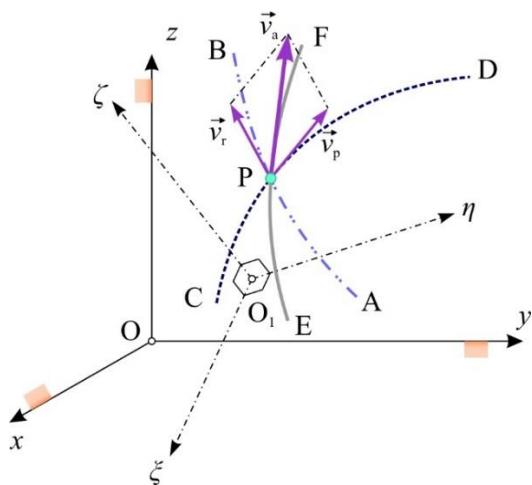
## 5.1. RELATIVNO, PRIJENOSNO I APSOLUTNO GIBANJE

U svim dosadašnjim razmatranjima proučavana su gibanja čestice ili tijela u odnosu na jedan, odabrani, uvjetno nepomični referentni sustav. Međutim, u nizu problema koji se pojavljuju u mehanici korisno je, a ponekad i neophodno, da se gibanje čestice ili tijela istovremeno promatra u odnosu na dva koordinatna sustava: jedan nepokretan, a drugi pokretan pri čemu je gibanje pokretnog sustava u odnosu na nepomični određeno. Gibanje koje pritom vrši čestica i tijelo naziva se *složeno gibanje*.

Kao najjednostavniji primjer složenog gibanja može se razmotriti gibanje čovjeka po palubi broda koje se sastoji od gibanja čovjeka u odnosu na brod (u ovom slučaju pokretni koordinatni sustav) i njegova gibanja zajedno s brodom u odnosu na obalu (nepomični sustav).

Mogućnost rastavljanja složenog gibanja na dva jednostavnija komponentna gibanja koristi se mnogo, kako u kinematici tako i u dinamici čestice i tijela.

Neka se čestica P giba u odnosu na pokretni koordinatni sustav  $O_1\xi\eta\zeta$ , koji se pak giba u odnosu na nepomični sustav Oxyz (slika 5.1).



Slika 5.1. Složeno gibanje čestice

Gibanje čestice P u odnosu na pokretni koordinatni sustav naziva se *relativno gibanje*; putanja AB koju pritom opisuje naziva se *putanja relativnog gibanja*; brzina čestice u odnosu na pokretni koordinatni sustav naziva se *relativna brzina*  $\vec{v}_r$  (to je brzina koju bi čestica imala kada bi pokretni sustav mirovao); promjenu relativne brzine pri relativnom gibanju (samo zbog relativnog gibanja) karakterizira vektor *relativnog ubrzanja*  $\vec{a}_r$ .

Gibanje koje izvodi pokretni koordinatni sustav, a zajedno s njim sve točke tijela za koje je vezan, u odnosu na nepomični sustav Oxyz predstavlja za česticu P *prijenosno gibanje*; krivulja

CD – putanju prijenosnog gibanja; brzina točke tijela za koje je vezan pokretni koordinatni sustav, a koja se u promatranom trenutku poklapa s česticom P, naziva se *prijenosna brzina*  $\vec{v}_p$  (to je brzina koju bi imala čestica P da je u promatranom trenutku čvrsto vezana za tijelo koje izvodi prijenosno gibanje); promjenu prijenosne brzine samo zbog prijenosnog gibanja karakterizira *prijenosno ubrzanje*  $\vec{a}_p$ .

Gibanje koje čestica P vrši u odnosu na nepomični sustav Oxyz naziva se *absolutno gibanje*; krivulja EF jest putanjom *absolutnog gibanja*; brzina pri tom gibanju jest *absolutna brzina*  $\vec{v}_a$ ; promjenu karakterizira *absolutno ubrzanje*  $\vec{a}_a$ .

Za rješenje određenih zadataka iz ovog područja potrebno je odrediti zavisnosti između brzina i ubrzanja relativnoga, prijenosnog i absolutnog gibanja.

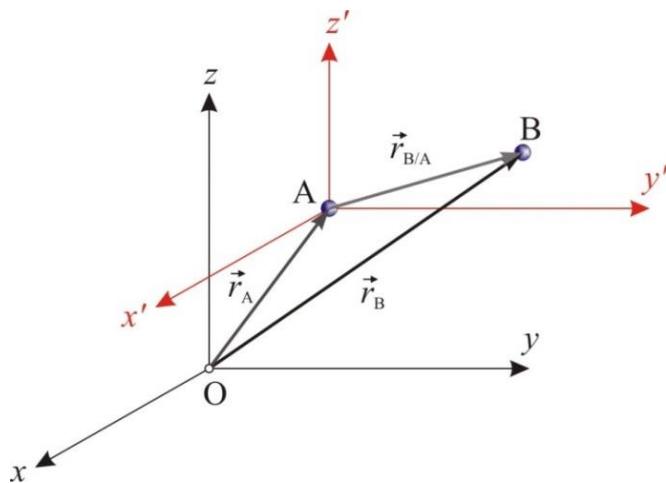
## 5.2. SLOŽENO GIBANJE ČESTICE: prijenosno gibanje je translatorno

Najjednostavniji oblik složenog gibanja čestice je onaj kod kojega je prijenosno gibanje translatorno. Kako je to pojašnjeno u prethodnom poglavlju, u tom se slučaju i tijelo koje vrši prijenosno gibanje može razmatrati kao čestica. Pokretni koordinatni sustav može se vezati za bilo koju od čestica, a pri rješavanju se odabire onaj koji će pojednostaviti rješavanje problema.

Gibanje čestice A u odnosu na drugu (B) za koju je vezan pokretni koordinatni sustav naziva se *relativno gibanje*, gibanje pokretnog koordinatnog sustava (čestice B) u odnosu na nepomični jest za česticu A *prijenosno gibanje*, dok je gibanje čestice A u odnosu na nepomični koordinatni sustav *absolutno gibanje*.

### 5.2.1. Vektor položaja čestice, brzina i ubrzanje

Neka se dvije čestice A i B gibaju u prostoru tijekom vremena (sl. 5.2). Vektori  $\vec{r}_A$  i  $\vec{r}_B$  definiraju položaje čestica u proizvoljnom trenutku vremena u odnosu na nepomični koordinatni sustav Oxyz.



Slika 5.2. Vektor položaja pri složenom gibanju; prijenosno je gibanje translatorno.

Istodobno će se razmotriti koordinatni sustav  $Ax'y'z'$  koji je paralelan sustavu  $Oxyz$ , ima ishodište u A i ne mijenja orijentaciju tijekom vremena; kaže se da sustav  $Ax'y'z'$  translatira u odnosu na sustav  $Oxyz$ . Vektor  $\vec{r}_{B/A}$  definira pritom relativni položaj čestice B u odnosu na pokretni koordinatni sustav  $Ax'y'z'$  (ili jednostavnije: položaj čestice B relativno u odnosu na česticu A).

Sa slike 5.2. vidljivo je da je vektor položaja čestice B (apsolutno gibanje čestice B)  $\vec{r}_B = \vec{r}_a$  jednak zbroju vektora položaja čestice A i vektora položaja čestice B u odnosu na A (relativno gibanje čestice B)  $\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_r$ :

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad \text{ili} \quad \vec{r}_a = \vec{r}_p + \vec{r}_r. \quad (5.1)$$

Derivacijom (5.1) po vremenu dobije se:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad \text{ili} \quad \vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r, \quad (5.2)$$

gdje su  $\vec{v}_A$  i  $\vec{v}_B$  brzine čestica A odnosno B u odnosu na nepomični koordinatni sustav  $Oxyz$ , dakle absolutne brzine tih čestica, dok je  $\vec{v}_{B/A}$  brzina točke B u odnosu na translatorni sustav  $Ax'y'z'$ , tj. to je brzina koju bi čestica B imala kada bi sustav  $Ax'y'z'$  mirovao. Brzina  $\vec{v}_{B/A}$  kraće se naziva *relativna brzina B u odnosu na A* ( $\vec{v}_r$ ).

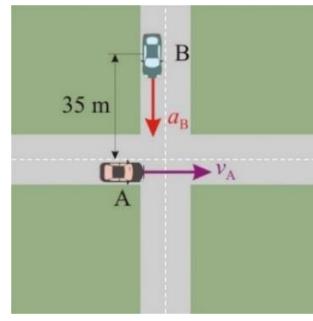
Nadalje, derivacijom po vremenu izraza (5.2) dobije se:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad \text{ili} \quad \vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r, \quad (5.3)$$

gdje su  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$  ubrzanja čestica A, odnosno B u odnosu na nepomični koordinatni sustav  $Oxyz$ , dakle absolutna ubrzanja tih čestica, dok je  $\vec{a}_{B/A}$  ubrzanje točke B u odnosu na translatorni sustav  $Ax'y'z'$ , tj. to je ubrzanje koje bi čestica B imala kada bi sustav  $Ax'y'z'$  mirovao. Ubrzanje  $\vec{a}_{B/A}$  kraće se naziva *relativno ubrzanje B u odnosu na A* ( $\vec{a}_r$ ).

### Primjer 5.1.

Automobil A giba se konstantnom brzinom  $v_A = 36 \text{ km/h}$  sa zapada prema istoku. Automobil B kreće iz stanja mirovanja sa sjevera prema raskrižju, baš u trenutku kada A prolazi raskrižje, gibajući se konstantnim ubrzanjem  $a_B = 1,2 \text{ m/s}^2$  (sl. 5.3).



Slika 5.3. Primjer 5.1.

Odrediti položaj, brzinu i ubrzanje čestice B relativno u odnosu na česticu A u trenutku  $t_1 = 5$  s nakon što A prođe raskrižje.

*Rješenje:*

Postavi li se ishodište nepokretnog koordinatnog sustava u raskrižju, apsolutne kinematičke značajke gibanja točke A bit će:

$$a_A = 0 \text{ m/s}^2, v_A = 36 \text{ km/h} = 36 / 3,6 = 10 \text{ m/s}, x_{A0} = 0$$

$$x_A = x_{A0} + v_A t = v_A t,$$

dok će apsolutne kinematičke značajke gibanja točke B biti:

$$a_B = -1,2 \text{ m/s}^2, v_{B0} = 0, y_{B0} = 35 \text{ m}$$

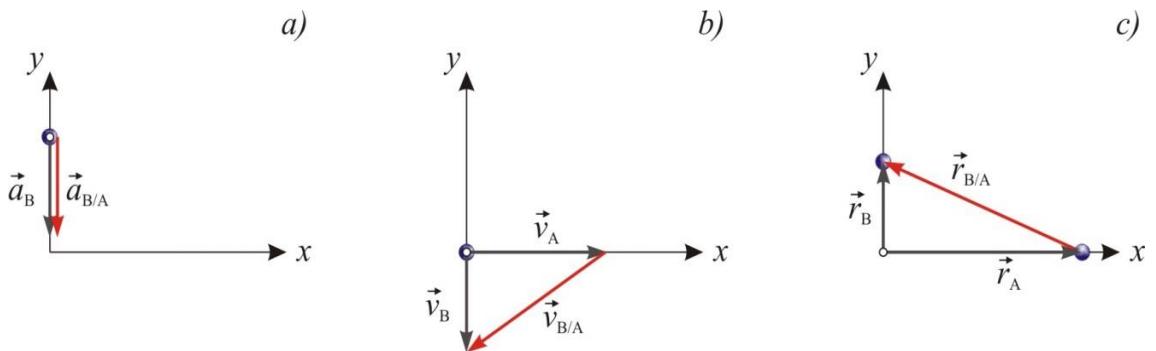
$$v_B = v_{B0} + a_B t = 0 - 1,2t = -1,2t$$

$$y_B = y_{B0} + v_{B0}t + \frac{1}{2}a_B t^2 = 35 - 0,6t^2.$$

U trenutku  $t_1 = 5$  s je

$$a_A = 0 \text{ m/s}^2, v_A = 10 \text{ m/s}, x_A = 10 \cdot 5 = 50 \text{ m}$$

$$a_B = -1,2 \text{ m/s}^2, v_B = -1,2 \cdot 5 = -6 \text{ m/s}, y_B = 35 - 0,6 \cdot 5^2 = 20 \text{ m}.$$



Slika 5.4. Relativno ubrzanje, relativna brzina i relativni položaj B u odnosu na A

Sada je relativno ubrzanje čestice B u odnosu na česticu A (sl. 5.4.a):

$$a_{B/A} = a_B = -1,2 \text{ m/s}^2,$$

dok je relativna brzina čestice B u odnosu na A (sl. 5.4.b):

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = -6\vec{j} - 10\vec{i} \text{ m/s},$$

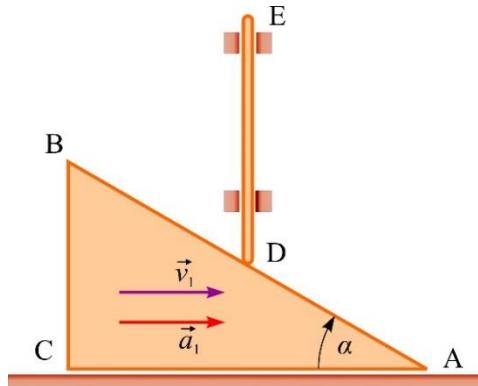
$$v_{B/A} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 11,66 \text{ m/s},$$

a relativni položaj čestice B u odnosu na A (sl. 5.4.c):

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 20\vec{j} - 50\vec{i} \text{ m}, \quad r_{B/A} = \sqrt{20^2 + 50^2} = 53,85 \text{ m}.$$

### Primjer 5.2.

Klin ABC giba se brzinom  $v_1$  i ubrzanjem  $a_1$  po horizontalnoj podlozi i dovodi u gibanje štap DE (sl. 5.5). Odrediti brzinu i ubrzanje točke E štapa ako je zadano:  $v_1$ ,  $a_1$ ,  $\alpha$ .



Slika 5.5. Primjer 5.2.

*Rješenje:*

Na slici 5.5 vidljivo je da štap DE vrši translatorno gibanje, pa su brzine i ubrzanja svih njegovih točaka, te tako i točaka D i E, međusobno jednake. Stoga će se u dalnjem radu odrediti brzina i ubrzanje točke D štapa.

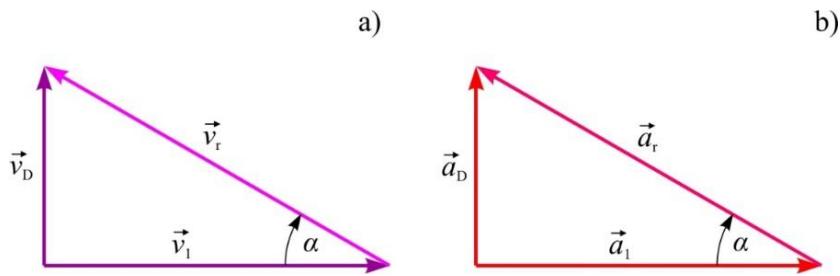
Točka D vrši složeno gibanje pri čemu je gibanje klina ABC i prijenosno gibanje (pravocrtna translacija), a gibanje točke D po kosini BC – relativno gibanje.

Apsolutna brzina točke D dana je vektorskom jednadžbom:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_p + \vec{v}_r \quad \text{i} \quad \vec{v}_D = \vec{v}_1 + \vec{v}_r.$$

U ovoj jednadžbi poznat je vektor  $\vec{v}_1$  te pravci vektora  $\vec{v}_D$  i  $\vec{v}_r$ . Konstrukcijom odgovarajućeg trokuta brzina (sl. 5.6.a) dobije se:

$$v_r = \frac{v_1}{\cos \alpha}; \quad v_D = v_1 \tan \alpha.$$



Slika 5.6. Primjer 5.2: a) trokut brzina; b) trokut ubrzanja.

Apsolutno ubrzanje točke D slijedi iz vektorske jednadžbe:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_p + \vec{a}_r = \vec{a}_l + \vec{a}_r .$$

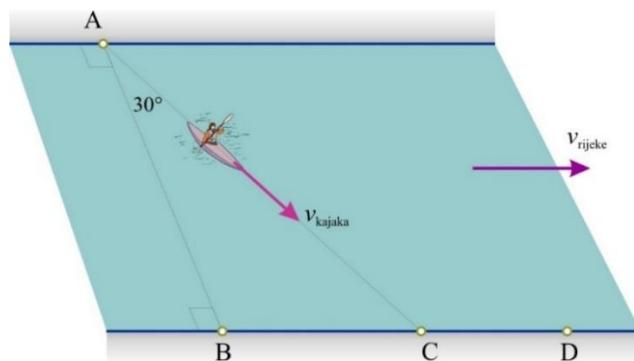
Iz trokuta ubrzanja (sl. 5.6.b) slijedi:

$$a_r = \frac{a_l}{\cos \alpha} ; \quad a_D = a_l \tan \alpha .$$

### Primjer 5.3.

Kajakašica vozi kajak s jedne strane kanala na drugu. Udaljenost obala kanala je  $\overline{AB} = 150 \text{ m}$ , brzina rijeke u kanalu je  $v_1 = 5 \text{ m/s}$ , dok je relativna brzina kajaka u odnosu na rijeku  $v_2 = 12 \text{ m/s}$ , a pravac joj je paralelan sa spojnicom AC. Obje su brzine konstantnog intenziteta. Odrediti vrijeme potrebno da kajakašica stigne do druge obale kanala i udaljenost mjesta D na obali do kojeg će stići kajakašica vozeći na opisani način od mjesta B.

Kolika je absolutna brzina kajaka?



Slika 5.7. Primjer 5.3.

*Rješenje:*

Brzina kojom vozi kajakašica je konstantna, a put koji ona treba preveslati jednak je duljini relativne putanje kajaka:

$$s_r = \overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\cos 30^\circ} = \frac{150}{0,866} = 173,2 \text{ m}$$

pa će joj zbog konstantne brzine vožnje za prelazak tog puta trebati:

$$t_1 = \frac{s_r}{v_r} = \frac{173,2}{12} = 14,43 \text{ s}.$$

U istom tom vremenu kajak će niz rijeku prevaliti put zbog prijenosnog gibanja:

$$s_p = \overline{CD} = v_p \cdot t_1 = 5 \cdot 14,43 = 72,2 \text{ m}.$$

Udaljenost točke D u koju će stići kajakašica od mjesta B jednaka je:

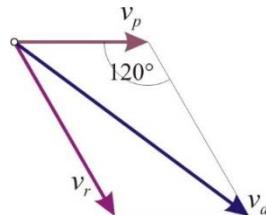
$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \tan 30^\circ + \overline{CD} = 150 \cdot 0,577 + 72,2 = 86,6 + 72,2 = 158,8 \text{ m}.$$

Apsolutna brzina kajaka dana je vektorskom jednadžbom:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r.$$

Slaganjem vektora tih brzina (sl. 5.8) dobije se:

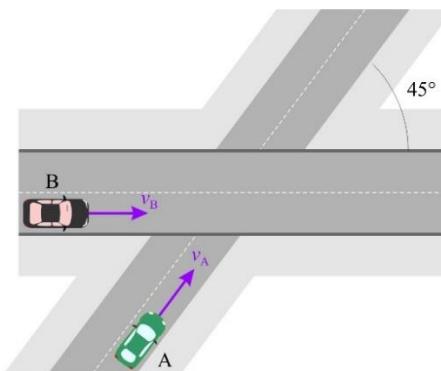
$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_p^2 + 2 \cdot v_r \cdot v_p \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{12^2 + 5^2 + 2 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 0,5} = 15,13 \text{ m/s}.$$



Slika 5.8. Primjer 5.3: absolutna brzina kajaka.



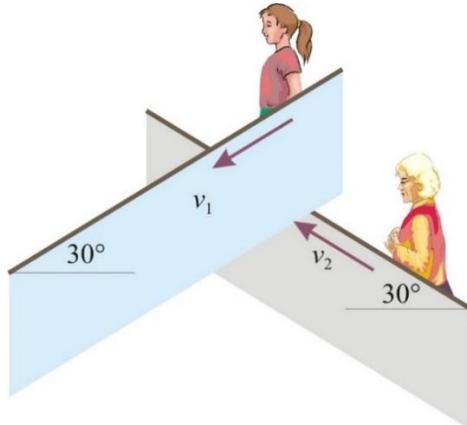
**Zadatak 5.1.** Automobil B vozi konstantnom brzinom  $v_B = 72 \text{ km/h}$  preko nadvožnjaka iznad ceste po kojoj se giba automobil A, također konstantnom brzinom  $v_A = 54 \text{ km/h}$ , sa smjerovima prikazanima na slici Z.5.1. Tračnice zatvaraju kut od  $45^\circ$  s cestom. Odrediti relativnu brzinu automobila B u odnosu na automobil A.



Slika Z.5.1. Zadatak Z.5.1.

Odgovor:  $v_{B/A} = 14,168 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 5.2.** Na pokretnim stepenicama u robnoj kući mimoilaze se dvije osobe: djevojčica i starija gospođa (sl. Z.5.2). Brzina stepenica pri spuštanju iznosi  $v_1 = 2,5 \text{ m/s}$ , a pri uspinjanju  $v_2 = 3 \text{ m/s}$ . Odrediti relativnu brzinu djevojčice u odnosu na stariju gospođu.



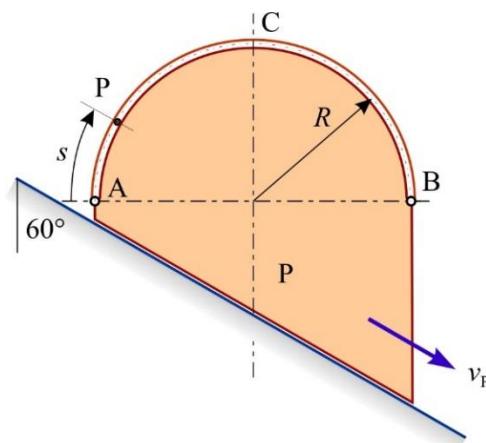
Slika Z.5.2. Zadatak Z.5.2.

Odgovor:  $v_r = 2,784 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 5.3.** Prizma oblika prikazanoga na slici Z.5.3. klizi niz kosinu konstantnom brzinom  $v_p = 6 \text{ m/s}$ . Duž kružnog žlijeba na prizmi giba se čestica P tako da joj se krivocrtna koordinata mijenja prema zakonu:

$$s = \frac{1}{4} \pi \cdot t^2 \text{ m.}$$

Odrediti absolutnu brzinu i absolutno ubrzanje čestice kada dođe u položaj C ako je  $R = 0,5 \text{ m}$ .

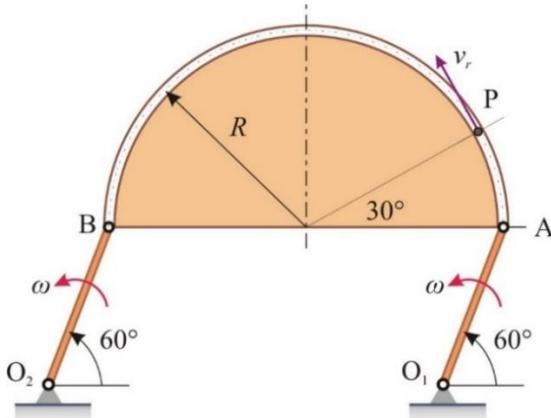


Slika Z.5.3. Zadatak Z.5.3.

Odgovor:  $v_a = 7,402 \text{ m/s}$ ,  $a_a = 5,179 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 5.4.** Polukružna ploča polumjera  $R = 0,5 \text{ m}$  vezana je zglobovima A i B za dva štapa jednakih duljina koji rotiraju oko oslonaca  $O_1$  odnosno  $O_2$  konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$ . Duž kružnog žlijeba AB ploče giba se čestica P konstantnom relativnom brzinom

$v_r = 3 \text{ m/s}$ . Odrediti absolutnu brzinu i absolutno ubrzanje čestice P u položaju prikazanom na slici Z.5.4. ako je zadano:  $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = 0,5 \text{ m}$ .



Slika Z.5.4. Zadatak Z.5.4.

