

SVEUČILIŠTE
U SPLITU
SVEUČILIŠNI
ODJEL ZA
STRUČNE STUDIJE

TEHNIČKA MEHANIKA I

BOŽE PLAZIBAT
ADO MATOKOVIĆ
VLADIMIR VETMA

SKRIPTA

ISBN 978-953-7220-49-5

Split, 2020.

IZDAVAČ

Sveučilište u Splitu
Sveučilišni odjel za stručne studije

AUTORI

dr. sc. Bože Plazibat, profesor visoke škole u trajnom zvanju
dr. sc. Ado Matoković, profesor visoke škole u trajnom zvanju
Vladimir Vetma, predavač

RECENZENTI

prof. dr. sc. Frane Vlak
prof. dr. sc. Zlatan Kulenović

LEKTURA I KOREKTURA

izv. prof. dr. sc. Jadranka Nemeth-Jajić

ISBN 978-953-7220-49-5

Odlukom Povjerenstva za izdavačku djelatnost Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Urbroj: 2181-193-01-2/20-61, ovo djelo se objavljuje kao izdanje Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije.

Predgovor

Ova su skripta namijenjena u prvom redu studentima stručnog studija Konstrukcijsko strojarstvo na Sveučilištu u Splitu, Sveučilišnom odjelu za stručne studije, koji u prvom semestru slušaju kolegij Tehnička mehanika I. Mišljenja smo da može biti korisna i ostalim studentima koji su upisali studij strojarstva na bilo kojem fakultetu u Hrvatskoj.

Skripta sadrže predavanja iz navedenog predmeta i predstavljaju prošireno izdanje udžbenika *Mehanika I – Statika* istih autora. U svakom poglavlju niz je ilustrativnih primjera s detaljno objašnjenim postupcima rješavanja, a na kraju su dani zadatci za samostalni rad studenata.

U prvome, uvodnom dijelu, prikazana je podjela mehanike s osnovnim pojmovima i definicijama. Opisana je sila kao vektorska veličina. Navedeni su Newtonovi zakoni i aksiomi statike. Spomenute su veze i njihove reakcije te dan opći pristup pri rješavanju zadataka statike. Naglašena je važnost oslobađanja tijela od veza i njihova prikazivanja kao slobodnih tijela na koja djeluju i vanjsko opterećenje i reakcije veza.

Sučeljeni sustav sila razmatran je u drugom dijelu skripata. Obraden je najprije sučeljeni sustav sila u ravnini. Definirana je rezultanta i opisani su načini njena izračunavanja. Dani su uvjeti ravnoteže. Posebno je istaknut teorem o tri sile. Na isti način obraden je i sučeljeni sustav sila u prostoru. Definiran je moment sile za točku i naveden Varignonov teorem.

U trećem poglavlju opisan je paralelni sustav sila u ravnini i prostoru. Definiran je spreg sila. Obraden je postupak nalaženja rezultante te redukcija zadanog paralelnog sustava sila u ravnini i prostoru na proizvoljnu točku. Dani su uvjeti ravnoteže.

Četvrti dio skripata bavi se općim sustavom sila u ravnini. I ovdje je opisana redukcija zadanog sustava na proizvoljnu točku, kao i način određivanja rezultante. Navedena su tri oblika uvjeta ravnoteže.

Peti dio skripata posvećen je općem sustavu sila u prostoru. Pojašnjen je moment sile za točku kao vektor. Opisana je redukcija zadanog sustava sila na proizvoljnu točku te način određivanja dinamike zadanog sustava. Na kraju su dani uvjeti ravnoteže.

Rešetkasti nosači obrađeni su u šestom dijelu skripata. Navedene su osnovne pretpostavke te opisane metoda čvorova i metoda presjeka za određivanje sila u štapovima rešetkastog nosača.

U sedmom poglavlju obrađeni su puni ravni nosači i okvirni nosači. Definirane su unutarnje sile u presjeku nosača. Detaljno je opisan način određivanja unutarnjih sila i crtanje njihovih dijagrama.

U osmom poglavlju opisan je način određivanja koordinata težišta složenih materijalnih linija i ploha. Navedena su Pappus-Guldinova pravila za određivanje površine odnosno volumena rotacijskih tijela nastalih rotacijom složene linije odnosno plohe oko koordinatnih osi.

Deveto poglavlje bavi se trenjem. Navedeni su Coulombovi zakoni trenja klizanja, reakcije hrapave podloge i načini eksperimentalnog određivanja statičkog koeficijenta trenja. Razmatrana je ravnoteža tijela pri trenju. Opisano je trenje užeta o cilindričnu površinu i dana Eulerova jednadžba koja povezuje sile u užetu na jednom i drugom kraju pri postojanju trenja između užeta i cilindrične površine. Objasnjeno je trenje kotrljanja i koeficijent trenja kotrljanja.

Koristimo se prigodom zahvaliti recenzentima prof. dr. sc. Zlatanu Kulenoviću i prof. dr. sc. Frani Vlaku na pažljivu čitanju teksta i korisnim savjetima koje su nam pružili. Zahvaljujemo i dosadašnjim generacijama studenata stručnog studija konstrukcijskog strojarstva, čija su pitanja i dileme pridonijeli jasnijem prikazu pojedinih dijelova ovih skripata.

Svima koji upozore na eventualne slovne ili računске pogreške koje su promaknule i autorima i recenzentima unaprijed zahvaljujemo.

Autori

SADRŽAJ

<i>Predgovor</i>	<i>i</i>
SADRŽAJ	<i>iii</i>
1. UVOD	1
1.1. ZADATAK I PODJELA MEHANIKE	1
1.2. POVIJESNI RAZVOJ	1
1.3. TEMELJNI POJMOVI	2
1.4. SILA	3
1.5. NEWTONOVI ZAKONI I AKSIOMI STATIKE	4
1.5.1. Newtonovi zakoni	4
1.5.2. Aksiomi statike	6
1.6. VEZE I NJIHOVE REAKCIJE	8
1.6.1. Aksiom o vezama	12
1.7. MJERNE JEDINICE	17
1.8. ZNAČAJNE ZNAMENKE I PRAVILA ZAOKRUŽIVANJA	19
1.9. PRISTUP RJEŠAVANJU ZADATAKA STATIKE	20
2. SUČELJENI SUSTAV SILA	21
2.1. SLAGANJE SUČELJENIH SILA. REZULTANTA	22
2.2. RAZLAGANJE SILE. KOMPONENTE SILE	26
2.3. ANALITIČKI NAČIN SLAGANJA SILA	28
2.3.1. Projekcija sile na os i ravninu	28
2.3.2. Analitički način definiranja sile	29
2.3.3. Analitički način slaganja sustava sila	32
2.4. RAVNOTEŽA SUČELJENOG SUSTAVA SILA	38
2.4.1. Geometrijski uvjeti ravnoteže	38
2.4.2. Analitički uvjeti ravnoteže	38
2.4.3. Teorem o tri sile	54
2.5. STATIČKI ODREĐENI I STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI	60

2.6.	METODE RJEŠAVANJA ZADATAKA STATIKE	61
2.7.	MOMENT SILE U ODNOSU NA TOČKU	63
2.8.	VARIGNONOV TEOREM O MOMENTU REZULTANTE SUČELJENOG SUSTAVA SILA U RAVNINI	65
3.	PARALELNI SUSTAV SILA	67
3.1.	SLAGANJE I RAZLAGANJE PARALELNIH SILA	67
3.1.1.	Slaganje dviju paralelnih sila usmjerenih u istu stranu	67
3.1.2.	Slaganje dviju paralelnih sila usmjerenih u suprotne strane	68
3.1.3.	Razlaganje sila	69
3.2.	SPREG SILA. MOMENT SPREGA SILA	70
3.2.1.	Ekvivalentnost spregova sila	71
3.2.2.	Slaganje spregova sila koji djeluju u istoj ravnini	74
3.3.	TEOREM O REDUKCIJI SILE NA TOČKU	75
3.4.	REDUKCIJA PARALELNOG SUSTAVA SILA NA ZADANU TOČKU	75
3.5.	RAVNOTEŽA PARALELNOG SUSTAVA SILA	81
4.	OPĆI SUSTAV SILA U RAVNINI	87
4.1.	REDUKCIJA OPĆEG SUSTAVA SILA U RAVNINI NA ZADANU TOČKU	87
4.1.1.	Svođenje općeg sustava sila u ravnini na jednostavniji oblik	89
4.1.2.	Jednadžba pravca rezultante	89
4.2.	UVJETI RAVNOTEŽE OPĆEG SUSTAVA SILA U RAVNINI	92
4.2.1.	Prvi oblik uvjeta ravnoteže	92
4.2.2.	Drugi oblik uvjeta ravnoteže	92
4.2.3.	Treći oblik uvjeta ravnoteže	93
4.3.	RJEŠAVANJE ZADATAKA	93
4.4.	RAVNOTEŽA SUSTAVA KRUTIH TIJELA	101
4.5.	KONTINUIRANA RASPODJELA SILA	109
4.6.	VEZA UKLJEŠTENJEM	111
5.	OPĆI SUSTAV SILA U PROSTORU	117
5.1.	MOMENT SILE U ODNOSU NA TOČKU KAO VEKTOR	117
5.2.	MOMENT SILE U ODNOSU NA OS	118

5.3.	VEZA IZMEĐU MOMENTA SILE U ODNOSU NA TOČKU I NA OS	119
5.4.	SPREG SILA. MOMENT SPREGA SILA	120
5.5.	SLAGANJE SPREGOVA SILA U PROSTORU	120
	5.5.1. Uvjeti ravnoteže sustava spregova	121
5.6.	REDUKCIJA PROSTORNOG SUSTAVA SILA NA ZADANU TOČKU	122
	5.6.1. Svođenje prostornog sustava sila na jednostavniji oblik	123
5.7.	UVJETI RAVNOTEŽE OPĆEG SUSTAVA SILA U PROSTORU	132
5.8.	VARIGNONOV TEOREM O MONETU REZULTANTE ZA TOČKU	133
6.	REŠETKASTI NOSAČI	145
6.1.	METODA ČVOROVA	146
6.2.	METODA PRESJEKA	156
7.	PUNI RAVNINSKI NOSAČI	162
7.1.	LINIJSKI NOSAČI	162
	7.1.1. Unutarnje sile u presjeku nosača	163
	7.1.2. Veza između kontinuiranog opterećenja, poprečne sile i momenta savijanja	166
	7.1.3. Postupak pri rješavanju ravninskih nosača	167
7.2.	NOSAČ S GERBEROVIM ZGLOBOM	190
7.3.	OKVIRNI NOSAČI	198
8.	TEŽIŠTA	207
8.1.	SREDIŠTE SUSTAVA PARALELNIH SILA	207
8.2.	TEŽIŠTE KRUTOG TIJELA	208
8.3.	TEŽIŠTE HOMOGENIH TIJELA	209
8.4.	POLOŽAJ TEŽIŠTA NEKIH HOMOGENIH LINIJA I PLOHA	209
	8.4.1. Izračunavanje težišta	210
	8.4.2. Težište kružnog luka	210
	8.4.3. Težište trokuta	211
	8.4.4. Težište kružnog isječka	211
8.5.	PAPPUS-GULDINOVA PRAVILA	221
9.	TRENJE	232
9.1.	VRSTE TRENJA	232

9.2.	REAKCIJA HRAPAVE VEZE. KUT TRENJA	233
9.3.	EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE KOEFICIJENTA TRENJA	234
9.4.	RAVNOTEŽA PRI TRENJU	235
9.5.	TRENJE UŽETA O CILINDRIČNU POVRŠINU	248
9.6.	TRENJE KOTRLJANJA	256
10.	RJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU	261
	LITERATURA	269

1. UVOD

1.1. ZADATAK I PODJELA MEHANIKE

Mehanika je znanstvena disciplina koja proučava opće zakone mehaničkih gibanja i ravnoteže materijalnih tijela pod djelovanjem sila.

Pod mehaničkim gibanjem razumijeva se promjena položaja jednog materijalnog tijela u odnosu na neko drugo materijalno tijelo u prostoru tijekom vremena.

Materijalno tijelo jest dio prostora (volumena) ispunjen materijom.

Temeljni problemi kojima se bavi mehanika jesu gibanje tijela i ravnoteža sila. S obzirom na pristup rješavanju problema mehanika se dijeli:

- na teorijsku ili racionalnu mehaniku, u kojoj se proučavaju pojave bez obzira na njihov značaj u praktičnom životu;
- na tehničku mehaniku, u kojoj se zakoni i metode teorijske mehanike koriste u rješavanju tehničkih problema.

Tehnička mehanika dijeli se, s obzirom na svojstva tijela ili sustava, na tri osnovne kategorije:

- mehanika krutih tijela, ili češće samo mehanika,
- mehanika čvrstih deformabilnih tijela (nauka o čvrstoći, mehanika materijala),
- mehanika fluida.

Krutim tijelom naziva se takvo tijelo koje se ne deformira pod djelovanjem sila, bez obzira na njihovu veličinu. To je, naravno, idealizirano tijelo. Mehanika čvrstih deformabilnih tijela proučava realna tijela, koja će se pod djelovanjem sila deformirati (promijeniti geometrijski oblik i volumen). U mehanici fluida proučavaju se kapljevine: tekućine, koje su nestlačive, i plinovi, koji su stlačivi. Mehanika krutih tijela dijeli se na dva osnovna dijela:

- statiku, koja proučava tijela u mirovanju ili jednolikom pravocrtnom gibanju,
- dinamiku, u kojoj se proučavaju tijela u gibanju.

Dinamika se nadalje dijeli na kinematiku i kinetiku.

U ovim skriptama proučavat će se upravo statika, dakle mehanika krutih tijela u stanju mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja.

1.2. POVIJESNI RAZVOJ

Mehanika je, vrlo vjerojatno, najstariji dio fizike, a početci joj se podudaraju s pojavom ljudske civilizacije. Načela i zakoni mehanike korišteni su pri gradnji egipatskih piramida, babilonskih kula, grčkih hramova i luka, mostova i arena staroga Rima itd. Povijesni razvoj mehanike prati razvitak materijalne kulture čovječanstva i može se podijeliti u tri značajna razdoblja:

- antička mehanika (Arhimed – zakon poluge, koloturnik, vijak; Heron – klin, vijak, zupčanik, kolo na vretenu; Pappus Aleksandrijski – težište; itd.);
- srednjovjekovna mehanika (Kopernik – heliocentrični sustav; Kepler – kinematički zakoni gibanja planeta; Leonardo da Vinci – slobodni pad; Galileo Galilei – načelo tromosti, kosi hitac; itd.);
- klasična ili Newtonova mehanika (Sir Isaac Newton, 1642. – 1727. – sinteza dotadašnjih spoznaja, pojam mase, tri osnovna zakona, zakon opće gravitacije, zakoni unutarnjeg trenja u tekućinama i plinovima; Ruđer Bošković, Hooke, Bernoulli, Coulomb, Euler, Laplace, Lagrange, Poinsot, i mnogi drugi).

1.3. TEMELJNI POJMOVI

Ovdje ćemo navesti definicije temeljnih pojmova koje susrećemo u mehanici, a koje su vrlo bitne za proučavanje statike i dinamike krutih tijela: **prostor, vrijeme, sila, kruto tijelo, čestica i masa**.

Prostor je trodimenzionalno geometrijsko područje u kojem se nalazi promatrano tijelo ili skup tijela. Ovisno o karakteru problema, ovo područje može biti i jednodimenzionalno ili dvodimenzionalno.

Položaj promatranog tijela u prostoru definiramo u odabranom koordinatnom sustavu: pravokutnom, cilindričnom, sfernom itd. Najčešće se koristimo desnim pravokutnim koordinatnim sustavom (naziva se Kartezijev ili Descartesov).

Vrijeme je fizikalna veličina kojom se mjeri slijed događanja. U klasičnoj mehanici smatramo ga univerzalnim, neovisnim o izboru koordinatnog sustava i karakteristikama gibanja/mirovanja tijela. Vrijeme, međutim, u statici ne razmatramo.

Sila je veličina koja opisuje djelovanje jednog tijela na drugo. Tijela pri tom mogu biti u dodiru ili pak udaljena (gravitacijske sile, elektromagnetske sile itd.). Sila je vektorska veličina, potpuno definirana pravcem djelovanja, veličinom, smjerom i hvatištem.

Krutim tijelom nazivamo ono tijelo kojemu se dimenzije i oblik ne mijenjaju pod djelovanjem sila, odnosno ono kojemu razmak između dviju po volji odabranih točaka ostaje nepromijenjen tijekom vremena. Kako su sva realna tijela ujedno i deformabilna, kruto tijelo predstavlja idealizirano tijelo, ili ono tijelo kojemu su deformacije zanemarivo malene, ili pak nisu bitne za rješavanje razmatranog problema.

Čestica je ono kruto tijelo kojemu dimenzije ne utječu na stanje mirovanja ili stanje gibanja. To dakle nije tijelo zanemarivih dimenzija. Čestica se u geometrijskom smislu opisuje točkom (stoga je često korišten naziv – materijalna točka).

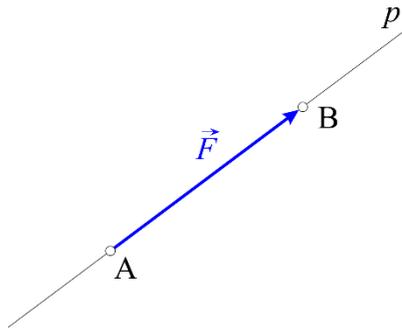
Masa je, uz moment tromosti, mjera koja opisuje otpor tijela promjeni stanja mirovanja ili stanja gibanja. Ovaj otpor nazivamo tromašću tijela. Dva tijela jednakih masa Zemlja privlači na isti način. Također, ta dva tijela imaju jednak otpor promjeni brzine pri translacijskom gibanju.

1.4. SILA

Sila je veličina koja predstavlja količinsku mjeru mehaničkog uzajamnog djelovanja između materijalnih tijela.

Sila je vektorska veličina (slika 1.1.), potpuno određena:

- intenzitetom, tj. apsolutnom vrijednosti ili modulom;
- pravcem p i smjerom djelovanja;
- hvatištem.



Slika 1.1. Vektor sile

Intenzitet sile određujemo uspoređivanjem njezina intenziteta sa silom koja je uzeta za jedinicu.

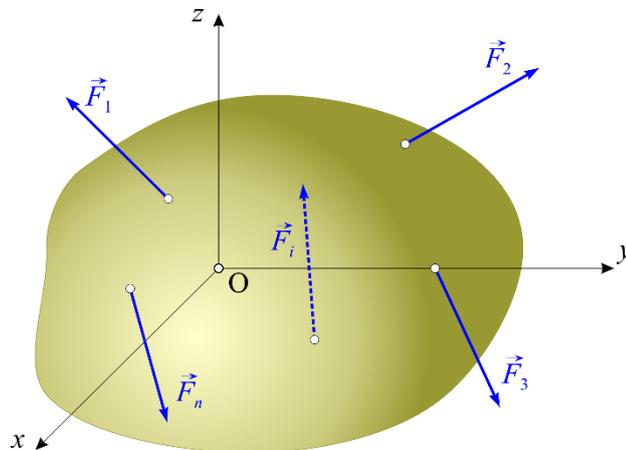
Za jedinicu uzimamo silu od **1 N** (njutn). To je ona sila pod djelovanjem koje se čestica mase jednog kilograma giba s ubrzanjem od 1 m/s^2 .

Veće jedinice su kilonjutn (**1 kN** = 10^3 N) i meganjutn (**1 MN** = 10^6 N).

Duljina odsječka AB (slika 1.1.) u mjerilu prikazuje intenzitet sile; pravac i smjer odsječka prikazuju pravac i smjer djelovanja sile, a njegov početak (točka A) poklapa se s hvatištem sile.

Pravac p naziva se pravac djelovanja sile. Intenzitet sile označava se $|\vec{F}|$ ili samo F .

Sustavom sila nazivamo skup svih sila koje djeluju na bilo koje materijalno tijelo (slika 1.2.).



Slika 1.2. Sustav sila

Tijelo koje nije neposredno vezano za druga tijela i koje iz zadanog položaja može slobodno prijeći u bilo koji drugi položaj nazivamo slobodnim tijelom.

Ako slobodno tijelo pod djelovanjem zadanog sustava sila može biti u stanju mirovanja ili jednolikog pravocrtnog gibanja, onda je takav sustav sila uravnoteženi sustav sila.

Ako se jedan sustav sila, koji djeluje na slobodno tijelo, može zamijeniti drugim sustavom sila, a da se pri tome ne izmijeni stanje mirovanja ili stanje gibanja tijela, onda za takva dva sustava sila kažemo da su ekvivalentni sustavi sila.

Ako je zadani sustav sila ekvivalentan samo jednoj sili, onda tu silu nazivamo rezultantom zadanog sustava sila. Prema tomu, rezultanta razmatranog sustava sila je takva sila koja sama (jedina) može zamijeniti djelovanje zadanog sustava sila na tijelo.

Sile koje djeluju na kruto tijelo mogu se podijeliti na vanjske i unutarnje. Vanjskim silama nazivamo sile koje djeluju na tijela od strane drugih materijalnih tijela. Unutarnjim silama nazivamo sile kojima čestice jednog te istog tijela djeluju jedne na druge.

Sila koja djeluje u jednoj (bilo kojoj) točki krutog tijela jest koncentrirana sila.

Sile koje djeluju na sve točke volumena tijela ili pak na dio njegove površine nazivamo kontinuirano raspoređenim silama.

Sile koje djeluju na površini tijela jesu površinske sile, dok sile koje djeluju unutar volumena tijela nazivamo volumnim silama (npr. težina tijela).

1.5. NEWTONOVI ZAKONI I AKSIOMI STATIKE

Sve teoreme i jednadžbe statike izvodimo iz triju Newtonovih zakona i nekoliko osnovnih postavki, koje usvajamo bez matematičkih dokaza i nazivamo ih aksiomima ili načelima statike. Aksiomi statike predstavljaju rezultat uopćavanja mnogobrojnih pokusa i opažanja utvrđenih iskustvom pri promatranju ravnoteže i gibanja tijela.

1.5.1. Newtonovi zakoni

Polazeći od navedenih definicija prostora, vremena, sile i mase, Sir Isaac Newton postavio je, u svom epohalnom djelu „Matematička načela prirodne filozofije”, temeljne zakone klasične mehanike za tijelo predloženo česticom.

Prvi zakon:

Tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu ako na njega ne djeluje neuravnoteženi sustav sila.

Drugi zakon:

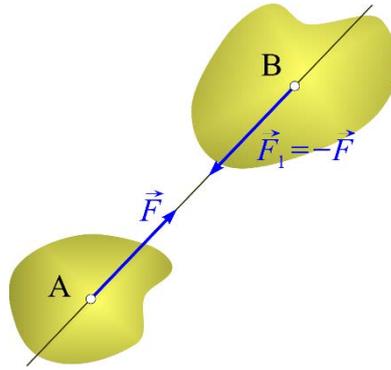
Ubrzanje je upravo proporcionalno sili koja djeluje na tijelo, i usmjereno je u smjeru djelovanja sile.

Ovaj zakon matematički se izražava relacijom:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \text{ ili } \vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.1)$$

Treći zakon (načelo akcije i reakcije):

Dva tijela djeluju jedno na drugo silama jednakih intenziteta, suprotno usmjerenih duž istog pravca djelovanja (slika 1.3.).