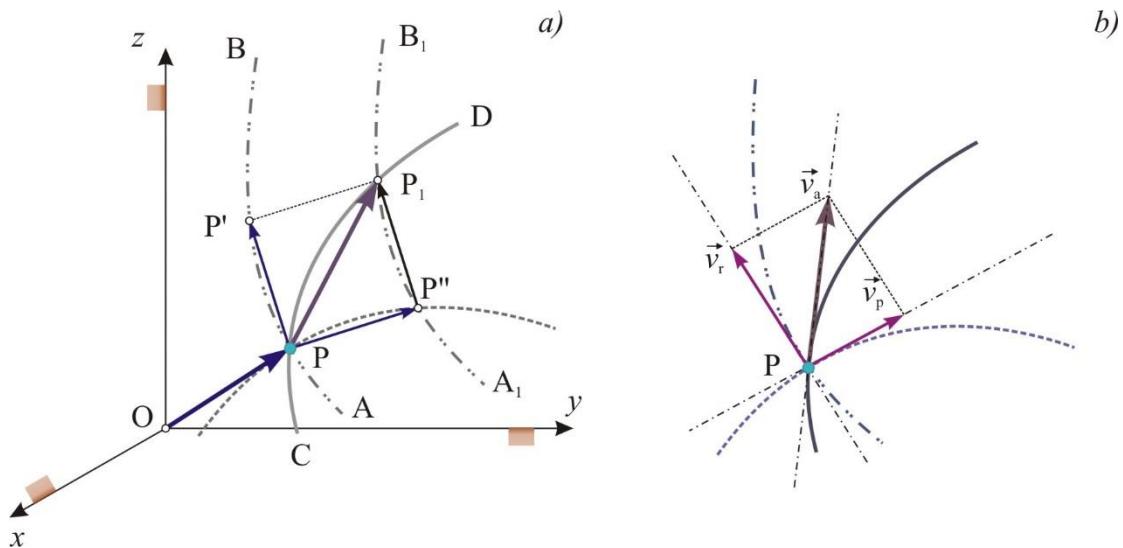
Odgovor:  $v_a = 4,837 \text{ m/s}$ ,  $a_a = 25,25 \text{ m/s}^2$ .

## 5.3. SLOŽENO GIBANJE ČESTICE: prijenosno gibanje nije translatorno

### 5.3.1. Apsolutna brzina čestice

Promotri li se pomak čestice u vremenskom intervalu  $\Delta t = t_1 - t$ , mogu se izvesti sljedeći zaključci:

- pomak čestice P na relativnoj putanji AB određen je vektorom  $\overrightarrow{PP'}$  (slika 5.9.a);



Slika 5.9. Apsolutna brzina čestice

- putanja AB giba se u promatranom intervalu zajedno s pokretnim koordinatnim sustavom i u trenutku  $t_1$  zauzima položaj  $A_1B_1$ ;

- ona točka krivulje AB koja se u trenutku t poklapa s točkom P, izvršit će prijenosni pomak  $\overrightarrow{PP''}$ ;
- konačni položaj točke –  $P_1$  rezultat je relativnog gibanja čestice po krivulji AB i prijenosnog gibanja same krivulje pri čemu je vektor  $\overrightarrow{PP_1}$  - vektor apsolutnog pomaka čestice.

Sa slike 5.9.a slijedi vektorska jednakost:

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PP''} + \overrightarrow{P''P_1}. \quad (5.4)$$

Podijeli li se ovako dobivena jednakost s intervalom  $\Delta t$  i potraži granična vrijednost tog izraza kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , dobije se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP''}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{P''P_1}}{\Delta t} \quad (5.5)$$

pri čemu je, prema definiciji:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\Delta t} = \vec{v}_a; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP''}}{\Delta t} = \vec{v}_p. \quad (5.6)$$

Očito je također da se krivulja  $A_1B_1$  teži poklopiti s krivuljom AB kada interval  $\Delta t \rightarrow 0$ . U tom slučaju vrijedi jednakost:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{P''P_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t} = \vec{v}_r. \quad (5.7)$$

Konačno se može napisati (sl. 5.9.b):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r, \quad (5.8)$$

odnosno: *pri složenom gibanju čestice njena apsolutna brzina jednaka je geometrijskom (vektorskem) zbroju prijenosne i relativne brzine.*

### 5.3.2. Apsolutno ubrzanje čestice. Coriolisovo ubrzanje

Prema definiciji, relativnim ubrzanjem čestice naziva se veličina  $\vec{a}_r$ , koja karakterizira promjenu relativne brzine *samo* zbog relativnog gibanja; dok se prijenosnim ubrzanjem naziva veličina  $\vec{a}_p$ , koja karakterizira promjenu prijenosne brzine *samo* zbog prijenosnog gibanja, tj.:

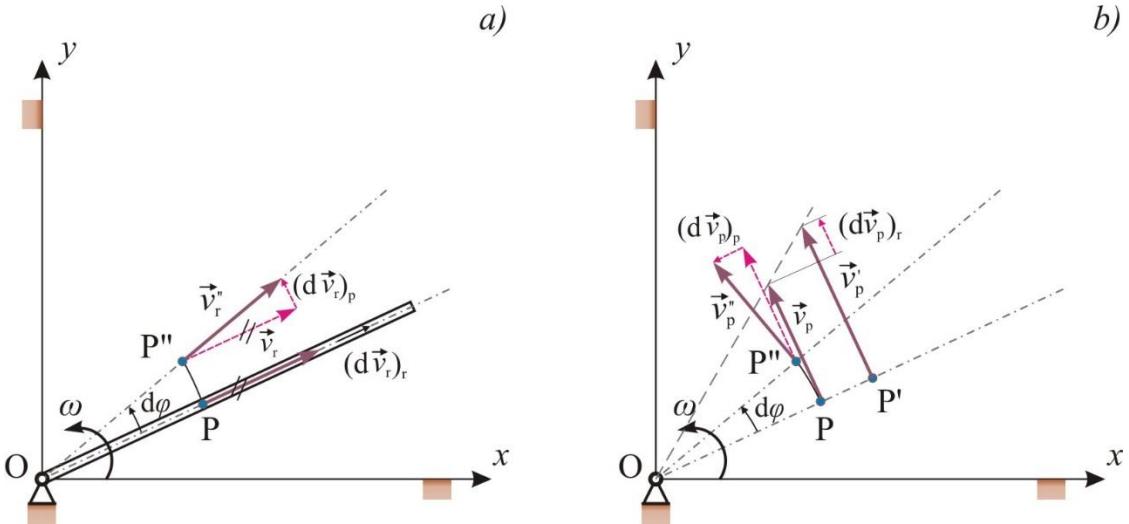
$$\vec{a}_r = \frac{(\vec{d}\vec{v}_r)_r}{dt}; \quad \vec{a}_p = \frac{(\vec{d}\vec{v}_p)_p}{dt}. \quad (5.9)$$

Može se međutim pokazati da pri složenom gibanju čestice dolazi do promjene i relativne brzine zbog prijenosnog gibanja i prijenosne brzine zbog relativnog gibanja, pa vrijedi:

$$d\vec{v}_r = (\vec{d}\vec{v}_r)_r + (\vec{d}\vec{v}_r)_p$$

$$d\vec{v}_p = (d\vec{v}_p)_p + (d\vec{v}_p)_r. \quad (5.10)$$

Jednostavan dokaz ispravnosti tih izraza slijedi iz razmatranja gibanja čestice P duž cijevi OA koja rotira oko točke O u ravnini Oxy, kako je to prikazano na slici 5.10.



Slika 5.10. Prijevod vektora brzine: a) prijevod relativne brzine zbog prijenosnog gibanja, b) prijevod prijenosne brzine zbog relativnog gibanja.

Ako se čestica P giba ubrzano duž cijevi OA, tada će, pri relativnom pomaku čestice iz položaja P u P', vektor relativne brzine dobiti prirast  $(d\vec{v}_r)_r$ . Istovremeno će, zbog rotacije cijevi oko točke O, doći do zakretanja pravca relativne putanje (točka P''), a samim tim i relativne brzine. Tu promjenu relativne brzine opisuje prirast  $(d\vec{v}_r)_p$  (slika 5.10.a).

Na sličan način može se razmotriti i promjena prijenosne brzine. Naime, pri pomaku čestice iz položaja P u P' zbog relativnog gibanja dolazi do promjene udaljenosti čestice od pola brzina cijevi O, a time i do promjene prijenosne brzine za iznos  $(d\vec{v}_p)_r$ . Prirast  $(d\vec{v}_p)_p$  nastaje zbog zakretanja vektora prijenosne brzine pri prijenosnom gibanju u promatranom intervalu  $dt$  (slika 5.10.b).

Prema tome, zbroj relativnog i prijenosnog ubrzanja u općem slučaju ne daje absolutno ubrzanje, ali je uvođenje ovih veličina bilo neophodno zbog jednostavnosti njihova izračunavanja. Naime, pri izračunavanju ubrzanja  $\vec{a}_r$  ne uzima se u obzir prijenosno gibanje cijevi OA, dok se pri izračunavanju ubrzanja  $\vec{a}_p$  relativno gibanje čestice P ne uzima u obzir.

Apsolutno ubrzanje čestice P može se prikazati zbrojem

$$\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \frac{(d\vec{v}_r)_p}{dt} + \frac{(d\vec{v}_p)_r}{dt} \quad (5.11)$$

ili

$$\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor} \quad (5.12)$$

gdje je

$$\vec{a}_{cor} = \frac{(\mathrm{d}\vec{v}_r)_p}{dt} + \frac{(\mathrm{d}\vec{v}_p)_r}{dt}$$

ubrzanje koje obuhvaća promjenu relativne brzine zbog prijenosnog gibanja i promjenu prijenosne brzine zbog relativnog gibanja, a naziva se Coriolisovo ubrzanje.

Ne ulazeći u izvod Coriolisova ubrzanja, ovdje će se navesti samo konačni vektorski izraz:

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r \quad (5.13)$$

prema kojem je vektor  $\vec{a}_{cor}$  jednak dvostrukom vektorskom produktu iz vektora prijenosne kutne brzine  $\vec{\omega}_p$  i vektora relativne brzine  $\vec{v}_r$ .

Intenzitet tog ubrzanja definiran je intenzitetom vektorskog produkta dvaju vektora:

$$a_{cor} = 2 \cdot \omega_p \cdot v_r \cdot \sin(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r). \quad (5.14)$$

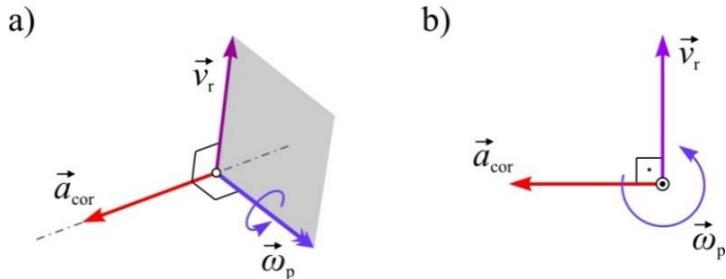
Pravac mu je okomit na vektore  $\vec{\omega}_p$  i  $\vec{v}_r$ , a smjer mu se određuje prema pravilu desne ruke, kako je to prikazano na slici 5.11.

Iz izraza (5.14) slijedi da će Coriolisovo ubrzanje biti jednako nuli u sljedećim slučajevima:

- a)  $\omega_p = 0$  - tj. ako je prijenosno gibanje stalna ili trenutna translacija;
- b)  $\vec{\omega}_p \parallel \vec{v}_r$  - vektori prijenosne kutne brzine i relativne brzine čestice su paralelni pa je

$$\sin(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) = 0;$$

- c)  $v_r = 0$  - relativna brzina čestice jednaka je nuli.



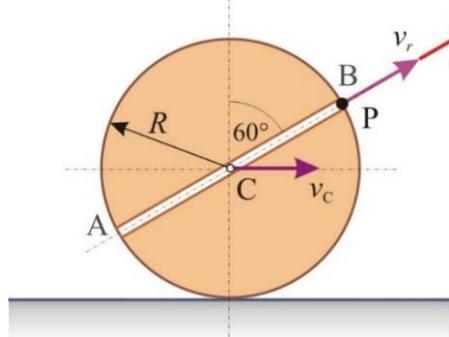
Slika 5.11. Pravac i smjer Coriolisova ubrzanja: a) prikaz u prostoru, b) prikaz u ravnini.

#### Primjer 5.4.

Disk radijusa  $R = 0,4$  m kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Brzina središta diska je konstantna i iznosi  $v_C = 5$  m/s. Duž žlijeba AB diska giba se jednolikom ubrzanjem čestica P. U

položaju prikazanom na slici 5.12. relativna brzina čestice P je  $v_r = 3 \text{ m/s}$ , dok je njeno relativno ubrzanje  $a_r = 15 \text{ m/s}^2$ .

Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje čestice P u zadanom položaju.



Slika 5.12. Primjer 5.4.

*Rješenje:*

*Apsolutna brzina.* Vektor apsolutne brzine čestice P dan je izrazom (5.8):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r,$$

gdje je prijenosna brzina jednaka brzini točke B na disku, a koja slijedi iz jednadžbe:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$$

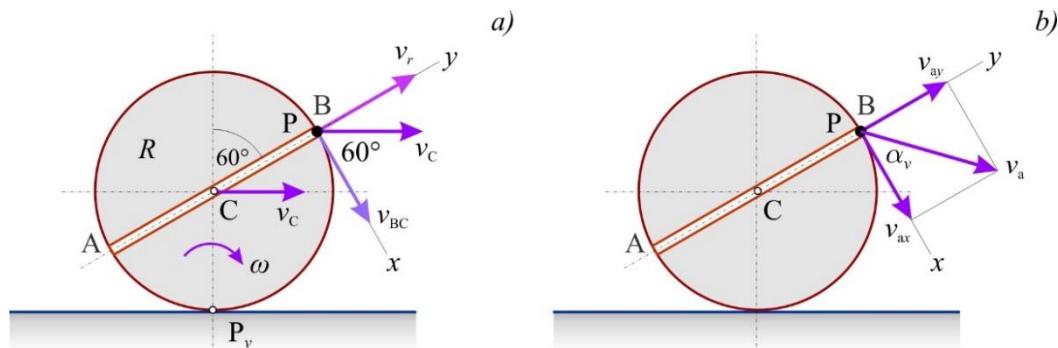
pri čemu je vektor  $\vec{v}_{BC}$  okomit na spojnicu BC, a iznos mu je

$$v_{BC} = R \cdot \omega = 0,4 \cdot 12,5 = 5 \text{ m/s}$$

jer je zbog položaja trenutnog pola brzina diska (točka u dodiru s podlogom) kutna brzina diska

$$\omega = v_C / R = 5 / 0,4 = 12,5 \text{ rad/s}.$$

Vektor  $\vec{v}_{BC}$  prati smjer kutne brzine diska (smjer kazaljke na satu). Na slici 5.13.a prikazani su vektori brzina čijim se zbrajanjem dobije apsolutna brzina čestice P.



Slika 5.13. Primjer 5.4: apsolutna brzina čestice P.

Projekcije brzine čestice P na osi odabranog koordinatnog sustava su

$$v_{ax} = v_{BC} + v_C \cos 60^\circ = 5 + 5 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ m/s}$$

$$v_{ay} = v_r + v_C \sin 60^\circ = 3 + 5 \cdot 0,866 = 7,33 \text{ m/s}$$

pa je (slika 5.13.b)

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} = \sqrt{7,5^2 + 7,33^2} = 10,49 \text{ m/s},$$

$$\alpha_v = \arctan(v_{ay}/v_{ax}) = \arctan(7,33/7,5) = 44,34^\circ.$$

*Apsolutno ubrzanje.* Vektor absolutnog ubrzanja čestice P dan je izrazom (5.12):

$$\vec{a}_a = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}$$

gdje je prijenosno ubrzanje jednako ubrzanju točke B na disku, a koje slijedi iz jednadžbe:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC} = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^N + \vec{a}_{BC}^T$$

pri čemu je ubrzanje središta diska  $\vec{a}_C$  jednako nuli jer je brzina  $v_C$  konstantna.

Komponente ubrzanja točke B u odnosu na točku C su

$$a_{BC}^N = R \cdot \omega^2 = 0,4 \cdot 12,5^2 = 62,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_{BC}^T = R \cdot \varepsilon = 0 \text{ m/s}^2$$

jer je kutna brzina diska konstantna  $\omega = v_C/R = \text{konst.}$  pa je kutno ubrzanje diska jednako nuli.

Coriolisovo ubrzanje dano je izrazom (5.13):

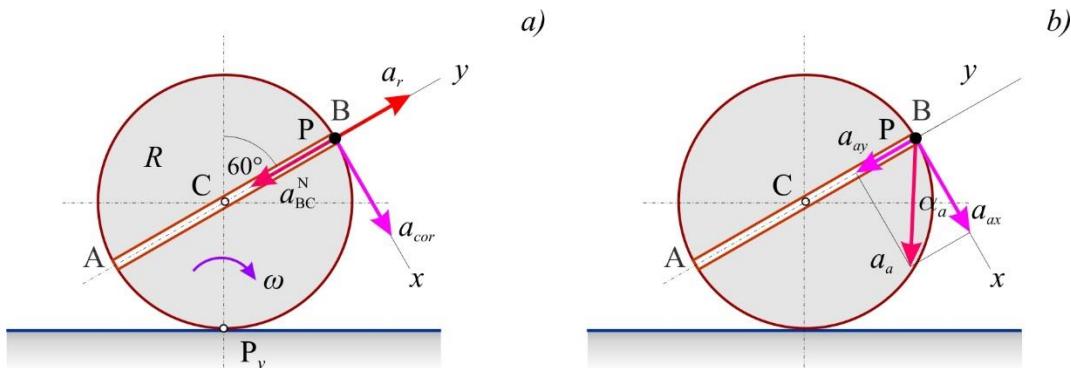
$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r,$$

a po iznosu je

$$a_{cor} = 2 \cdot \omega_p \cdot v_r \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 12,5 \cdot 3 \cdot 1 = 75 \text{ m/s}^2,$$

jer su vektori  $\vec{\omega}$  i  $\vec{v}_r$  međusobno okomiti. Pravac vektora  $\vec{a}_{cor}$  okomit je na vektore  $\vec{\omega}_p$  i  $\vec{v}_r$ , a smjer mu se dobije zakretanjem za  $90^\circ$  od vrha  $\vec{v}_r$  u smjeru vektora  $\vec{\omega}$ .

Na slici 5.14.a prikazani su vektori ubrzanja čijim se zbrajanjem dobije absolutno ubrzanje čestice P.



Slika 5.14. Primjer 5.4: absolutno ubrzanje čestice P.

Projekcije ubrzanja čestice P na osi odabranog koordinatnog sustava su

$$a_{ax} = a_{cor} = 75 \text{ m/s}^2, \quad a_{ay} = a_r - a_{BC}^N = 15 - 62,5 = -47,5 \text{ m/s}^2$$

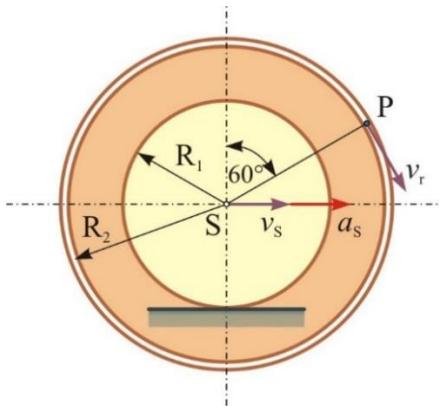
pa je (slika 5.14.b)

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{75^2 + (-47,5)^2} = 88,78 \text{ m/s}^2,$$

$$\alpha_a = \arctan(|a_{ay}|/a_{ax}) = \arctan(47,5/75) = 32,35^\circ.$$

### Primjer 5.5.

Kolo sastavljeno od dvaju diskova, radijusa  $R_1 = 0,25 \text{ m}$  i  $R_2 = 0,4 \text{ m}$ , kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi (sl. 5.15).



Slika 5.15. Primjer 5.5.

Duž žlijeba na obodu većega diska giba se čestica P konstantnom relativnom brzinom  $v_r = 2 \text{ m/s}$ . U položaju prikazanom na slici poznata je brzina i ubrzanje središta S kola. Odrediti apsolutnu brzinu i ubrzanje čestice P ako je  $v_s = 2 \text{ m/s}$  i  $a_s = 8 \text{ m/s}^2$ .

*Rješenje:*

*Apsolutna brzina:* koristit će se osnovna vektorska jednadžba (5.8):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r.$$

Vektor relativne brzine poznat je po intenzitetu, pravcu i smjeru, dok će se vektor prijenosne brzine odrediti s pomoću izraza:

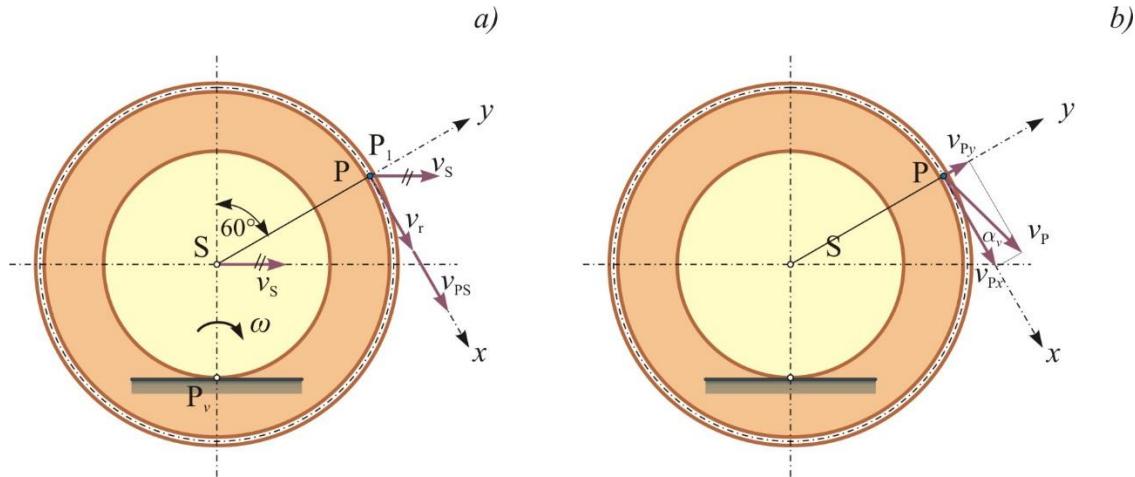
$$\vec{v}_p = \vec{v}_{M_1} = \vec{v}_s + \vec{v}_{M_1 S},$$

gdje je s  $P_1$  označena točka na kolu koja se u promatranom trenutku poklapa s česticom P. Brzina središta kola je zadana, dok je vektor  $\vec{v}_{M_1 S}$ , kako je poznato, okomit na  $SP_1$  i usmjeren u smjeru kutne brzine  $\omega$  kola, a intenzitet mu je:

$$v_{P_1 S} = R_2 \cdot \omega = 0,4 \cdot 8 = 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

jer je

$$\omega = \frac{v_s}{R_1} = \frac{2}{0,25} = 8 \text{ s}^{-1}.$$



Slika 5.16. Primjer 5.5: absolutna brzina čestice M.

Uvede li se koordinatni sustav Pxy s ishodištem u P, kako je to prikazano na slici 5.16.a, bit će (slika 5.16.b):

$$v_p = \sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2} = \sqrt{6,2^2 + 1,732^2} = 6,437 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\alpha_v = \arctan(v_{py}/v_{px}) = \arctan(1,732/6,2) = 15,61^\circ$$

gdje je:

$$v_{px} = v_r + v_{ps} + v_s \cdot \cos 60^\circ = 2 + 3,2 + 2 \cdot 0,5 = 6,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

$$v_{py} = v_s \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,732 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

*Apsolutno ubrzanje:* Apsolutno ubrzanje čestice P dano je jednadžbom (5.12):

$$\vec{a}_p = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_{cor}.$$

Relativna putanja je kružna, pa je zgodno relativno ubrzanje izraziti preko prirodnih komponenata:

$$\vec{a}_r = \vec{a}_r^N + \vec{a}_r^T,$$

gdje je:

$$a_r^N = \frac{v_r^2}{R_2} = \frac{2^2}{0,4} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad a_r^T = \frac{dv_r}{dt} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Prijenosno ubrzanje jednako je ubrzaju čestice M<sub>1</sub> na obodu kola, koja se poklapa s točkom M u promatranom trenutku, tj.:

$$\vec{a}_{P_1} = \vec{a}_p = \vec{a}_s + \vec{a}_{P_1s}^N + \vec{a}_{P_1s}^T.$$

Ubrzanje središta  $\vec{a}_S$  zadano je zadatkom; normalna komponenta ubrzanja zbog rotacije oko S je:

$$a_{PS}^N = R_2 \cdot \omega^2 = 0,4 \cdot 8^2 = 25,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

dok je za određivanje komponente  $a_{M,S}^T$  potrebno poznavati kutno ubrzanje kola.

Budući da je

$$\omega = \frac{\nu_S}{R_1},$$

vrijedi i

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_S}{R_1} = 32 \text{ s}^{-2},$$

jer je udaljenost  $R_1$  čestice S od pola brzina konstantna cijelo vrijeme gibanja. Sada je:

$$a_{PS}^T = R_2 \cdot \varepsilon = 0,4 \cdot 32 = 12,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Vektor Coriolisova ubrzanja dan je izrazom (5.13):

$$\vec{a}_{\text{cor}} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{v}_r,$$

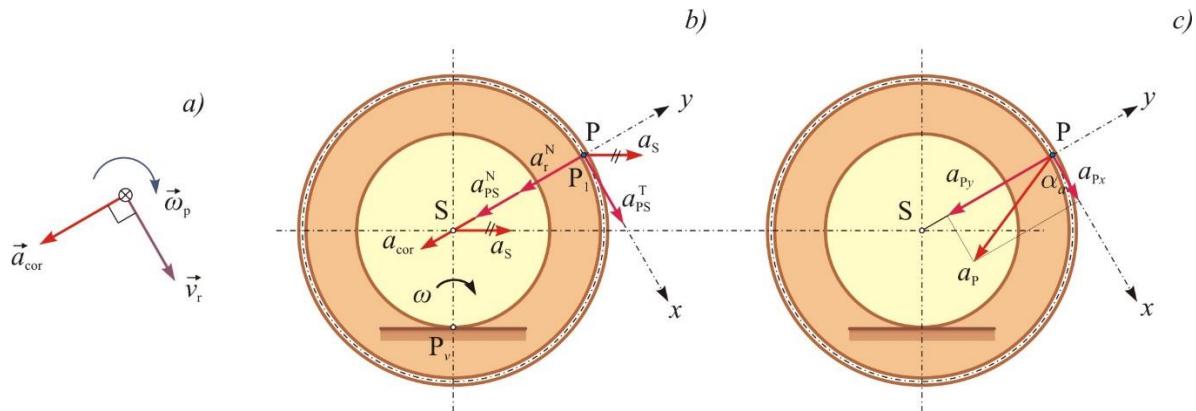
a njegov intenzitet izrazom (5.14):

$$a_{\text{cor}} = 2 \cdot \omega_p \cdot v_r \cdot \sin(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r).$$

Budući da je vektor prijenosne kutne brzine  $\vec{\omega}_p = \vec{\omega}$  okomit na ravninu slike (ulazi u sliku), a vektor  $\vec{v}_r$  leži u toj ravnini, bit će  $\sin(\vec{\omega}_p, \vec{v}_r) = \sin 90^\circ = 1$ , pa je:

$$a_{\text{cor}} = 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1 = 32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Pravac  $\vec{a}_{\text{cor}}$  okomit je na pravce vektora  $\vec{\omega}_p$  i  $\vec{v}_r$ , a smjer mu je određen pravilom desne ruke (sl. 5.17.a).



Slika 5.17. Primjer 5.5: a) smjer i pravac  $a_{cor}$ ; b) absolutno ubrzanje čestice P.

Na slici 5.17.b prikazane su sve navedene komponente absolutnog ubrzanja čestice P, pa ono iznosi (slika 5.17.c):

$$a_p = \sqrt{a_{px}^2 + a_{py}^2} = \sqrt{16,8^2 + 60,7^2} = 63,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2},$$

$$\alpha_a = \arctan\left(\frac{|a_{py}|}{a_{px}}\right) = \arctan(60,7/16,8) = 74,53^\circ,$$

gdje je:

$$a_{px} = a_{ps}^T + a_s \cos 60^\circ = 12,8 + 8 \cdot 0,5 = 16,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

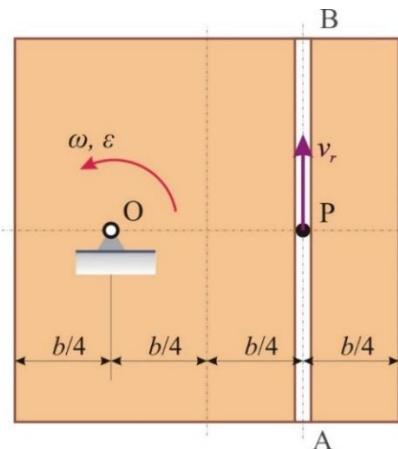
$$a_{py} = a_s \sin 60^\circ - a_r^N - a_{ps}^N - a_{cor} = 8 \cdot 0,866 - 10 - 25,6 - 32 = -60,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



**Zadatak 5.5.** Kvadratna ploča rotira oko osi kroz oslonac O. U ploču je urezan žlijeb AB duž kojega se giba čestica P konstantnom relativnom brzinom  $v_r = 4 \text{ m/s}$ .

U položaju prikazanom na slici Z.5.5, kada je stranica AB vertikalna, poznata je kutna brzina i kutno ubrzanje ploče.

Odrediti absolutnu brzinu i absolutno ubrzanje čestice P ako je zadano:  $b = 0,8 \text{ m}$ ,  $\omega = 5 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 4 \text{ s}^{-2}$ .



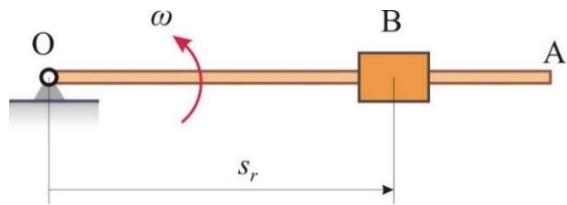
Slika Z.5.5. Zadatak Z.5.5.

Odgovor:  $v_a = 6 \text{ m/s}$ ,  $a_a = 50,03 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 5.6.** Štap OA rotira konstantnom kutnom brzinom  $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$  oko oslonca O. Duž štapa se istovremeno giba klizač B (sl. Z.5.6.) kojemu se udaljenost od oslonca O mijenja prema zakonu:

$$s_r = 0,25 + 0,15 \cdot t^3 \text{ m}.$$

Odrediti absolutnu brzinu i absolutno ubrzanje klizača B u trenutku  $t_1 = 2 \text{ s}$ .

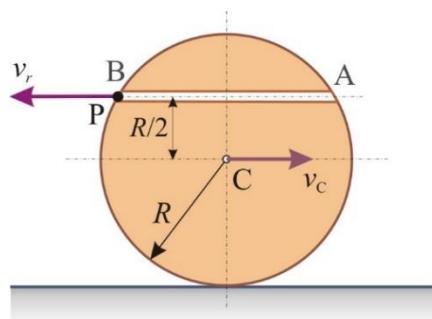


Slika Z.5.6. Zadatak Z.5.6.

Odgovor:  $v_a = 2,311 \text{ m/s}$ ,  $a_a = 3,617 \text{ m/s}^2$ .

**Zadatak 5.7.** Disk radijusa  $R = 0,6 \text{ m}$  kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Brzina središta diska je konstantna i iznosi  $v_c = 3 \text{ m/s}$ . Duž žlijeba AB diska giba se jednoliko čestica P. U položaju prikazanom na slici Z.5.7. relativna brzina čestice P je  $v_r = 3 \text{ m/s}$ .

Odrediti apsolutnu brzinu i apsolutno ubrzanje čestice P u zadanom položaju.



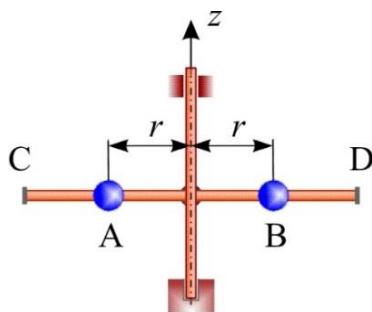
Slika Z.5.7. Zadatak Z.5.7.

Odgovor:  $v_a = 3 \text{ m/s}$ ,  $a_a = 25,98 \text{ m/s}^2$ .

# 6. DINAMIKA KRUTOG TIJELA

## 6.1. DINAMIČKI MOMENTI TROMOSTI

Položaj središta masa, kako sustava čestica tako i krutog tijela, ne karakterizira u potpunosti raspored masa sustava. Naime, promotri li se gibanje jednostavnog mehanizma, sastavljenog od poluge CD mase  $m_1$  i dviju čestica A i B jednakih masa  $m$ , koje su na jednakim udaljenostima  $r$  od osi  $z$ , oko koje sustav može rotirati (sl. 6.1), uočit će se da povećanjem udaljenosti  $r$  raste otpor sustava promjeni stanja gibanja iako nije došlo do promjene mase ni položaja središta masa.



Slika 6.1. Uz dinamičke momente tromosti

Zaključuje se da ukupna masa sustava i položaj centra mase nisu dostatni za opisivanje ukupne tromosti sustava (krutog tijela).

Veličine, koje osim o masi ovise i o geometrijskim svojstvima tijela, nazivaju se skupnim imenom dinamički momenti tromosti ili inercije.

### 6.1.1. Aksijalni i centrifugalni momenti tromosti

Aksijalnim momentom tromosti naziva se skalarna veličina koja je jednaka sumi umnožaka masa svih čestica tijela i kvadrata njihovih udaljenosti od te osi:

$$I_\xi = \sum m_i r_i^2 \quad (6.1)$$

ili za homogeno tijelo:

$$I_\xi = \int_m r^2 dm, \quad (6.2)$$

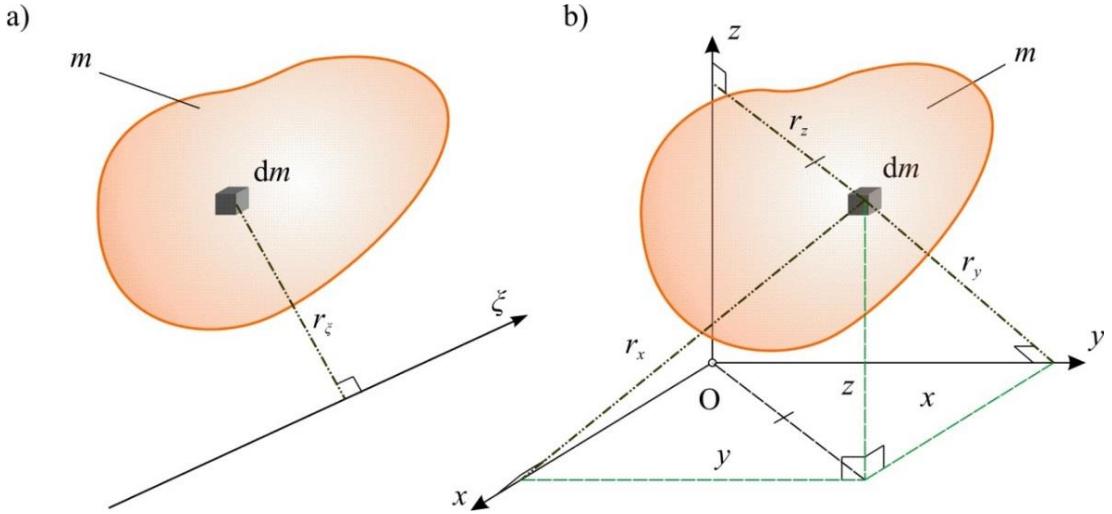
gdje je s  $r$  označena udaljenost diferencijala mase (odnosno i-te čestice) od osi  $\xi$  (sl. 6.2.a).

Iz slike 6.2.b vidi se da su momenti tromosti za osi pravokutnoga koordinatnog sustava:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \int_m (z^2 + x^2) dm; \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm \quad (6.3)$$

jer je

$$r^2 = y^2 + z^2, \quad r_x^2 = y^2 + z^2, \quad r_x^2 = y^2 + z^2.$$



Slika 6.2. Uz definiciju dinamičkih momenata tromosti

Iz definicije (6.1) slijedi da je jedinica momenta tromosti  $\text{kg}\cdot\text{m}^2$  te da je aksijalni moment tromosti uvijek veći od nule.

Polumjerom tromosti  $i_\xi$  naziva se veličina koja podignuta na kvadrat i pomnožena s masom tijela daje aksijalni moment tromosti tijela za os  $\xi$ :

$$I_\xi = i_\xi^2 \cdot m$$

ili

$$i_\xi = \sqrt{\frac{I_\xi}{m}}. \quad (6.4)$$

Za razliku od aksijalnoga, centrifugalni ili devijacijski moment tromosti definira se za par osi.

Centrifugalnim ili devijacijskim momentom tromosti  $I_{\xi\eta}$  naziva se skalarna veličina koja je jednaka sumi produkata masa svih čestica tijela i njihovih udaljenosti od osi  $\xi$  i  $\eta$ :

$$I_{\xi\eta} = \sum m_i \xi_i \eta_i \quad (6.5)$$

ili za homogeno tijelo:

$$I_{\xi\eta} = \int_m \xi \eta dm. \quad (6.6)$$

Za osi pravokutnoga koordinatnog sustava je:

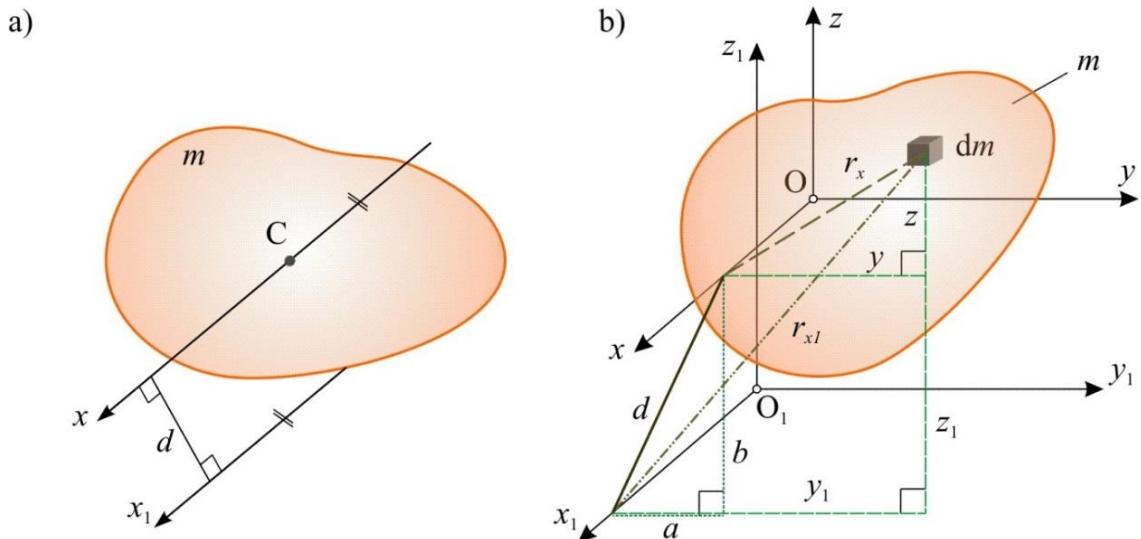
$$I_{xy} = \int_m xy dm; \quad I_{yz} = \int_m yz dm; \quad I_{zx} = \int_m zx dm \quad (6.7)$$

i, prema definiciji, može biti veći od nule, manji od nule ili pak jednak nuli.

### 6.1.2. Momeneti tromosti za paralelne osi (Steinerovo pravilo)

Momeneti tromosti nekog tijela bit će u općem slučaju različiti za različite osi (ili parove osi). Ako je međutim poznat moment tromosti tijela za neku os  $\xi$ , može se moment tromosti za neku drugu, njoj paralelnu os, dobiti jednostavnim preračunavanjem bez integriranja. Postupak je naročito jednostavan u slučaju da jedna od tih osi prolazi kroz centar mase tijela.

Neka je poznat aksijalni moment tromosti tijela prikazanoga na slici 6.3.a za os  $x$  kroz centar mase i neka se traži moment tromosti za njoj paralelnu os  $x_1$ .



Slika 6.3. Dinamički momenti tromosti za paralelne osi

Prema (6.3) je:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm \quad \text{i} \quad I_{x_1} = \int_m (y_1^2 + z_1^2) dm,$$

dok sa slike 6.3.b slijede jednakosti:

$$y_1 = y + a; \quad z_1 = z + b.$$

Uvrštenjem tih jednakosti u izraz za  $I_{x_1}$  dobije se:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_m [(y+a)^2 + (z+b)^2] dm = \\ &= \int_m (y^2 + z^2) dm + 2a \int_m y dm + 2b \int_m z dm + \int_m (a^2 + b^2) dm. \end{aligned}$$

Prvi integral na desnoj strani predstavlja aksijalni moment tromosti tijela za os  $x$  kroz centar mase. Drugi i treći integral su po definiciji jednak nuli jer su koordinate centra mase u sustavu Oxyz jednake nuli. Treći integral jednak je produktu iz mase tijela i kvadrata udaljenosti između osi  $x$  i  $x_1$  ( $d^2 = a^2 + b^2$ ). Konačno je:

$$I_{x_1} = I_x + md^2. \quad (6.8)$$

Jednakost (6.8) izražava tzv. Steinerovo pravilo koje glasi: *Moment tromosti za neku os jednak je zbroju momenta tromosti za njoj paralelnu os koja prolazi kroz centar mase tijela i umnoška mase tijela i kvadrata udaljenosti između tih paralelnih osi.*

### 6.1.3. Momenti tromosti složenih tijela

Momenti tromosti različitih tijela prema jednoj te istoj osi mogu se zbrajati algebarski:

$$I_x = \sum I_{ix}. \quad (6.9)$$

To pravilo olakšava izračunavanje momenata tromosti složenih tijela, koje je u geometrijskom smislu sastavljeno iz nekoliko jednostavnih oblika poznatih momenata tromosti.

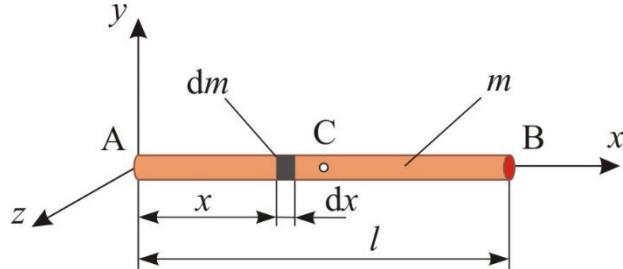
Obično su poznati momenti tromosti pojedinih dijelova tijela za osi kroz njihova vlastita težišta. Primjenom Steinerova pravila moraju se ti momenti preračunati za promatrano os i tek zatim zbrajati.

## 6.2. DINAMIKA RAVNINSKOG GIBANJA KRUTOG TIJELA

### 6.2.1. Aksijalni momenti tromosti nekih homogenih tijela

#### 6.2.1.1. Tanki homogeni štap

Odredit će se aksijalni moment tromosti tankog štapa AB duljine  $l$  i mase  $m$  (sl. 6.4).



Slika 6.4. Tanki homogeni štap

Neka je točka A ujedno i ishodište koordinatnog sustava Oxyz. Moment tromosti štapa za os Az, prema (6.3) je:

$$I_{Az} = \int_m (x^2 + y^2) dm.$$

Budući da se poprečne dimenzije štapa mogu zanemariti, bit će za svaki djelić mase  $y=0$ . Diferencijal mase  $dm$  dan je izrazom:

$$dm = \frac{m}{l} dx$$

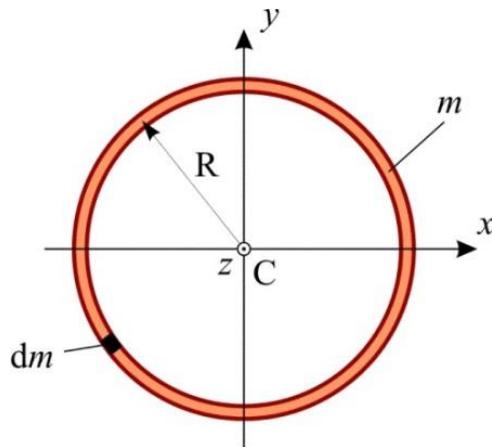
pa gornji integral prelazi u

$$I_{Az} = \frac{m}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{3} ml^2. \quad (6.10)$$

Moment tromosti štapa za os  $z$  kroz centar mase dobije se primjenom Steinerova pravila, prema kojem je:

$$I_{Cz} = I_{Az} - m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2. \quad (6.11)$$

#### 6.2.1.2. Tanki kružni prsten



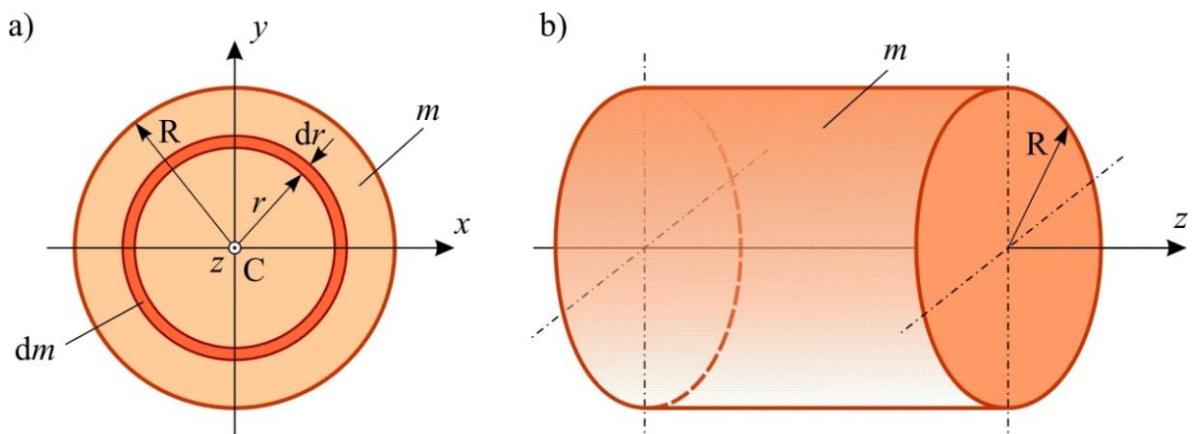
Slika 6.5. Tanki kružni prsten

Na slici 6.5 prikazan je tanki homogeni kružni prsten mase  $m$  i polumjera  $R$ . Ovdje će se odrediti moment tromosti prstena za os  $z$  kroz centar mase C prstena. Kako su svi elementarni djelići prstena na jednakoj udaljenosti  $r = R$  od osi  $Cz$ , to je prema 6.2:

$$I_{Cz} = \int_m r^2 dm = R^2 \int_m dm = mR^2. \quad (6.12)$$

#### 6.2.1.3. Kružna ploča

Odredit će se moment tromosti kružne ploče za os  $z$  koja prolazi njenim centrom mase i okomita je na ravninu ploče (sl. 6.6.a).



Slika 6.6: a) kružna ploča; b) valjak.

U tu svrhu uočit će se elementarni prsten polumjera  $r$  i debljine  $dr$ , površina kojega je  $dA = 2\pi r dr$ . Masa tog elementarnog dijela iznosi:

$$dm = \rho dA = \frac{m}{R^2 \pi} 2\pi r dr = \frac{2m}{R^2} r dr,$$

gdje je  $\rho = m/A$  - masa po jedinici površine ploče.