Slika 1.3. Uzajamno djelovanje dvaju tijela

Iz ovog zakona proizlazi da se sile uvijek javljaju u parovima, a upravo to je temelj za ispravno shvaćanje sile.

Newtonov opći zakon gravitacije:

Newton je prvi matematički formulirao opći zakon gravitacije, premda je postojanje gravitacije bilo poznato i ranije. Zakon glasi: *Dvije se čestice međusobno privlače silama proporcionalnim umnošku njihovih masa i obrnuto proporcionalnim kvadratu njihove međusobne udaljenosti:*

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (1.2)$$

gdje su: m_1, m_2 – mase razmatranih čestica

r – međusobna udaljenost čestica

k – univerzalna gravitacijska konstanta, utvrđena eksperimentalno, a iznosi:

$$k = 66,73 \cdot 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

Iako gravitacijske sile postoje između bilo koja dva tijela, osobito značenje ima privlačna sila Zemlje, koja se naziva težinom. Ako je masa čestice koju privlači Zemlja $m_1 = m$, tada je težina tijela:

$$F_G = m \cdot g.$$

Budući da je masa Zemlje $m_2 = 5,976 \cdot 10^{24}$ kg, a njezin polumjer $r = 6,371 \cdot 10^6$ m, to gravitacijsko ubrzanje, prema gornjem zakonu, iznosi:

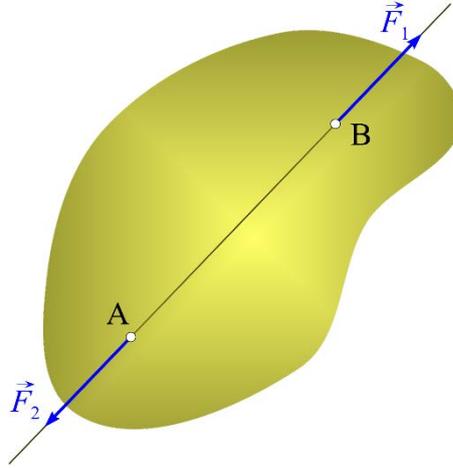
$$g = k \frac{m_2}{r^2} = 9,824 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}.$$

Međutim, kako zbog činjenice da Zemlja nije baš posve okrugla, tako i zbog njezine vlastite rotacije, gravitacijsko ubrzanje nije jednako na svim njezinim dijelovima.

U inženjerskim proračunima odabiremo vrijednost $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, što približno odgovara gravitacijskom ubrzanju na geografskoj širini od 45° .

1.5.2. Aksiomi statike

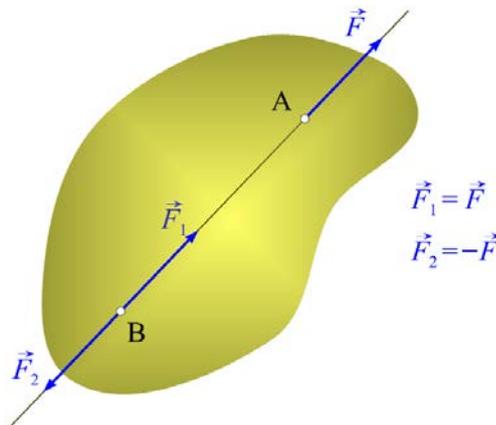
Prvi aksiom: *Ako na slobodno kruto tijelo djeluju dvije sile, onda to tijelo može biti u ravnoteži samo ako su te sile jednake po intenzitetu $F_1 = F_2$ i ako su suprotno usmjerene duž istog pravca djelovanja (slika 1.4.).*



Slika 1.4. Ravnoteža tijela pod djelovanjem dviju sila

Drugi aksiom: *Djelovanje zadanog sustava sila na tijelo ne mijenja se ako se zadanom sustavu sila doda ili oduzme uravnoteženi sustav sila.*

Kao posljedicu prvog i drugog aksioma možemo izreći tvrdnju: *Hvatište sile, koja djeluje na kruto tijelo, možemo prenijeti duž pravca djelovanja sile u bilo koju drugu točku tijela.*



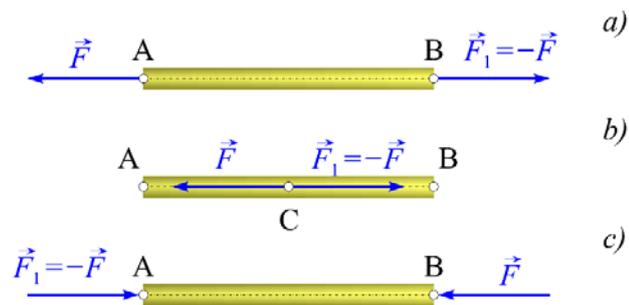
Slika 1.5. Dokaz tvrdnje o premještanju hvatišta sile duž njezina pravca djelovanja

Dokaz ove tvrdnje dan je na slici 1.5.:

Ako zadanoj sili \vec{F} dodamo uravnoteženi sustav sila $(\vec{F}_1; \vec{F}_2)$, a zatim oduzmemo sustav $(\vec{F}_2; \vec{F})$, koji je također uravnotežen, na tijelo će djelovati samo sila $\vec{F}_1 = \vec{F}$ s hvatištem u točki B.

Zaključujemo da je sila klizni vektor.

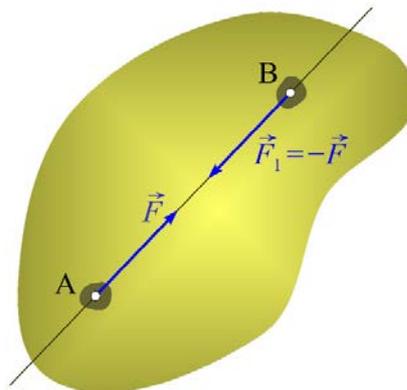
Ako je tijelo čvrsto, pri određivanju unutarnjih sila silu ne smijemo prenositi duž pravca djelovanja sile (slika 1.6.):



Slika 1.6. Različiti slučajevi opterećenja deformabilnog (čvrstog) štapa: a) štap opterećen na rastezanje, b) štap nije opterećen, c) štap opterećen na sabijanje.

Također, kao posljedica prvih dvaju aksioma i trećeg Newtonova zakona, slijedi veoma važno svojstvo unutarnjih sila.

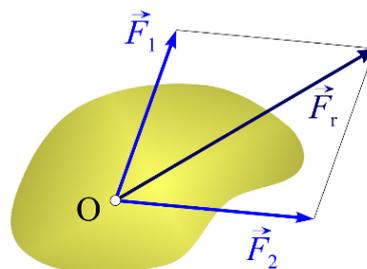
Naime, prema trećem Newtonovu zakonu, bilo koja dva djelića krutog tijela djeluju jedan na drugog silama jednakih intenziteta (slika 1.7.), ali suprotno usmjerenih duž istog pravca djelovanja. Kako pri proučavanju općih uvjeta ravnoteže tijelo možemo smatrati krutim, onda, prema prvom aksiomu, sve unutarnje sile predstavljaju sustav uravnoteženih sila, koji se opet, prema drugom aksiomu, može ukloniti.



Slika 1.7. Unutarnje sile kao uravnoteženi sustav sila

Dakle, pri postavljanju općih uvjeta ravnoteže treba uzimati u obzir samo vanjske sile koje djeluju na kruto tijelo ili pak na zadanu konstrukciju.

Treći aksiom (pravilo paralelograma sila): *Rezultanta dviju sila koje djeluju na kruto tijelo u jednoj točki jednaka je dijagonali paralelograma konstruiranoga nad zadanim silama* (slika 1.8.).



Slika 1.8. Pravilo paralelograma sila

Rezultanta dviju sila koje djeluju na kruto tijelo u jednoj točki jednaka je geometrijskoj (vektorskoj) sumi tih sila s hvatištem u istoj točki:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Četvrti aksiom (zakon akcije i reakcije; 3. Newtonov zakon, slika 1.3): *Dva tijela djeluju jedno na drugo silama jednakih intenziteta, suprotno usmjerenih duž istog pravca djelovanja.*

Peti aksiom (načelo ukrućivanja ili soldifikacije): *Ako se bilo koje deformabilno tijelo pod djelovanjem zadanog sustava sila nalazi u ravnoteži, onda će se ravnoteža održati i tada kada se tijelo ukruti. Obrat ne vrijedi.*

Sile, koje u slučaju ravnoteže djeluju na neko deformabilno tijelo, zadovoljavaju iste uvjete ravnoteže kao i kada djeluju na kruto tijelo (slika 1.9.a); međutim, ti uvjeti koji su za deformabilno tijelo potrebni, ne moraju u isto vrijeme biti i dovoljni (slika 1.9.b).



Slika 1.9. Načelo ukrućivanja

1.6. VEZE I NJIHOVE REAKCIJE

Tijelo čije je gibanje u prostoru spriječeno bilo kojim drugim tijelom (preprekom) nazivamo vezanim (neslobodnim) tijelom. Prepreke koje sprječavaju gibanje tijela nazivamo veze.

Tijelo koje pod djelovanjem zadanih sila teži pomicanju koje mu veze ne dopuštaju, djeluje na vezu silom koja se zove pritisak na vezu ili jednostavno samo pritisak.

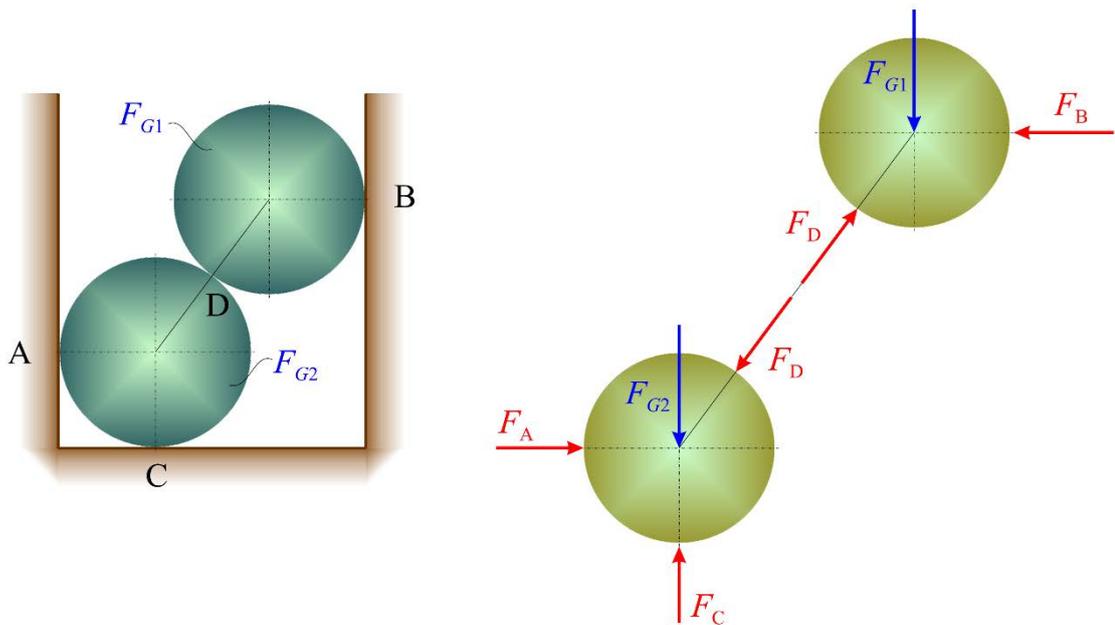
Prema trećem Newtonovu zakonu, i veza djeluje na tijelo silom jednakog intenziteta, istog pravca djelovanja, ali suprotnog smjera. Sila kojom veza djeluje na tijelo, i koja sprječava neka njegova pomicanja, zove se reakcija veze.

Sile koje ne predstavljaju reakcije veza (npr. sila teže) nazivaju se aktivnim silama, dok su reakcije veza pasivne sile. Reakcija veza usmjerena je uvijek u suprotnom smjeru od smjera u kojem veza ne dopušta pomicanje tijela.

U nastavku su prikazane neke osnovne veze i njihove reakcije.

Veza ostvarena preko glatke plohe

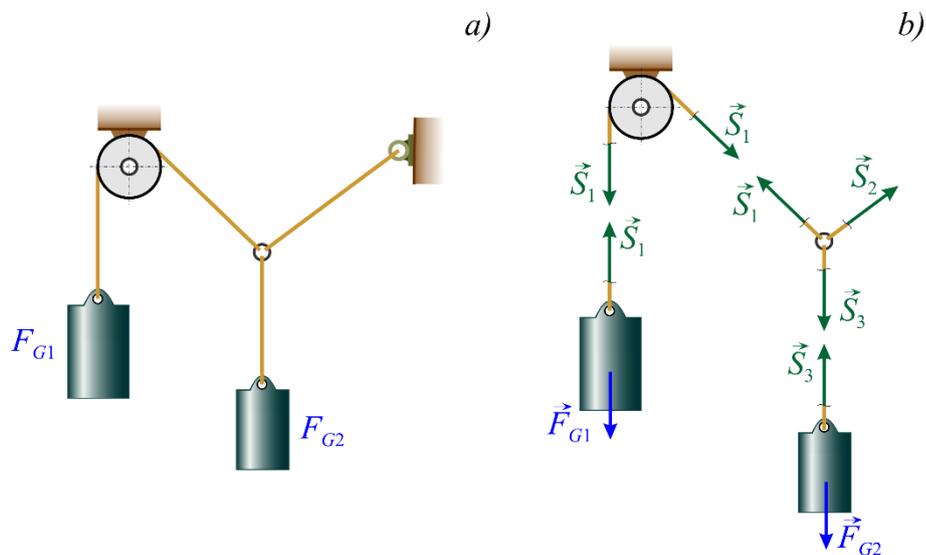
Pod glatkom plohom razumijeva se ploha takvih svojstava da se trenje tijela, koje se na njoj nalazi, može zanemariti. Takva ploha sprječava gibanje tijela samo u pravcu zajedničke normale u točki njihova dodira. Reakcija veza glatke plohe usmjerena je duž zajedničke normale na tangencijalnu ravninu dodirnih tijela, a u točki njihova dodira, koja je u isto vrijeme i hvatište reakcije (sile \vec{F}_A , \vec{F}_B , \vec{F}_C i \vec{F}_D na slici 1.10.).



Slika 1.10. Reakcije veza glatkih ploha

Veza ostvarena užetom

Reakcija užeta \vec{F}_S (\vec{S}) usmjerena je duž samog užeta. Uže može prenijeti silu samo ako je opterećeno na rastezanje. Na slici 1.11.a. prikazana su tijela 1 i 2 vezana međusobno užetima, a na slici 1.11.b. sile kojima užad djeluje na tijela.



Slika 1.11.: a) tijela međusobno vezana užetima, b) sile kojima užad djeluje na tijela.

Veza ostvarena oprugom

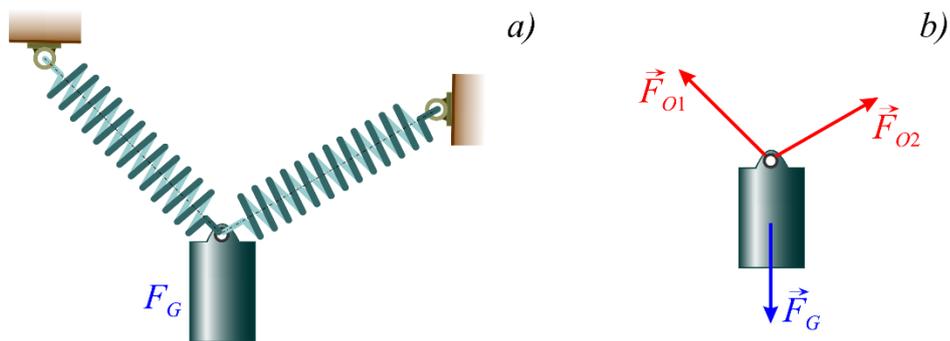
Kad je tijelo vezano oprugom za podlogu (slika 1.12.a), sila u opruzi (\vec{F}_o) ima pravac uzdužne osi opruge, a smjer suprotan od smjera svog rastezanja ili sabijanja (slika 1.12.b).

Intenzitet sile u opruzi jednak je:

$$F_o = c \cdot \Delta l,$$

gdje je c – konstanta krutosti opruge, a Δl iznos za koji se opruga produljila odnosno skratila pod djelovanjem opterećenja.

Konstanta opruge ima značenje sile potrebne da se opruga produlji ili skрати za jedinicu duljine.

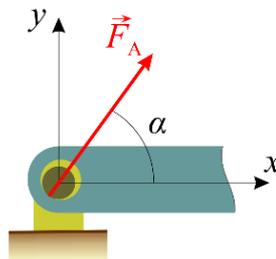


Slika 1.12.: a) teret vezan za podlogu oprugama, b) sile kojima opruge djeluju na tijelo.

Cilindrični zglob ili oslonac

Ako su dva tijela spojena osovinicom (svornjakom) kroz otvore na tijelima, onda takvu vezu zovemo cilindrični zglob ili oslonac. Reakcija \vec{F}_A cilindričnog zgloba može imati bilo koji pravac u ravnini okomitoj na os zgloba, ovisno o točki u kojoj je ostvaren dodir (slika 1.13.).

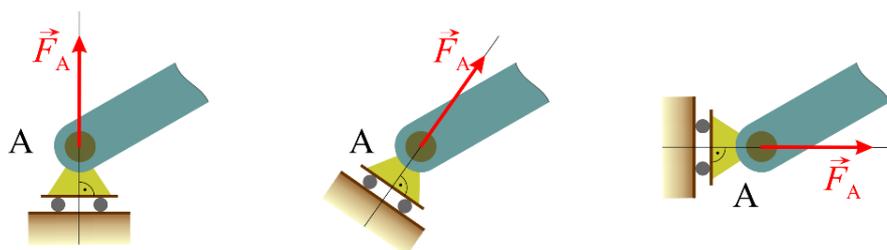
Za silu \vec{F}_A treba odrediti dva podatka: intenzitet sile F_A i kut α , ili pak projekcije sile na dvije osi (F_{Ax} i F_{Ay}).



Slika 1.13. Reakcija cilindričnog zgloba

Pomični oslonac

Ako je razmatrano tijelo vezano s drugim tijelom zglobovom vezom (osovinicom), a to je tijelo pomično u odnosu na podlogu, takva veza dopušta pomak u smjeru tangente na površinu oslanjanja, a sprječava pomak u pravcu normale na tu površinu i naziva se pomični oslonac. Pravac reakcije \vec{F}_A pomičnog oslonca poklapa se s pravcem normale na površinu oslanjanja (slika 1.14.).

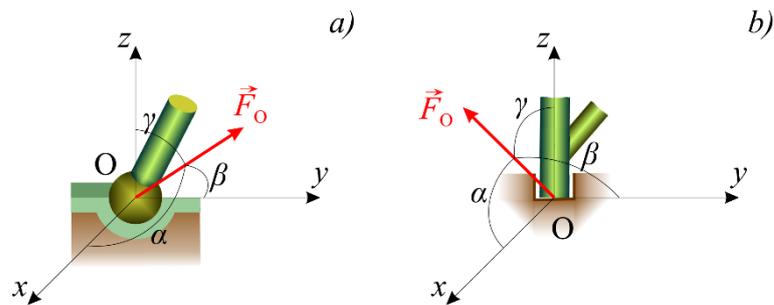


Slika 1.14. Reakcija pomičnog oslonca

Sferni zglob i podupirač

Veza ostvarena sfernim zglobovima prikazana je na slici 1.15.a, a podupiračem na slici 1.15.b.

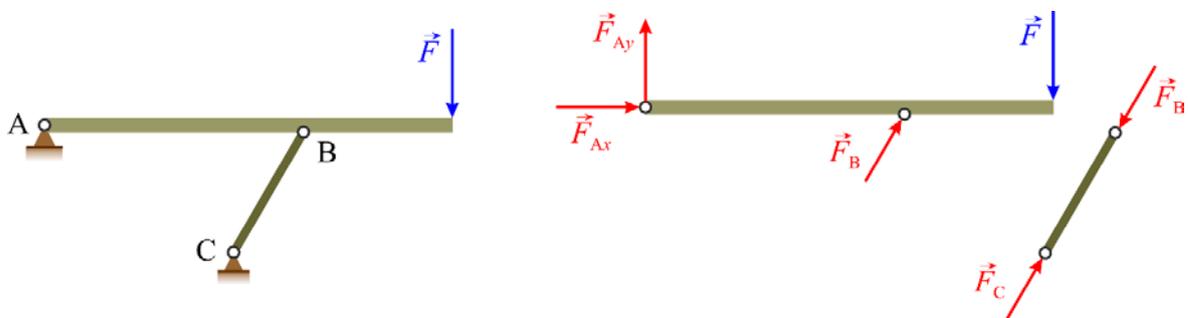
Reakcija sfernog zgloba i podupirača \vec{F}_O može imati proizvoljan pravac u prostoru. Za silu \vec{F}_O potrebno je poznavati intenzitet sile F_O te najmanje dva od triju kutova što ih pravac djelovanja sile zatvara s koordinatnim osima x , y i z ; odnosno potrebno je poznavati projekcije sile \vec{F}_O na tri međusobno okomite koordinatne osi (F_{Ox} , F_{Oy} , F_{Oz}).



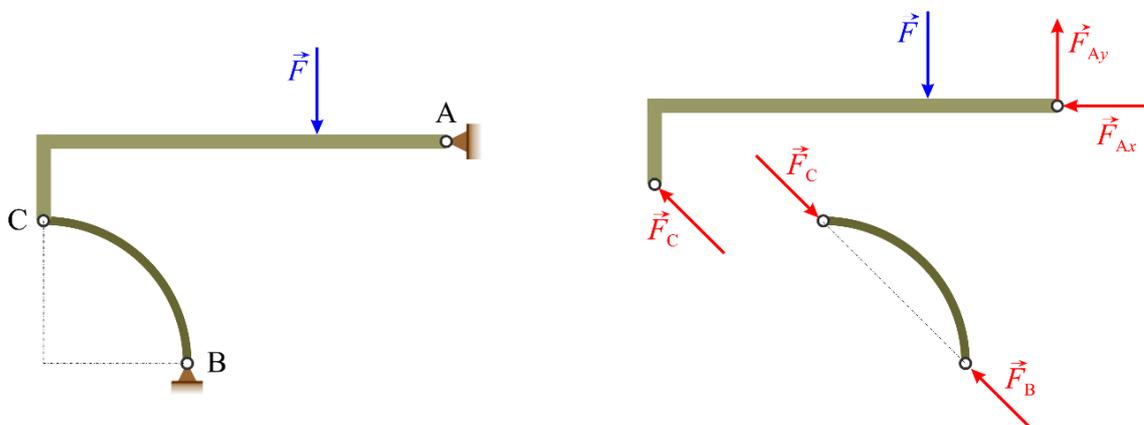
Slika 1.15.: a) reakcija sfernog zgloba, b) reakcija podupirača.

Štap zanemarive težine

Ako je razmatrana veza ostvarena štapom zanemarive težine koji je zglobovno vezan u dvjema svojim točkama, i na koji ne djeluju druge sile (štap BC na slikama 1.16. i 1.17.), onda se prema prvom aksiomu te dvije sile moraju nalaziti na istom pravcu, tj. na pravcu koji prolazi točkama B i C, moraju biti jednakog intenziteta i suprotno usmjerene.