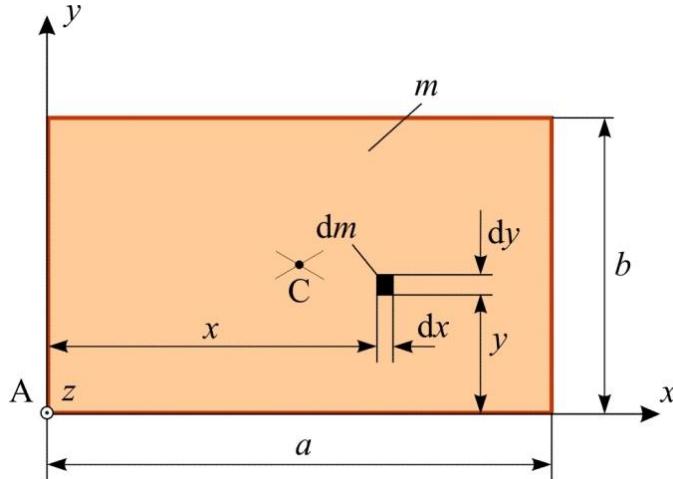
Dalje je:

$$I_{Cz} = \int_m r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_m r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2} m R^2. \quad (6.13)$$

Identičan izraz dobio bi se pri određivanju momenta tromosti valjka mase  $m$  i polumjera  $R$  za os  $z$  koja se poklapa s njegovom uzdužnom osi (sl. 6.6.b).

#### 6.2.1.4. Pravokutna ploča

Tanka homogena pravokutna ploča mase  $m$ , sa stranicama  $a$  i  $b$ , prikazana je na slici 6.7.



Slika 6.7. Pravokutna ploča

Pri određivanju momenta tromosti za os  $z$  kroz centar mase koristit će se postupak sličan onomu koji je primijenjen za tanki štap. Moment tromosti ploče za os  $Az$ , koja prolazi kroz jedan vrh i okomita je na ravninu ploče, bit će:

$$I_{Az} = \int_m (x^2 + y^2) dm = \rho \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{m}{ab} \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{m}{ab} \int_0^a x^2 dx \int_0^b y^2 dy,$$

gdje je  $\rho = m/A$  masa ploče po jedinici površine, a  $dA = dx dy$  elementarna površina.

Integriranjem gornjeg izraza dobije se:

$$I_{Az} = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2). \quad (6.14)$$

Primjenom Steinerova pravila dobije se izraz za moment tromosti ploče za os  $z$  kroz centar mase:

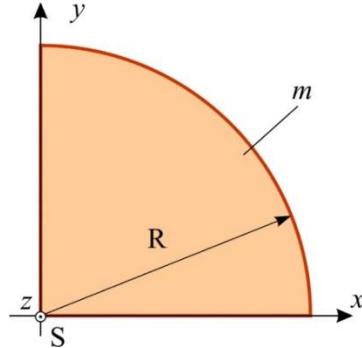
$$I_{Cz} = I_{Az} - m\overline{AC}^2 = I_{Az} - m \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$$

ili konačno:

$$I_{Cz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2). \quad (6.15)$$

### Primjer 6.1.

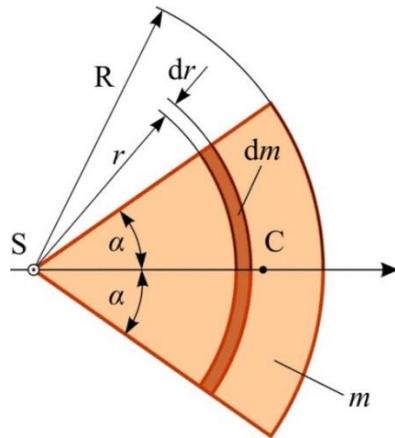
Potrebno je odrediti moment tromosti ploče oblika četvrtine kruga polumjera  $R$  (sl. 6.8) za os  $z$  koja prolazi centrom mase ploče i okomita je na ravninu slike. Masa ploče je  $m$ .



Slika 6.8. Primjer 6.1.

*Rješenje:*

Pretpostaviti će se, radi općenitosti, da je ploča oblika kružnog isječka i vršnog kuta  $2\alpha$  (sl. 6.9).



Slika 6.9. Ploča oblika kružnog isječka vršnog kuta  $2\alpha$

Najprije će se, radi jednostavnosti, odrediti moment tromosti ploče za os  $z$  kroz točku S. Diferencijal mase ploče jednak je umnošku iz diferencijala površine ploče  $dA$  i mase ploče po jedinici površine  $\rho$ :

$$dm = \rho dA = \frac{m}{R^2 \bar{\alpha}} 2r \bar{\alpha} dr,$$

gdje je  $2r\hat{\alpha}dr$  elementarna površina. Uvrštenjem u izraz (3.2) dobije se:

$$I_{Az} = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{1}{2} m R^2,$$

odakle je vidljivo da moment tromosti homogene ploče oblika kružnog isječka, za os kroz središte zakrivljenosti, ne ovisi o veličini vršnog kuta  $\alpha$ .

Moment tromosti za os kroz centar mase dobit će se primjenom Steinerova pravila, pri čemu je udaljenost promatranih osi (uz  $\alpha = \pi/4$ ):

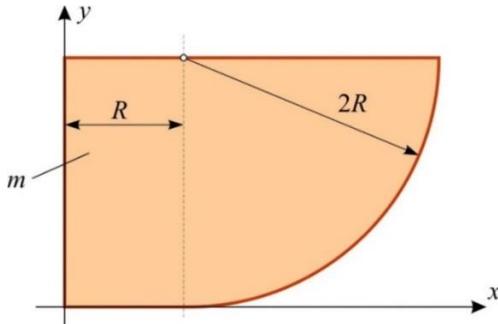
$$\overline{SC} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} R.$$

Sada je:

$$I_{Cz} = I_{Az} - m \overline{SC}^2 = mR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{32}{9\pi^2} \right) \approx 0,14mR^2.$$

### Primjer 6.2.

Odrediti moment tromosti za os  $z$  koja prolazi centrom mase tanke homogene ploče oblika prikazanoga na slici 6.10. Koliki je radijus inercije ploče za tu os? Ukupna masa ploče je  $m$ .



Slika 6.10. Primjer 6.2.

*Rješenje:*

Zadana ploča može se podijeliti na dva jednostavna dijela, pravokutnik i četvrtinu kruga, čiji su momenti tromosti ranije određeni (moguće ih je naći i u tablicama priručnika).

Mase pravokutnog i kružnog dijela ploče odnose se kao njihove površine, a jednake su produktu iz odgovarajuće površine i mase ploče po jedinici površine ( $\rho = m/A$ ):

$$m_p = \rho A_p = \frac{m}{A} A_p = \frac{2}{2+\pi} m; \quad m_k = \rho A_k = \frac{m}{A} A_k = \frac{\pi}{2+\pi} m,$$

gdje je:

$$A_p = 2R^2 - \text{površina pravokutnog dijela}$$

$$A_k = R^2\pi - \text{površina kružnog dijela}$$

$$A = R^2(2 + \pi) - \text{ukupna površina ploče.}$$

Koordinate centra mase ploče dobiju se s pomoću poznatih izraza za težište:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{A} = \frac{A_p x_p + A_k x_k}{A} = 1,324R;$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{A_p y_p + A_k y_k}{A} = 1,092R,$$

gdje je:

$$x_p = 0,5R; \quad y_p = R; \quad x_k = 1,849R; \quad y_k = 1,151R.$$

Prema izrazu (6.9) bit će:

$$I_{cz} = I_{czp} + I_{czk} = 0,942mR^2,$$

gdje je:

$I_{cz}$  - traženi moment tromosti

$I_{czp}$  - moment tromosti pravokutnog dijela za os  $Cz$

$I_{czk}$  - moment tromosti kružnog dijela za os  $Cz$ .

Momenti tromosti  $I_{czp}$  i  $I_{czk}$  određeni su primjenom Steinerova pravila, s tim da je pri određivanju  $I_{czk}$  to pravilo korišteno dvaput:

$$I_{czp} = I_{pv} + \check{SD}_p = 0,162mR^2 + 0,267mR^2 = 0,429mR^2;$$

$$I_{czk} = I_{kv} + \check{SD}_k = 0,342mR^2 + 0,171mR^2 = 0,513mR^2,$$

gdje je  $I_{pv}$  moment tromosti pravokutnog dijela za vlastito težište:

$$I_{pv} = \frac{1}{12}m_p(R^2 + 4R^2) = 0,162mR^2,$$

$\check{SD}_p$  je Steinerov dodatak za pravokutni dio:

$$\check{SD}_p = m_p \left[ (x_c - x_p)^2 + (y_c - y_p)^2 \right] = 0,267mR^2;$$

$I_{kv}$  je moment tromosti kružnog dijela za vlastito težište:

$$I_{kv} = I_{SK} - m_k d_k^2 = \frac{1}{2}m_k 4R^2 - m_k \frac{32}{9\pi^2} 4R^2 = 0,559m_k R^2 = 0,342mR^2,$$

dok je  $\check{SD}_k$  Steinerov dodatak za kružni dio:

$$\check{S}D_k = m_k \left[ (x_c - x_k)^2 + (y_c - y_k)^2 \right] = 0,171mR^2.$$

Radius tromosti razmatrane ploče za os  $z$  kroz centar mase dobije se prema (6.4):

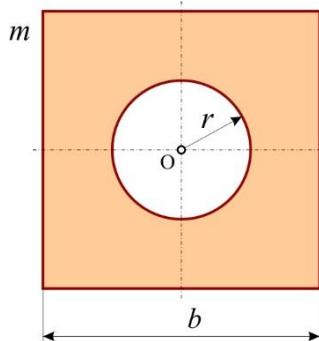
$$i_z = \sqrt{\frac{I_{Cz}}{m}} = \sqrt{\frac{0,942 \cdot m \cdot R^2}{m}} = 0,971 \cdot R.$$



**Zadatak 6.1.** Radius tromosti tijela mase  $m = 10 \text{ kg}$  za os  $z$  koja prolazi njegovim centrom mase je  $i_z = 1,2 \text{ m}$ . Odrediti moment tromosti toga tijela za os  $z_1$  koja je paralelna s osi  $z$ , a od nje je udaljena za  $0,6 \text{ m}$ .

Odgovor:  $I_{z1} = 18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

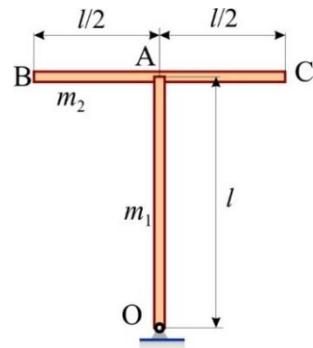
**Zadatak 6.2.** Odrediti moment tromosti homogene ploče mase  $m = 10 \text{ kg}$  za os  $z$  koja prolazi njenim centrom mase. Ploča je oblika kvadrata stranice  $b = 1 \text{ m}$  iz koje je izrezan krug radijusa  $r = 0,25 \text{ m}$  (sl. Z.6.2). Koliki je polumjer inercije ploče?



Slika Z.6.2. Zadatak Z.6.2.

Odgovor:  $I_z = 1,998 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $i_z = 0,447 \text{ m}$ .

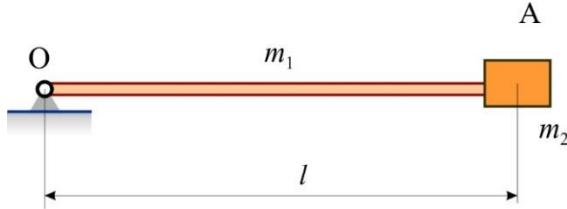
**Zadatak 6.3.** Tijelo je sastavljeno od dvaju homogenih štapova OA i BC jednake duljine  $l = 1 \text{ m}$  i masa  $m_1 = 12 \text{ kg}$  i  $m_2 = 6 \text{ kg}$  koji su čvrsto vezani u točki A (sl. Z.6.3). Odrediti moment tromosti tijela za os  $z$  koja prolazi točkom O okomito na ravninu slike.



Slika Z.6.3. Zadatak Z.6.3.

Odgovor:  $I_{zO} = 10,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

**Zadatak 6.4.** Za kraj štapa OA mase  $m_1 = 24 \text{ kg}$  i duljine  $l = 1 \text{ m}$  čvrsto je vezana čestica mase  $m_2 = 3 \text{ kg}$  (sl. Z.6.4). Odrediti moment tromosti tijela za os  $z_0$  kroz oslonac O i za os  $z$  koja prolazi centrom mase zadanog tijela.

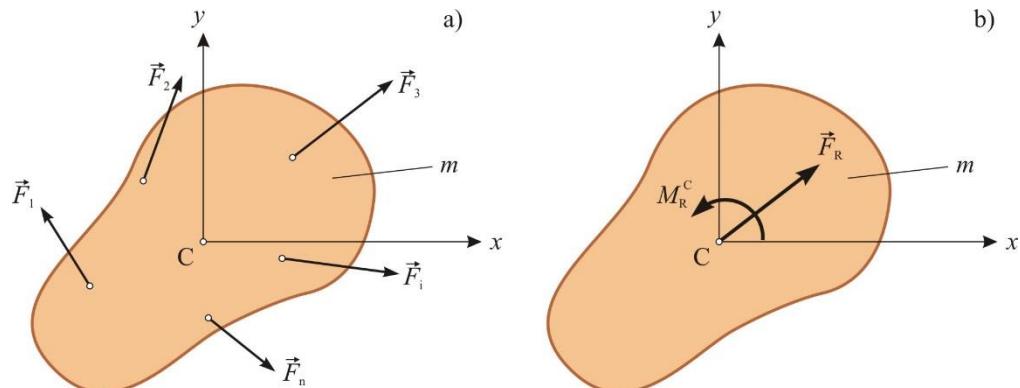


Slika Z.6.4. Zadatak Z.6.4.

Odgovor:  $I_{zO} = 11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $I_{zC} = 2,667 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

### 6.2.2. Diferencijalne jednadžbe gibanja

Ako na kruto tijelo djeluje proizvoljni ravninski sustav sila  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$  (slika 6.11.a), tada se taj sustav sila može reducirati na proizvoljno odabranu točku A pri čemu se dobije jedna sila (rezultanta zadanog sustava) i jedan spreg sila kojemu je moment jednak algebarskoj sumi momenata zadanih sila za točku A.



Slika 6.11. Ravninski sustav sila: a) zadani sustav sila; b) sustav reduciran na centar mase.

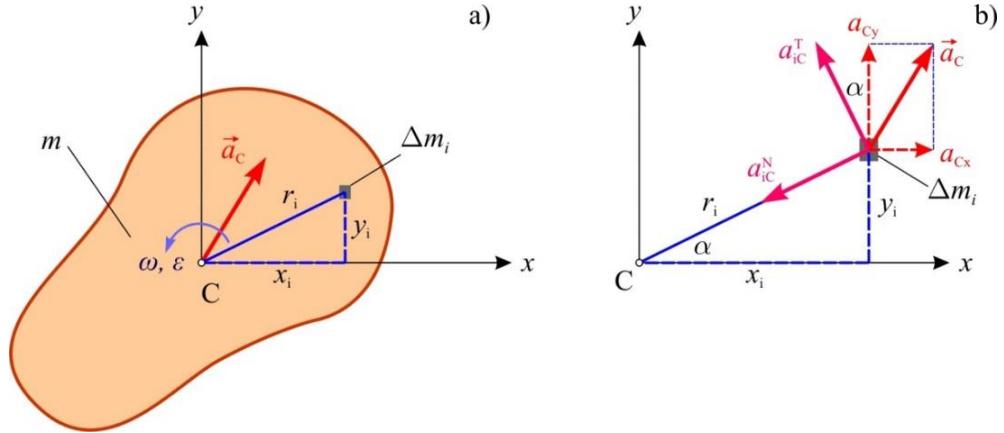
Ako se razmatrani sustav sila reducira na centar mase C, tada je (slika 6.11.b):

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \sum \vec{F}_i \\ M_C^R &= \sum M_C^{\vec{F}_i}\end{aligned}\tag{6.16}$$

odnosno

$$\begin{aligned}F_{Rx} &= \sum F_{ix} \\ F_{Ry} &= \sum F_{iy} \\ M_C^R &= \sum M_C^{\vec{F}_i}.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Kako je poznato iz kinematike ravninskog gibanja krutog tijela, svako gibanje tijela moguće je prikazati kao zbroj dvaju elementarnih gibanja: jedne translacije s kinematičkim karakteristikama točke odabrane za pol i jedne rotacije oko tog pola.



Slika 6.12. Ubrzanje i-tog djelića mase

Ako se, radi jednostavnijeg izvođenja, za pol odabere točku centar mase C za koju je vezan koordinatni sustav Cxy (sl. 6.12.a), ubrzanje i-tog djelića mase bit će (sl. 6.12.b):

$$\vec{a}_i = \vec{a}_C + \vec{a}_{ic}^N + \vec{a}_{ic}^T,$$

gdje je

$$a_{ic}^N = r_i \omega^2; \quad a_{ic}^T = r_i \varepsilon.$$

Uzimajući u obzir da je

$$a_{icx}^N = -r_i \omega^2 \cos \alpha; \quad a_{icy}^N = -r_i \omega^2 \sin \alpha; \quad a_{icx}^T = -r_i \varepsilon \sin \alpha; \quad a_{icy}^T = r_i \varepsilon \cos \alpha$$

te da je

$$\cos \alpha = x_i / r_i; \quad \sin \alpha = y_i / r_i,$$

bit će projekcije ubrzanja i-tog djelića mase na koordinatne osi:

$$a_{ix} = a_{Cx} - x_i \omega^2 - y_i \varepsilon; \quad a_{iy} = a_{Cy} - y_i \omega^2 - x_i \varepsilon. \quad (6.18)$$

Dakle, ako je promatrano kruto tijelo mase  $m$  s centrom mase u točki C podijeljeno na n elementarnih djelića mase  $\Delta m_i$ , osnovna jednadžba dinamike za i-ti djelić mase glasit će:

$$\Delta m_i \cdot \vec{a}_i = \Delta \vec{F}_i + \Delta \vec{S}_i, \quad (6.19)$$

gdje je  $\Delta \vec{F}_i$  rezultanta svih vanjskih sila koje djeluju na taj djelić mase, a  $\Delta \vec{S}_i$  rezultanta svih unutarnjih sila koje na njega djeluju.

Jednadžba (6.19) projicirana na osi koordinatnog sustava glasi:

$$\Delta m_i \cdot a_{ix} = \Delta F_{ix} + \Delta S_{ix}, \quad \Delta m_i \cdot a_{iy} = \Delta F_{iy} + \Delta S_{iy}. \quad (6.20)$$

Uvrštavanjem (6.18) u (6.20) i sumiranjem po svim česticama dobije se:

$$\sum \Delta m_i (a_{Cx} - x_i \omega^2 - y_i \varepsilon) = \sum \Delta F_{ix} + \sum \Delta S_{ix},$$

$$\sum \Delta m_i (a_{Cy} - y_i \omega^2 + x_i \varepsilon) = \sum \Delta F_{iy} + \sum \Delta S_{iy}$$

ili zbog svojstva unutarnjih sila:

$$\sum \Delta m_i (a_{Cx} - x_i \omega^2 - y_i \varepsilon) = F_{Rx}; \quad \sum \Delta m_i (a_{Cy} - y_i \omega^2 + x_i \varepsilon) = F_{Ry}, \quad (6.21)$$

gdje je  $\vec{F}_R$  glavni vektor svih vanjskih sila koje djeluju na promatrano tijelo.

Suma na lijevoj strani prvog od izraza (6.21) može se prikazati u obliku:

$$\sum \Delta m_i (a_{Cx} - x_i \omega^2 - y_i \varepsilon) = a_{Cx} \sum \Delta m_i - \omega^2 \sum x_i \Delta m_i - \varepsilon \sum y_i \Delta m_i,$$

gdje je suma u prvom članu na desnoj strani ukupna masa tijela  $m$ , dok su sume u drugom i trećem članu koordinate centra mase u sustavu s ishodištem upravo u centru mase, dakle jednake nuli.

Na isti se način može razmotriti suma na lijevoj strani drugog od izraza (6.21).

Izrazi (6.21) postaju:

$$ma_{Cx} = F_{Rx}, \quad ma_{Cy} = F_{Ry} \quad (6.22)$$

ili

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R. \quad (6.23)$$

Vektorskim množenjem jednakosti (6.19) vektorom  $\vec{r}_i$  s lijeve strane i sumiranjem po svim česticama tijela dobije se:

$$\sum \vec{r}_i \times \Delta m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{S}_i.$$

Prvi član na desnoj strani gornje jednadžbe jest glavni vektor momenata svih vanjskih sila za točku C, a zbog svojstva unutarnjih sila drugi je jednak nuli.

Uvrštenjem izraza za ubrzanje i-te čestice dobije se:

$$\sum \vec{r}_i \times \Delta m_i (\vec{a}_C + \vec{a}_{iC}^N + \vec{a}_{iC}^T) = \vec{M}_C^R.$$

Nakon razvijanja sume na lijevoj strani slijedi:

$$(\sum \vec{r}_i \Delta m_i) \times \vec{a}_C + \sum \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{a}_{iC}^N) + \sum \Delta m_i (\vec{r}_i \times \vec{a}_{iC}^T) = \vec{M}_C^R. \quad (6.24)$$

Prvi je član na lijevoj strani jednak nuli jer je  $\sum \Delta m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C$ , a  $\vec{r}_C = \vec{0}$ , dok je drugi član na lijevoj strani jednadžbe (6.24) jednak nuli jer su vektori  $\vec{r}_i$  i  $\vec{a}_{iC}^N$  kolinearni.

Kako vektori  $\vec{r}_i$ ,  $\vec{F}_i$ ,  $\vec{a}_C$  i  $\vec{a}_{iC}^T$  leže u istoj ravnini, to će odgovarajući vektorski produkti imati projekciju samo na os  $z$ . S obzirom na to da je  $a_{iC}^T = \varepsilon \cdot r_i$  i  $\vec{r}_i \perp \vec{a}_{iC}^T$ , vrijedi:

$$\varepsilon \sum \Delta m_i \cdot r_i \cdot r_i = \varepsilon \sum \Delta m_i \cdot r_i^2 = M_C^R .$$

Budući da je prema definiciji  $\sum \Delta m_i \cdot r_i^2 = I_{Cz}$  te  $\varepsilon = \ddot{\phi}$ , konačno je:

$$I_{Cz} \ddot{\phi} = M_C^R . \quad (6.25)$$

Izrazi (6.23) i (6.25) predstavljaju diferencijalne jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela:

$$\begin{aligned} m\vec{a}_C &= \vec{F}_R \\ I_{Cz} \ddot{\phi} &= M_C^R \end{aligned} \quad (6.26)$$

ili

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= F_{Rx} \\ m\ddot{y}_C &= F_{Ry} \\ I_{Cz} \ddot{\phi} &= M_C^R . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Jednadžbe (6.27) predstavljaju diferencijalne jednadžbe ravninskog gibanja krutog tijela u analitičkom obliku. Integriranjem tih jednadžba dobiju se  $x_C$ ,  $y_C$  i  $\phi$  kao funkcije vremena, a time je određen i zakon gibanja tijela. Očito je da su se dvije od jednadžba (6.27) moglo dobiti izravno iz zakona o gibanju centra mase sustava čestica.

Iz treće od jednadžba (6.27) slijedi da će kruto tijelo vršiti translatorno gibanje samo tada kada pravac rezultante vanjskih sila prolazi upravo centrom mase tijela ( $M_C^R = 0$ ).

Ako tijelo vrši rotaciju oko osi  $z$  kroz točku C, iz (6.27) slijedi diferencijalna jednadžba rotacije krutog tijela oko nepomične osi:

$$I_{Cz} \ddot{\phi} = M_C^R ,$$

a ako tijelo vrši rotaciju oko osi  $z$  kroz točku A, može se pokazati da će diferencijalna jednadžba rotacije krutog tijela oko nepomične osi biti:

$$I_{Az} \ddot{\phi} = M_A^R . \quad (6.28)$$

### 6.2.3. D'Alambertov princip

Ako se u jednadžbama ravninskog gibanja (6.26) članovi s lijeve strane prebace na desnu, dobit će se:

$$\vec{F}_R + (-m\vec{a}_C) = \vec{0}$$

$$M_C^R + (-I_{Cz} \ddot{\phi}) = 0$$

ili uvođenjem oznaka  $\vec{F}_{\text{in}} = -m\vec{a}_C$  i  $M_{\text{in}} = -I_{Cz}\ddot{\phi}$ :

$$\begin{aligned}\vec{F}_R + \vec{F}_{\text{in}} &= \vec{0} \\ M_C^R + M_{\text{in}} &= 0\end{aligned}\tag{6.29}$$

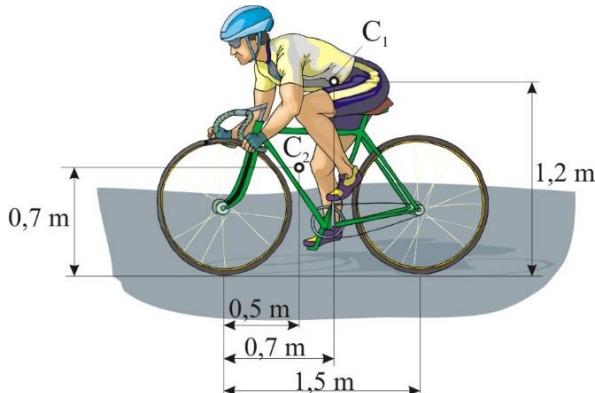
te projiciranjem na osi pravokutnoga koordinatnog sustava:

$$\begin{aligned}F_{Rx} + F_{inx} &= 0 \\ F_{Ry} + F_{iny} &= 0 \\ M_C^R + M_{\text{in}} &= 0.\end{aligned}\tag{6.30}$$

Jednadžbe (6.29) odnosno (6.30) izražavaju D'Alambertov princip za kruto tijelo, prema kojem je moguće zadatke ravninskog gibanja krutog tijela rješavati principima statike ako se vanjskim silama doda inercijska sila  $\vec{F}_{\text{in}}$  suprotna vektoru ubrzanja centra mase i inercijski moment  $M_{\text{in}}$  suprotan smjeru kutnog ubrzanja  $\varepsilon$  tijela.

### Primjer 6.3.

Biciklist mase  $m_1 = 70 \text{ kg}$  naglo zaustavlja bicikl mase  $m_2 = 18 \text{ kg}$ . Odrediti najveće usporenje koje biciklist može ostvariti pa da ne dođe do prevrtanja preko prednjeg kotača. Centar mase biciklista je u točki  $C_1$ , a bicikla u točki  $C_2$  (slika 6.13).



Slika 6.13. Primjer 6.3.

*Rješenje:*

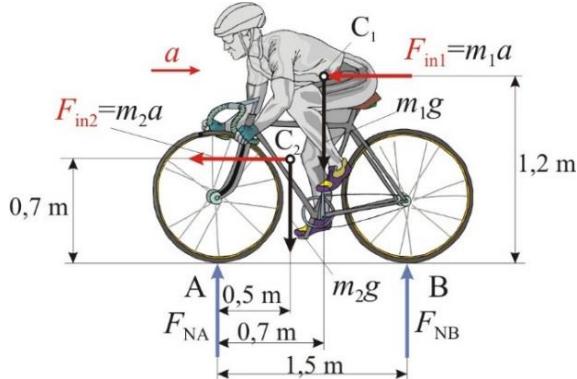
Sustav biciklist-bicikl oslobođen veza, s ucrtanim vanjskim aktivnim silama, reakcijama veza i inercijskim silama, prikazan je na slici 6.14.

Suma momenata svih sila u odnosu na točku A mora biti jednaka nuli:

$$\sum M_A^{F_i} = m_1 g \cdot 0,7 + m_2 g \cdot 0,5 - F_{in1} \cdot 1,2 - F_{in2} \cdot 0,7 - F_{NB} \cdot 1,5 = 0.$$

Sustav će se početi prevrtati preko prednjeg kotača (oko točke A na slici) u trenutku kada normalna reakcija u osloncu B postane jednaka nuli, pa se gornja jednadžba može napisati u obliku:

$$\sum M_A^{F_i} = m_1 g \cdot 0,7 + m_2 g \cdot 0,5 - m_1 a \cdot 1,2 - m_2 a \cdot 0,7 = 0,$$



Slika 6.14. Dinamička ravnoteža biciklista i bicikla

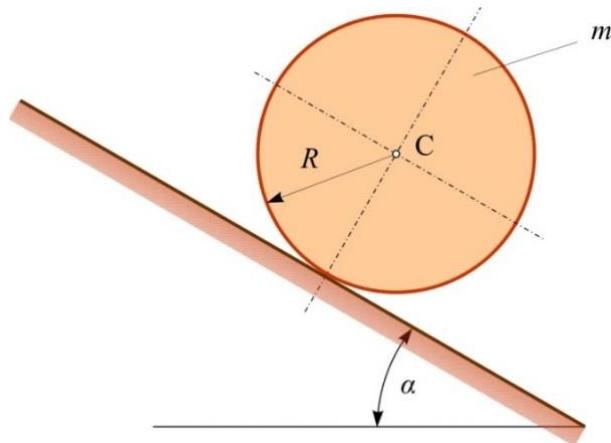
odakle je

$$a \cdot (m_1 \cdot 1,2 + m_2 \cdot 0,7) = g \cdot (m_1 \cdot 0,7 + m_2 \cdot 0,5)$$

$$a = g \cdot \frac{m_1 \cdot 0,7 + m_2 \cdot 0,5}{m_1 \cdot 1,2 + m_2 \cdot 0,7} = 9,81 \cdot \frac{70 \cdot 0,7 + 18 \cdot 0,5}{70 \cdot 1,2 + 18 \cdot 0,7} = 5,89 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

#### Primjer 6.4.

Valjak polumjera  $R$  i mase  $m$  kotrlja se bez klizanja niz kosinu nagiba  $\alpha$  (slika 6.15). Odrediti kutno ubrzanje valjka i minimalni koeficijent trenja  $\mu$  potreban da ne nastupi klizanje.



Slika 6.15. Primjer 6.4.

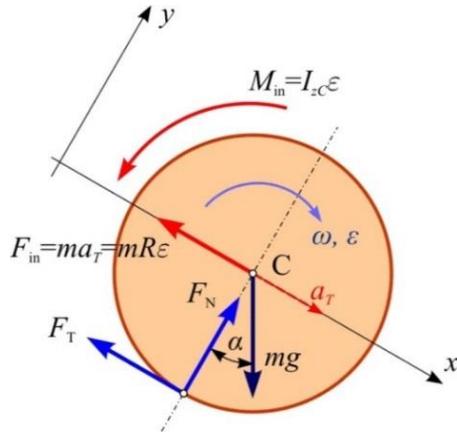
*Rješenje:*

Odabere li se koordinatni sustav prema slici 6.16, bit će diferencijalne jednadžbe gibanja valjka:

$$\sum F_x = 0: \quad m\ddot{x}_C = mg \sin \alpha - F_T \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad m\ddot{y}_C = F_N - mg \cos \alpha \quad (2)$$

$$\sum M_C = 0: \quad I_{Cz}\ddot{\phi} = F_T R. \quad (3)$$



Slika 6.16. Dinamička ravnoteža valjka

Budući da centar mase valjka vrši pravocrtno gibanje duž osi  $x$ , bit će  $\ddot{y}_C = 0$ , odnosno

$$F_N = mg \cos \alpha .$$

Iz uvjeta kotrljanja bez klizanja slijedi dodatna kinematička veza  $\ddot{x}_C = R\ddot{\phi}$ , pa se eliminacijom sile trenja iz jednadžba (a) i (c) dobije:

$$I_{Cz}\ddot{\phi} = m(g \sin \alpha - R\ddot{\phi})$$

ili

$$\ddot{\phi} = \frac{mg \sin \alpha}{I_{Cz} + mR^2} = \frac{2g}{3R} \cdot \sin \alpha ,$$

gdje je  $I_{Cz} = \frac{1}{2}mR^2$  moment inercije valjka za os  $z$  kroz centar mase. Kutno ubrzanje valjka ovdje je konstantna veličina i nije ovisno o masi samog valjka.

Iz jednadžbe (c) slijedi sila trenja:

$$F_T = \frac{I_{Cz}\ddot{\phi}}{R} = \frac{1}{2}mg \sin \alpha .$$

Klizanje neće nastupiti ako je ispunjen uvjet:

$$F_T \leq F_{T\max} = \mu F_N ,$$

odakle je:

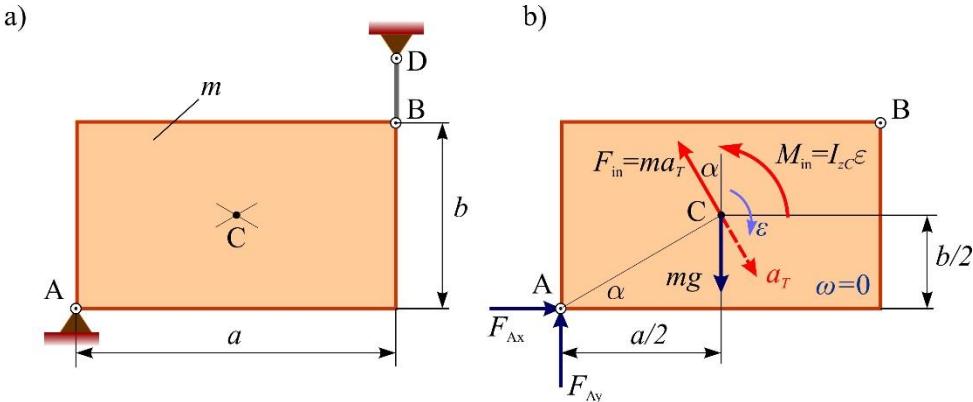
$$\mu \geq \frac{F_T}{F_N} = \frac{1}{3} \tan \alpha .$$

Ako bi koeficijent trenja  $\mu$  bio manji od ovdje dobivene veličine, valjak bi se niz kosinu kotrljao s klizanjem, a tada ne bi vrijedila kinematička veza  $\ddot{x}_C = R\ddot{\phi}$ . Kutno ubrzanje valjka ostalo bi u tom slučaju nepromijenjeno, dok bi se ubrzanje centra mase valjka  $\ddot{x}_C$  izračunalo iz jednadžbe (a) pri čemu bi na mjesto  $F_T$  došla granična vrijednost sile trenja  $F_{T\max}$ .

### Primjer 6.5.

Pravokutna ploča mase  $m$  vezana je za podlogu cilindričnim zglobom u A i užetom u B (sl. 6.17.a). Odrediti reakciju u zglobu A u trenutku kada pukne uže BD.

Zadano:  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $a = 0,8 \text{ m}$ ,  $b = 0,6 \text{ m}$ .



Slika 6.17: a) primjer 6.5, b) ploča oslobođena veza.

*Rješenje:*

U trenutku kidanja užeta u B kutna brzina ploče bit će jednaka nuli, dok će kutno ubrzanje biti različito od nule.

Na slici 6.17.b prikazana je ploča oslobođena veze u A. Na ploču osim vlastite težine i reakcije veze u A djeluje i inercijska sila suprotna smjeru tangencijalnog ubrzanja:

$$F_{in} = ma_T = m \cdot \overline{AC} \cdot \epsilon$$

te spreg inercijskih sila u odnosu na centar mase (suprotno smjeru  $\epsilon$ ) momenta:

$$M_{in} = I_{zC}\epsilon,$$

pa se mogu napisati jednadžbe dinamičke ravnoteže ploče:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{in} \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - mg + F_{in} \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_A = 0: \quad mg \frac{a}{2} - F_{in} \overline{AC} - M_{in} = 0,$$

gdje je:

$$\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{0,4^2 + 0,3^2} = 0,5 \text{ m}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75, \text{ pa je } \alpha = 36,87^\circ$$

$$F_{in} = ma_T = m \cdot \overline{AC} \cdot \epsilon = 0,5m\epsilon$$

$$M_{in} = I_{zC} \cdot \varepsilon = \frac{1}{12} m \varepsilon,$$

jer je

$$I_{zC} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) = \frac{1}{12} m(0,8^2 + 0,6^2) = \frac{1}{12} m.$$

Jednadžbe dinamičke ravnoteže sada su:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - 0,5m\varepsilon \sin 36,87^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - mg + 0,5m\varepsilon \cos 36,87^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad 0,4mg - 0,25m\varepsilon - \frac{1}{12}m\varepsilon = 0. \quad (3)$$

Iz jednadžbe (3), nakon množenja s 12 i dijeljenja s  $m$ , dobije se

$$\varepsilon = \frac{4,8}{4} g = 1,2 \cdot 9,81 = 11,77 \text{ s}^{-2}$$

nakon čega iz jednadžba (1) i (2) slijedi:

$$F_{Ax} = 0,5m\varepsilon \sin 36,87^\circ = 0,5 \cdot 20 \cdot 11,77 \sin 36,87^\circ = 70,63 \text{ N}$$

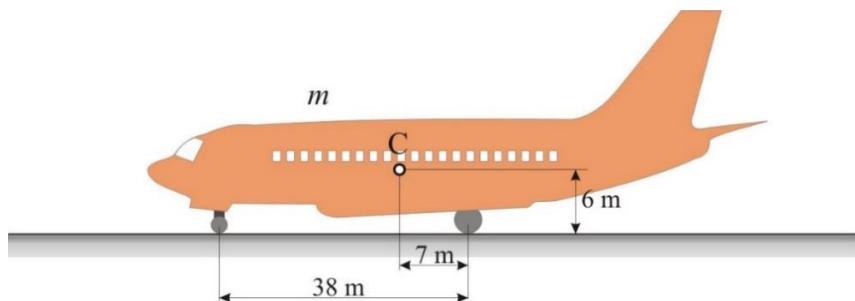
$$F_{Ay} = mg - 0,5m\varepsilon \cos 36,87^\circ = 20 \cdot 9,81 - 0,5 \cdot 20 \cdot 11,77 \cos 36,87^\circ = 102,02 \text{ N}.$$

Sada je

$$F_A = \sqrt{(F_{Ax})^2 + (F_{Ay})^2} = \sqrt{70,63^2 + 102,02^2} = 124,1 \text{ N}.$$



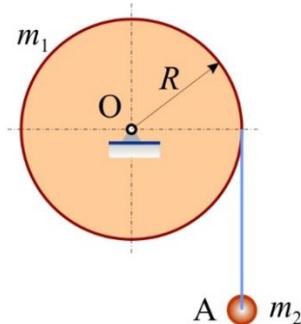
**Zadatak 6.5.** Putnički zrakoplov ukupne mase od 150 tona slijeće na pistu brzinom  $v_0 = 50 \text{ m/s}$ . Usporavajući se jednolikom zrakoplov se zaustavi na udaljenosti od 500 metara od početka kočenja. Odrediti normalne reakcije podloge na prednje odnosno stražnje kotače zrakoplova (sl. Z.6.5).



Slika Z.6.5. Zadatak Z.6.5.

Odgovor:  $F_{NP} = 0,331 \cdot 10^6 \text{ N}$ ,  $F_{NZ} = 1,141 \cdot 10^6 \text{ N}$ .

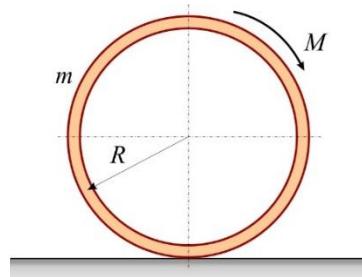
**Zadatak 6.6.** Na disk mase  $m_1 = 20 \text{ kg}$  i polumjera  $R = 0,3 \text{ m}$  namotano je uže na čijem drugom kraju visi čestica A mase  $m_2 = 5 \text{ kg}$ . Sustav je pridržavan u stanju mirovanja u položaju prikazanom na slici Z.6.6. Odrediti brzinu čestice A 4 sekunde nakon puštanja iz stanja mirovanja. Kolika je sila u užetu?



Slika Z.6.6. Zadatak Z.6.6.

Odgovor:  $v_4 = 13,08 \text{ m/s}$ ,  $S = 32,7 \text{ N}$ .

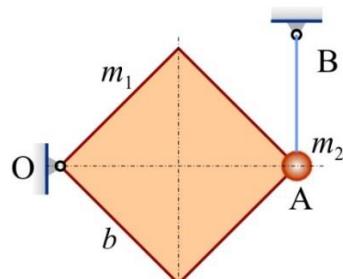
**Zadatak 6.7.** Na prsten mase  $m = 50 \text{ kg}$  i polumjera  $R = 0,5 \text{ m}$  djeluje spreg sila momenta  $M = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$  (sl. Z.6.7.). Prsten se po horizontalnoj podlozi može kotrljati bez klizanja. Koliko je kutno ubrzanje prstena, a kolika sila trenja između prstena i podloge koja osigurava da ne nastupi klizanje?



Slika Z.6.7. Zadatak Z.6.7.

Odgovor:  $\varepsilon = 2 \text{ s}^{-2}$ ,  $F_T = 50 \text{ N}$ .

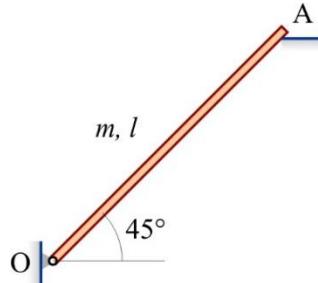
**Zadatak 6.8.** Homogena kvadratna ploča mase  $m_1 = 15 \text{ kg}$  i stranice  $b = 0,5 \text{ m}$  vezana je zglobom O za podlogu (sl. Z.6.8). U točki A ploče čvrsto je vezana čestica mase  $m_2 = 2 \text{ kg}$ , koja je užetom AB vezana za strop. Odrediti reakciju u osloncu O koja će se pojaviti u trenutku pucanja užeta.



Slika Z.6.8. Zadatak Z.6.8.

Odgovor:  $F_O = 40,3 \text{ N}$ .

**Zadatak 6.9.** Štap mase  $m = 100 \text{ kg}$  i duljine  $l = 2 \text{ m}$  vezan je zglobom O za podlogu, dok se u točki A oslanja na horizontalnu prepreku (sl. Z.6.9). U jednom je trenutku uklonjena prepreka u A. Odrediti kutno ubrzanje štapa i reakciju u osloncu O u tom trenutku.



Slika Z.6.9. Zadatak Z.6.9.

Odgovor:  $\varepsilon = 5,203 \text{ s}^{-2}$ ,  $F_O = 715 \text{ N}$ .

#### 6.2.4. Impuls sile. Količina gibanja

Kruto tijelo predstavlja, u dinamičkom smislu, beskonačno mnogo kruto povezanih čestica elementarne mase  $dm$ . Stoga će vektor količine gibanja krutog tijela biti:

$$\vec{B} = \int_m \vec{v} dm = m \vec{v}_C. \quad (6.31)$$

Ukupni impuls sile jednak je sumi impulsa svih vanjskih sila koje na tijelo djeluju:

$$\vec{I} = \sum_1^2 \vec{F}_i dt = \int_1^2 \vec{F}_R dt. \quad (6.32)$$

Naime, zbog svojstva unutarnjih sila suma impulsa unutarnjih sila jednaka je nuli.

##### 6.2.4.1. Zakon o promjeni količine gibanja

Deriviranjem jednadžbe (6.31) po vremenu dobije se:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}_C}{dt} = m \vec{a}_C = \vec{F}_R, \quad (6.33)$$

odnosno prva derivacija količine gibanja krutog tijela po vremenu jednaka je glavnom vektoru svih vanjskih sila koje na tijelo djeluju.

##### 6.2.4.2. Zakon o prirastu količine gibanja

Množenjem jednadžbe (6.33) s  $dt$  i integriranjem dobije se:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \int_1^2 \vec{F}_R dt = \vec{I}. \quad (6.34)$$

Jednadžba (3.34) izražava zakon o prirastu količine gibanja koji glasi: *Prirast vektora količine gibanja u nekom vremenskom intervalu jednak je ukupnom impulsu vanjskih sila u tom istom vremenskom intervalu.*

Projiciranjem vektorske jednadžbe (6.34) na osi pravokutnoga koordinatnog sustava dobije se:

$$\begin{aligned} B_{2x} - B_{1x} &= I_x \\ B_{2y} - B_{1y} &= I_y \\ B_{2z} - B_{1z} &= I_z . \end{aligned} \quad (6.35)$$

#### 6.2.4.3. Zakon o održanju količine gibanja

Ako je glavni vektor svih vanjskih sila jednak nuli, jednadžba (6.33) postaje:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{0}$$

ili

$$\vec{B} = \overline{\text{konst.}}, \quad (6.36)$$

tj. vektor količine gibanja krutog tijela neće se promjeniti ako je glavni vektor vanjskih sila jednak nuli.

S obzirom na teorem o projekciji derivacije vektora ovaj se zakon može primjeniti i u slučaju da je projekcija glavnog vektora sila na neku od osi koordinatnog sustava jednaka nuli.

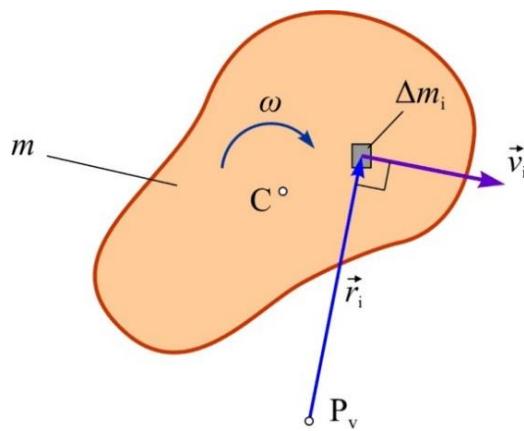
Ako je npr.  $F_{rx} = 0$ , bit će:

$$B_x = 0 .$$

#### 6.2.5. Kinetička energija

Kinetička energija djelića mase  $\Delta m_i$  krutog tijela prikazanoga na slici 6.18, koje vrši ravninsko gibanje, iznosi:

$$E_{ki} = \frac{1}{2} \Delta m_i \cdot v_i^2 .$$



Slika 6.18. Kinetička energija djelića mase pri ravninskom gibanju

Kako je poznato iz kinematike, svako se ravninsko gibanje može prikazati kao zbroj jednog translatornog i jednog rotacijskog gibanja.

Uzme li se pri tom za pol trenutni pol brzina tijela, brzina i-tog djelića bit će:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{Pv} + \vec{v}_{iPv} = \vec{v}_{iPv},$$

jer je po definiciji  $v_{Pv} = 0$ , pa je:

$$v_i^2 = \vec{v}_i \circ \vec{v}_i = v_i \cdot v_i \cdot \cos 0^\circ = v_i^2 = v_{iPv}^2 = (r_i \omega)^2.$$

Ukupna kinetička energija tijela jednaka je sumi kinetičkih energija svih djelića tijela:

$$E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i \cdot (r_i \omega)^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i \cdot r_i^2,$$

gdje je po definiciji suma:

$$\sum \Delta m_i \cdot r_i^2 = I_{Pvz}$$

jednaka momentu tromosti mase za os  $z$  kroz trenutni pol brzina.

Konačno je:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{Pvz} \omega^2, \quad (6.37)$$

tj. kinetička energija krutog tijela jednaka je polovini umnoška momenta inercije tijela za os  $z$  kroz trenutni pol brzina i kvadrata kutne brzine tijela.

U općem slučaju ravninskog gibanja položaj trenutnog pola brzina se mijenja, pa bi moment inercije  $I_{Pvz}$  trebalo izračunavati za određene položaje tijela. Međutim, primjenom Steinerova pravila može se dobiti još jedan izraz za izračunavanje kinetičke energije krutog tijela pri ravninskom gibanju. Kako je prema Steinerovu pravilu:

$$I_{Pvz} = I_{Cz} + m \cdot \overline{CP_v^2},$$

bit će:

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot \overline{CP_v^2} \omega^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2$$

te konačno zbog  $v_C = \overline{CP_v} \cdot \omega$ :

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2. \quad (6.38)$$

Iz jednadžbe (6.38) slijedi: *kinetička energija krutog tijela pri ravninskom gibanju jednaka je zbroju kinetičke energije translacije brzinom centra mase i kinetičke energije rotacije oko centra mase.*

I ovdje će vrijediti zakon o prirastu kinetičke energije:

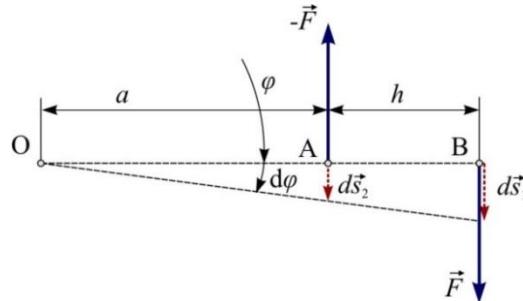
$$E_{k2} - E_{k1} = W,$$

tj. prirast kinetičke energije jednak je radu vanjskih sila.