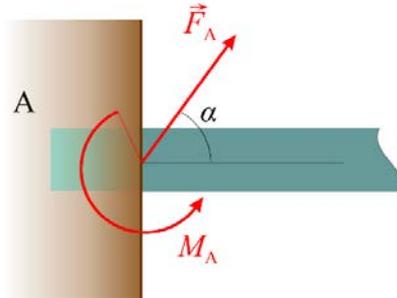
Slika 1.16. Reakcija ravnog štapa zanemarive težine



Slika 1.17. Reakcija zakrivljenog štapa zanemarive težine

Uklještenje

Veza ostvarena uklještenjem sprječava i pomak tijela i njegovo zakretanje oko bilo koje osi kroz točku uklještenja. Zato se veza uklještenjem, kod ravninskih problema, zamjenjuje reakcijom \vec{F}_A i spregom sila momenta M_A koji nazivamo momentom uklještenja (sl. 1.18.).



Slika 1.18. Reakcija veze ostvarene uklještenjem

Budući da za silu \vec{F}_A treba odrediti dva podatka: intenzitet sile F_A i kut α , ili pak projekcije sile na dvije osi (F_{Ax} i F_{Ay}), za određivanje reakcija veze uklještenjem potrebno je odrediti ukupno tri nepoznata podatka (treći podatak je moment uklještenja M_A).

Sa spregom sila i momentom sprega sila poblizje ćemo se upoznati u 3. poglavlju ovih skriptata.

1.6.1. Aksiom o vezama

Aksiom o vezama glasi: *Svako neslobodno (vezano) tijelo možemo učiniti slobodnim ako ga oslobodimo od veza, a njihovo djelovanje zamijenimo odgovarajućim reakcijama veza.*

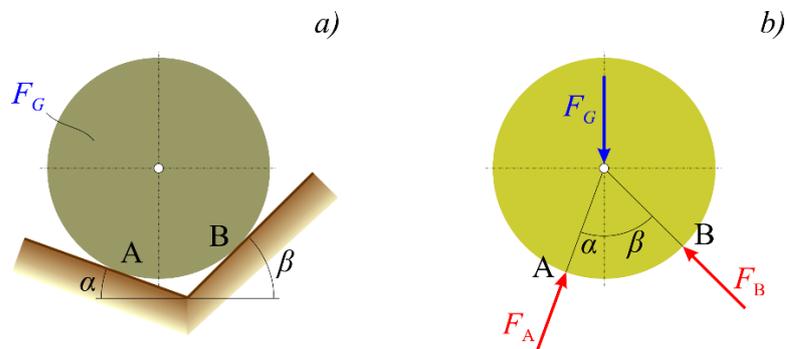
Oslobađanje tijela od veza i zamjenjivanje tih veza odgovarajućim reakcijama prvi je i vrlo važan korak u postupku rješavanja zadataka.

U primjerima koji slijede taj je postupak opisan detaljnije.

Primjer 1.1.

Kugla težine \vec{F}_G oslonjena je na strme glatke ravnine u točkama A i B (slika 1.19.a).

Prikazati kuglu kao slobodno tijelo sa svim silama koje na nju djeluju.



Slika 1.19. *Primjer 1.1.:* a) vezano tijelo, b) tijelo oslobodeno od veza.

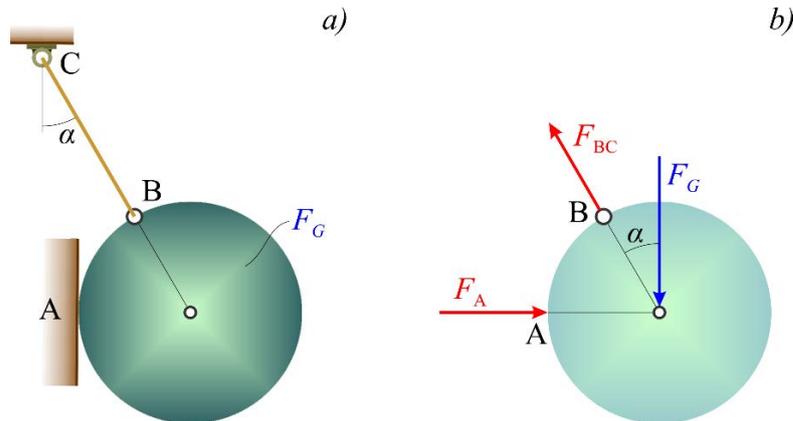
Rješenje:

Kuglu treba osloboditi od veza sa strmim glatkim ravninama te ove veze nadomjestiti odgovarajućim reakcijama veza.

U točki dodira A s ravninom na kuglu će djelovati reakcija veze \vec{F}_A koja leži na pravcu okomitom na tu ravninu. Na isti način u točki B dodaje se sila \vec{F}_B s pravcem okomitim na tu ravninu (slika 1.19.b).

Primjer 1.2.

Kugla težine \vec{F}_G oslonjena je u točki A na glatku vertikalnu ravninu i vezana je užetom BC za podlogu (slika 1.20.a). Valja osloboditi kuglu od veza te je prikazati kao slobodno tijelo sa svim silama koje na nju djeluju.



Slika 1.20. *Primjer 1.2.: a) vezano tijelo, b) tijelo oslobođeno od veza.*

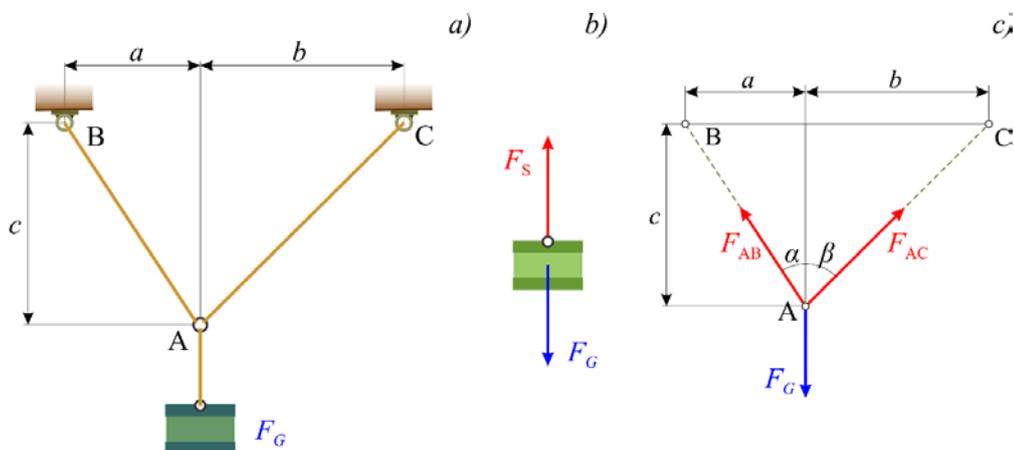
Rješenje:

Kuglu treba osloboditi od veza s vertikalnom glatkom ravninom i užetom te ove veze nadomjestiti odgovarajućim reakcijama veza. U točki dodira A s ravninom na kuglu će djelovati reakcija veze \vec{F}_A koja leži na pravcu okomitom na ravninu. U točki B dodaje se sila \vec{F}_{BC} kojom uže djeluje na kuglu, a koja ima pravac užeta (slika 1.20.b).

Dakle, nakon oslobađanja od veza na kuglu djeluje sustav sila koji čine težina \vec{F}_G , sila kojom uže djeluje na kuglu \vec{F}_{BC} i sila \vec{F}_A kojom glatka vertikalna ravnina djeluje na kuglu.

Primjer 1.3.

Sanduk težine \vec{F}_G vezan je za prsten u A užetom (slika 1.21.a).



Slika 1.21. *Primjer 1.3.: a) vezano tijelo, b) sanduk oslobođen od veza, c) prsten kao slobodno tijelo.*

Prsten je za podlogu vezan užadima AB i AC. Sanduk i prsten prikazati kao slobodna tijela s prikazom sila koje na njih djeluju.

Rješenje:

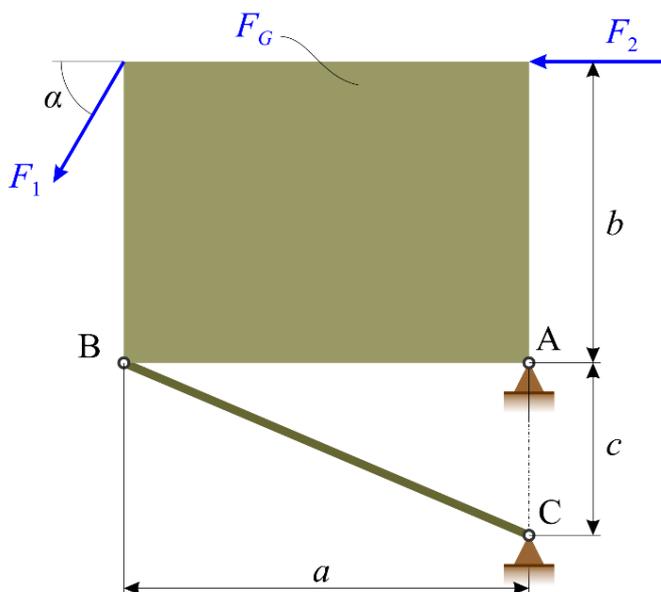
Na sanduk oslobođen od veza djeluju dvije sile: težina \vec{F}_G i sila \vec{F}_S kojom uže djeluje na sanduk. Budući da je sanduk u ravnoteži, ove sile su istog iznosa $F_S = F_G$ i imaju suprotan smjer djelovanja (slika 1.21.b).

Na prsten u A djeluje sustav sila koji čine: sila \vec{F}_S kojom uže djeluje na prsten, a koja je jednaka težini sanduka \vec{F}_G , sila \vec{F}_{AB} kojom uže AB djeluje na prsten, a kojoj pravac djelovanja prolazi točkama A i B, te sila \vec{F}_{AC} kojom uže AC djeluje na prsten, a kojoj pravac djelovanja prolazi točkama A i C (slika 1.21.c).

Primjer 1.4.

Pravokutna homogena ploča težine \vec{F}_G opterećena je koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 prema slici. Ploča je za podlogu vezana nepomičnim osloncem u A te štapom BC zanemarive težine u točki B (slika 1.22.).

Prikazati ploču kao slobodno tijelo sa svim silama koje na nju djeluju.

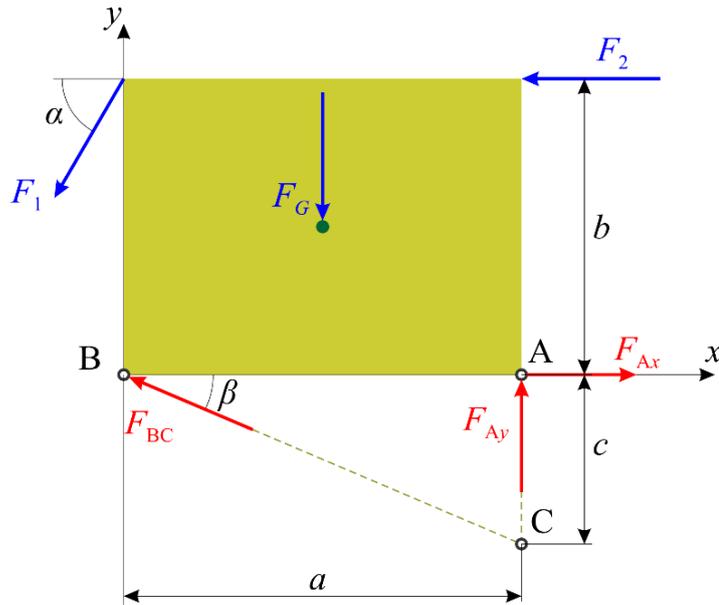


Slika 1.22. *Primjer 1.4.: Homogena ploča sa zadanim vezama*

Rješenje:

Pri oslobađanju ploče od veza iste je potrebno nadomjestiti odgovarajućim reakcijama veza.

Na ploču kao slobodno tijelo djeluju koncentrirane sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , težina ploče \vec{F}_G s hvatištem u težištu ploče, reakcija štapa zanemarive težine \vec{F}_{BC} s pravcem djelovanja kroz točke B i C, reakcija oslonca A \vec{F}_A predstavljena s dvije komponente F_{Ax} i F_{Ay} (slika 1.23.).

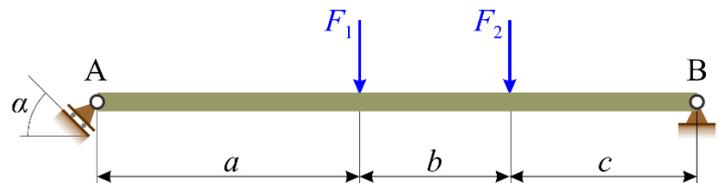


Slika 1.23. *Primjer 1.4.: Prikaz homogene ploče kao slobodnog tijela*

Primjer 1.5.

Jednostavni nosač opterećen je koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 te vezan za podlogu pomičnim osloncem u A i nepomičnim osloncem u B, kako je prikazano na slici 1.24.

Potrebno je prikazati nosač kao slobodno tijelo s prikazom svih sila koje na njega djeluju.

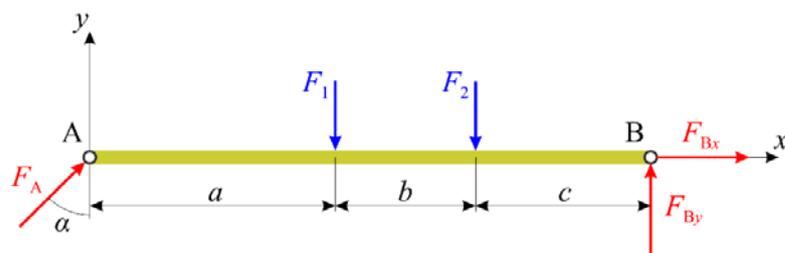


Slika 1.24. *Primjer 1.5.: Jednostavni nosač vezan za podlogu pomičnim i nepomičnim osloncem*

Rješenje:

Pri oslobađanju nosača od veza oslonce je potrebno nadomjestiti odgovarajućim reakcijama veza.

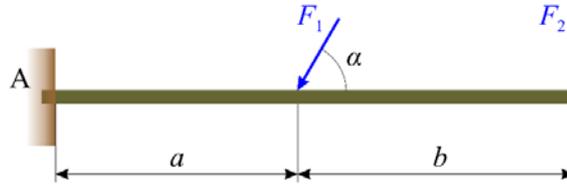
Na nosač kao slobodno tijelo djeluju koncentrirane sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , reakcija pomičnog oslonca \vec{F}_A kojoj je pravac djelovanja okomit na pravac mogućeg pomicanja oslonca te reakcija \vec{F}_B oslonca B, predstavljena s dvije međusobno okomite komponente F_{Bx} i F_{By} (slika 1.25.).



Slika 1.25. *Primjer 1.5.: Jednostavni nosač kao slobodno tijelo*

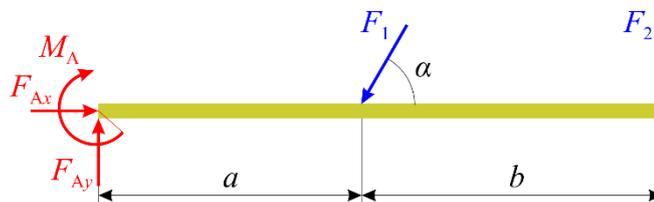
Primjer 1.6.

Nosač zanemarive težine opterećen je koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 te vezan za podlogu uklještenjem u točki A (slika 1.26.). Osloboditi nosač od veza i prikazati sve sile koje na njega djeluju.



Slika 1.26. *Primjer 1.6.: Uklješteni nosač*

Rješenje:



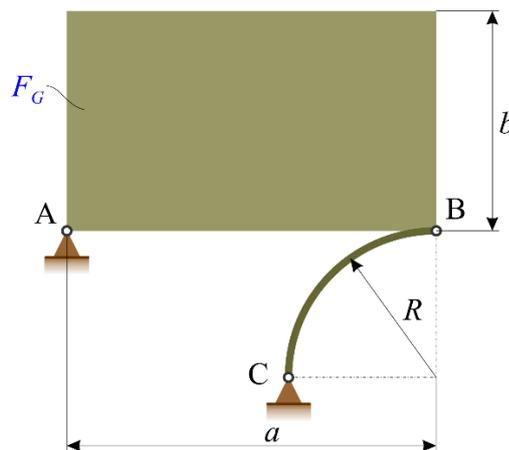
Slika 1.27. *Primjer 1.6.: Nosač oslobođen od veza*

Nosač oslobođen od veza, sa svim silama koje na njega djeluju, prikazan je na slici 1.27. Pored zadanih sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 djeluje reakcijska sila \vec{F}_A predstavljena s dvije komponente, F_{Ax} i F_{Ay} , te reakcijski moment sprega sila M_A . Smjerovi ovih reakcija na slici su pretpostavljeni.

ZADATCI ZA VJEŽBU:



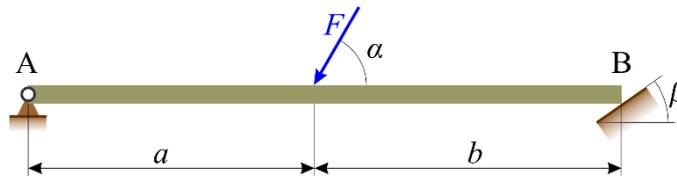
Zadatak 1.1. Pravokutna ploča težine F_G vezana je za podlogu nepomičnim osloncem u A te zakrivljenim štapom BC zanemarive težine (slika Z.1.1.). Valja osloboditi ploču od veza i prikazati je kao slobodno tijelo s prikazom svih sila koje na nju djeluju.



Slika Z.1.1. *Zadatak 1.1.*

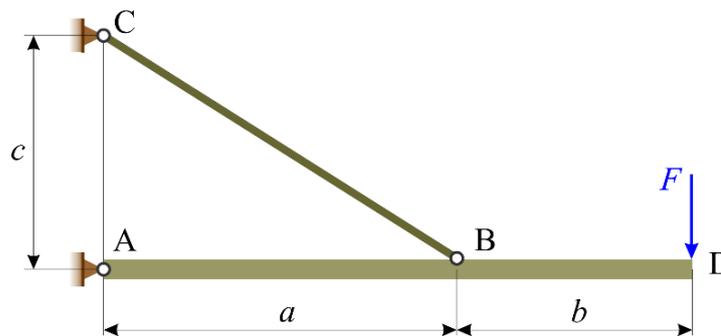
Zadatak 1.2. Ravni nosač zanemarive težine opterećen je koncentriranom silom \vec{F} . Nosač je u A vezan za podlogu nepomičnim osloncem, a krajem B naslanja se na glatku kosinu koja s

horizontalom zatvara kut β (slika Z.1.2.). Potrebno je osloboditi nosač od veza i prikazati ga kao slobodno tijelo s prikazom svih sila koje na njega djeluju.



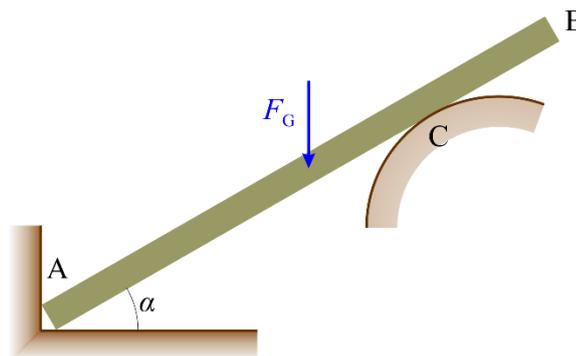
Slika Z.1.2. *Zadatak 1.2.*

Zadatak 1.3. Kruta greda AD zanemarive težine opterećena je koncentriranom silom \vec{F} na kraju D. Greda je za podlogu vezana nepomičnim osloncem u A te štapom BC zanemarive težine (slika Z.1.3.). Valja osloboditi gredu od veza i prikazati je kao slobodno tijelo sa svim silama koje na nju djeluju.



Slika Z.1.3. *Zadatak 1.3.*

Zadatak 1.4. Kruta greda AB težine F_G oslonjena je krajem A na spoj poda i vertikalnog zida, a u točki C na glatku zakrivljenu podlogu (slika Z.1.4.). Valja osloboditi gredu od veza i prikazati je kao slobodno tijelo sa svim silama koje na nju djeluju.



Slika Z.1.4. *Zadatak 1.4.*

1.7. MJERNE JEDINICE

Temeljne veličine koje se koriste u mehanici jesu duljina, vrijeme, masa i sila. Brojčani iznosi ovih veličina određuju se mjerenjem, tj. uspoređivanjem te veličine s pripadajućom jedinicom mjere. Međunarodni sustav jedinica, poznat kao SI sustav, u uporabi je u najvećem broju zemalja u svijetu, pa tako i u Hrvatskoj.

U SI sustavu jedinice se mogu podijeliti u tri skupine:

- temeljne jedinice: metar (m) za duljinu; kilogram (kg) za masu i sekunda (s) za vrijeme
- dopunske jedinice: radijan (rad) za kut
- izvedene jedinice: kreiraju se kombinacijom temeljnih jedinica, u skladu s algebarskim izrazima kojima su povezane odgovarajuće veličine.

U tablici 1.1. dane su izvedene jedinice za fizikalne veličine koje susrećemo u mehanici.

Tablica 1.1. *Izvedene jedinice nekih fizikalnih veličina*

Veličina	Jedinica	Oznaka	Definicija
Brzina	metar u sekundi	-	m/s
Ubrzanje	metar u sekundi na kvadrat	-	m/s ²
Kutna brzina	radijan u sekundi	-	rad/s
Kutno ubrzanje	radijan u sekundi na kvadrat	-	rad/s ²
Sila	njutn	N	kg m/s ²
Moment sile	njutn metar	-	Nm
Tlak (pritisak)	pascal	Pa	N/m ²
Energija	džul	J	Nm
Rad	džul	J	Nm
Snaga	vat	W	J/s
Impuls sile	njutn sekunda	-	Ns
Količina gibanja	njutn sekunda	-	Ns
Površina	metar kvadratni	-	m ²
Volumen	metar kubični	-	m ³
Moment tromosti površine	metar na četvrtu	-	m ⁴
Moment tromosti mase	kilogram metar kvadratni	-	kgm ²

Kada su dane jedinice neodgovarajuće (prevelike ili premalene), u rješavanju praktičnih primjera koriste se dekadski višekratnici temeljnih jedinica koji se jednostavno definiraju dodavanjem odgovarajućih prefiksa (tablica 1.2.). Tako je na primjer:

$$1 \text{ kilometar} = 1 \text{ km} = 1 \times 1\,000 \text{ m} = 1\,000 \text{ m} = 10^3 \text{ m},$$

$$1 \text{ km}^2 = 1 (\text{km})^2 = 1 \times (1\,000 \text{ m})^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2,$$

$$1 \text{ milimetar} = 1 \text{ mm} = 1 \times 0,001 \text{ m} = 0,001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m},$$

$$1 \text{ mm}^2 = 1 (\text{mm})^2 = 1 \times (0,001 \text{ m})^2 = 0,000\,001 \text{ m}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Tablica 1.2. Dekadski višekratnici temeljnih jedinica

Prefix	Oznaka	Višekratnik
giga	G	1000000000 = 10^9
mega	M	1000000 = 10^6
kilo	k	1000 = 10^3
hekto*	h	100 = 10^2
deka*	da	10 = 10^1
deci*	d	0,1 = 10^{-1}
centi*	c	0,01 = 10^{-2}
mili	m	0,001 = 10^{-3}
mikro	μ	0,000001 = 10^{-6}
nano	n	0,000000001 = 10^{-9}

*izbjegavati osim kod mjerenja površina i volumena

Jedinice koje je dopušteno upotrebljavati u SI sustavu, a koje mu ne pripadaju, jesu:

- minuta, sat, dan, ... – za vrijeme (1 min = 60 s, 1 h = 60 min, ...)
- stupanj – za kut ($1^\circ = \pi/180$ rad)
- tona – za masu (1 t = 1 000 kg).