### 6.2.5.1. Rad sprega sila

Neka na kruto tijelo djeluje spreg sila  $(\vec{F}, -\vec{F})$  momenta  $M = F \cdot h$ , kako je to prikazano na slici 6.19, i neka promatrano kruto tijelo rotira oko osi kroz točku O. Diferencijal rada sprega sila je:

$$dW = Fds_1 - Fds_2.$$



Slika 6.19. Rad sprega sila

Kako je  $ds_1 = (a + h)d\varphi$  i  $ds_2 = ad\varphi$ , slijedi:

$$dW = Fh d\varphi = M d\varphi,$$

što nakon integriranja daje:

$$W = \int_1^2 M d\varphi. \quad (6.39)$$

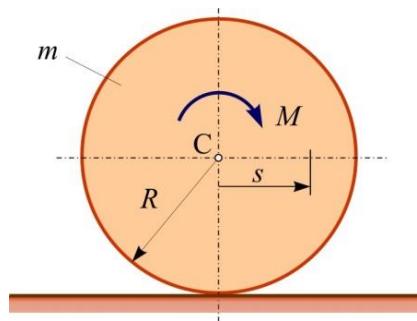
Iz jednadžbe (6.39) slijedi da će rad sprega sila u slučaju translatornog gibanja biti jednak nuli (jer je tada  $d\varphi = 0$ ).

Snaga, dana izrazom (3.25), sada se može pisati i u obliku:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega. \quad (6.40)$$

### Primjer 6.6.

Kolo mase  $m$  i polumjera  $R$  kotrlja se bez klizanja po horizontalnoj podlozi pod djelovanjem sprega sila konstantnog momenta  $M$  (sl. 6.18). Odrediti kutnu brzinu kola u trenutku kada mu centar mase prevali put  $s$ . U početnom trenutku kutna brzina kola bila je  $\omega_0$ . Koliko je kutno ubrzanje  $\varepsilon$  kola? Zadano:  $R$ ;  $s$ ;  $m$ ;  $M$ ;  $\omega_0$ .



Slika 6.20. Primjer 6.6.

*Rješenje:*

Zadatak će se riješiti s pomoću zakona o prirastu kinetičke energije:

$$E_k - E_{k0} = W, \quad (a)$$

gdje je:

$$E_k = \frac{1}{2} I_{Pvz} \omega^2 = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2 \text{ - kinetička energija u promatranom trenutku;}$$

$$E_{k0} = \frac{1}{2} I_{Pvz} \omega_0^2 = \frac{3}{4} mR^2 \omega_0^2 \text{ - kinetička energija u početnom trenutku;}$$

$$I_{Pvz} = I_{Cz} + mR^2 \text{ - moment inercije kola za os kroz trenutni pol brzina;}$$

$$W = M \cdot \varphi = M \cdot \frac{s}{R} \text{ - rad vanjskih sila.}$$

Rad vanjskih sila jednak je radu momenta  $M$  jer je rad sile trenja pri kotrljanju jednak nuli:

$$W = \int_1^2 M d\varphi = M \int_1^2 d\varphi = M \varphi = M \cdot \frac{s}{R},$$

pri čemu je kut  $\varphi$  određen iz uvjeta kotrljanja bez klizanja iz kojeg proizlazi jednakost:

$$s = R\varphi.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u početnu jednadžbu (a) slijedi:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4Ms}{3mR^3}, \quad (b)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4Ms}{3mR^3}}.$$

Deriviranjem izraza (b) po vremenu dobije se:

$$2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{4M}{3mR^2} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Budući da je

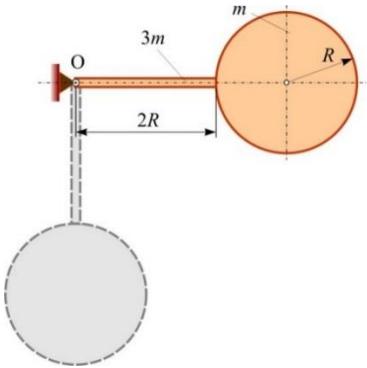
$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \text{te} \quad \frac{ds}{dt} = v_C = R\omega,$$

bit će:

$$\varepsilon = \frac{2M}{3mR^2}.$$

### Primjer 6.7.

Tijelo prikazano na slici sastavljeno je iz štapa duljine  $2R$  i mase  $3m$  te kružnog diska radijusa  $R$  i mase  $m$ .



Slika 6.21. Primjer 6.7.

Odrediti kutnu brzinu tijela u trenutku kada, nakon puštanja iz stanja mirovanja (položaj na slici 6.21), štap prođe kroz vertikalni položaj. Zadano:  $R = 0,4 \text{ m}$ .

*Rješenje:*

Primijenit će se zakon o promjeni kinetičke energije:

$$E_k - E_{k0} = W, \quad (\text{a})$$

pri čemu je kinetička energija na početku gibanja  $E_{k0} = 0$ .

Budući da je točka O stalni pol brzina prikazanog tijela, kinetička energija  $E_k$  odredit će se prema izrazu (6.36):

$$E_k = \frac{1}{2} I_{\text{pvz}} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega^2, \quad (\text{b})$$

gdje je  $I_{Oz}$  moment tromosti tijela za točku O, i jednak je:

$$I_{Oz} = I_{Oz}^s + I_{Oz}^d = 4mR^2 + 9,5mR^2 = \frac{27}{2}mR^2,$$

gdje je  $I_{Oz}^s$  moment tromosti štapa, a  $I_{Oz}^d$  moment tromosti diska za točku O:

$$I_{Oz}^s = I_{Vz}^s + \check{S}D^s = \frac{1}{12} \cdot 3m \cdot (2R)^2 + 3mR^2 = 4mR^2;$$

$$I_{Oz}^d = I_{Vz}^d + \check{S}D^d = \frac{1}{12}mR^2 + m(3R)^2 = \frac{19}{2}mR^2;$$

gdje su  $I_{Vz}^s$  i  $I_{Vz}^d$  vlastiti momenti tromosti štapa, odnosno diska, dok su  $\check{S}D^s$  i  $\check{S}D^d$  Steinerovi dodaci za moment tromosti u odnosu na točku O.

Rad vanjskih sila je:

$$W = W_G^s + W_G^d = 6mgR,$$

pri čemu su pojedini radovi:

$$W_G^s = 3mgR,$$

$$W_G^d = 3mgR.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u (a) dobije se:

$$\frac{27}{4}mR^2\omega^2 = 6mgR$$

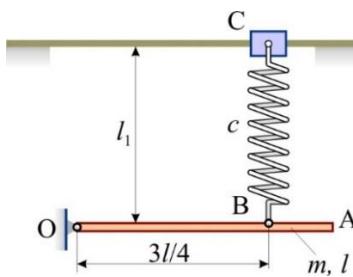
te nakon sređivanja:

$$\omega = \sqrt{\frac{24}{27} \cdot \frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{24}{27} \cdot \frac{9,81}{0,4}} = 4,67 \text{ s}^{-1}.$$

### Primjer 6.8.

Štap mase  $m$  i duljine  $l$  pridržava se u stanju mirovanja u položaju prikazanom na slici 6.22. O točku B štapa vezana je opruga konstante krutosti  $c$  koja je u prikazanom položaju nerastegnuta. Opruga je drugim krajem vezana za horizontalni klizač C. Odrediti, zanemarujući trenje, kutnu brzinu štapa pri njegovu prolasku kroz najniži položaj.

Zadano:  $m = 60 \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $c = 500 \text{ N/m}$ .



Slika 6.22. Primjer 6.8.

*Rješenje:*

Primijenit će se zakon o promjeni kinetičke energije:

$$E_k - E_{k0} = W \quad (\text{a})$$

pri čemu je kinetička energija na početku gibanja  $E_{k0} = 0$ .

Kinetička energija štapa pri prolazu kroz vertikalni položaj  $E_k$  odredit će se prema izrazu (6.36):

$$E_k = \frac{1}{2} I_{\text{pvz}} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega^2 = \frac{1}{6} ml^2 \omega^2 = \frac{60 \cdot 1^2}{6} \omega^2 = 10 \cdot \omega^2,$$

gdje je  $I_{Oz}$  moment tromosti štapa za točku O:

$$I_{Oz} = \frac{1}{3} ml^2.$$

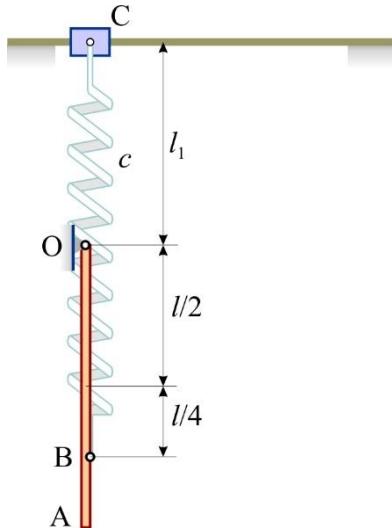
Rad vanjskih sila je zbroj radova težine štapa i sile u opruzi (sl. 6.23):

$$W = W_G + W_O = 294,3 - 140,6 = 153,7 \text{ N} \cdot \text{m},$$

pri čemu su pojedini radovi:

$$W_G = mg \cdot \frac{l}{2} = 60 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 294,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$W_O = -\frac{c}{2} (x_1^2 - x_0^2) = -\frac{c}{2} \cdot x_1^2 = -\frac{c}{2} \cdot \left(\frac{3l}{4}\right)^2 = -\frac{500}{2} \cdot 0,75^2 = -140,6 \text{ N} \cdot \text{m}.$$



Slika 6.23. Prolaz štapa kroz najniži položaj

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u (a) dobije se:

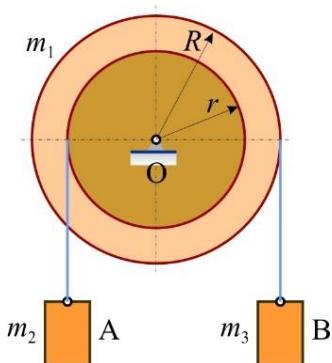
$$10 \cdot \omega^2 = 153,7 ,$$

odakle je:

$$\omega = \sqrt{\frac{153,7}{10}} = 3,92 \text{ s}^{-1}.$$



**Zadatak 6.10.** Dva bubnja radijusa  $R = 0,4 \text{ m}$  i  $r = 0,3 \text{ m}$  međusobno su povezana u jedno tijelo ukupne mase  $m_1 = 80 \text{ kg}$ . Na manji je bubanj namotano uže na čijem kraju visi teret A mase  $m_2 = 30 \text{ kg}$ , a na veći uže na čijem kraju visi teret B mase  $m_3 = 40 \text{ kg}$ . Sustav je u početnom trenutku mirovao.

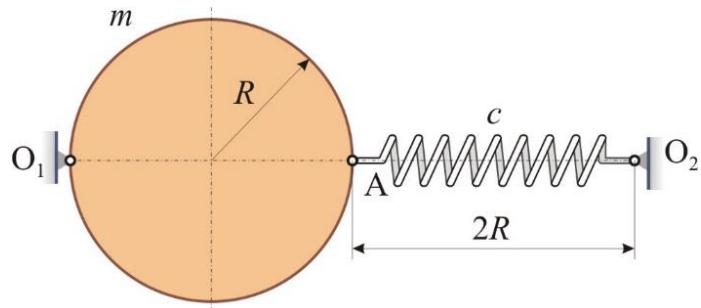


Slika Z.6.10. Zadatak Z.6.10.

Odrediti brzinu tereta A u trenutku kad se teret B spusti za 1 metar iz početnog položaja (sl. Z.6.10) ako je polumjer inercije tijela koji čine veći i manji bubanj za os kroz točku O  $i_{zO} = 0,3 \text{ m}$ .

Odgovor:  $v_A = 1,377 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 6.11.** Disk mase  $m$  i polumjera  $R$  vezan je zglobom O za zid, a zglobom A za oprugu konstante krutosti  $c$ . U početnom trenutku sustav je mirovao, a opruga je bila nerastegnuta (sl. Z.6.11).

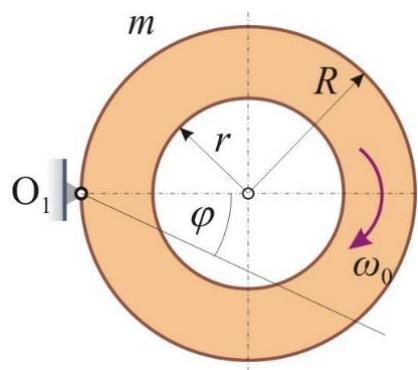


Slika Z.6.11. Zadatak Z.6.11.

Odrediti krutost opruge ako je u položaju kada je spojnica  $O_1A$  vertikalna kutna brzina diska jednaka nuli. Zadano:  $m = 25 \text{ kg}$ ,  $R = 0,25 \text{ m}$ .

Odgovor:  $c = 321,1 \text{ N/m}$ .

**Zadatak 6.12.** Odrediti kutnu brzinu diska oblika kružnog prstena (sl. Z.6.12) u položaju kada je  $\varphi_0 = 90^\circ$  ako je u položaju  $\varphi_1 = 0^\circ$  kutna brzina diska bila  $\omega_0 = 5 \text{ s}^{-1}$ . Vanjski polumjer diska je  $R = 0,6 \text{ m}$ , a unutarnji  $r = 0,25 \text{ m}$ .

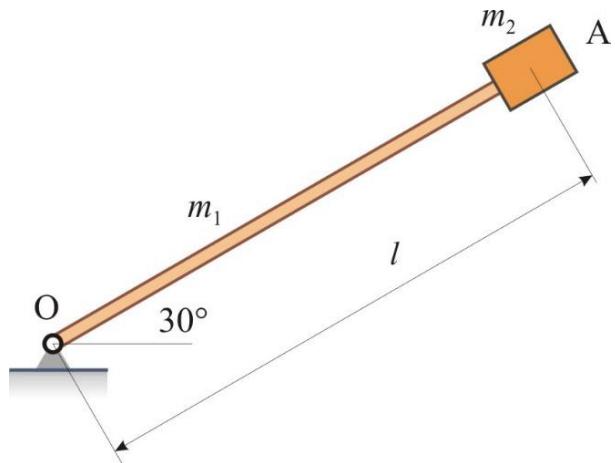


Slika Z.6.12. Zadatak Z.6.12.

Odgovor:  $\omega_1 = 3,9 \text{ s}^{-1}$ .

**Zadatak 6.13.** Štap mase  $m_1 = 10 \text{ kg}$  i duljine  $l = 1,2 \text{ m}$  na koji je čvrsto vezana čestica A mase  $m_2 = 2 \text{ kg}$  pridržava se u stanju mirovanja u položaju prikazanom na slici Z.6.13.

Odrediti brzinu čestice A pri njezinu prolazu kroz najniži položaj.

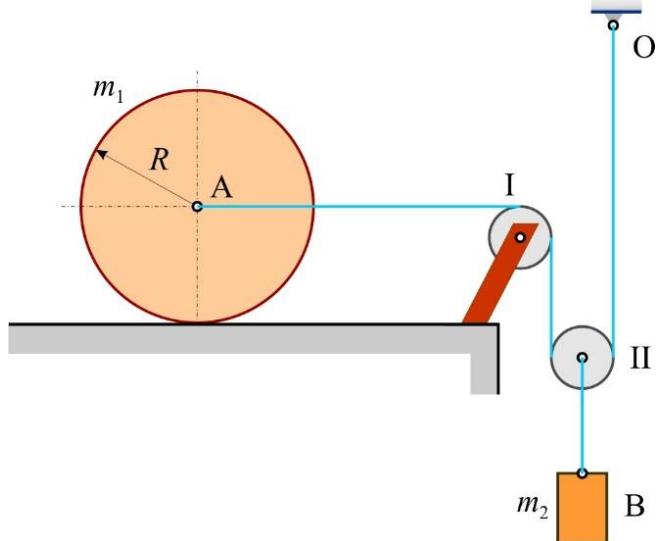


Slika Z.6.13. Zadatak Z.6.13.

Odgovor:  $v_{A1} = 6,808 \text{ m/s}$ .

**Zadatak 6.14.** Disk mase  $m_1 = 20 \text{ kg}$  i polumjera  $R = 0,4 \text{ m}$  može se kotrljati bez klizanja po horizontalnoj podlozi. O središte A diska vezano je uže koje je prebačeno preko dvaju koloturnika (I i II) zanemarivih masa, te vezano za strop u O (sl. Z.6.14). Za središte koloturnika II vezano je drugo uže na čijem kraju visi teret B mase  $m_2 = 8 \text{ kg}$ .

Odrediti kutnu brzinu diska u trenutku kad se teret B spusti za 2 metra ako je sustav u početku mirovao.

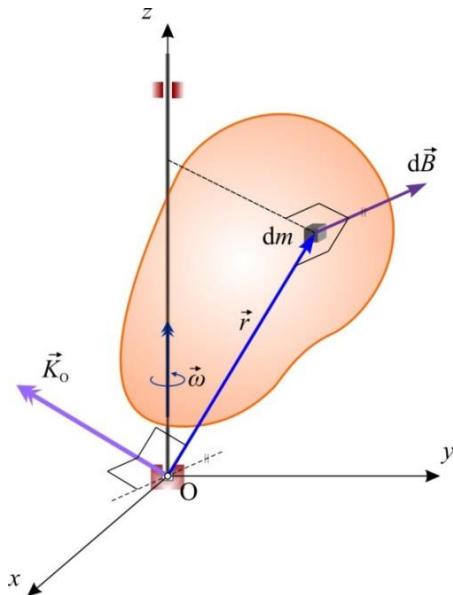


Slika Z.6.14. Zadatak Z.6.14.

Odgovor:  $\omega = 7,83 \text{ s}^{-1}$ .

### 6.2.6. Moment količine gibanja

Na slici 6.24 prikazano je kruto tijelo mase  $m$  koje vrši rotaciju oko nepomične osi  $z$ .



Slika 6.24. Moment količine gibanja za točku

Količina gibanja elementarne čestice mase  $dm$  iznosi:

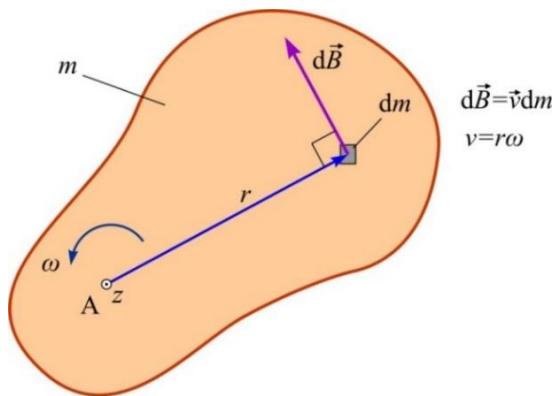
$$d\vec{B} = \vec{v} dm = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm,$$

a moment količine gibanja za točku O:

$$d\vec{K}_O = \vec{r} \times d\vec{B} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm.$$

Integracijom po ukupnoj masi tijela dobije se:

$$\vec{K}_O = \int_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm. \quad (6.41)$$



Slika 6.25. Moment količine gibanja za os

Za proučavanje ravninskog gibanja krutog tijela od praktičnog je značaja projekcija momenta količine gibanja na os rotacije. Tako je, prema slici 6.25, moment količine gibanja elementarne čestice mase  $dm$  za os  $z$ :

$$dK_{Az} = v dm \cdot r = \omega r^2 dm.$$

Nakon integriranja po cijelokupnoj masi tijela dobije se projekcija momenta količine gibanja na os  $z$  kroz točku A:

$$K_{Az} = \omega \int_m r^2 dm = I_{Az} \omega, \quad (6.42)$$

tj. projekcija momenta količine gibanja na os rotacije jednaka je umnošku iz momenta inercije promatranog tijela za tu os i kutne brzine  $\omega$ .

#### 6.2.6.1. Zakon o promjeni momenta količine gibanja za os

Deriviranjem po vremenu jednadžbe (6.42) dobije se:

$$\frac{dK_{Az}}{dt} = I_{Az} \frac{d\omega}{dt} = I_{Az} \varepsilon,$$

pri čemu je izraz na desnoj strani, prema (6.27), jednak momentu svih vanjskih sila za os rotacije. Konačno je:

$$\frac{dK_{Az}}{dt} = M_A^R. \quad (6.43)$$

Jednadžba (6.43) izražava zakon o promjeni momenta količine gibanja koji glasi: *Prva derivacija momenta količine gibanja za os po vremenu jednaka je projekciji glavnog vektora momenata vanjskih sila za tu os.*

#### 6.2.6.2. Zakon o održanju momenta količine gibanja za os

Ako je projekcija glavnog vektora momenata na neku os jednaka nuli, tada je moment količine gibanja za tu os konstantna veličina.

Zbog  $M^R = 0$  bit će

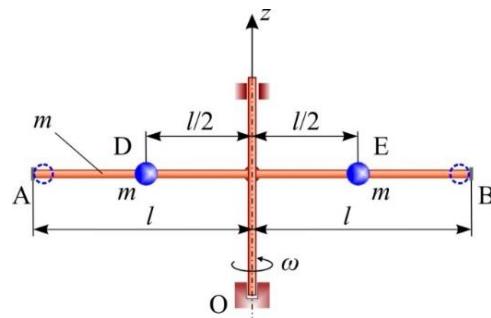
$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = 0,$$

odnosno:

$$K_{Oz} = \text{konst.}$$

#### Primjer 6.9.

Štap mase  $m$  i duljine  $2l$  čvrsto je vezan za osovinu koja rotira oko vertikalne osi kutnom brzinom  $\omega$ . Na štalu su smještene čestice D i E jednakih masa  $m$  (sl. 6.26).



Slika 6.26. Primjer 6.9.

Nakon ispuštanja iz početnog položaja čestice se zaustave na krajevima štapa AB. Odrediti kutnu brzinu sustava u tom položaju čestica. Kolika je promjena kinetičke energije sustava?

Zadano:  $m$ ;  $l$ ;  $\omega$ .

*Rješenje:*

Budući da je moment svih vanjskih sila za os z jednak nuli ( $M_z^R = 0$ ), primijenit će se zakon o održanju momenta količine gibanja za os, pa je:

$$I_z \omega = I_{1z} \omega_1 = \text{konst.}, \quad (\text{a})$$

gdje je:

$$I_z = \frac{1}{12} m (2l)^2 + 2m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{10}{12} ml^2$$

$$I_{1z} = \frac{1}{12} m (2l)^2 + 2ml^2 = \frac{28}{12} ml^2.$$

Iz jednakosti (a) slijedi:

$$\omega_1 = \frac{I_z}{I_{1z}} \omega = \frac{5}{14} \omega.$$

Promjena kinetičke energije iznosi:

$$\Delta E_k = E_k - E_{k1} = \frac{5}{12} ml^2 \omega^2 - \frac{25}{168} ml^2 \omega^2 = \frac{45}{168} ml^2 \omega^2,$$

gdje je:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{5}{12} ml^2 \omega^2,$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} I_{1z} \omega_1^2 = \frac{25}{168} ml^2 \omega^2.$$



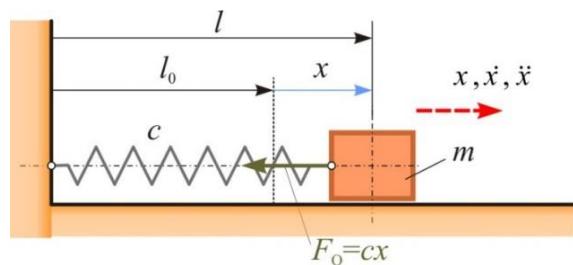
# 7. ODABRANA POGLAVLJA DINAMIKE

## 7.1. VIBRACIJE S JEDNIM STUPNJEM SLOBODE

Teorija vibracija (oscilacija s malom amplitudom) predstavlja osnovu čitavog niza područja u fizici (mehanika, akustika, radiotehnika, ...). Iako su različite fizičke prirode, ipak se pokoravaju istim osnovnim zakonima. Stoga je izučavanje mehaničkih vibracija korisno ne samo zbog važnosti mjesto koje zauzimaju u tehnici nego i zbog lakšeg i boljeg razumijevanja takvih pojava u drugim područjima.

### 7.1.1. Slobodne harmonijske vibracije

Promotrit će se gibanje čestice mase  $m$  po glatkoj horizontalnoj podlozi. Neka je čestica za zid vezana oprugom konstantne krutosti  $c$ , kako je to prikazano na slici 7.1.



Slika 7.1. Slobodne harmonijske vibracije

Čestica se giba pod djelovanjem elastične sile u opruzi, koja je proporcionalna produljenju opruge. Produljenjem opruge  $x$  naziva se razlika trenutačne duljine opruge i njene duljine u neopterećenom stanju  $x = l - l_0$ . Sila u opruzi je:

$$F_o = cx. \quad (7.1)$$

Diferencijalna jednadžba gibanja čestice glasi:

$$m\ddot{x} = F_o = -cx,$$

što se može napisati i u obliku:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (7.2)$$

gdje je:

$$\omega^2 = \frac{c}{m}$$

konstanta koja ne ovisi o uvjetima gibanja.

Diferencijalna jednadžba (7.2) jest homogena diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima i zove se *diferencijalna jednadžba slobodnih harmonijskih vibracija*.

Rješenje ove jednadžbe je:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (7.3)$$

gdje su  $C_1$  i  $C_2$  konstante integracije.

Rješenje (7.3) može se prikazati i u obliku:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (7.4)$$

ako se umjesto konstanta integracije  $C_1$  i  $C_2$  uvedu nove,  $A$  i  $\alpha$ , tako da vrijedi:

$$C_1 = A \cos \alpha; \quad C_2 = A \sin \alpha.$$

Deriviranjem jednadžbe (7.4) po vremenu dobije se brzina čestica:

$$v_x = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (7.5)$$

Vibracije koje vrši čestica prema zakonu (7.4) nazivaju se *slobodne harmonijske vibracije*. Kinematicke karakteristike takva gibanja dane su u dijelu *Kinematika čestice* u primjeru 2.19 (str. 55) za kut  $\alpha = 0$ .

Konstanta  $A$  naziva se *amplituda vibracija*, a veličina  $\varphi = \omega t + \alpha$  zove se *faza vibracija*.

Veličina  $\omega$  naziva se *vlastita kružna frekvencija vibracija*, a vremenski interval  $T$ , za koji točka ponovno dođe u početni položaj, jest *period vibracija*. Za jedan period vibracija faza se promijeni za  $2\pi$ , tj.  $\omega T = 2\pi$ , odnosno:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7.6)$$

Veličina  $f$ , koja je jednaka recipročnoj vrijednosti perioda vibracija, naziva se *frekvencija vibracija*:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (7.7)$$

Konstante integracije  $A$  i  $\alpha$  određuju se iz početnih uvjeta. Neka su početni uvjeti za  $x = x_0$  i  $\dot{x} = \dot{x}_0$ . Iz jednadžba (7.4) i (7.5) dobije se:

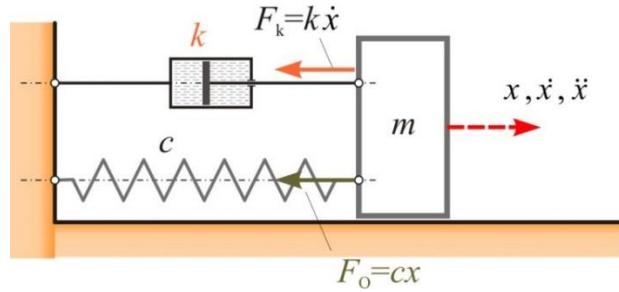
$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}; \quad \tan \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}. \quad (7.8)$$

### 7.1.2. Prigušene vibracije

Ovdje će se proučiti utjecaj viskoznog prigušivača na vibracije, kako je to prikazano modelom na slici 7.2.

Prepostaviti će se također da je sila otpora prigušivača proporcionalna brzini čestice i suprotno usmjerena. Faktor proporcionalnosti naziva se koeficijentom prigušenja  $k$  (kg/s), pa je:

$$\vec{F}_w = -k \cdot \vec{v}.$$



Slika 7.2. Prigušene vibracije

Diferencijalna jednadžba gibanja sada glasi:

$$m\ddot{x} = -cx - k\dot{x}, \quad (7.9)$$

koja se, nakon dijeljenja s \$m\$, može napisati u obliku:

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (7.10)$$

gdje su uvedene oznake:

$$\omega^2 = \frac{c}{m}; \quad 2p = \frac{k}{m}.$$

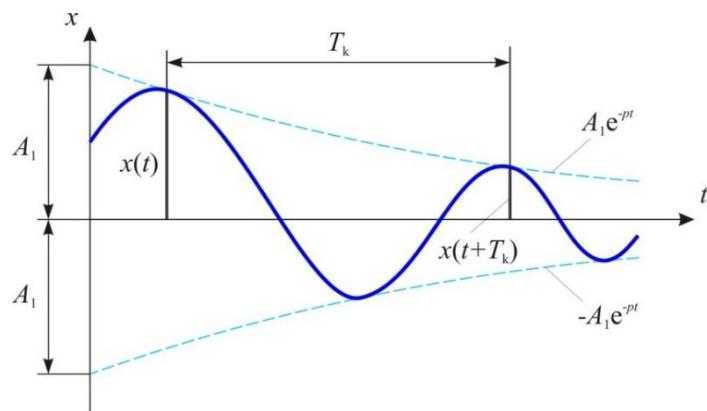
Jednadžba (7.11) jest *diferencijalna jednadžba prigušenih vibracija*. Rješenje ove diferencijalne jednadžbe, uz uvjet \$\omega > p\$, jest:

$$x = A_1 e^{-pt} \sin(\omega_k t + \alpha_1), \quad (7.11)$$

gdje je:

$$\omega_k = \sqrt{\omega^2 - p^2}. \quad (7.12)$$

Vibracije koje se vrše prema zakonu (7.11) nazivaju se *prigušene vibracije*. Dijagram tih vibracija prikazan je na slici 7.3 i to između krivulja \$A\_1 e^{-pt}\$ i \$-A\_1 e^{-pt}\$, s obzirom na to da je vrijednost sinusne funkcije između 1 i -1.



Slika 7.3. Dijagram prigušenih vibracija

Sa slike je vidljivo da ove vibracije nisu periodične premda imaju svojstvo nekakva ponavljanja, pa se i ovdje može govoriti o vremenu potrebnom da se izvede jedan ciklus. Iz dobivenih jednadžba to vrijeme je:

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - p^2}}, \quad (7.13)$$

a naziva se *period prigušenih vibracija*.

Omjer između amplituda vibracija u trenutku  $t$  i  $t_1 = t + T_k$  zove se *dekrement vibracija*. Budući da je

$$x(t) = A_1 e^{-pt} \sin(\omega_k t + \alpha_1) \quad \text{i} \quad x(t + T_k) = A_1 e^{-p(t+T_k)} \sin(\omega_k t + \omega_k T_k + \alpha_1),$$

bit će dekrement vibracija:

$$\frac{x(t + T_k)}{x(t)} = e^{-pT_k} \quad (7.14)$$

jer je, prema definiciji,  $\omega_k T_k = 2\pi$  te

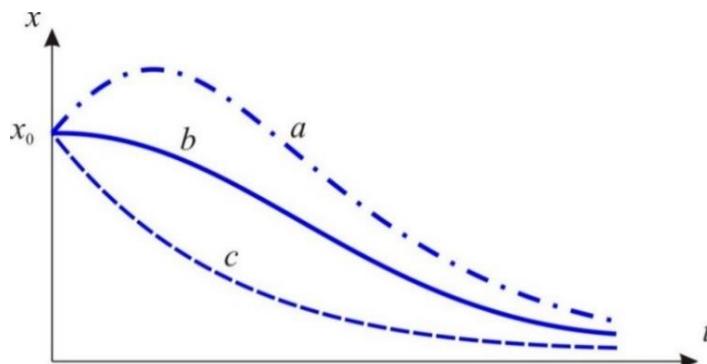
$$\sin(\omega_k t + \alpha_1) = \sin(\omega_k t + \alpha_1 + 2\pi).$$

Prirodni logaritam dekrementa vibracija jest *logaritamski dekrement*, i jednak je:

$$\delta = -pT_k. \quad (7.15)$$

Gore rečeno vrijedi ako je  $\omega > p$ . Ako je  $p > \omega$ , odnosno  $k > \sqrt{2c}$ , rješenje diferencijalne jednadžbe (7.10) neće sadržavati trigonometrijske funkcije; gibanje točke neće biti periodično, nego će se ona pod utjecajem sile elastičnosti postupno približavati položaju ravnoteže. Dijagrami gibanja u funkciji vremena za različite početne uvjete prikazani su na slici 7.4. i to:

- krivulja  $a$  za  $x = x_0$  i  $x = x_0 > 0$ ;
- krivulja  $b$  za  $x = x_0$  i  $x = x_0 = 0$ ;
- krivulja  $c$  za  $x = x_0$  i  $x = x_0 < 0$ .



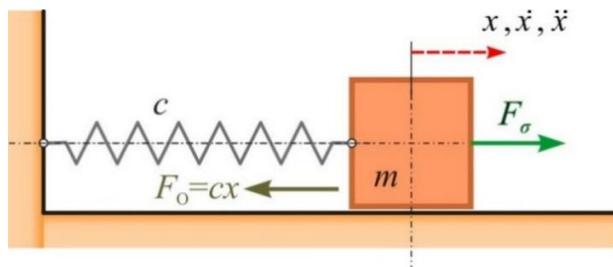
Slika 7.4. Dijagram puta i vremena

### 7.1.3. Prisilne vibracije bez prigušenja. Rezonancija

Posebno važno mjesto u proučavanju vibracija predstavlja slučaj kada na česticu osim sile elastičnosti djeluje i periodična sila  $F_\sigma$ , kojoj pravac pada u pravac gibanja čestice (sl. 7.5), a intenzitet joj se mijenja prema zakonu:

$$F_\sigma = F_0 \cdot \sin \sigma t. \quad (7.16)$$

Ta sila naziva se *poremećajna sila*; vibracije koje nastaju pod djelovanjem te sile jesu *prisilne vibracije*, dok se veličina  $\sigma$  zove *frekvencija poremećajne sile* ili *frekvencija prisilnih vibracija*.



Slika 7.5. Prisilne vibracije bez prigušenja

Poremećajna sila može se u općem slučaju mijenjati po proizvoljnom zakonu, no ovdje će se pobliže razmotriti poremećajna sila koja se mijenja prema (7.16) i još se naziva *harmonijska poremećajna sila*.

Diferencijalna jednadžba gibanja čestice koja se giba pod djelovanjem sile elastičnosti i poremećajne sile glasi:

$$m\ddot{x} = -cx + F_0 \cdot \sin \sigma t$$

ili nakon dijeljenja s  $m$  i uvođenja oznake  $h = F_0 / m$ :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \cdot \sin \sigma t. \quad (7.17)$$

Jednadžba (7.17) jest *diferencijalna jednadžba prisilnih vibracija bez prigušenja*, a po svom karakteru to je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Kao što je poznato iz teorije diferencijalnih jednadžba, rješenje ove jednadžbe dobije se kao zbroj rješenja homogenog dijela jednadžbe  $x_h$ , tj. rješenje jednadžbe (7.10) u obliku (7.11), i partikularnog integrala  $x_p$  nehomogene jednadžbe (7.17).

Uz uvjet  $\sigma \neq \omega$ , partikularno rješenje može se pretpostaviti u obliku:

$$x_p = C \cdot \sin \sigma t,$$

gdje je  $C$  konstantna veličina koja se dobije iz uvjeta da gornje partikularno rješenje zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (7.17). Kako je

$$\dot{x} = C\sigma \cdot \sin \sigma t, \quad \text{te} \quad \ddot{x} = -C\sigma^2 \cdot \sin \sigma t,$$

bit će:

$$-C\sigma^2 \cdot \sin \sigma t + C \cdot \sin \sigma t = h \cdot \sin \sigma t ,$$

odakle je:

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \sigma^2} . \quad (7.18)$$

Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe je:

$$x_p = \frac{h}{\omega^2 - \sigma^2} \cdot \sin \sigma t , \quad (7.19)$$

dok je njeno opće rješenje:

$$x = x_h + x_p = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) + \frac{h}{\omega^2 - \sigma^2} \cdot \sin \sigma t . \quad (7.20)$$

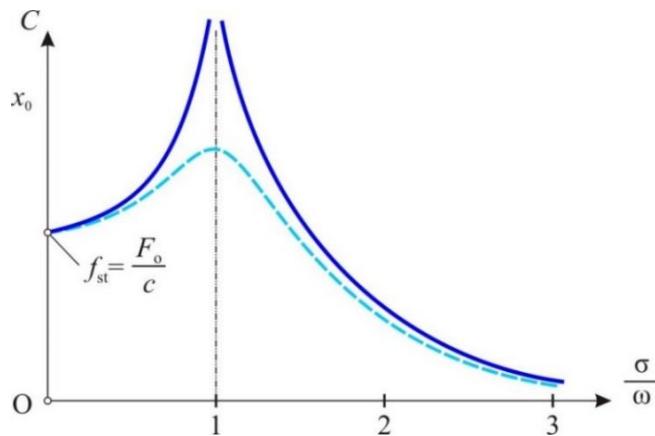
Konstante integracije  $A$  i  $\alpha$  određuju se iz početnih uvjeta.

Iz rješenja (7.20) vidljivo je da su vibracije čestice sastavljene iz dva dijela:

- a) vibracija s amplitudom  $A$ , koja ovisi o početnim uvjetima, i frekvencijom  $\omega$ , a zovu se *vlastite vibracije*;
- b) vibracija s amplitudom  $C$ , koja nije ovisna o početnim uvjetima, i frekvencije  $\sigma$ , a koje se zovu *prisilne vibracije*.

S obzirom na to da se u realnim konstrukcijama, u većoj ili manjoj mjeri, uvijek javlja nekakav otpor (prigušenje), to se vlastite vibracije vrlo brzo priguše (amortiziraju). Stoga pri proučavanju primarni značaj imaju prisilne vibracije.

Frekvencija prisilnih vibracija jednaka je frekvenciji poremećajne sile, dok amplituda  $C$ , prema (7.18), ovisi i o frekvenciji vlastitih vibracija  $\omega$  i o frekvenciji prisilnih  $\sigma$ . Dijagram te ovisnosti prikazan je na slici 7.6. Veličina  $f_{st} = F_0/c$  je staticki pomak čestice zbog djelovanja sile  $F_0$ .



Slika 7.6. Ovisnost amplitude prisilnih vibracija o omjeru  $\sigma/\omega$

Iz dijagrama, kao i iz izraza (7.20), vidljivo je da se za različite odnose  $\sigma$  i  $\omega$  mogu dobiti prisilne vibracije s različitim amplitudama.

Tako se za vrijednost  $\sigma/\omega$  dobije amplituda veličine

$$\frac{h}{\omega^2} = \frac{F_0}{C} \quad (7.21)$$

što je staticki pomak čestice zbog djelovanja sile  $F_0$ ; za  $\sigma/\omega$  amplituda teži nuli, dok u slučaju  $\sigma = \omega$ , odnosno kada je frekvencija prisilnih jednaka frekvenciji vlastitih vibracija, amplituda  $C$  neograničeno raste. Ta pojava naziva se *rezonancija*.

U mnogim inženjerskim konstrukcijama pojava rezonancije nepoželjna je i treba je izbjegći. Obično se teži odnosu  $\sigma/\omega$ , kada veličina amplitude prisilnih vibracija teži nuli.

Prisilne vibracije s prigušenjem ovdje se neće proučavati, no u svakom slučaju valja napomenuti da će pojava otpora gibanju smanjiti amplitudu  $C$  prisilnih vibracija, kako je to prikazano isprekidanom krivuljom na slici 7.6.

## 7.2. OSNOVE ANALITIČKE MEHANIKE

### 7.2.1. UVOD

Metode koje su proučavane u statici nazivaju se metodama geometrijske statike. Pri korištenju tih metoda osnovni princip jest oslobođanje tijela od veza i postavljanje odgovarajućih uvjeta ravnoteže. U slučaju sustava tijela taj se princip mora primjeniti za svako tijelo, što za velik broj tijela u sustavu dovodi do velikog broja jednadžba koje treba postaviti i riješiti.

Ovdje će se, s pomoću spoznaja iz kinematike i dinamike, prikazati metoda koja omogućuje određivanje uvjeta ravnoteže bilo kojeg mehaničkog sustava ne uzimajući u obzir reakcije veza. Veze se, naime, uzimaju u obzir preko pomaka točaka tijela koje im te veze omogućuju. Takvi pomaci nazivaju se u mehanici virtualnim pomacima.

Virtualni pomaci moraju zadovoljiti sljedeća dva uvjeta:

- 1) pomaci su beskonačno mali,
- 2) pomaci su takvi da se ne narušavaju veze kojima je promatrani sustav podvrgnut.

Prvi je uvjet postavljen zbog toga što kod velikih pomaka sustav može prijeći u drugi položaj u kojem se uvjeti ravnoteže mogu promijeniti. Drugi uvjet „sprječava“ da se naruše veze jer bi se inače dobio neki novi sustav.

Prema tome, virtualnim pomacima sustava naziva se skup beskonačno malih pomaka točaka sustava, koje, u promatranom trenutku vremena, dopuštaju veze sustava.

Virtualni pomak neke točke označava se s  $\delta\vec{r}$ , pri čemu simbol  $\delta$  predstavlja operator variranja. Kaže se da je  $\delta\vec{r}$  varijacija od  $\vec{r}$ .

Operator variranja  $\delta$  razlikuje se od operatorka diferenciranja  $d$  po tome što je argument funkcije pri variranju konstantan (u promatranom slučaju to je vrijeme  $t$ ).

Skalarni produkt iz sile  $\vec{F}$  koja djeluje na neku točku promatranog sustava i virtualnog pomaka  $\delta\vec{r}$  te točke jest virtualni rad:

$$\delta W = \vec{F} \circ \delta\vec{r} \quad (7.22)$$

ili u analitičkom obliku:

$$\delta W = F_x \delta_x + F_y \delta_y + F_z \delta_z. \quad (7.23)$$

#### 7.2.1.1. Idealne veze

Ako je veza na nekom mjestu glatka površina ili glatki oslonac (oslonac bez trenja), onda je reakcija takve površine usmjerena duž normale na površinu i pri bilo kojem mogućem pomaku rad te reakcije bit će jednak nuli:

$$\delta W^{F_N} = \vec{F}_N \circ \delta\vec{r} = 0,$$

jer su vektori  $\vec{F}_N$  i  $\delta\vec{r}$  međusobno okomiti.

Ako su sve veze u sustavu takve, bit će:

$$\sum \delta W_i^{F_N} = 0. \quad (7.24)$$

Veze kod kojih je suma virtualnih radova svih reakcija veza jednaka nuli nazivaju se idealne veze. U te veze spadaju sve veze bez trenja kao i veza s trenjem kad se tijelo kotrlja po toj vezi.

#### 7.2.2. Princip virtualnih radova. Opća jednadžba statike

Neka se sustav čestica nalazi u ravnoteži pod djelovanjem sila koje na njega djeluju. Za i-tu česticu može se pisati:

$$\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^{F_N} + \vec{S}_i^u = \vec{0}, \quad (7.25)$$

gdje je:

$\vec{F}_i^a$  - rezultanta svih vanjskih sila koje djeluju na česticu;

$\vec{F}_i^{F_N}$  - rezultanta vanjskih pasivnih sila (reakcija veza);

$\vec{S}_i^u$  - rezultanta svih unutarnjih sila na i-tu česticu.

Skalarnim množenjem jednadžbe (7.25) s virtualnim (mogućim) pomakom  $\delta\vec{r}_i$  i sumiranjem po svim česticama sustava dobije se:

$$\sum \delta W_i^a + \sum \delta W_i^{F_N} + \sum \delta W_i^u = 0. \quad (7.26)$$

Treći član na lijevoj strani jednadžbe (7.26) jednak je nuli što slijedi iz svojstava unutarnjih sila. U slučaju idealnih veza, kako je ranije pokazano, bit će i drugi član te jednadžbe jednak nuli, pa ostaje:

$$\sum \delta W_i^a = 0. \quad (7.27)$$

Jednadžba (7.27) izražava princip virtualnih radova, koji glasi: ako se sustav koji je podvrgnut idealnim vezama nalazi u ravnoteži, onda je suma virtualnih radova svih aktivnih sila koje na njega djeluju jednaka nuli. Vrijedi i obrat, tj. ako sve aktivne sile koje djeluju na promatrani sustav podvrgnut idealnim vezama zadovoljavaju jednadžbu (7.27), tada se promatrani sustav nalazi u ravnoteži.

Jednadžba (7.27) naziva se opća jednadžba statike, a može se zapisati i u analitičkom obliku:

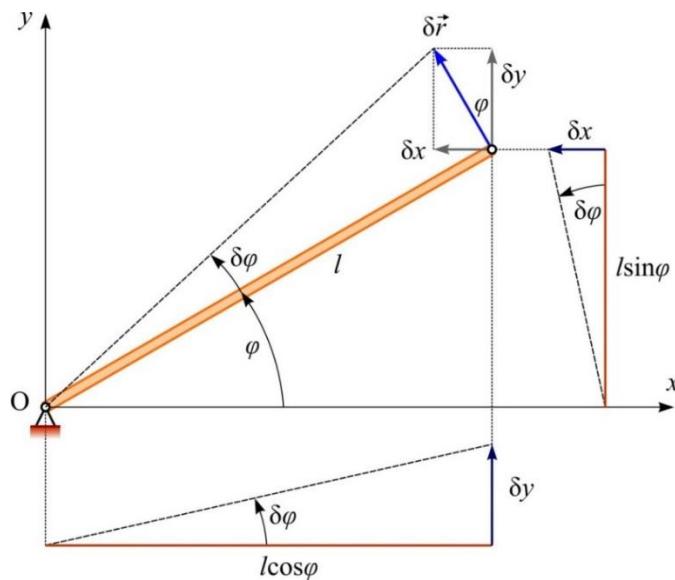
$$\sum (F_{ix}\delta_{ix} + F_{iy}\delta_{iy} + F_{iz}\delta_{iz}) = 0. \quad (7.28)$$

Ako promatrani sustav ima jedan stupanj slobode gibanja, jednadžba (7.27) ili (7.28) odmah daje uvjete ravnoteže sustava. Ako sustav ima više stupnjeva slobode gibanja, jednadžbe (7.27) ili (7.28) trebaju se postaviti posebno za svaki od nezavisnih pomaka sustava. Da bi se općom jednadžbom statike riješio statički određen zadatak, potrebno je ukloniti jednu od veza i njeno djelovanje zamijeniti odgovarajućom reakcijom veze. Na taj način dobije se sustav s jednim stupnjem slobode, a obično je ta reakcija veze ujedno i tražena veličina.

Korištenjem principa virtualnih radova zadaci se rješavaju geometrijskim i analitičkim metodama.