1.8. ZNAČAJNE ZNAMENKE I PRAVILA ZAOKRUŽIVANJA

Rezultati raznih inženjerskih proračuna ili mjerenja najčešće se prikazuju brojevima. Brojevi se, ovisno o prirodi problema, mogu prikazivati zaokruženi na različit broj značajnih znamenaka.

Brojem značajnih znamenaka nekog broja naziva se broj njegovih znamenaka počev od prve znamenke različite od nule. Brojevi 725,65 i 0,00072565 imaju, prema tome, jednak broj značajnih znamenaka – pet.

Broj značajnih znamenaka konačnog rezultata u tehničkim proračunima ne bi trebao biti veći od broja značajnih znamenaka ulaznih podataka, a to je u najvećem broju tehničkih problema – tri. Naime, pri zaokruživanju nekog broja na tri značajne znamenke greška zaokruživanja je manja ili jednaka 0,5 %, što zadovoljava potrebe inženjerskih proračuna.

Gore navedeno vrijedi za prikaz konačnih rezultata, dok se kod međurezultata treba raditi s jednom značajnom znamenkom više, kako se ne bi gomilala greška zaokruživanja.

Pri zaokruživanju brojeva na n značajnih znamenaka moraju se poštivati sljedeća pravila:

1. Ako je $(n+1)$. znamenka manja od 5, odbacuju se sve znamenke iza n -te (na primjer: brojevi 3,5237 i 0,47519, zaokruženi na tri značajne znamenke, bit će 3,52 i 0,475).
2. Ako je $(n+1)$. znamenka veća od 5 ili jednaka 5, a u znamenkama koje ju slijede nalazi se barem jedna različita od 0, n -ta se znamenka uvećava za 1 (na primjer: brojevi 0,573500001 i 72,583, zaokruženi na tri značajne znamenke, bit će 0,574 i 72,6).
3. Ako je $(n+1)$. znamenka jednaka 5, a zadnja je ili je slijede nule, n -ta se znamenka zaokružuje na paran broj (na primjer: brojevi 78450 i 2,075, zaokruženi na tri značajne znamenke, bit će 78400 i 2,08).

1.9. PRISTUP RJEŠAVANJU ZADATAKA STATIKE

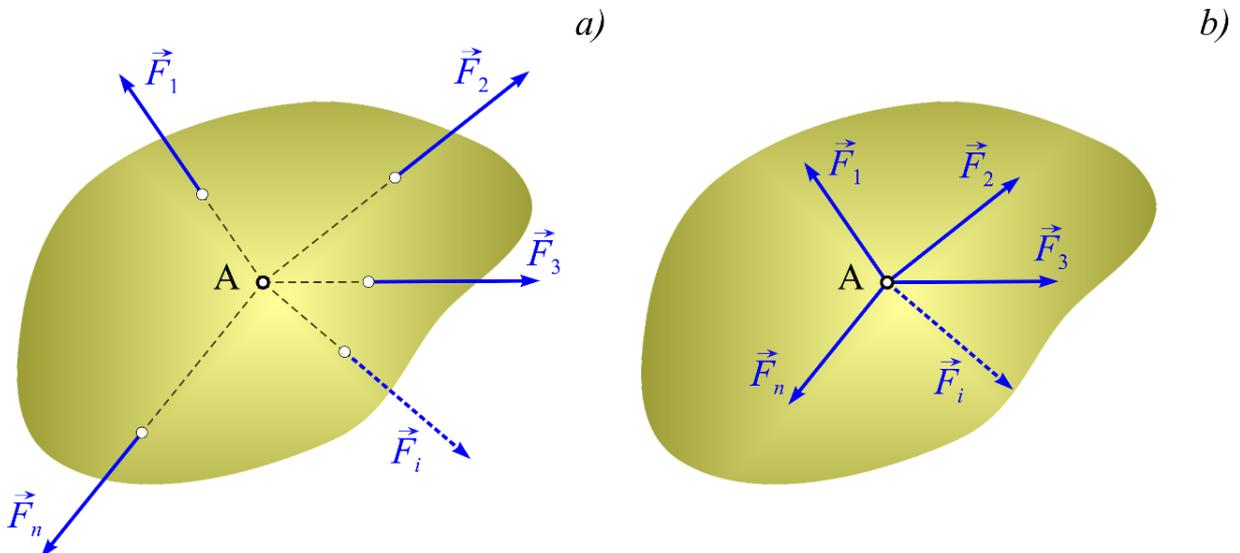
Rješavanje tipičnih problema iz mehanike ujedno je i najbolji put u učenju i razumijevanju njezinih temeljnih zakona i aksioma. Naime, bez obzira na to što se svaki postavljeni problem čini osobitim, svi se oni rješavaju pomoću temeljnih zakona i aksioma danih u poglavlju 1.5.

Kako je rješavanje problema mehanike vrlo logičan i uređen proces, ovdje ćemo dati načelni korak-po-korak pristup tom procesu:

1. Pažljivo pročitati zadatak.
2. Analizom zadatka uočiti jedno ili više tijela bitno za rješenje zadatka.
3. Uredno skicirati to tijelo (ili više tijela) oslobođeno od veza s djelujućim vanjskim aktivnim silama i reakcijama veza.
4. Uočiti poznate i nepoznate veličine te upotrijebiti odgovarajuće uvjete (jednadžbe) ravnoteže za izračunavanje nepoznanica vodeći računa o korektnoj uporabi mjernih jedinica.
5. Provjeriti ispravnost i logičnost dobivenih rješenja. U nekim jednostavnijim slučajevima mogu se analitički dobivena rješenja provjeriti grafičkom metodom, ili obratno.

2. SUČELJENI SUSTAV SILA

Sustav sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ čiji se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki zove se sučeljeni ili konkurentni sustav sila (slika 2.1.a).

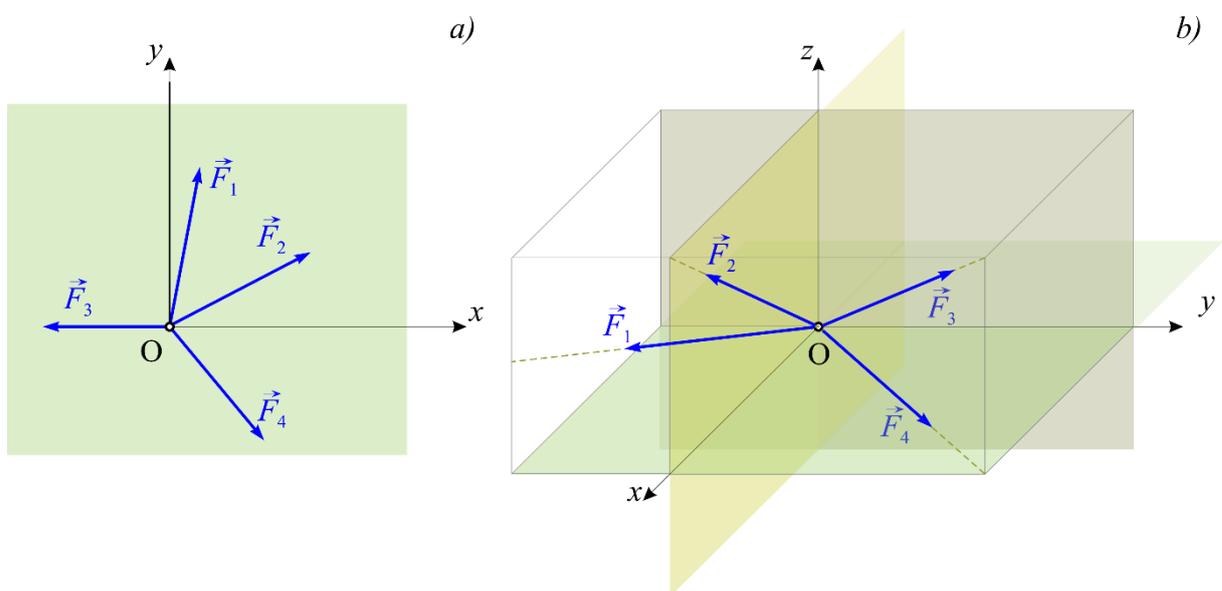


Slika 2.1.: a) sučeljeni sustav sila, b) sučeljeni sustav sila pomaknut u točku A.

Budući da je sila klizni vektor, sve sile prikazane na slici 2.1.a možemo pomaknuti upravo tako da im je hvatište u točki A – točki u kojoj se sijeku pravci njihova djelovanja (slika 2.1.b).

Sučeljeni sustav sila naziva se ravninskim ako pravci djelovanja svih sila leže u istoj ravnini (slika 2.2.a).

Ako pravci djelovanja svih zadanih sila ne leže u istoj ravnini (slika 2.2.b), sučeljeni sustav sila je prostorni.



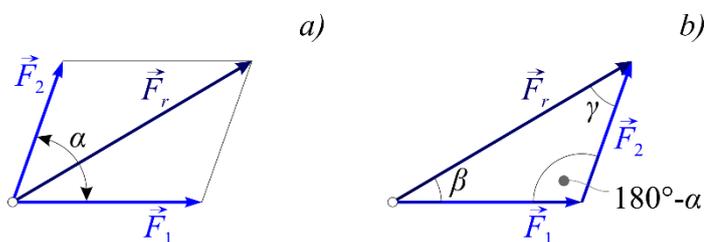
Slika 2.2.: a) sučeljeni sustav sila u ravnini, b) sučeljeni sustav sila u prostoru.

2.1. SLAGANJE SUČELJENIH SILA. REZULTANTA

Sučeljeni sustav sila možemo zamijeniti jednom silom koja ima isti učinak na promatrano tijelo kao i zadani sustav sila. Tu silu nazivamo *rezultantom* zadanog sustava sila, a možemo je odrediti grafičkim ili analitičkim postupkom.

Slaganje dviju sila. Dvije sučeljene sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 koje djeluju na kruto tijelo možemo nadomjestiti jednom silom, njihovom rezultantom \vec{F}_r , koju dobijemo kao dijagonalu paralelograma konstruiranog nad tim silama – *pravilo paralelograma* (slika 2.3.a).

Rezultanta \vec{F}_r dviju sila može se dobiti i kao treća stranica trokuta konstruiranog od zadanih sila (slika 2.3.b) – *pravilo trokuta*.



Slika 2.3.: a) paralelogram sila, b) trokut sila.

Veličinu (intenzitet) rezultante možemo odrediti iz trokuta sila:

- primjenom kosinusnog poučka:

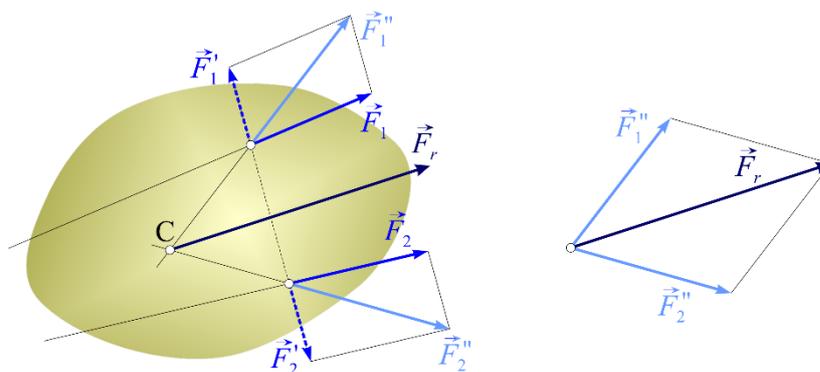
$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} \quad (2.1)$$

- primjenom sinusnog poučka:

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_r}{\sin \alpha}. \quad (2.2)$$

Ako pravci sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 zatvaraju malen kut, sjecište im može biti daleko, neprikladno za prikaz. Taj poseban slučaj određivanja rezultante dviju sila koje djeluju na kruto tijelo prikazan je na slici 2.4.



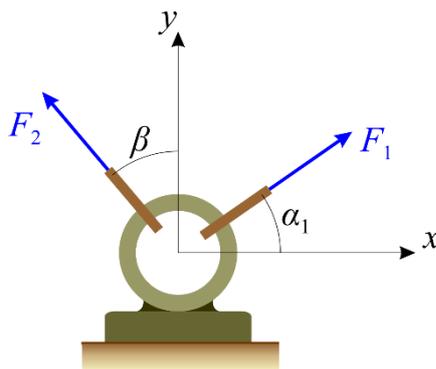
Slika 2.4. Određivanje rezultante dviju sila čiji pravci zatvaraju mali kut

Zadanom sustavu dodajemo uravnoteženi sustav sila \vec{F}_1' i \vec{F}_2' , što je prema drugom aksiomu statike dozvoljeno, nakon čega zbrajanjem sila \vec{F}_1 i \vec{F}_1' te \vec{F}_2 i \vec{F}_2' dobijemo dvije sile \vec{F}_1'' i \vec{F}_2'' sa sjecištem u C, na koje sada možemo primijeniti pravilo paralelograma.

Primjer 2.1.

Valja odrediti rezultantu dviju sučeljenih sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 koje djeluju na prsten prema slici 2.5.

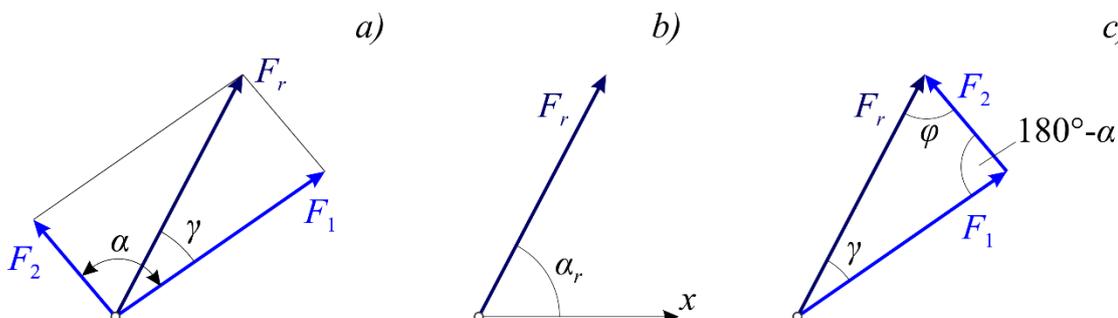
Zadano je: $F_1 = 400 \text{ N}$, $\alpha_1 = 35^\circ$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $\beta = 40^\circ$.



Slika 2.5. Primjer 2.1.

Rješenje:

Za rješavanje ovog zadatka koristi se treći aksiom statike koji glasi: *Dvije sile koje djeluju na kruto tijelo u jednoj točki imaju rezultantu koja se može prikazati dijagonalom paralelograma konstruiranoga nad grafičkim prikazima tih sila* (slika 2.6.a). Također, za određivanje rezultante može se koristiti trokut sila koji predstavlja polovicu paralelograma sila (slika 2.6.c).



Slika 2.6. Primjer 2.1.: a) paralelogram sila, b) pravac rezultante, c) trokut sila.

Iznos rezultante može se odrediti prema (2.1):

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha},$$

gdje je α dobiven na sljedeći način:

$$\alpha = 90^\circ - \alpha_1 + \beta = 90^\circ - 35^\circ + 40^\circ = 95^\circ.$$

Iznos rezultante je, dakle,

$$F_r = \sqrt{400^2 + 200^2 + 2 \cdot 400 \cdot 200 \cdot \cos 95^\circ} = 431 \text{ N}.$$

Pravac rezultante definiran kutom α_r u odnosu na pozitivni dio osi x (slika 2.6.b) slijedi prema (2.2):

$$\frac{F_2}{\sin \gamma} = \frac{F_r}{\sin 85^\circ},$$

$$\sin \gamma = \frac{F_2 \cdot \sin 85^\circ}{F_r} = \frac{200 \cdot \sin 85^\circ}{431,3} = 0,46195, \quad \gamma = 27,51^\circ,$$

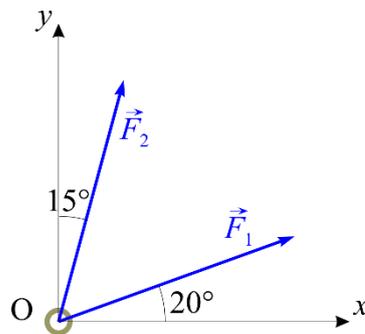
$$\alpha_r = \alpha_1 + \gamma = 35^\circ + 27,51^\circ = 62,51^\circ.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



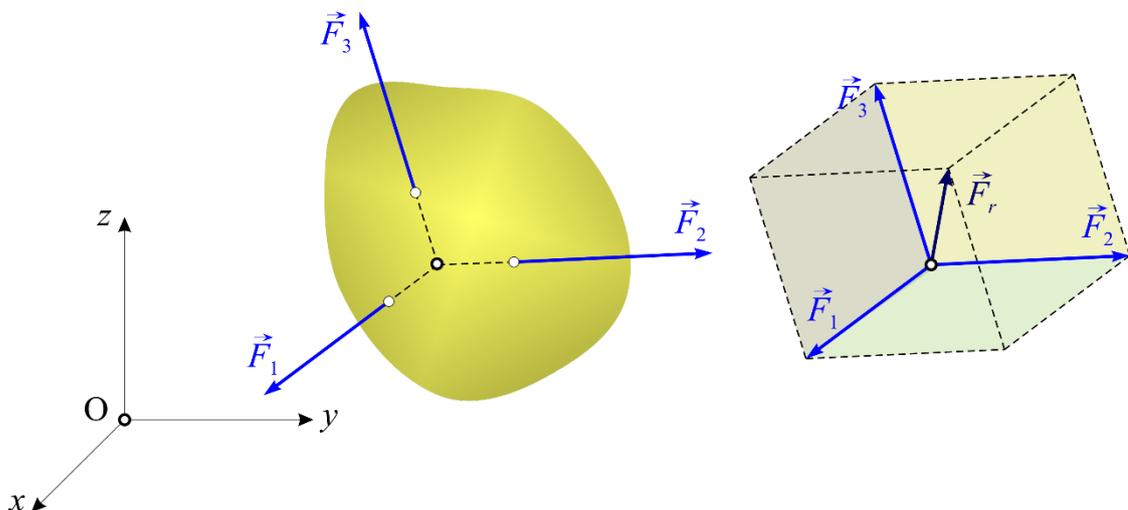
Zadatak 2.1. Valja odrediti rezultantu dviju sučeljenih sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 koje djeluju na prsten prema slici (slika Z.2.1.).

Zadano je: $F_1 = 150 \text{ N}$, $F_2 = 100 \text{ N}$.



Slika Z.2.1. Zadatak 2.1.

Slaganje triju sučeljenih sila koje ne djeluju u istoj ravnini. Rezultantu \vec{F}_r sustava koji čine tri sučeljene sile \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 koje ne leže u jednoj ravnini dobijemo kao dijagonalu paralelopipeda konstruiranoga nad tim silama (*pravilo paralelopipeda – slika 2.7.*).



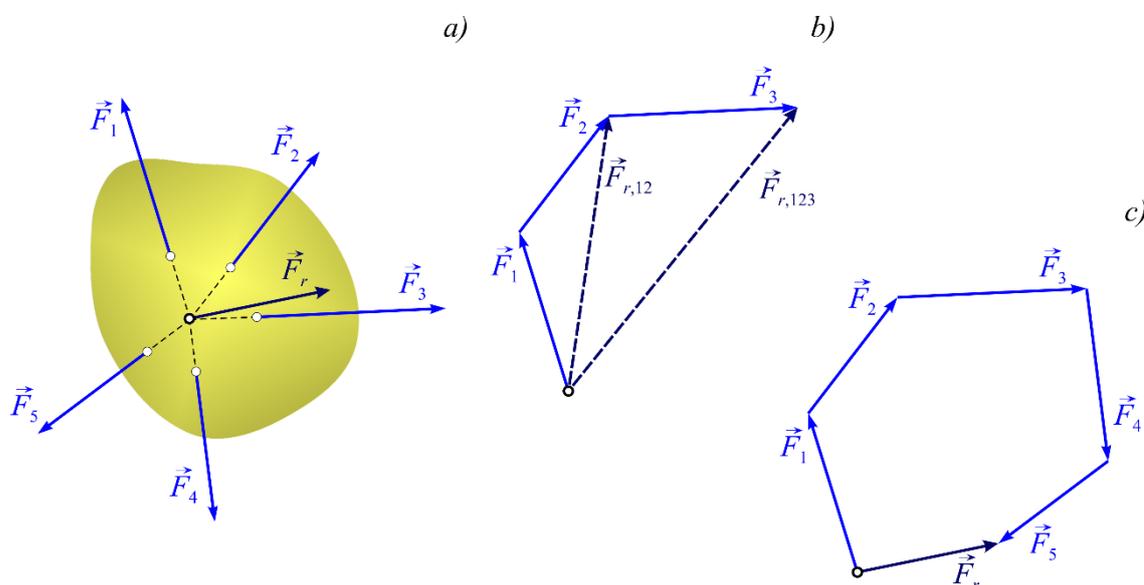
Slika 2.7. Rezultanta triju sučeljenih sila koje ne leže u istoj ravnini

Slaganje proizvoljnog broja sučeljenih sila. Ako na razmatrano kruto tijelo djeluje veći broj sučeljenih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ rezultantu odredimo postupnom primjenom pravila o trokutu sila.

Neka je zadan sustav od pet sila: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ i \vec{F}_5 (slika 2.8.a). Rezultantu ćemo odrediti tako da najprije zbrojimo sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 čime dobijemo $\vec{F}_{r,12}$, pa toj sili dodajemo \vec{F}_3 i dobijemo $\vec{F}_{r,123}$ (slika 2.8.b), nakon čega postupak nastavljamo dok ne nanesimo sve zadane sile.

Konačno, sila koja povezuje početak prve sile i kraj zadnje jest rezultanta promatranog sustava sila (slika 2.8.c). Taj postupak nazivamo *pravilo poligona sila* i glasi: *Rezultanta proizvoljnog broja sučeljenih sila jednaka je po iznosu i pravcu završnoj stranici poligona sila konstruiranoga od tih sila.*

Rezultanta \vec{F}_r usmjerena je od početka prve nanese sile ka vrhu zadnje sile.



Slika 2.8.: a) sučeljeni sustav većeg broja sila, b) zbrajanje prvih triju sila, c) poligon sila.

Općenito kažemo da je rezultanta \vec{F}_r sustava sučeljenih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ jednaka vektorskom (geometrijskom) zbroju tih sila:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n \quad (2.3)$$

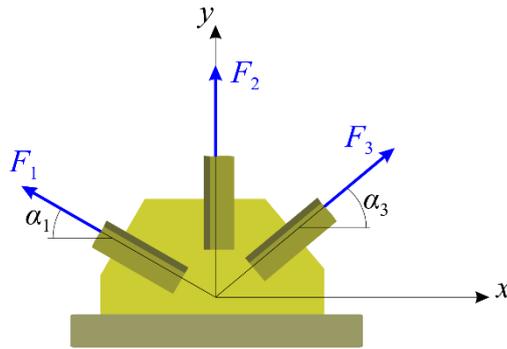
ili kraće zapisano:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.4)$$

Primjer 2.2.

Potrebno je grafičkim postupkom odrediti rezultantu triju sučeljenih sila \vec{F}_1, \vec{F}_2 i \vec{F}_3 koje djeluju na čvorni lim (slika 2.9.).

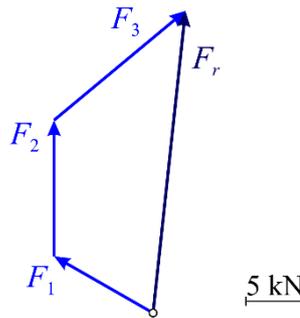
Zadano je: $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 12 \text{ kN}$, $F_3 = 15 \text{ kN}$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 40^\circ$.



Slika 2.9. *Primjer 2.2.*

Rješenje:

Rezultanta je predstavljena završnom stranicom poligona sile (slika 2.10.). Poligon sile konstruira se na sljedeći način: iz proizvoljno odabrane točke nanosi se, u odgovarajućem mjerilu, grafički prikaz sile \vec{F}_1 , a na vrh te sile dodaje se sila \vec{F}_2 , pa na vrh sile \vec{F}_2 sila \vec{F}_3 , kako je prikazano na slici. Početak rezultante je u početku sile \vec{F}_1 , a njezin kraj u vrhu sile \vec{F}_3 . Redoslijed nanošenja sile je proizvoljan. Mjerenjem dužine koja predstavlja grafički prikaz rezultante i množenjem te vrijednosti s mjerilom sile dobije se iznos rezultante.

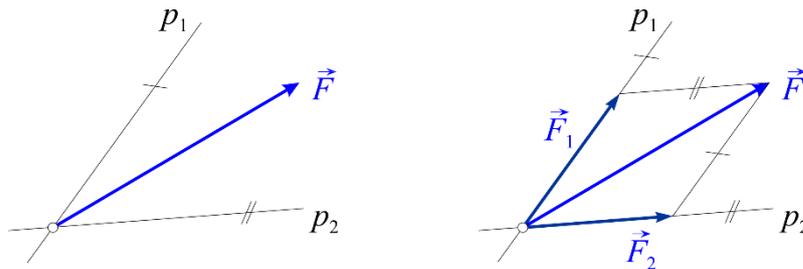


Slika 2.10. *Primjer 2.2.: Poligon sile*

2.2. RAZLAGANJE SILE. KOMPONENTE SILE

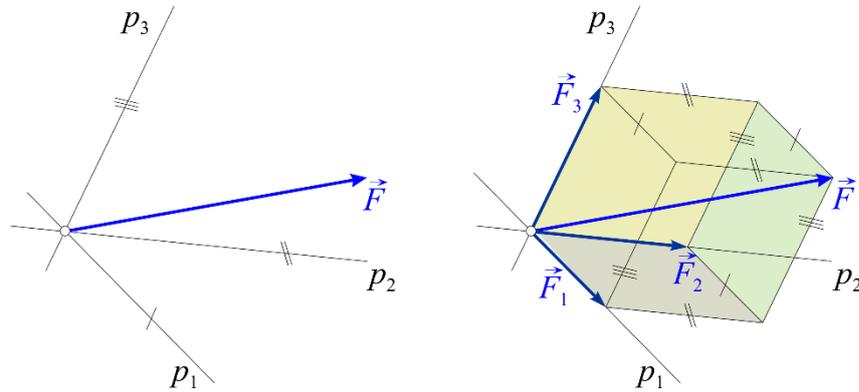
Razložiti (rastaviti) zadanu silu na nekoliko komponenata znači odrediti takav sustav od nekoliko sila kojem je zadana sila rezultanta. U općem slučaju takav je zadatak neodređen, a jednoznačno rješenje postoji samo uz dodatne uvjete.

Tako, na primjer, silu možemo razložiti na dvije komponente poznatih pravaca djelovanja obratnim pravilom paralelograma (slika 2.11.).



Slika 2.11. *Razlaganje sile na dvije komponente*

Razlaganje sile na tri komponente pravci kojih se sijeku u jednoj točki, ali ne leže u jednoj ravnini, vrši se obratnim pravilom paralelopipeda (slika 2.12.).

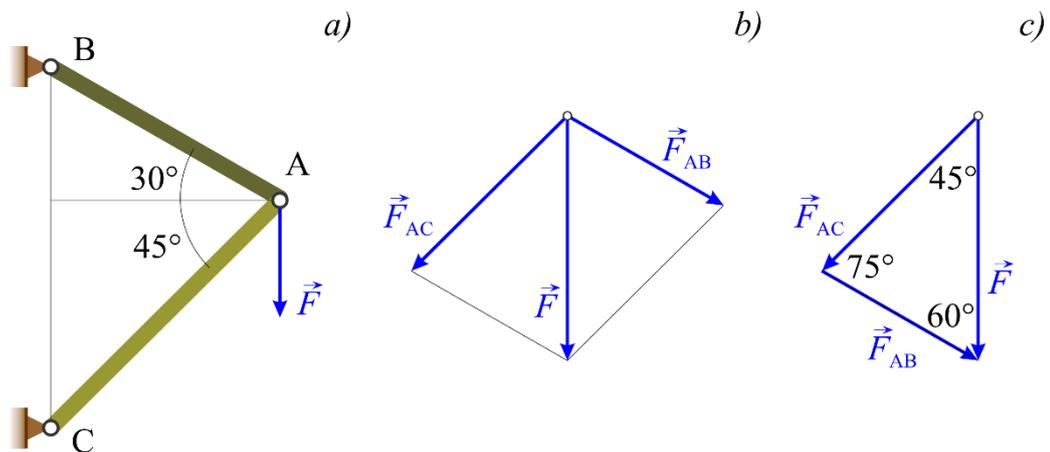


Slika 2.12. Razlaganje sile na tri komponente

Primjer 2.3.

Konstrukcija sastavljena od štapova AB i AC vezana je za vertikalni zid nepomičnim osloncima. Štapovi su međusobno vezani zglobom u A. Konstrukcija je u zglobu A opterećena silom \vec{F} (slika 2.13.a).

Valja odrediti sile koje djeluju na štapove AB i AC. Zadano je: $F = 3 \text{ kN}$.



Slika 2.13. Primjer 2.3.: a) zadana konstrukcija, b) obratno pravilo paralelograma, c) trokut sile.

Rješenje:

Grafički postupak:

Odaberimo mjerilo sila $M_F = 1 \text{ kN/cm}$ pa dužinom duljine 3 cm prikažimo silu F . Kako je veza točke A s vertikalnim zidom ostvarena štapovima AB i AC zanemarivih težina, pravci odgovarajućih reakcija veza (pritiska na veze) moraju proći točkama A i B odnosno A i C.

Potrebno je, dakle, rastaviti silu F na dvije sile poznatih pravaca djelovanja, odakle primjenom obratnog pravila paralelograma sila (slika 2.13.b) slijedi:

$$F_{AC} = 2,7 \text{ cm} \cdot 1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 2,7 \text{ kN}; \quad F_{AB} = 2,2 \text{ cm} \cdot 1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 2,2 \text{ kN}.$$

Trigonometrijski postupak:

Primjenom sinusnog poučka na trokut sila (slika 2.13.c) dobit ćemo:

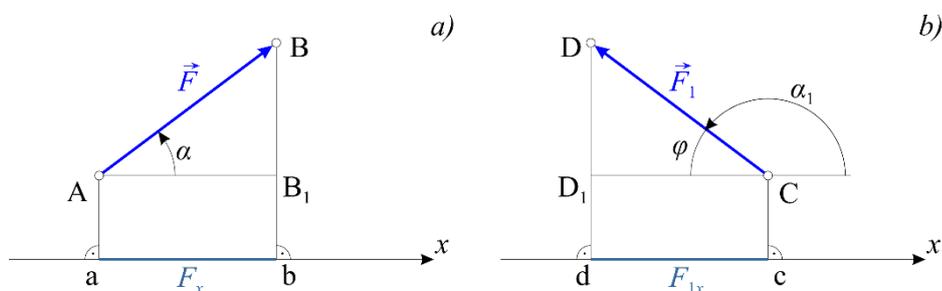
$$\frac{F_{AB}}{\sin 45^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}, \quad F_{AB} = \frac{F \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{3 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = 2,2 \text{ kN};$$

$$\frac{F_{AC}}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}, \quad F_{AC} = \frac{F \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 2,7 \text{ kN}.$$

2.3. ANALITIČKI NAČIN SLAGANJA SILA

2.3.1. Projekcija sile na os i na ravninu

Projekcijom sile \vec{F} na os nazivamo skalarnu veličinu koja je jednaka umnošku intenziteta sile i kosinusa kuta između pravca djelovanja sile i pozitivnog smjera osi. Ova projekcija može biti pozitivna (slika 2.14.a) ili negativna (slika 2.14.b). Na pojmu projekcije sile na os temelji se analitički način rješavanja zadataka statike.

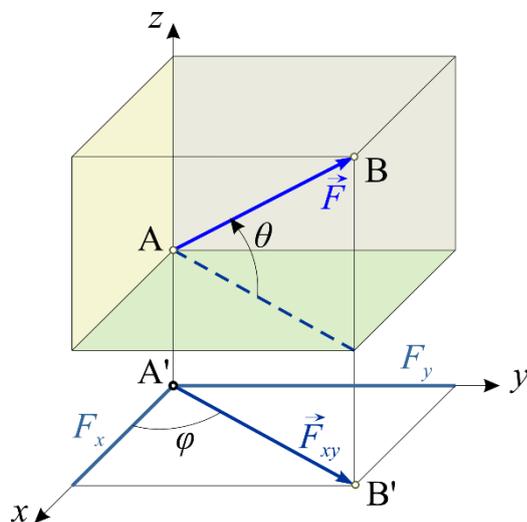


Slika 2.14. Projekcija sile na os: a) pozitivna projekcija, b) negativna projekcija.

$$F_x = F \cdot \cos \alpha; \quad F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = -F_1 \cdot \cos \varphi \quad (2.5)$$

$$F_x = \overline{AB_1} = \overline{ab}; \quad F_{1x} = -\overline{D_1C} = -\overline{dc}.$$

Projekcijom sile \vec{F} na ravninu Oxy nazivamo vektor $\vec{F}_{xy} = \overline{A'B'}$ između projekcije početne i krajnje točke sile \vec{F} na zadanu ravninu (slika 2.15.).



Slika 2.15. Projekcija sile na ravninu

Za razliku od projekcije sile na os, projekcija sile na ravninu je vektorska veličina, intenzitet koje je

$$F_{xy} = F \cdot \cos \theta,$$

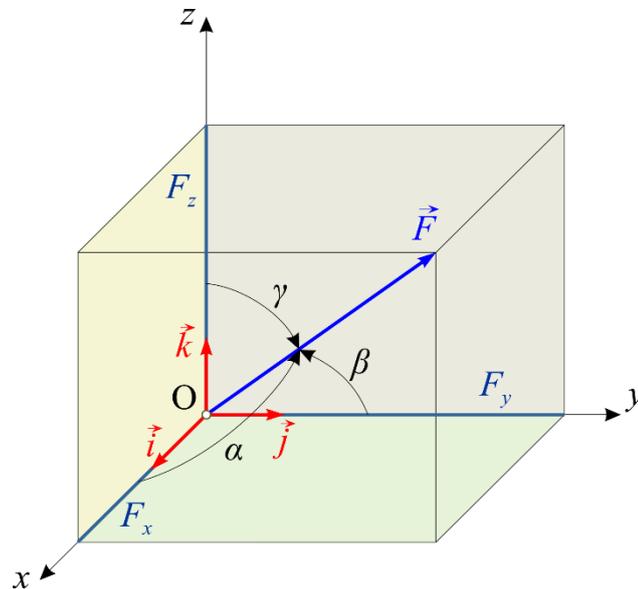
pa je

$$F_x = F_{xy} \cdot \cos \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi; \quad F_y = F_{xy} \cdot \sin \varphi = F \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi.$$

2.3.2. Analitički način definiranja sile

Silu, kao vektorsku veličinu, možemo u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazati kao zbroj triju njezinih komponenta u pravcu koordinatnih osi (slika 2.16.):

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z.$$



Slika 2.16. Komponente sile u pravcu koordinatnih osi

Budući da svaka komponentna sila ima intenzitet koji je jednak projekciji zadane sile na tu os, vektore pravokutnih komponenta možemo dobiti množenjem njihovih intenziteta s odgovarajućim jediničnim vektorima:

$$\vec{F}_x = F_x \cdot \vec{i}; \quad \vec{F}_y = F_y \cdot \vec{j}; \quad \vec{F}_z = F_z \cdot \vec{k},$$

pa je konačno:

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}. \quad (2.6)$$

Intenzitet sile kojoj su poznate pravokutne komponente je:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (2.7)$$

Sukladno definiciji projekcije sile na os, vrijedi:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha; \quad F_y = F \cdot \cos \beta; \quad F_z = F \cdot \cos \gamma, \quad (2.8)$$

gdje su α , β i γ kutovi koje vektor sile F zatvara s osima koordinatnog sustava x , y i z .

Kosinusi smjera kutova iz (2.8) su:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

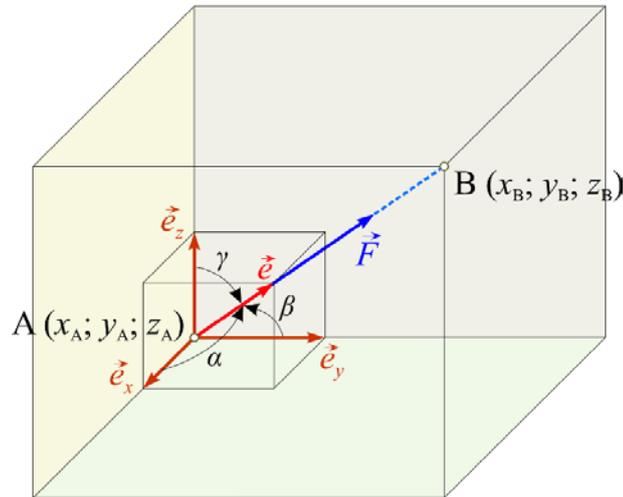
Kvadriranjem ovih jednakosti i zbrajanjem dobijemo:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1; \quad (2.9)$$

što znači da su samo dva od ovih triju kutova neovisna.

U slučaju ravninskog sustava sila bit će:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j}, & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F}, & \cos \beta &= \frac{F_y}{F}, & \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta &= 1. \end{aligned} \quad (2.10)$$



Slika 2.17. Prikaz sile s pomoću njoj kolinearnog jediničnog vektora

Sila se također može vektorski prikazati s pomoću iznosa sile F i jediničnog vektora \vec{e} koji ima isti pravac i smjer kao i sila (slika 2.17.):

$$\vec{F} = F \cdot \vec{e}, \quad \vec{e} = e_x \cdot \vec{i} + e_y \cdot \vec{j} + e_z \cdot \vec{k}, \quad (2.11)$$

gdje su e_x , e_y i e_z projekcije vektora \vec{e} na osi x , y i z :

$$e_x = \cos \alpha, \quad e_y = \cos \beta, \quad e_z = \cos \gamma. \quad (2.12)$$

Pravac djelovanja sile može biti zadan točkama $A(x_A, y_A, z_A)$ i $B(x_B, y_B, z_B)$.

Tada je vektor položaja točke B u odnosu na točku A određen izrazom

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k}, \quad (2.13)$$

a iznos (modul) tog vektora izrazom

$$r_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (2.14)$$

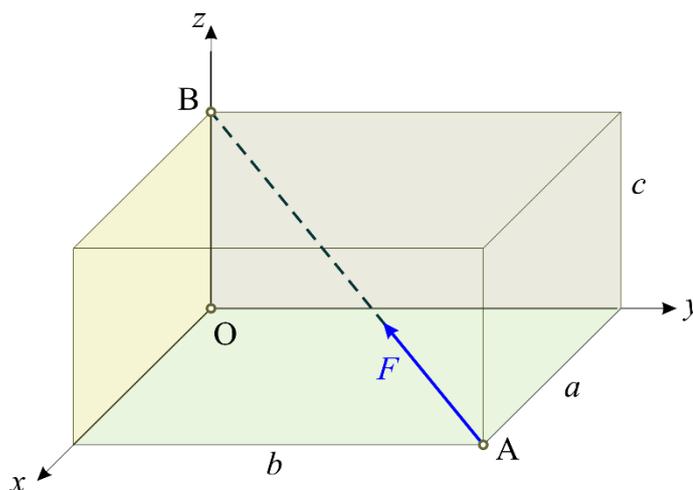
Jedinični vektor \vec{e}_{AB} koji određuje pravac djelovanja sile \vec{F} može se dobiti prema izrazu

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}. \quad (2.15)$$

Primjer 2.4.

Na tijelo oblika kvadra djeluje sila \vec{F} čiji pravac djelovanja prolazi točkama A i B (slika 2.18.). Valja odrediti vektorski prikaz sile \vec{F} ako je zadan njezin intenzitet F .

Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $F = 800 \text{ N}$.



Slika 2.18. *Primjer 2.4.*

Rješenje:

Vektorski zapis sile dobije se prema (2.11) $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_{AB}$, gdje je \vec{e}_{AB} jedinični vektor usmjeren od točke A ka točki B. Koordinate točaka A i B su: A(3; 4; 0), B(0; 0; 2).

Jedinični vektor \vec{e}_{AB} može se dobiti prema (2.15):

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}},$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AB} = (0 - 3) \cdot \vec{i} + (0 - 4) \cdot \vec{j} + (2 - 0) \cdot \vec{k} = -3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,385$$

pa je

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}}{5,385} = -0,557 \cdot \vec{i} - 0,743 \cdot \vec{j} + 0,371 \cdot \vec{k}.$$

Vektorski zapis zadane sile je

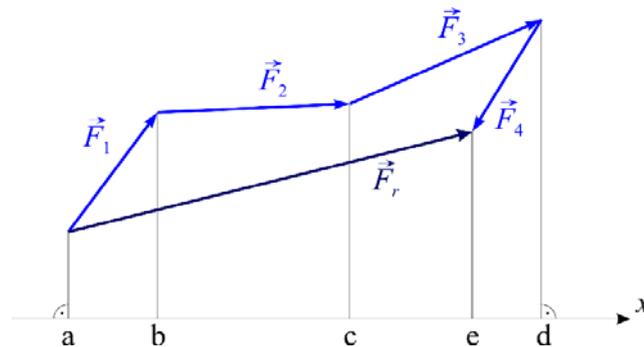
$$\vec{F} = F \cdot \vec{e}_{AB} = 800 \cdot (-0,557 \cdot \vec{i} - 0,743 \cdot \vec{j} + 0,371 \cdot \vec{k}),$$

$$\vec{F} = -445,6 \cdot \vec{i} - 594,4 \cdot \vec{j} + 296,8 \cdot \vec{k}.$$

2.3.3. Analitički način slaganja sustava sila

Poznajući analitički način prikazivanja sila, izvest ćemo izraze za određivanje rezultante sučeljenog sustava sila analitičkim putem.

Neka je zadan sustav od četiri sile čija je geometrijska suma prikazana rezultantom \vec{F}_r (slika 2.19.).



Slika 2.19. Grafički prikaz rezultante sučeljenog sustava sila u ravnini

Projekcije pojedinih sila na os x su:

$$F_{1x} = \overline{ab}; \quad F_{2x} = \overline{bc}; \quad F_{3x} = \overline{cd}, \quad F_{4x} = -\overline{ed}; \quad F_{rx} = \overline{ae}.$$

Kako je

$$\overline{ae} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + (-\overline{de}),$$

možemo pisati:

$$F_{rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}.$$

Dakle: *Projekcija sile, koja predstavlja geometrijsku sumu zadanog sustava sila, na po volji odabranu os, jednaka je sumi projekcija komponentnih sila na tu istu os.*

Za sustav od n sila, kojemu je rezultanta:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (2.16)$$

bit će projekcije rezultante na koordinatne osi:

$$(1) \quad F_{rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad (2) \quad F_{ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad (3) \quad F_{rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} \quad (2.17)$$

pa su intenzitet rezultante i kosinusi smjera:

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + F_{rz}^2}; \quad \cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r}; \quad \cos \beta_r = \frac{F_{ry}}{F_r}; \quad \cos \gamma_r = \frac{F_{rz}}{F_r}.$$

Kada je riječ o ravninskom sustavu sila, projekcije rezultante na koordinatne osi su:

$$(1) F_{rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad (2) F_{ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad (2.18)$$

a intenzitet rezultante i kosinusi smjera:

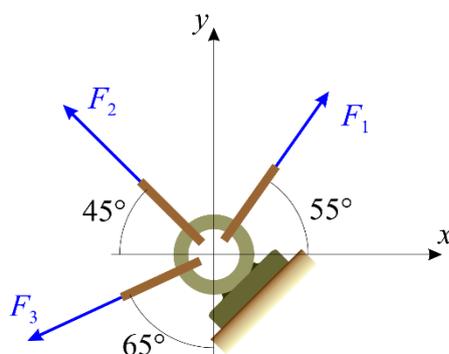
$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}; \quad \cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r}; \quad \cos \beta_r = \frac{F_{ry}}{F_r}.$$

Znak sumiranja $\sum_{i=1}^n$ ubuduće ćemo pisati jednostavnije, kao \sum uz identično značenje.

Primjer 2.5.

Valja odrediti rezultantu triju sučeljenih sila koje djeluju na prsten (slika 2.20.).

Zadano je: $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 600 \text{ N}$, $F_3 = 300 \text{ N}$.