Pri primjeni geometrijske metode prvo se odrede trenutni polovi brzina svih članova sustava, prepostavlji se jedan mogući pomak, a zatim se crtaju planovi svih pomaka. Radi preglednosti obično se posebno crtaju vertikalni, a posebno horizontalni pomaci. Naime, projekcija virtualnog pomaka  $\delta\vec{r}$  točke A štapa OA na os  $x$  (sl. 7.7) može se dobiti i na način da se projekcija štapa na os  $y$  zakrene za kut

$$\delta\varphi = \frac{\delta r}{l}.$$



Slika 7.7. Projekcije virtualnog pomaka

Slično vrijedi i za pomak  $\delta y$ :

$$\delta x = \delta r \cdot \sin \varphi = l \delta \varphi \cdot \sin \varphi = l_y \delta \varphi,$$

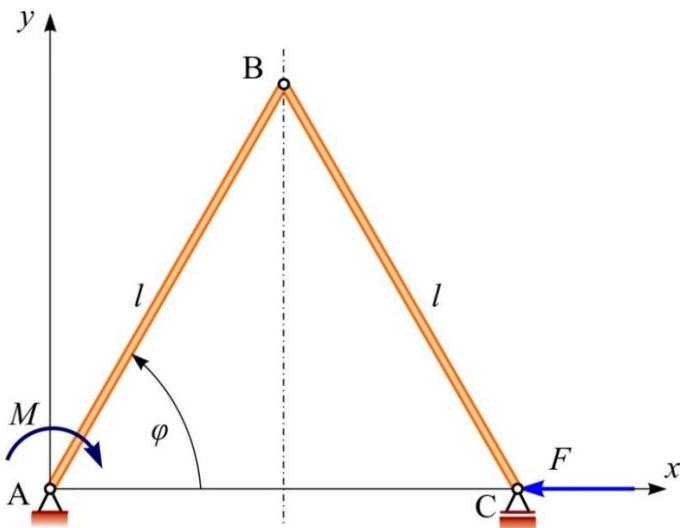
$$\delta y = \delta r \cdot \cos \varphi = l \delta \varphi \cdot \cos \varphi = l_x \delta \varphi.$$

Pri primjeni analitičke metode prvo se odabere koordinatni sustav vezan za nepomičnu točku, a zatim se koordinate svih karakterističnih točaka sustava prikažu s pomoću nezavisnih parametara, nakon čega se postupkom variranja (koji u potpunosti odgovara postupku diferenciranja) odrede virtualni pomaci karakterističnih točaka.

### Primjer 7.1.

Sustav na slici 7.8 sastavljen je od štapova AB i BC jednakih duljina  $l$  i zanemarivih masa. Odrediti kut  $\varphi$  za koji će zadani sustav biti u stanju ravnoteže pod djelovanjem sile  $F$  i momenta  $M$ . Zadatak riješiti primjenom principa virtualnih radova.

Zadano:  $F ; M ; l$ .



Slika 7.8. Primjer 7.1.

*Rješenje:*

Promatrani sustav ima jedan stupanj slobode gibanja, a zadatak će se riješiti geometrijskom i analitičkom metodom.

a) Geometrijska metoda:

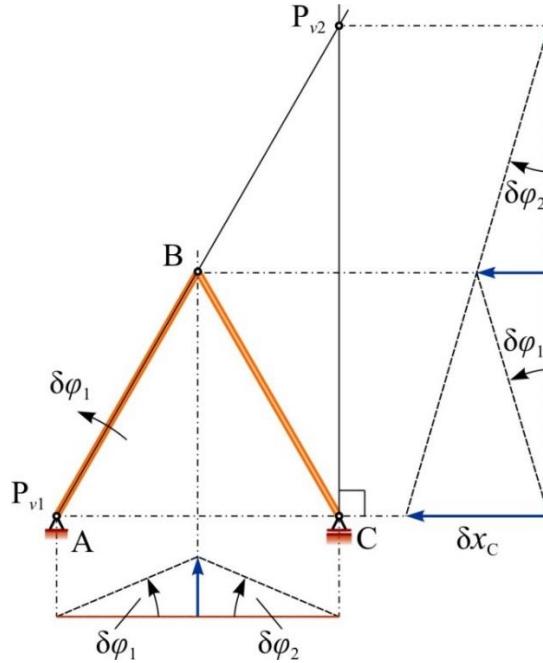
Na slici 7.9 određeni su planovi horizontalnih i vertikalnih pomaka i to na način da su najprije određeni trenutni polovi brzina članova AB i BC, a zatim je članu AB narinut virtualni zakret  $\delta\varphi_1$ . Točka B zajednička je obama štapovima te mora imati jednak pomak na jednom i drugom štalu.

Sa slike je:

$$\delta y_B = l \cdot \cos \varphi \cdot \delta\varphi_1 = l \cdot \cos \varphi \cdot \delta\varphi_2.$$

Opća jednadžba statike za promatrani sustav glasi:

$$\delta W_N + \delta W_F = -M \delta\varphi + F \delta x_c = 0.$$



Slika 7.9. Primjer 7.1: plan virtualnih pomaka.

Kako je  $\delta x_c = 2l \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi_2$ , te nakon dijeljenja s  $\delta\varphi$ , slijedi:

$$\sin \varphi = \frac{M}{2Fl} \quad \text{ili} \quad \varphi = \arcsin \frac{M}{2Fl}.$$

b) Analitička metoda:

Odabran je nepomični koordinatni sustav Axy s ishodištem u točki A. Za nezavisni parametar odabran je kut  $\varphi$ .

Pozitivan smisao prirasta tog kuta  $\delta\varphi$  u smjeru je suprotnom od smjera kazaljke na satu. Koordinata  $x_c$  hvatišta sile  $F$  je:

$$x_c = 2l \cdot \cos \varphi,$$

a njena varijacija je:

$$\delta x_c = -2l \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi.$$

Suma virtualnih radova svih vanjskih sila mora biti jednaka nuli:

$$-M \delta\varphi + (-F) \cdot (2l \cdot \sin \varphi \cdot \delta\varphi) = 0,$$

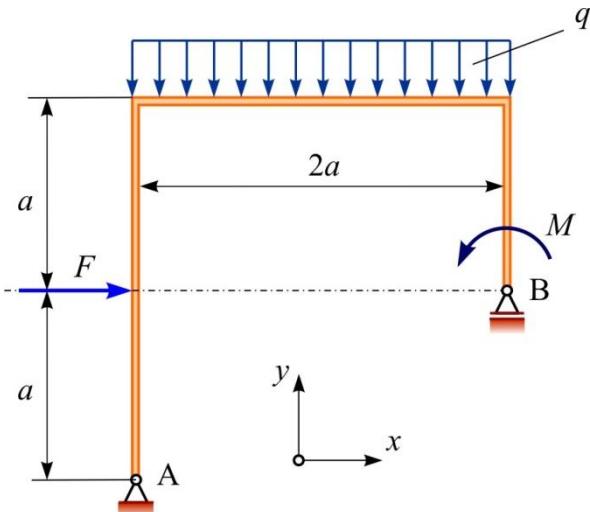
odakle je:

$$\sin \varphi = \frac{M}{2Fl}, \quad \varphi = \arcsin \frac{M}{2Fl}.$$

### Primjer 7.2.

Odrediti komponentu  $F_{Ay}$  reakcije u osloncu A okvirnog nosača zadanog i opterećenog prema slici 7.10.

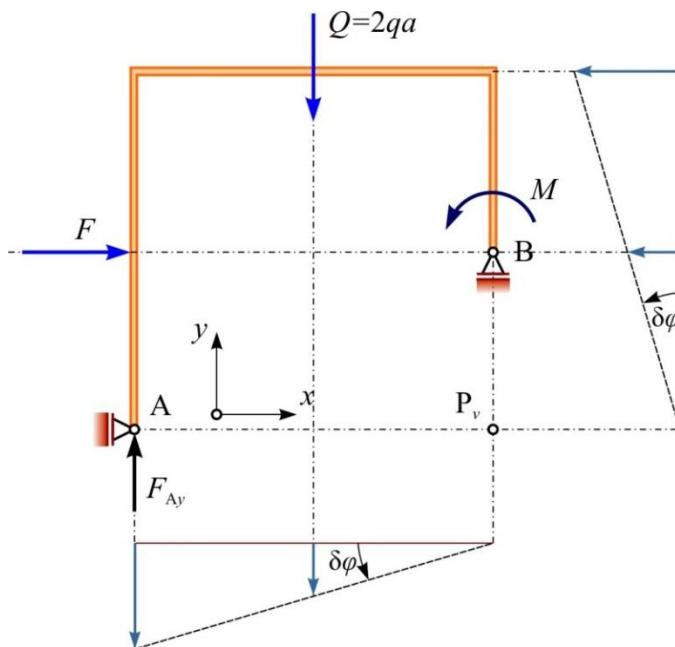
Zadano:  $F$ ;  $a$ ;  $q = F/a$ ;  $M = F \cdot a$ .



Slika 7.10. Primjer 7.2.

*Rješenje:*

Budući da je sustav na slici statički određen i nema mogućih pomaka takva sustava, mora se oslobooditi jedna veza i dodati odgovarajuća reakcija oslobođene veze. Odabire se upravo ona veza čija se reakcija traži (sl. 7.11). Nakon određivanja trenutnog pola brzina konstruirani su planovi vertikalnih i horizontalnih pomaka.



Slika 7.11. Primjer 7.2: plan virtualnih pomaka.

Opća jednadžba statike glasi:

$$\delta W = 0$$

ili

$$-Fa\delta\varphi + Qa\delta\varphi + M\delta\varphi - F_{Ay}2a\delta\varphi = 0.$$

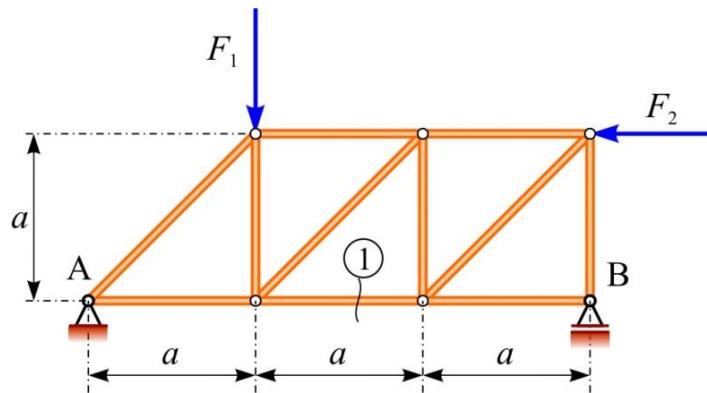
Dijeljenjem te jednadžbe s  $a\delta\varphi$  i uvrštanjem zadanih vrijednosti dobije se:

$$F_{Ay} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{M}{a} + 2qa - F \right) = F.$$

### Primjer 7.3.

Odrediti silu u štalu 1 rešetkaste konstrukcije zadane i opterećene prema slici 7.12.

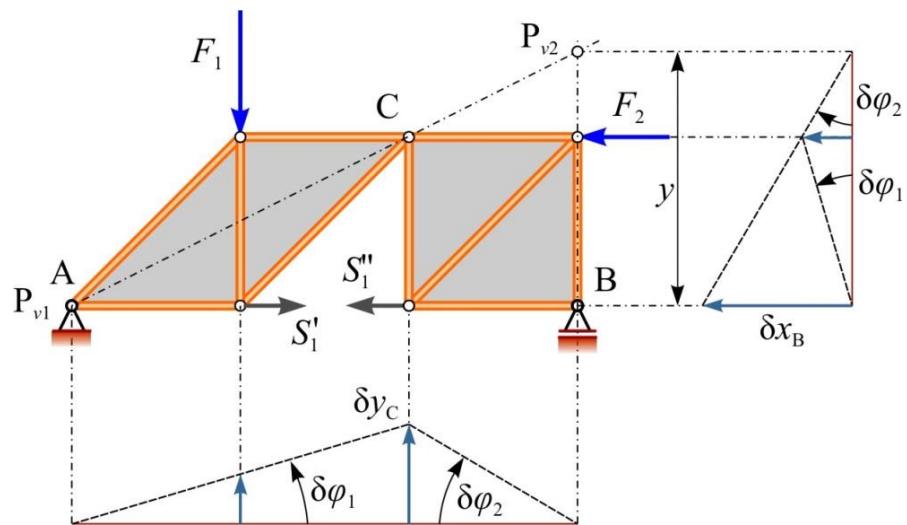
Zadano:  $a$ ;  $F_1 = 14 \text{ kN}$ ;  $F_2 = 5 \text{ kN}$ .



Slika 7.12. Primjer 7.3.

Rješenje:

Uklanjanjem štapa 1 i dodavanjem sila  $S'_1$  i  $S''_1$  u čvorovima u kojima je štap bio vezan, dobije se mehanizam od dva člana i s jednim stupnjem slobode gibanja, kako je to prikazano na slici 7.13.



Slika 7.13. Primjer 7.3: plan virtualnih pomaka.

Sila je označena s ' i " da bi se znalo koja od njih djeluje na član 1 ('), a koja na član 2 (") mehanizma.

Nakon određivanja trenutnih polova brzina  $P_{v1}$  i  $P_{v2}$ , članu 1 narinut je virtualni zakret  $\delta\varphi_1$  u smjeru prema slici, a zatim su konstruirani planovi pomaka. Koordinata  $y$  pola  $P_{v2}$  određena je iz sličnosti trokuta:

$$y : 3a = a : 2a$$

$$y = \frac{3}{2}a,$$

a veza između virtualnih zakreta iz vertikalnog pomaka točke C:

$$\delta y_c = 2a\delta\varphi_1 = a\delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_1.$$

Opća jednadžba statike za sustav na slici 7.13 glasi:

$$-F_1 a \delta\varphi_1 + S'_1 \cdot 0 + S''_1 \cdot y \delta\varphi_2 + F_2 (y - a) \delta\varphi_2 = 0,$$

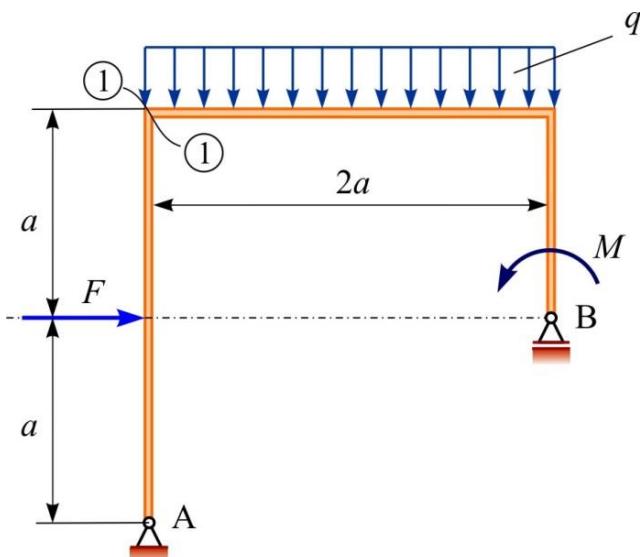
iz koje jednakosti, nakon zamjene  $\delta\varphi_2$  s  $2\delta\varphi_1$  i dijeljenjem s  $a\delta\varphi_1$ , slijedi:

$$S'_1 = S''_1 = \frac{F_1 - F_2}{3} = 3 \text{ kN}.$$

#### Primjer 7.4.

Odrediti moment savijanja u presjeku 1-1 okvirnog nosača zadanog i opterećenog prema slici 7.14.

Zadano:  $a$ ;  $F$ ;  $q = F/a$ ;  $M = F \cdot a$ .



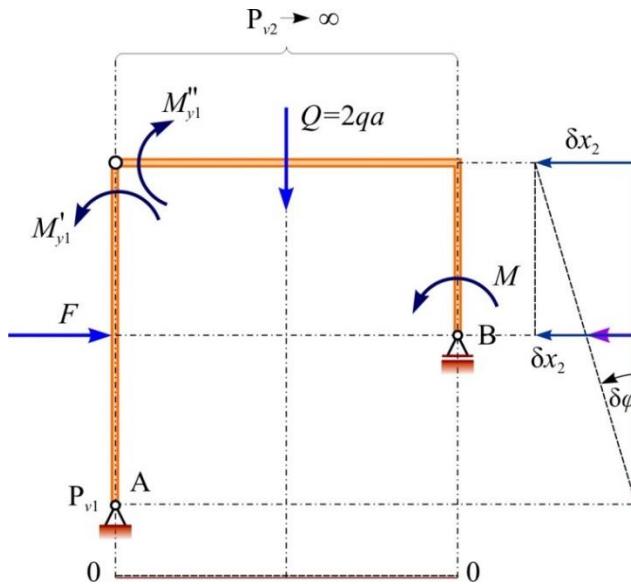
Slika 7.14. Primjer 7.4.

Rješenje:

U presjeku 1-1 zadanog okvira kruta veza zamijenjena je zglobnom. Stoga je u promatranom presjeku dodana odgovarajuća unutarnja sila koja zamjenjuje oslobođenu vezu - moment savijanja  $M'_y$  i  $M''_y$ .

Oslobađanjem te veze dobiven je mehanizam s jednim stupnjem slobode i s polovima brzina članova  $P_{v1}$  i  $P_{v2}$ .

Pol brzina člana 2 je u beskonačnosti pa se zaključuje da će taj član samo translatirati. Nakon što je članu 1 narinut virtualni zakret  $\delta\varphi$ , nacrtani su planovi pomaka (sl. 7.15).



Slika 7.15. Primjer 7.4: plan virtualnih pomaka.

Sada je, prema (7.28):

$$-F_1 a \delta\varphi + M'_{y1} \delta\varphi + M''_{y1} \cdot 0 + Q \cdot 0 + M \cdot 0 = 0,$$

odakle je:

$$M'_{y1} = M''_{y1} = Fa.$$

### 7.2.3. OPĆA JEDNADŽBA DINAMIKE

Princip mogućih pomaka daje opću metodu za rješavanje zadataka statike. Budući da D'Alambertov princip omogućuje korištenje principa statike za rješavanje zadataka dinamike, istovremenim korištenjem tih dvaju principa dolazi se do opće metode za rješavanje zadataka dinamike.

Neka je gibanje sustava čestica podvrgnuto idealnim vezama. Ako se silama koje djeluju na i-tu točku sustava doda odgovarajuća sila inercije  $\vec{F}_i^{\text{in}} = -m_i \vec{a}_i$ , takav će sustav sila, prema D'Alambertovu principu, biti u ravnoteži:

$$\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^{F_N} + \vec{S}_i^u + \vec{F}_i^{\text{in}} = \vec{0}. \quad (7.29)$$

Primjenom principa virtualnih radova na sustav (7.29) i zbrajanjem po svim česticama sustava slijedi:

$$\sum \delta W_i^a + \sum \delta W_i^{in} = 0, \quad (7.30)$$

jer su radovi reakcija idealnih veza i unutarnjih sila jednaki nuli.

Jednadžba (7.30) jest opća jednadžba dinamike, a u analitičkom obliku glasi:

$$\sum \left[ (F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \right] = 0. \quad (7.31)$$

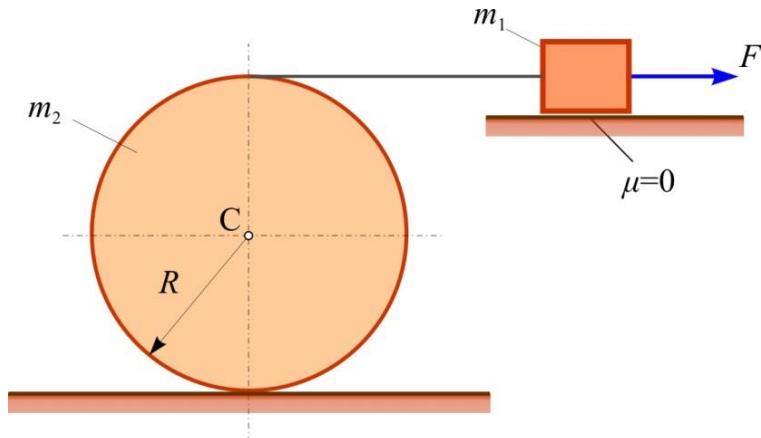
Jednadžbe (7.30) i (7.31) omogućuju da se postave diferencijalne jednadžbe gibanja bilo kojeg mehaničkog sustava.

Kada je riječ o ravninskom gibanju, vanjskim aktivnim silama treba pridodati silu inercije u centru mase i odgovarajući spreg čiji je moment jednak momentu inercije tijela za centar mase.

### Primjer 7.5.

Odrediti, korištenjem opće jednadžbe dinamike, kutno ubrzanje valjka sustava prikazanoga na slici 7.16. Valjak se po podlozi može kotrljati bez klizanja.

Zadano:  $m_1 = m$ ;  $m_2 = 2m$ ;  $F = 2mg$ .



Slika 7.16. Primjer 7.5.

*Rješenje:*

Na slici 7.17 prikazan je zadani sustav na kojem su ucrtane sve vanjske aktivne sile, inercijske sile i inercijski momenti.

Pomaci  $\varphi$ ,  $x_C$  i  $x_l$  nisu nezavisni jer među tim pomacima vrijede sljedeće kinematske veze:

$$x_C = R\varphi; \quad x_l = 2R\varphi.$$

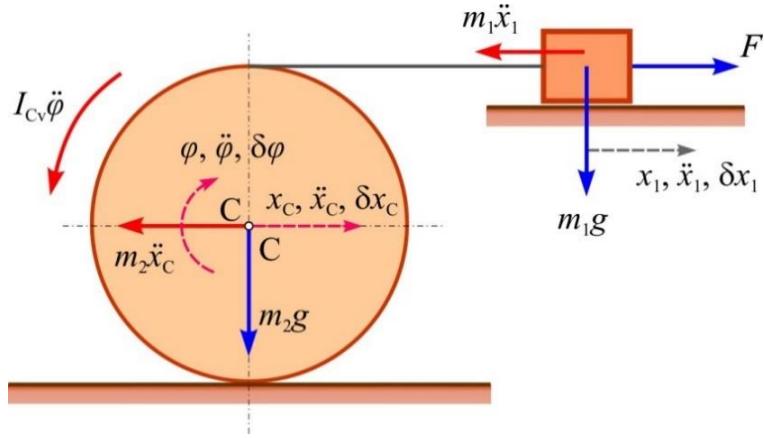
Ako se te jednakosti dvaput deriviraju po vremenu i jednom variraju, dobije se:

$$\ddot{x}_C = R\ddot{\varphi}; \quad \ddot{x}_l = 2R\ddot{\varphi};$$

$$\delta x_C = R\delta\varphi; \quad \delta x_l = 2R\delta\varphi.$$

Opća jednadžba dinamike sada glasi:

$$-I_{cv}\ddot{\varphi}\delta\varphi - m_2\ddot{x}_c\delta x_c - m_1\ddot{x}_1\delta x_1 + F\delta x_1 = 0.$$



Slika 7.17. Primjer 7.5: dinamička ravnoteža sustava.

Kako je

$$I_{cv} = \frac{1}{2}m_2R^2,$$

nakon uvrštavanja kinematičkih veza i zadanih vrijednosti u gornju jednadžbu i njezina dijeljenja s  $\delta\varphi$  dobije se:

$$-mR^2\ddot{\varphi} - 2mR^2\ddot{\varphi} - 4mR^2\ddot{\varphi} + 2mg \cdot 2R = 0,$$

odakle je:

$$\ddot{\varphi} = \frac{4}{7} \cdot \frac{g}{R}.$$



## LITERATURA

- [1] Andrejev, V. *MEHANIKA II: Kinematika*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [2] Batj, M. I., Džanelidze, G. J., Kelzon, A. S. *Rešeni zadaci iz TEORIJSKE MEHANIKE sa izvodima iz teorije*. Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [3] Bazjanac, D. *TEHNIČKA MEHANIKA, II. dio, Kinematika*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1977.
- [4] Bazjanac, D. *TEHNIČKA MEHANIKA, III. dio, Dinamika*. Sveučilišna naklada Liber, Zagreb, 1974.
- [5] Bedford, A., Fowler, W. L. *Engineering Mechanics: DYNAMICS*, Addison-Wesley, USA, 1999.
- [6] Hibbeler, R. C. *DYNAMICS*. Pearson Prentice Hall, New Jersey, USA, 2010.
- [7] Jecić, S. *MEHANIKA II: Kinematika i dinamika*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [8] Jong, C. I., Rogers, B. G. *ENGINEERING MECHANICS*. Sounders College Publishing, 1991.
- [9] Meriam, J. L., Kraige, L.G. *Engineering Mechanics: DYNAMICS*, John Wiley & Sons, USA, 2012.
- [10] Meščerski, V. I. *ZBIRKA ZADATAKA IZ TEORIJSKE MEHANIKE*. Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [11] Ruina, A., Pratap, R. *Introduction to STATICS and DYNAMICS*. Oxford University Press, UK, 2010.
- [12] Targ, S. M. *TEORIJSKA MEHANIKA*. Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [13] Voronkov, I. M. *TEORIJSKA MEHANIKA*. Građevinska knjiga, Beograd, 1972.