Slika 2.20. *Primjer 2.5.*

Rješenje:

Projekcije sila na koordinatne osi x i y određene su izrazima:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 55^\circ = 500 \cdot 0,574 = 286,8 \text{ N},$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 55^\circ = 500 \cdot 0,819 = 409,6 \text{ N},$$

$$F_{2x} = -F_2 \cdot \cos 45^\circ = -600 \cdot 0,707 = -424,3 \text{ N},$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 45^\circ = 600 \cdot 0,707 = 424,3 \text{ N},$$

$$F_{3x} = -F_3 \cdot \cos 25^\circ = -300 \cdot 0,906 = -271,9 \text{ N},$$

$$F_{3y} = -F_3 \cdot \sin 25^\circ = -300 \cdot 0,423 = -126,8 \text{ N}.$$

Projekcije rezultante na iste osi mogu se dobiti prema (2.17):

$$F_{rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{i=1}^3 F_{ix} = 286,8 - 424,3 - 271,9 = -409,4 \text{ N},$$

$$F_{ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \sum_{i=1}^3 F_{iy} = 409,6 + 424,3 - 126,8 = 707,1 \text{ N}.$$

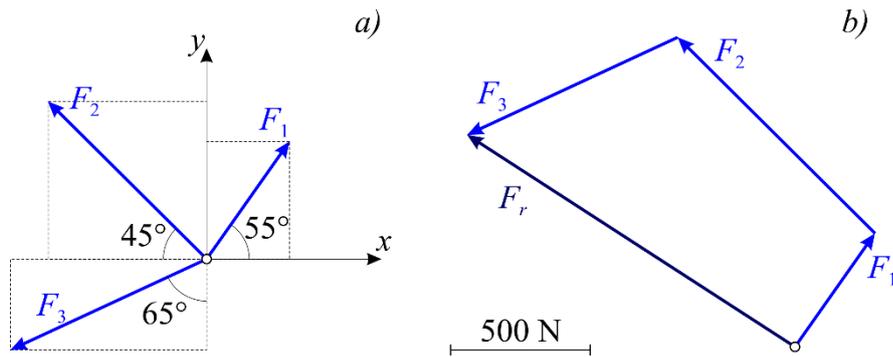
Vektorski zapis rezultante glasi:

$$\vec{F}_r = -409,4 \cdot \vec{i} + 707,1 \cdot \vec{j} \text{ N,}$$

a njezin je iznos:

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{(-409,4)^2 + 707,1^2} = 817,1 \text{ N.}$$

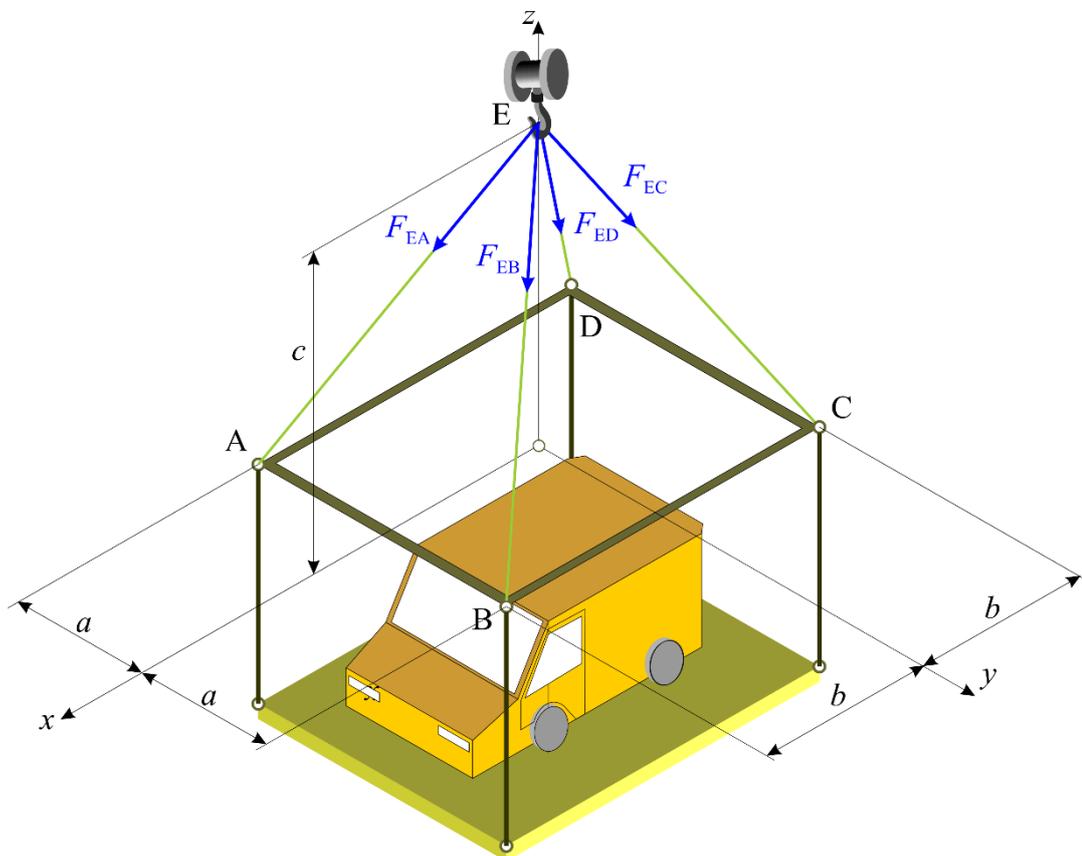
Rezultanta se može dobiti i grafičkim postupkom konstruirajući poligon sila u odgovarajućem mjerilu (slika 2.21.b), a kako je to ranije opisano.



Slika 2.21. *Primjer 2.5.*: a) zadani sučeljeni sustav sila, b) poligon sila.

Primjer 2.6.

Kuka **E** opterećena je četirima silama \vec{F}_{EA} , \vec{F}_{EB} , \vec{F}_{EC} i \vec{F}_{ED} istog intenziteta F (slika 2.22.).



Slika 2.22. *Primjer 2.6.*

Potrebno je svaku silu prikazati u vektorskom obliku te odrediti njihovu rezultantu.

Zadano: $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 6 \text{ m}$, $F = 18 \text{ kN}$.

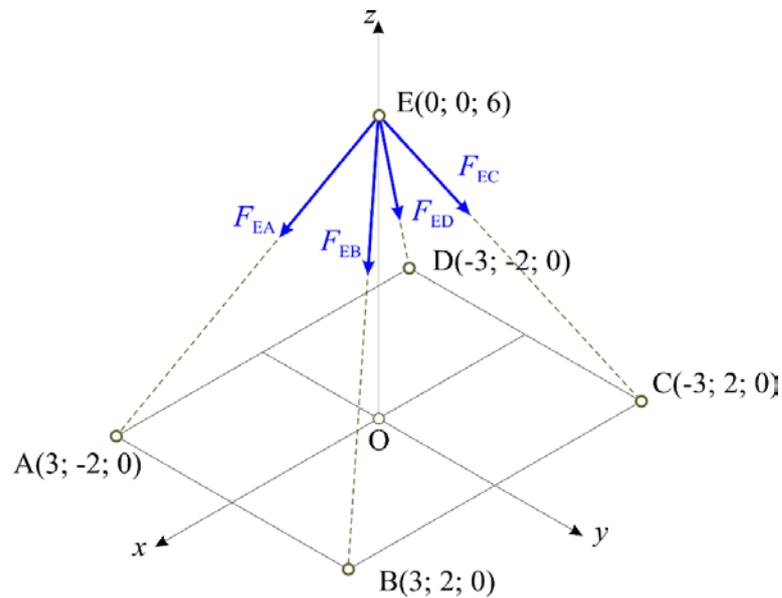
Rješenje:

Svaka sila može se prikazati u vektorskom obliku kao umnožak intenziteta dane sile i jediničnog vektora na pravcu razmatrane sile (slika 2.23.) prema (2.11), pa su vektorski zapisi svih sila:

$$\vec{F}_{EA} = F_{EA} \cdot \vec{e}_{EA}; \quad \vec{F}_{EB} = F_{EB} \cdot \vec{e}_{EB}; \quad \vec{F}_{EC} = F_{EC} \cdot \vec{e}_{EC} \quad \vec{F}_{ED} = F_{ED} \cdot \vec{e}_{ED}.$$

Intenziteti svih sila su zadani i iznose:

$$F_{EA} = F_{EB} = F_{EC} = F_{ED} = 18 \text{ kN}.$$



Slika 2.23. *Primjer 2.6.: Kuka opterećena četirima silama jednakog intenziteta*

Za određivanje jediničnih vektora potrebne su koordinate karakterističnih točaka A, B, C, D i E. Ove koordinate glase: A(3; -2; 0), B(3; 2; 0), C(-3; 2; 0), D(-3; -2; 0), E(0; 0; 6).

Jedinični vektori određuju se dijeljenjem vektora s njihovim intenzitetima prema (2.15):

$$\vec{e}_{EA} = \frac{\vec{r}_{EA}}{r_{EA}}; \quad \vec{e}_{EB} = \frac{\vec{r}_{EB}}{r_{EB}}; \quad \vec{e}_{EC} = \frac{\vec{r}_{EC}}{r_{EC}} \quad \text{i} \quad \vec{e}_{ED} = \frac{\vec{r}_{ED}}{r_{ED}}.$$

Vektori položaja \vec{r}_{EA} , \vec{r}_{EB} , \vec{r}_{EC} i \vec{r}_{ED} , kao i njihovi intenziteti r_{EA} , r_{EB} , r_{EC} i r_{ED} , mogu se odrediti prema (2.13) i (2.14):

$$\vec{r}_{EA} = (x_A - x_E) \cdot \vec{i} + (y_A - y_E) \cdot \vec{j} + (z_A - z_E) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{EA} = (3-0) \cdot \vec{i} + (-2-0) \cdot \vec{j} + (0-6) \cdot \vec{k} = 3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k},$$

$$r_{EA} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7;$$

$$\vec{r}_{EB} = (x_B - x_E) \cdot \vec{i} + (y_B - y_E) \cdot \vec{j} + (z_B - z_E) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{EB} = (3-0) \cdot \vec{i} + (2-0) \cdot \vec{j} + (0-6) \cdot \vec{k} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k},$$

$$r_{EB} = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7;$$

$$\vec{r}_{EC} = (x_C - x_E) \cdot \vec{i} + (y_C - y_E) \cdot \vec{j} + (z_C - z_E) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{EC} = (-3-0) \cdot \vec{i} + (2-0) \cdot \vec{j} + (0-6) \cdot \vec{k} = -3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k},$$

$$r_{EC} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7;$$

$$\vec{r}_{ED} = (x_D - x_E) \cdot \vec{i} + (y_D - y_E) \cdot \vec{j} + (z_D - z_E) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{ED} = (-3-0) \cdot \vec{i} + (-2-0) \cdot \vec{j} + (0-6) \cdot \vec{k} = -3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k},$$

$$r_{ED} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7.$$

Jedinični vektori su:

$$\vec{e}_{EA} = \frac{\vec{r}_{EA}}{r_{EA}} = \frac{3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k}}{7} = 0,4286 \cdot \vec{i} - 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{EB} = \frac{\vec{r}_{EB}}{r_{EB}} = \frac{3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k}}{7} = 0,4286 \cdot \vec{i} + 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{EC} = \frac{\vec{r}_{EC}}{r_{EC}} = \frac{-3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k}}{7} = -0,4286 \cdot \vec{i} + 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{ED} = \frac{\vec{r}_{ED}}{r_{ED}} = \frac{-3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k}}{7} = -0,4286 \cdot \vec{i} - 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k}.$$

Konačno je vektorski zapis zadanih sila:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{EA} &= F_{EA} \cdot \vec{e}_{EA} = 18 \cdot (0,4286 \cdot \vec{i} - 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k}) = \\ &= 7,715 \cdot \vec{i} - 5,143 \cdot \vec{j} - 15,428 \cdot \vec{k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{EB} &= F_{EB} \cdot \vec{e}_{EB} = 18 \cdot (0,4286 \cdot \vec{i} + 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k}) = \\ &= 7,715 \cdot \vec{i} + 5,143 \cdot \vec{j} - 15,428 \cdot \vec{k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{EC} &= F_{EC} \cdot \vec{e}_{EC} = 18 \cdot (-0,4286 \cdot \vec{i} + 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k}) = \\ &= -7,715 \cdot \vec{i} + 5,143 \cdot \vec{j} - 15,428 \cdot \vec{k}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ED} &= F_{ED} \cdot \vec{e}_{ED} = 18 \cdot (-0,4286 \cdot \vec{i} - 0,2857 \cdot \vec{j} - 0,8571 \cdot \vec{k}) = \\ &= -7,715 \cdot \vec{i} - 5,143 \cdot \vec{j} - 15,428 \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Rezultanta zadanih sila dobije se prema (2.16):

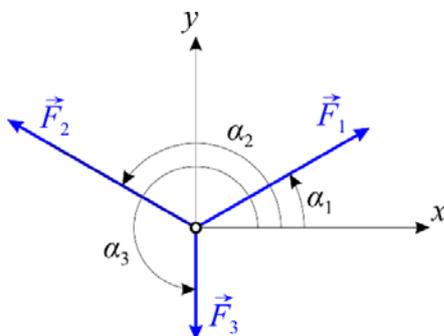
$$\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{EA} + \vec{F}_{EB} + \vec{F}_{EC} + \vec{F}_{ED}; \quad \vec{F}_r = -61,712 \cdot \vec{k}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



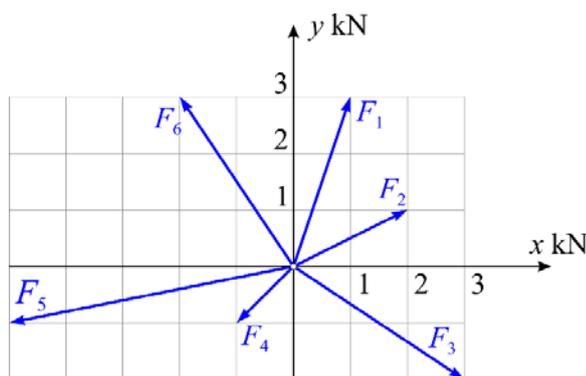
Zadatak 2.2. Potrebno je odrediti rezultantu triju sučeljenih (konkurentnih) sila, koje leže u istoj ravnini (slika Z.2.2.). Primijeniti grafički i analitički postupak.

Zadano je: $F_1 = 300 \text{ N}$, $\alpha_1 = 30^\circ$; $F_2 = 350 \text{ N}$, $\alpha_2 = 150^\circ$; $F_3 = 150 \text{ N}$, $\alpha_3 = 270^\circ$.



Slika Z.2.2. Zadatak Z.2.2.

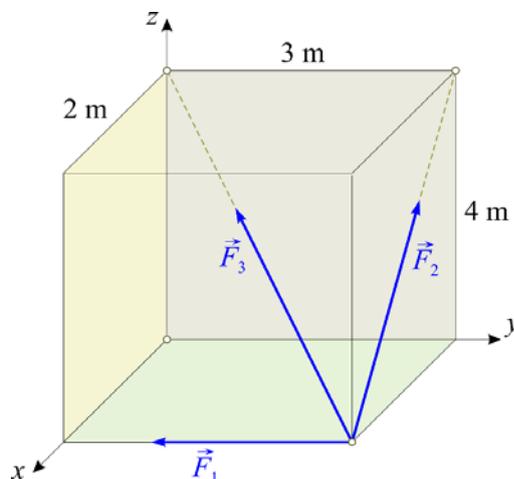
Zadatak 2.3. Zadan je sučeljeni sustav sila u ravnini (slika Z.2.3.). Analitičkim postupkom odrediti rezultantu.



Slika Z.2.3. Zadatak Z.2.3.

Zadatak 2.4. Valja odrediti rezultantu zadanog sučeljenog sustava sila u prostoru (slika Z.2.4.).

Zadano je: $F_1 = 200 \text{ N}$, $F_2 = 300 \text{ N}$, $F_3 = 400 \text{ N}$.



Slika Z.2.4. Zadatak 2.4.

2.4. RAVNOTEŽA SUČELJENOG SUSTAVA SILA

Uvjete ravnoteže statike zadovoljavaju sile koje djeluju kako na tijelo koje miruje, tako i na tijelo koje se giba „po inerciji”. Odatle slijedi da je uravnoteženost sila, koje djeluju na slobodno kruto tijelo, potreban, ali ne i dovoljan uvjet za mirovanje krutog tijela. U stanju mirovanja tijelo će se nalaziti samo u tom slučaju ako je ono mirovalo i do trenutka kada je započelo djelovanje uravnoteženog sustava sila na tijelo.

2.4.1. Geometrijski uvjeti ravnoteže

Budući da rezultantu sučeljenog sustava \vec{F}_r određujemo kao završnu stranicu poligona konstruiranog od tih sila, to rezultanta \vec{F}_r može biti jednaka nuli samo ako se kraj posljednje sile u poligonu sila poklapa s početkom prve sile, tj. ako je poligon sila zatvoren.

Prema tome, *za ravnotežu konkurentnog sustava sila potrebno je i dovoljno da poligon sila, konstruiran od tih sila, bude zatvoren.*

2.4.2. Analitički uvjeti ravnoteže

Intenzitet rezultante sučeljenog sustava sila dan je izrazom:

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + F_{rz}^2}.$$

Očividno je da će taj intenzitet biti jednak nuli samo ako su sve tri projekcije rezultante na koordinatne osi jednake nuli:

$$F_{rx} = 0, \quad F_{ry} = 0, \quad F_{rz} = 0,$$

ili s obzirom na (2.17):

$$(1) \quad \sum F_{ix} = 0, \quad (2) \quad \sum F_{iy} = 0, \quad (3) \quad \sum F_{iz} = 0, \quad (2.19)$$

te možemo zaključiti: *Za ravnotežu sučeljenog sustava sila u prostoru potrebno je i dovoljno da suma projekcija svih sila na svaku od triju koordinatnih osi bude jednaka nuli.*

Za ravnotežu konkurentnog sustava sila u ravnini treba biti: $F_{rx} = 0, \quad F_{ry} = 0,$

odnosno prema (2.17):

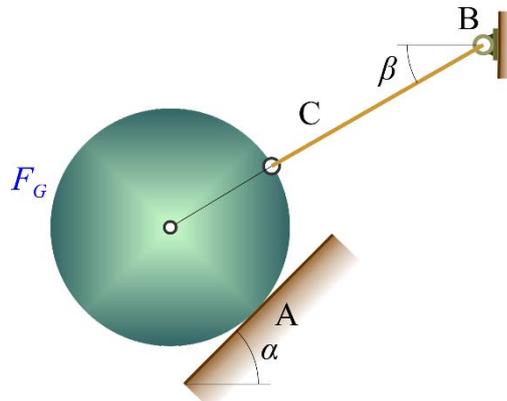
$$(1) \quad \sum F_{ix} = 0, \quad (2) \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (2.20)$$

Dakle, *za ravnotežu sučeljenog sustava sila u ravnini potrebno je i dovoljno da suma projekcija svih sila na dvije koordinatne osi bude jednaka nuli.*

Primjer 2.7.

Kugla težine \vec{F}_G oslonjena je na strmu (glatku) ravninu u točki A i vezana je užetom BC za podlogu (slika 2.24.).

Odrediti grafičkim i analitičkim postupkom iznose reakcije strme ravnine u točki A i sile u užetu BC ako je zadano: $F_G = 500 \text{ N}$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.

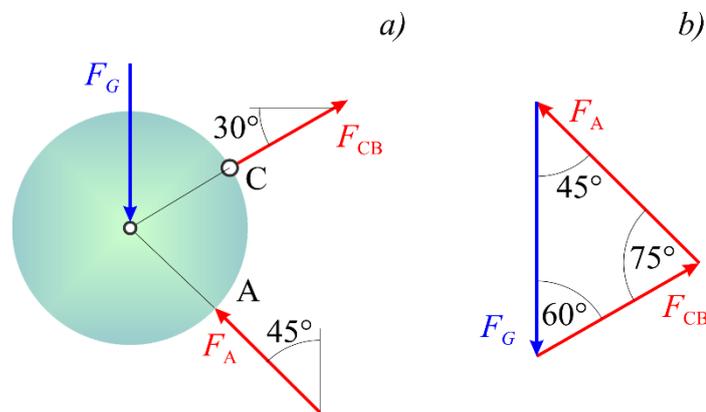


Slika 2.24. *Primjer 2.7.*

Rješenje:

Kuglu treba osloboditi od veza sa strmom ravninom i užetom te ove veze nadomjestiti odgovarajućim reakcijama veza. U točki dodira A s ravninom na kuglu će djelovati reakcija veze \vec{F}_A koja leži na pravcu okomitom na ravninu. U točki C dodaje se sila \vec{F}_{CB} kojom uže djeluje na kuglu, a koja ima pravac užeta.

Dakle, nakon oslobađanja od veza na kuglu djeluje sučeljeni sustav sila koji čine težina \vec{F}_G , sila \vec{F}_{CB} kojom uže djeluje na kuglu i reakcija glatke strme ravnine \vec{F}_A (slika 2.25.a).



Slika 2.25. *Primjer 2.7.:* a) kugla kao slobodno tijelo, b) trokut sila.

Kako je zadani sustav sila u ravnoteži, mogu se napisati uvjeti ravnoteže prema (2.20):

$$\sum F_x = 0: \quad -F_A \cdot \sin 45^\circ + F_{CB} \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_A \cdot \cos 45^\circ + F_{CB} \cdot \sin 30^\circ - 500 = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednačbi dobiju se traženi iznosi reakcija veza:

$$F_A = 448,2 \text{ N}, \quad F_{CB} = 365,9 \text{ N}.$$

Zadatak se može riješiti i primjenom sinusnog poučka na trokut sila (slika 2.25.b), kako slijedi:

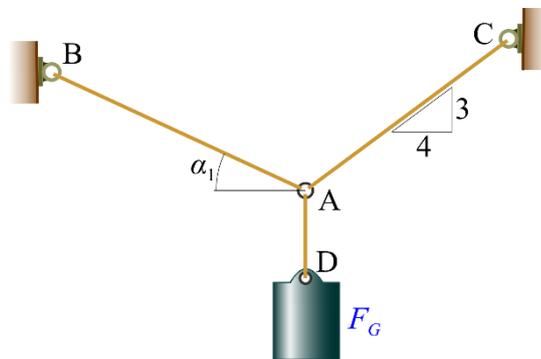
$$\frac{F_A}{\sin 60^\circ} = \frac{F_G}{\sin 75^\circ}, \quad F_A = \frac{F_G \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{500 \cdot 0,866}{0,966} = 448,2 \text{ N},$$

$$\frac{F_{CB}}{\sin 45^\circ} = \frac{F_G}{\sin 75^\circ}, \quad F_{CB} = \frac{F_G \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{500 \cdot 0,707}{0,966} = 365,9 \text{ N}.$$

Napomena: Kugla na uže po principu akcije i reakcije djeluje silom istog intenziteta koji ima sila kojom uže djeluje na kuglu. Iz tog je razloga iznos sile u užetu također $F_{CB} = 365,9 \text{ N}$.

Primjer 2.8.

Teret težine \vec{F}_G vezan je pomoću prstena A za podlogu pomoću dva užeta AB i AC (slika 2.26.). Valja odrediti sile kojima užad AB i AC djeluje na prsten. Zadana je težina sanduka $F_G = 5 \text{ kN}$ i kut $\alpha_1 = 25^\circ$.

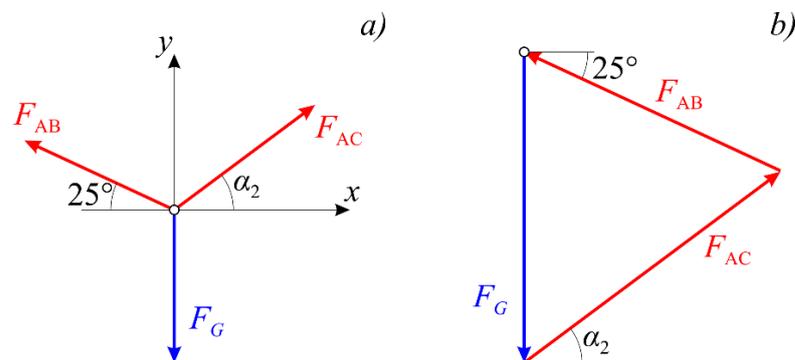


Slika 2.26. *Primjer 2.8.*

Rješenje:

Prsten u točki A treba osloboditi od veza s užetima i njih zamijeniti odgovarajućim reakcijama veza.

Na prsten djeluju tri sučeljene sile: težina tereta \vec{F}_G preko užeta AD te sile \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AC} kojima užad AB i AC djeluje na prsten (slika 2.27.a).



Slika 2.27. *Primjer 2.8.: a) prsten A kao slobodno tijelo, b) trokut sile.*

Iznosi sila F_{AB} i F_{AC} kojima užad djeluje na prsten A mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže postavljenih za prsten, a koji glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{AB} \cdot \cos 25^\circ + F_{AC} \cdot \cos \alpha_2 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{AB} \cdot \sin 25^\circ + F_{AC} \cdot \sin \alpha_2 - F_G = 0,$$

gdje je kut α_2 dobiven prema slici 2.26.:

$$\tan \alpha_2 = \frac{3}{4} = 0,75; \quad \alpha_2 = 36,87^\circ.$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti gornje jednačbe poprimaju oblik:

$$-F_{AB} \cdot \cos 25^\circ + F_{AC} \cdot \cos 36,87^\circ = 0,$$

$$F_{AB} \cdot \sin 25^\circ + F_{AC} \cdot \sin 36,87^\circ - 5 = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednačbi dobiju se iznosi traženih sila:

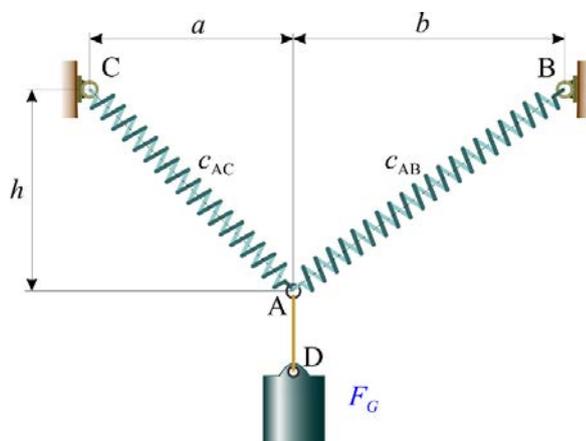
$$F_{AB} = 4,536 \text{ kN}, \quad F_{AC} = 5,139 \text{ kN}.$$

Zadatak se mogao riješiti i s pomoću trokuta sila (slika 2.27.b).

Primjer 2.9.

Teret težine \vec{F}_G vezan je preko prstena A oprugama AB i AC za podlogu. Duljine nerastegnutih opruga su $l_{0,AB}$, odnosno $l_{0,AC}$. Krutost opruge AB je c_{AB} . Potrebno je odrediti silu u opruzi AC i njezinu krutost te težinu tereta ako se sustav u položaju na slici 2.28. nalazi u ravnoteži.

Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $l_{0,AB} = 2,5 \text{ m}$, $l_{0,AC} = 3 \text{ m}$, $c_{AB} = 50 \text{ N/m}$.

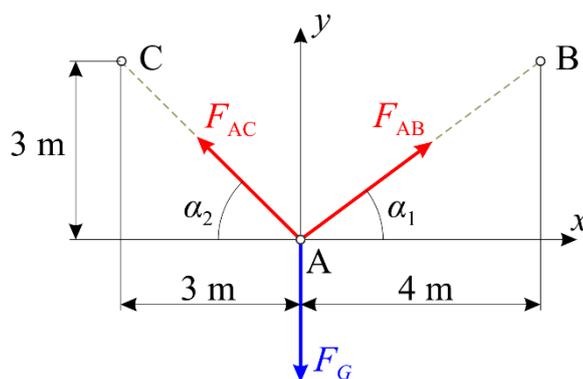


Slika 2.28. *Primjer 2.9.*

Rješenje:

Prsten u točki A treba osloboditi od veza s oprugama i njih zamijeniti odgovarajućim reakcijama veza. Na prsten djeluju tri sučeljene sile: težina tereta \vec{F}_G preko užeta AD te sile \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AC} kojima opruge AB i AC djeluju na prsten (slika 2.29.).

Duljina opruge AB u položaju na slici je $l_{AB} = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$, a njezino produljenje iznosi $\Delta l_{AB} = l_{AB} - l_{0,AB} = 5 - 2,5 = 2,5 \text{ m}$.



Slika 2.29. *Primjer 2.9.: Prsten A kao slobodno tijelo*

Iznos sile kojom opruga AB djeluje na prsten jest:

$$F_{AB} = c_{AB} \cdot \Delta l_{AB} = 50 \cdot 2,5 = 125 \text{ N}.$$

Kutovi α_1 i α_2 koje sile F_{AB} i F_{AC} zatvaraju s osi x dobiju se s pomoću slike 2.29.:

$$\tan \alpha_1 = \frac{h}{b} = \frac{3}{4} = 0,75, \quad \alpha_1 = 36,87^\circ; \quad \tan \alpha_2 = \frac{h}{a} = \frac{3}{3} = 1, \quad \alpha_2 = 45^\circ.$$

Uvjeti ravnoteže za prsten u točki A glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{AB} \cdot \cos 36,87^\circ - F_{AC} \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{AB} \cdot \sin 36,87^\circ + F_{AC} \cdot \sin 45^\circ - F_G = 0.$$

Iz prve od gornjih jednažbi je

$$F_{AC} = \frac{0,8 \cdot F_{AB}}{0,707} = \frac{0,8 \cdot 125}{0,707} = 141,4 \text{ N}.$$

Produljenje opruge AC u položaju prikazanom na slici je

$$\Delta l_{AC} = l_{AC} - l_{0,AC} = 3\sqrt{2} - 3 = 1,243 \text{ m},$$

a njezina krutost

$$c_{AC} = \frac{F_{AC}}{\Delta l_{AC}} = \frac{141,4}{1,243} = 113,8 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Iz druge jednažbe ravnoteže dobije se tražena težina tereta:

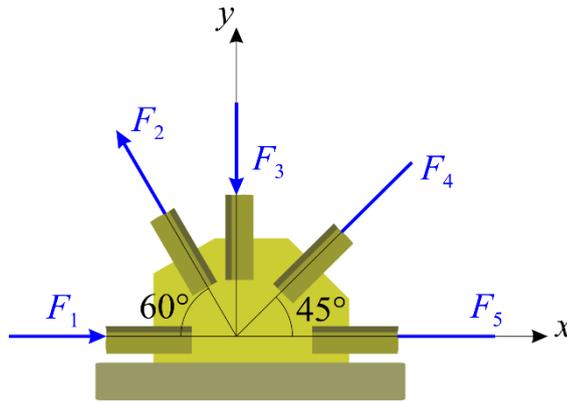
$$F_G = F_{AB} \cdot \sin 36,87^\circ + F_{AC} \cdot \sin 45^\circ = 125 \cdot 0,6 + 141,4 \cdot 0,707 = 175 \text{ N}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



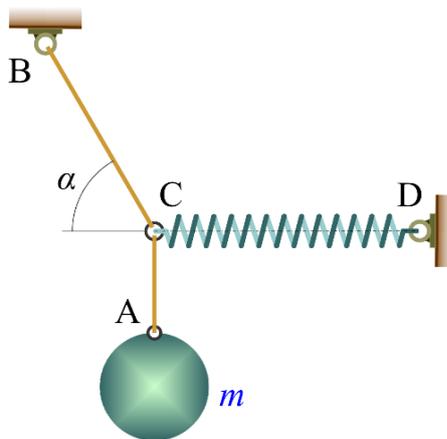
Zadatak 2.5. Valja odrediti iznose i smjerove sila \vec{F}_4 i \vec{F}_5 da bi rezultanta svih sučeljenih sila koje djeluju na čvorni lim rešetkastog nosača bila jednaka nuli (slika Z.2.5.).

Zadano je: $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 7 \text{ kN}$, $F_3 = 8 \text{ kN}$.



Slika Z.2.5. *Zadatak 2.5.*

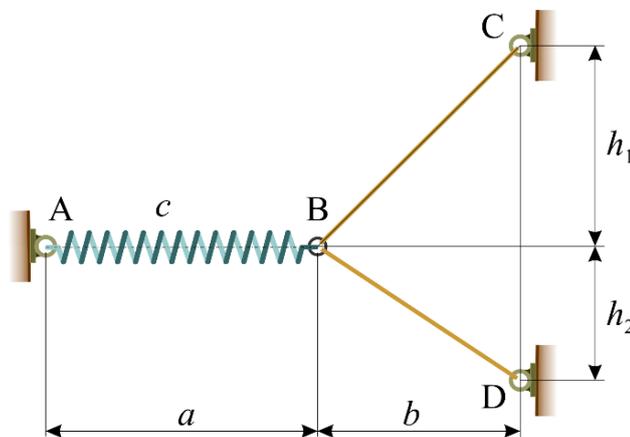
Zadatak 2.6. Kugla mase m vezana je za prsten u C užetom AC. Prsten je vezan za podlogu oprugom CD i užetom CB (slika Z.2.6.). Valja odrediti silu u užetu CB i silu u opruzi CD. Zadano je: $\alpha = 60^\circ$, $m = 25 \text{ kg}$.



Slika Z.2.6. *Zadatak 2.6.*

Zadatak 2.7. Prsten B vezan je za podlogu oprugom AB te užetima BC i BD (slika Z.2.7.). Duljina opruge krutosti c u nerastegnutom stanju je l_0 . Za ravnotežni položaj prikazan na slici valja odrediti sile u užetima BC i BD.

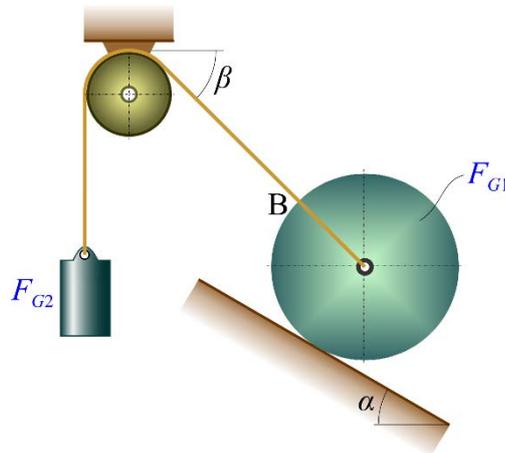
Zadano je: $a = 0,4 \text{ m}$, $b = 0,3 \text{ m}$, $h_1 = 0,3 \text{ m}$, $h_2 = 0,2 \text{ m}$, $c = 900 \text{ N/m}$, $l_0 = 260 \text{ mm}$.



Slika Z.2.7. *Zadatak 2.7.*

Zadatak 2.8. Kugla težine F_{G1} oslanja se na glatku kosinu i vezana je užetom s teretom težine F_{G2} (slika Z.2.8.). Potrebno je odrediti, grafičkim i analitičkim postupkom, iznos težine tereta F_{G2} i reakciju glatke podloge za slučaj ravnoteže.

Zadano je: $F_{G1} = 100 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

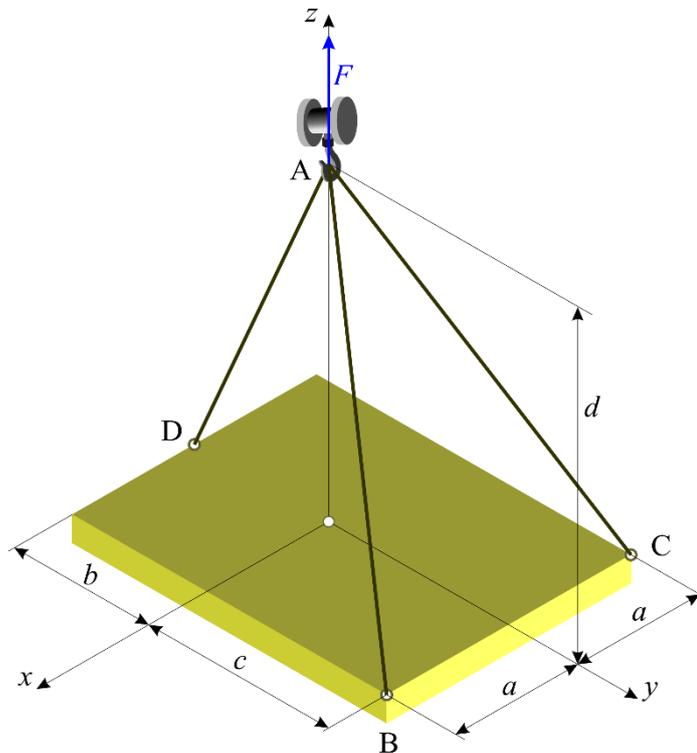


Slika Z.2.8. Zadatak 2.8.

Primjer 2.10.

Pri podizanju ploče, dimenzija prema slici, jednolikom brzinom na kuku djeluje sila \vec{F} koja je jednaka težini ploče \vec{F}_G (slika 2.30.). Potrebno je odrediti iznose sila kojima užad AD, AB i AC djeluje na kuku.

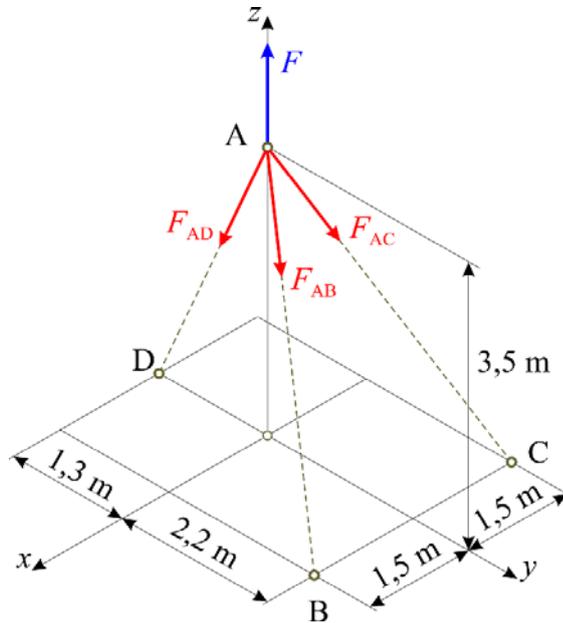
Zadano je: $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 1,3 \text{ m}$, $c = 2,2 \text{ m}$, $d = 3,5 \text{ m}$, $F = 5 \text{ kN}$.



Slika 2.30. Primjer 2.10.

Rješenje:

Na kuku A nakon oslobađanja od veza djeluje sučeljeni prostorni sustav sila koji čine zadana sila \vec{F} te sile \vec{F}_{AC} , \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AD} kojima užad djeluje na kuku (slika 2.31.).



Slika 2.31. *Primjer 2.10.:* Sučeljeni prostorni sustav sila koji djeluje na kuku kao slobodno tijelo

Za određivanje vektorskog zapisa sila kojima užad djeluje na kuku potrebno je najprije odrediti koordinate karakterističnih točaka. One su: $A(0; 0; 3,5)$, $B(1,5; 2,2; 0)$, $C(-1,5; 2,2; 0)$ i $D(0; -1,3; 0)$.

Vektori \vec{r}_{AB} , \vec{r}_{AC} i \vec{r}_{AD} , kao i njihovi intenziteti r_{AB} , r_{AC} i r_{AD} , dobiju se prema (2.13) i (2.14):

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AB} = (1,5 - 0) \cdot \vec{i} + (2,2 - 0) \cdot \vec{j} + (0 - 3,5) \cdot \vec{k} = 1,5 \cdot \vec{i} + 2,2 \cdot \vec{j} - 3,5 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AB} = \sqrt{1,5^2 + 2,2^2 + (-3,5)^2} = \sqrt{19,34} = 4,398;$$

$$\vec{r}_{AC} = (x_C - x_A) \cdot \vec{i} + (y_C - y_A) \cdot \vec{j} + (z_C - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AC} = (-1,5 - 0) \cdot \vec{i} + (2,2 - 0) \cdot \vec{j} + (0 - 3,5) \cdot \vec{k} = -1,5 \cdot \vec{i} + 2,2 \cdot \vec{j} - 3,5 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AC} = \sqrt{(-1,5)^2 + 2,2^2 + (-3,5)^2} = \sqrt{19,34} = 4,398;$$

$$\vec{r}_{AD} = (x_D - x_A) \cdot \vec{i} + (y_D - y_A) \cdot \vec{j} + (z_D - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AD} = (0 - 0) \cdot \vec{i} + (-1,3 - 0) \cdot \vec{j} + (0 - 3,5) \cdot \vec{k} = -1,3 \cdot \vec{j} - 3,5 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AD} = \sqrt{(-1,3)^2 + (-3,5)^2} = \sqrt{13,94} = 3,734.$$

Jedinični vektori potrebni za vektorski zapis sila su prema (2.15):

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{1,5 \cdot \vec{i} + 2,2 \cdot \vec{j} - 3,5 \cdot \vec{k}}{4,398} = 0,341 \cdot \vec{i} + 0,500 \cdot \vec{j} - 0,796 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{-1,5 \cdot \vec{i} + 2,2 \cdot \vec{j} - 3,5 \cdot \vec{k}}{4,398} = -0,341 \cdot \vec{i} + 0,500 \cdot \vec{j} - 0,796 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}} = \frac{-1,3 \cdot \vec{j} - 3,5 \cdot \vec{k}}{3,734} = -0,348 \cdot \vec{j} - 0,937 \cdot \vec{k}.$$

Dakle, na kuku A uz zadanu silu \vec{F} djeluju sile čiji je vektorski zapis dobiven prema (2.11):

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{e}_{AB}; \quad \vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{e}_{AC}; \quad \vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{e}_{AD}.$$

Vektorski zapis ovih sila jest:

$$\vec{F} = 5 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AB} = 0,341 \cdot F_{AB} \cdot \vec{i} + 0,500 \cdot F_{AB} \cdot \vec{j} - 0,796 \cdot F_{AB} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AC} = -0,341 \cdot F_{AC} \cdot \vec{i} + 0,500 \cdot F_{AC} \cdot \vec{j} - 0,796 \cdot F_{AC} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AD} = -0,348 \cdot F_{AD} \cdot \vec{j} - 0,937 \cdot F_{AD} \cdot \vec{k}.$$

Uvjeti ravnoteže prema (2.19) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad 0,341 \cdot F_{AB} - 0,341 \cdot F_{AC} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad 0,500 \cdot F_{AB} + 0,500 \cdot F_{AC} - 0,348 \cdot F_{AD} = 0,$$

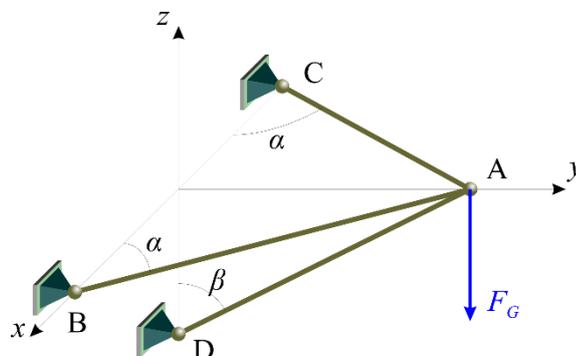
$$\sum F_z = 0: \quad -0,796 \cdot F_{AB} - 0,796 \cdot F_{AC} - 0,937 \cdot F_{AD} + 5 = 0.$$

Iznosi sila F_{AB} , F_{AC} i F_{AD} dobiju se rješavanjem gornjeg sustava:

$$F_{AB} = 1,167 \text{ kN}, \quad F_{AC} = 1,167 \text{ kN}, \quad F_{AD} = 3,353 \text{ kN}.$$

Primjer 2.11.

Konstrukcija sastavljena od tri štapa opterećena je u zglobu A silom iznosa F_G (slika 2.32.).



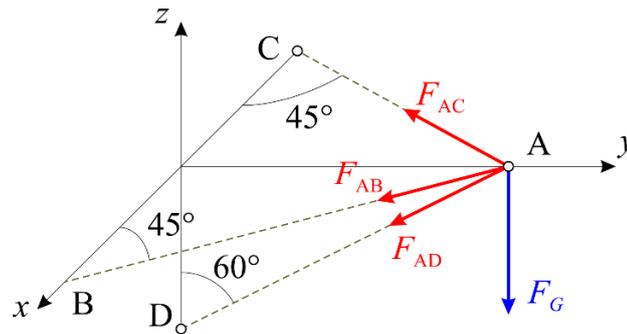
Slika 2.32. *Primjer 2.11.*

Valja odrediti sile u štapovima AB, AC i AD.

Zadano je: $A(0;4\text{ m};0)$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $F_G = 5\text{ kN}$.

Rješenje:

Zglob A možemo prikazati kao slobodnu točku na koju djeluje prostorni sučeljeni sustav sila. Ovaj sustav sila koji se nalazi u ravnoteži čine težina \vec{F}_G te sile \vec{F}_{AC} , \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AD} kojima štapovi AB, AC i AD djeluju na zglob A (slika 2.33.). Sile u štapovima istog su intenziteta kao i sile kojima štapovi djeluju na zglob A.



Slika 2.33. *Primjer 2.11.:* Zglob A oslobođen od veza

Sile \vec{F}_{AC} , \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AD} mogu se napisati s pomoću jediničnih vektora na pravcima djelovanja sila kada je:

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{e}_{AB}, \quad \vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{e}_{AC} \quad \text{te} \quad \vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{e}_{AD}.$$

Koordinate karakterističnih točaka koje su potrebne za dobivanje gore navedenih jediničnih vektora jesu: $B(4; 0; 0)$, $C(-4; 0; 0)$ i $D(0; 0; -2,309)$.

Vektori \vec{r}_{AB} , \vec{r}_{AC} i \vec{r}_{AD} , kao i njihovi intenziteti, dobiju se kako slijedi:

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AB} = (4-0) \cdot \vec{i} + (0-4) \cdot \vec{j} + (0-0) \cdot \vec{k} = 4 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j},$$

$$r_{AB} = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5,657;$$

$$\vec{r}_{AC} = (x_C - x_A) \cdot \vec{i} + (y_C - y_A) \cdot \vec{j} + (z_C - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AC} = (-4-0) \cdot \vec{i} + (0-4) \cdot \vec{j} + (0-0) \cdot \vec{k} = -4 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j},$$

$$r_{AC} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 5,657;$$

$$\vec{r}_{AD} = (x_D - x_A) \cdot \vec{i} + (y_D - y_A) \cdot \vec{j} + (z_D - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{AD} = (0-0) \cdot \vec{i} + (0-4) \cdot \vec{j} + (-2,309-0) \cdot \vec{k} = -4 \cdot \vec{j} - 2,309 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AD} = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + (-2,309)^2} = 4,619.$$

Jedinični vektori su:

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{4 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}}{5,657} = 0,707 \cdot \vec{i} - 0,707 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{e}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{-4 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}}{5,657} = -0,707 \cdot \vec{i} - 0,707 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{e}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}} = \frac{-4 \cdot \vec{j} - 2,309 \cdot \vec{k}}{4,619} = -0,866 \cdot \vec{j} - 0,5 \cdot \vec{k}.$$

Vektorski zapis svih sila sučeljenog prostornog sustava sila koji djeluje na zglob A jest:

$$\vec{F}_G = F_G \cdot \vec{k}, \quad \vec{F}_G = -5 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{e}_{AB} = 0,707 \cdot F_{AB} \cdot \vec{i} - 0,707 \cdot F_{AB} \cdot \vec{j};$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{e}_{AC} = -0,707 \cdot F_{AC} \cdot \vec{i} - 0,707 \cdot F_{AC} \cdot \vec{j};$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{e}_{AD} = -0,866 \cdot F_{AD} \cdot \vec{j} - 0,5 \cdot F_{AD} \cdot \vec{k}.$$

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \quad 0,707 \cdot F_{AB} - 0,707 \cdot F_{AC} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -0,707 \cdot F_{AB} - 0,707 \cdot F_{AC} - 0,866 \cdot F_{AD} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -0,5 \cdot F_{AD} - 5 = 0.$$

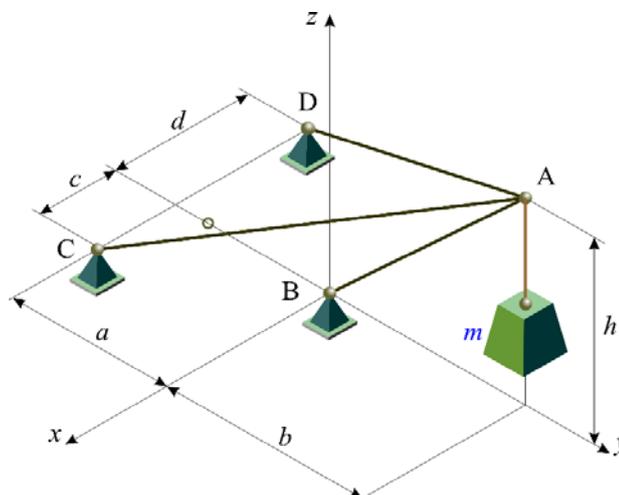
Rješavanjem gornjeg sustava jednažbi dobiju se traženi iznosi sila:

$$F_{AB} = 6,124 \text{ kN}, \quad F_{AC} = 6,124 \text{ kN}, \quad F_{AD} = -10 \text{ kN}.$$

Štapovi AB i AC opterećeni su vlačno, dok je štap AD opterećen na tlak.

Primjer 2.12.

Potrebno je odrediti sile u štapovima AB, AC i AD konstrukcije ako je masa bloka koji se podiže $m = 500 \text{ kg}$ (slika 2.34.).



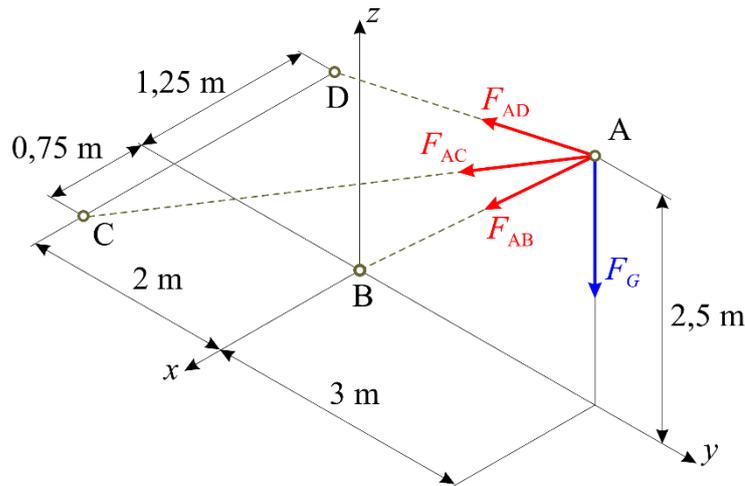
Slika 2.34. *Primjer 2.12.*

Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 0,75 \text{ m}$, $d = 1,25 \text{ m}$, $h = 2,5 \text{ m}$.

Rješenje:

Zglob A možemo prikazati kao slobodnu točku na koju djeluje prostorni sučeljeni sustav sila. Ovaj sustav sila je u ravnoteži, a čine ga težina \vec{F}_G te sile \vec{F}_{AC} , \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AD} kojima štapovi AB, AC i AD djeluju na zglob A (slika 2.35.).

Sile \vec{F}_{AC} , \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{AD} zapisane s pomoću jediničnih vektora jesu: $\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{e}_{AB}$, $\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{e}_{AC}$ te $\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{e}_{AD}$, dok su koordinate karakterističnih točaka: A(0; 3; 2,5), B(0; 0; 0), C(0,75; -2; 0) i D(-1,25; -2; 0).



Slika 2.35. *Primjer 2.12.: Zglob A oslobođen od veza*

Vektori \vec{r}_{AB} , \vec{r}_{AC} i \vec{r}_{AD} , intenziteti tih vektora i jedinični vektori dobiju se na način prikazan u prethodnim primjerima, pa je:

$$\vec{r}_{AB} = (0-0) \cdot \vec{i} + (0-3) \cdot \vec{j} + (0-2,5) \cdot \vec{k} = -3 \cdot \vec{j} - 2,5 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-2,5)^2} = 3,905;$$

$$\vec{r}_{AC} = (0,75-0) \cdot \vec{i} + (-2-3) \cdot \vec{j} + (0-2,5) \cdot \vec{k} = 0,75 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - 2,5 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AC} = \sqrt{0,75^2 + (-5)^2 + (-2,5)^2} = 5,640;$$

$$\vec{r}_{AD} = (-1,25-0) \cdot \vec{i} + (-2-3) \cdot \vec{j} + (0-2,5) \cdot \vec{k} = -1,25 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - 2,5 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AD} = \sqrt{(-1,25)^2 + (-5)^2 + (-2,5)^2} = 5,728;$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-3 \cdot \vec{j} - 2,5 \cdot \vec{k}}{3,905} = -0,768 \cdot \vec{j} - 0,640 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{0,75 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - 2,5 \cdot \vec{k}}{5,640} = 0,133 \cdot \vec{i} - 0,887 \cdot \vec{j} - 0,443 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}} = \frac{-1,25 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} - 2,5 \cdot \vec{k}}{5,728} = -0,218 \cdot \vec{i} - 0,873 \cdot \vec{j} - 0,436 \cdot \vec{k}.$$

Vektorski zapis svih sila sučeljenog prostornog sustava sila koji djeluje na zglob A jest:

$$\vec{F}_G = -m \cdot g \cdot \vec{k} = -500 \cdot 9,81 \cdot \vec{k} = -4905 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \vec{e}_{AB} = -0,768 \cdot F_{AB} \cdot \vec{j} - 0,640 \cdot F_{AB} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \vec{e}_{AC} = 0,133 \cdot F_{AC} \cdot \vec{i} - 0,887 \cdot F_{AC} \cdot \vec{j} - 0,443 \cdot F_{AC} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \vec{e}_{AD} = -0,218 \cdot F_{AD} \cdot \vec{i} - 0,873 \cdot F_{AD} \cdot \vec{j} - 0,436 \cdot F_{AD} \cdot \vec{k}.$$

Uvjeti ravnoteže za zglob A glase:

$$\sum F_x = 0: \quad 0,133 \cdot F_{AC} - 0,218 \cdot F_{AD} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -0,768 \cdot F_{AB} - 0,887 \cdot F_{AC} - 0,873 \cdot F_{AD} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -0,640 \cdot F_{AB} - 0,443 \cdot F_{AC} - 0,436 \cdot F_{AD} - 4,905 = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednažbi dobiju se traženi iznosi sila:

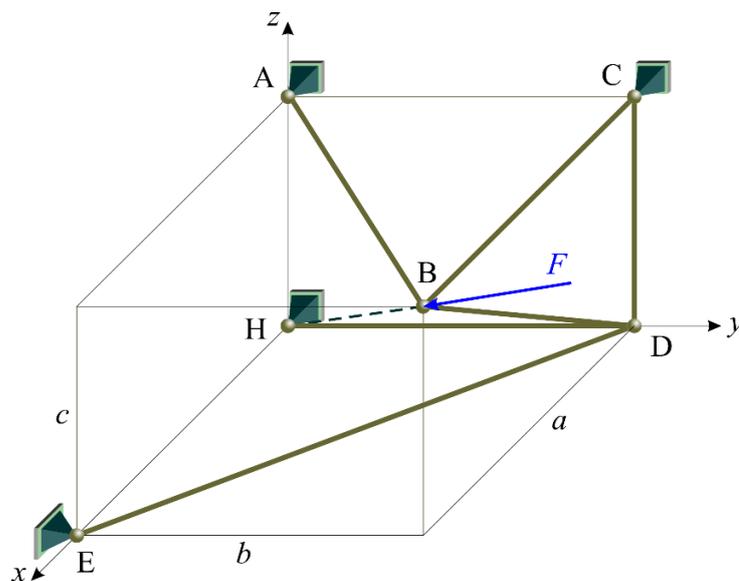
$$F_{AB} = -19,13 \text{ kN}, \quad F_{AC} = 10,35 \text{ kN}, \quad F_{AD} = 6,313 \text{ kN}.$$

Štap AB opterećen je na tlak, dok su štapovi AC i AD opterećeni na vlak.

Primjer 2.13.

Prostorna konstrukcija sastavljena od šest štapova međusobno vezanih zglobovima, a za podlogu sfernim osloncima, opterećena je silom iznosa F čiji pravac djelovanja prolazi točkama B i H (slika 2.36.). Potrebno je odrediti iznose sila u svim štapovima konstrukcije.

Zadano je: $a = 3,2 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$, $c = 1,8 \text{ m}$, $F = 6 \text{ kN}$.

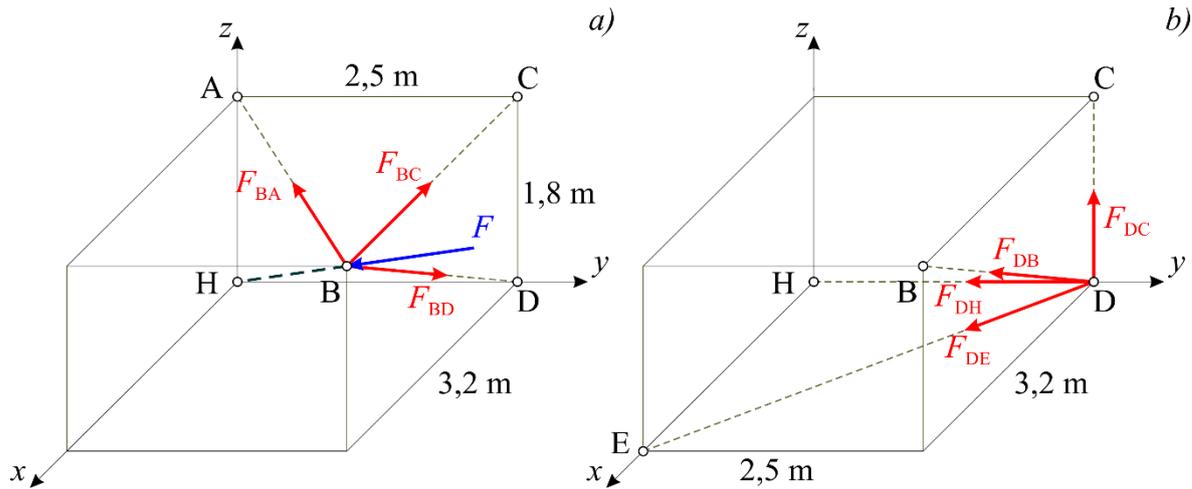


Slika 2.36. *Primjer 2.13.*

Rješenje:

Razmotrit ćemo najprije čvor B kao slobodnu točku na koju djeluje sučeljeni prostorni sustav sila: vanjska aktivna sila \vec{F} te tri reakcije veza \vec{F}_{BA} , \vec{F}_{BC} i \vec{F}_{BD} kojima štapovi BA, BC i BD djeluju na zglob B (slika 2.37.a).

Sile \vec{F}_{BA} , \vec{F}_{BC} i \vec{F}_{BD} napisat ćemo u vektorskom zapisu s pomoću jediničnih vektora na pravcima njihova djelovanja, a koordinate karakterističnih točaka jesu: A(0; 0; 1,8), B(3,2; 2,5; 1,8), C(0; 2,5; 1,8), D(0; 2,5; 0), E(3,2; 0; 0), H(0; 0; 0).



Slika 2.37. *Primjer 2.13.*: a) zglob B kao slobodna točka, b) zglob D kao slobodna točka.

Vektori \vec{r}_{BH} , \vec{r}_{BA} i \vec{r}_{BD} , intenziteti tih vektora i odgovarajući jedinični vektori jesu:

$$\vec{r}_{BH} = (0-3,2) \cdot \vec{i} + (0-2,5) \cdot \vec{j} + (0-1,8) \cdot \vec{k} = -3,2 \cdot \vec{i} - 2,5 \cdot \vec{j} - 1,8 \cdot \vec{k},$$

$$r_{BH} = \sqrt{(-3,2)^2 + (-2,5)^2 + (-1,8)^2} = 4,442;$$

$$\vec{r}_{BA} = (0-3,2) \cdot \vec{i} + (0-2,5) \cdot \vec{j} + (1,8-1,8) \cdot \vec{k} = -3,2 \cdot \vec{i} - 2,5 \cdot \vec{j},$$

$$r_{BA} = \sqrt{(-3,2)^2 + (-2,5)^2} = 4,061;$$

$$\vec{r}_{BD} = (0-3,2) \cdot \vec{i} + (2,5-2,5) \cdot \vec{j} + (0-1,8) \cdot \vec{k} = -3,2 \cdot \vec{i} - 1,8 \cdot \vec{k},$$

$$r_{BD} = \sqrt{(-3,2)^2 + (-1,8)^2} = 3,672;$$

$$\vec{e}_{BH} = \frac{-3,2 \cdot \vec{i} - 2,5 \cdot \vec{j} - 1,8 \cdot \vec{k}}{4,442} = -0,720 \cdot \vec{i} - 0,563 \cdot \vec{j} - 0,405 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{e}_{BA} = \frac{-3,2 \cdot \vec{i} - 2,5 \cdot \vec{j}}{4,061} = -0,788 \cdot \vec{i} - 0,616 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{e}_{BD} = \frac{-3,2 \cdot \vec{i} - 1,8 \cdot \vec{k}}{3,672} = -0,871 \cdot \vec{i} - 0,490 \cdot \vec{k}.$$

Vektorski zapis svih sila koje djeluju na zglob B jest:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{e}_{BH} = 6 \cdot \vec{e}_{BH} = -4,320 \cdot \vec{i} - 3,378 \cdot \vec{j} - 2,430 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{BA} = F_{BA} \cdot \vec{e}_{BA} = -0,788 \cdot F_{BA} \cdot \vec{i} - 0,616 \cdot F_{BA} \cdot \vec{j};$$

$$\vec{F}_{BC} = -F_{BC} \cdot \vec{i};$$

$$\vec{F}_{BD} = F_{BD} \cdot \vec{e}_{BD} = -0,871 \cdot F_{BD} \cdot \vec{i} - 0,490 \cdot F_{BD} \cdot \vec{k}.$$

Uvjeti ravnoteže za čvor B glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -0,871 \cdot F_{BD} - F_{BC} - 0,788 \cdot F_{BA} - 4,320 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -0,616 \cdot F_{BA} - 3,378 = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -0,490 \cdot F_{BD} - 2,430 = 0.$$

Iz gornjih jednažbi dobiju se traženi iznosi sila:

$$F_{BD} = -4,959 \text{ kN}, \quad F_{BC} = 4,321 \text{ kN}, \quad F_{BA} = -5,484 \text{ kN}.$$

Štap BC opterećen je vlačno, dok su štapovi BD i BA opterećeni na tlak.

Razmotrimo sada čvor D kao slobodnu točku na koju djeluje sučeljeni prostorni sustav sila koji čine sile $\vec{F}_{DB} = -\vec{F}_{BD}$ te \vec{F}_{DE} , \vec{F}_{DC} i \vec{F}_{DH} kojima štapovi DB, DE, DC i DH djeluju na zglob D (slika 2.37.b). Jedinični vektor \vec{e}_{DE} dobije se na sljedeći način:

$$\vec{r}_{DE} = (3,2-0) \cdot \vec{i} + (0-2,5) \cdot \vec{j} + (0-0) \cdot \vec{k} = 3,2 \cdot \vec{i} - 2,5 \cdot \vec{j},$$

$$r_{DE} = \sqrt{3,2^2 + (-2,5)^2} = 4,061,$$

$$\vec{e}_{DE} = \frac{3,2 \cdot \vec{i} - 2,5 \cdot \vec{j}}{4,061} = 0,788 \cdot \vec{i} - 0,616 \cdot \vec{j}.$$

Vektorski zapis svih sila koje djeluju na zglob D glasi:

$$\vec{F}_{DB} = -\vec{F}_{BD} = 0,871 \cdot F_{DB} \cdot \vec{i} + 0,490 \cdot F_{DB} \cdot \vec{k}, \quad \text{uz } F_{DB} = F_{BD} = -4,959 \text{ kN},$$

$$\vec{F}_{DB} = 0,871 \cdot (-4,959) \cdot \vec{i} + 0,490 \cdot (-4,959) \cdot \vec{k} = -4,319 \cdot \vec{i} - 2,430 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_{DE} = F_{DE} \cdot \vec{e}_{DE} = 0,788 \cdot F_{DE} \cdot \vec{i} - 0,616 \cdot F_{DE} \cdot \vec{j}; \quad \vec{F}_{DC} = F_{DC} \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_{DH} = -F_{DH} \cdot \vec{j}.$$

Uvjeti ravnoteže za čvor D glase:

$$\sum F_x = 0: \quad 0,788 \cdot F_{DE} - 4,319 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{DH} - 0,616 \cdot F_{DE} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{DC} - 2,430 = 0.$$

Iz gornjih jednažbi dobije se:

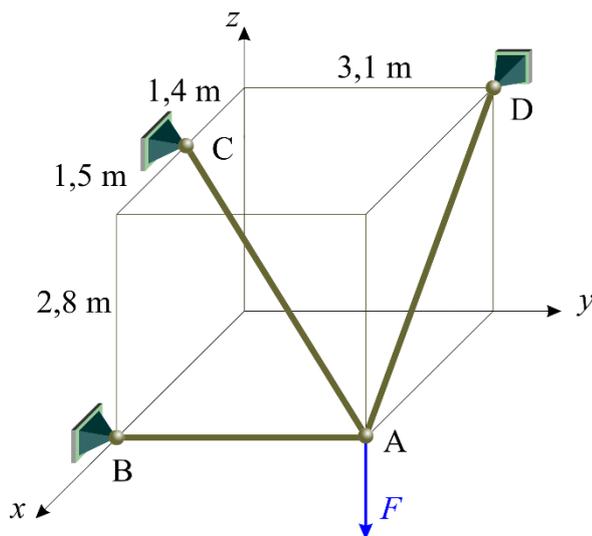
$$F_{DC} = 2,430 \text{ kN}, \quad F_{DE} = 5,481 \text{ kN}, \quad F_{DH} = -3,376 \text{ kN}.$$

Štap DH opterećen je na tlak, dok su štapovi DC i DE opterećeni na vlak.

ZADATCI ZA VJEŽBU:



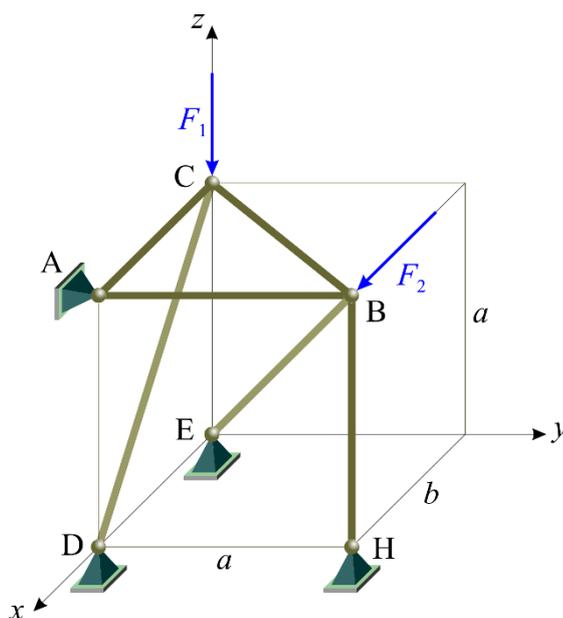
Zadatak 2.9. Prostorna konstrukcija sastavljena od tri štapa vezana je za podlogu sfernim osloncima B, C i D. Štapovi su međusobno spojeni u zglobu A na koji djeluje sila \vec{F} (slika Z.2.9.). Valja odrediti iznose sila u svim štapovima prostorne konstrukcije ako je $F = 5 \text{ kN}$.



Slika Z.2.9. Zadatak 2.9.

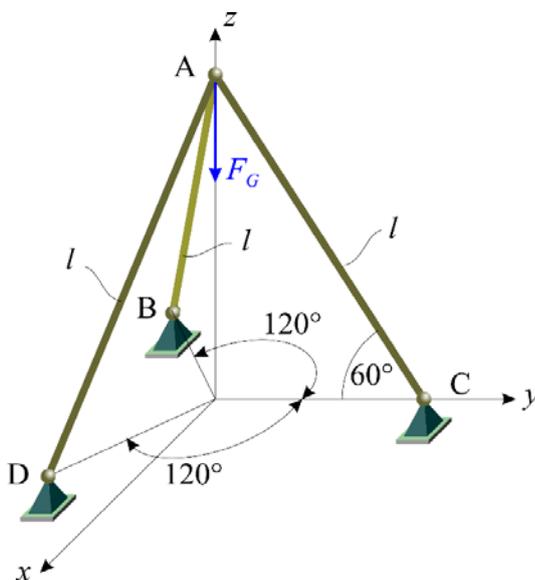
Zadatak 2.10. Za prostornu rešetkastu konstrukciju sastavljenu od šest štapa i opterećenu silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 potrebno je odrediti sile u svim štapovima (slika Z.2.10.).

Zadano je: $\vec{F}_1 = -10 \cdot \vec{k}$, $\vec{F}_2 = 5 \cdot \vec{i}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 0,8 \text{ m}$.



Slika Z.2.10. Zadatak 2.10.

Zadatak 2.11. Konstrukcija sastavljena od tri štapa opterećena je u zglobu A težinom tereta \vec{F}_G (slika Z.2.11.). Valja odrediti sile u svim štapovima. Zadano je: $F_G = 10 \text{ kN}$.



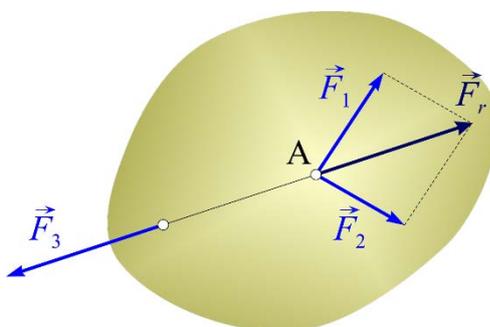
Slika Z.2.11. Zadatak 2.11.

2.4.3. Teorem o tri sile

Često se nailazi na zadatke gdje se promatra ravnoteža tijela na koje djeluju tri neparalelne sile. U tom slučaju prikladno je primijeniti teorem o tri sile.

Taj teorem glasi: *Ako se slobodno kruto tijelo nalazi u ravnoteži pod djelovanjem triju neparalelnih sila, koje leže u jednoj ravnini, onda se pravci djelovanja tih sila moraju sjeći u jednoj točki.*

Dokaz izrečenog teorema dan je slikom 2.38. Sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 možemo prema drugom i trećem aksiomu zamijeniti jednom silom $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, s hvatištem u A. Na razmatrano tijelo djeluju sada samo dvije sile \vec{F}_3 i \vec{F}_r , koje prema prvom aksiomu moraju biti suprotno usmjerene duž istog pravca djelovanja.



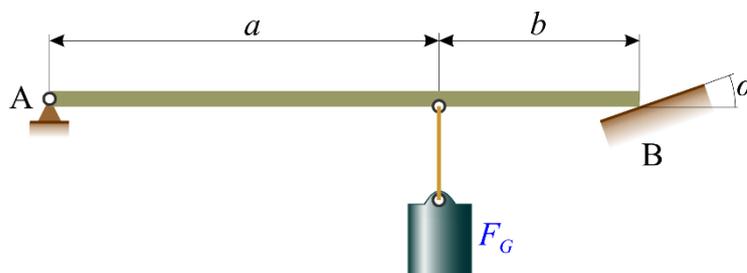
Slika 2.38. Dokaz teorema o tri sile

Da bi kruto tijelo pod djelovanjem triju sila u ravnini bilo u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da se pravci djelovanja tih sila sijeku u jednoj točki i da je trokut sila, konstruiran od zadanih sila, zatvoren.

Primjer 2.14.

Greda AB zanemarive težine zglobno je vezana za nepomičnu podlogu u A te oslonjena na glatku kosinu na kraju B. Greda je opterećena teretom težine \vec{F}_G (slika 2.39.). Valja odrediti reakcijske sile u točkama A i B.

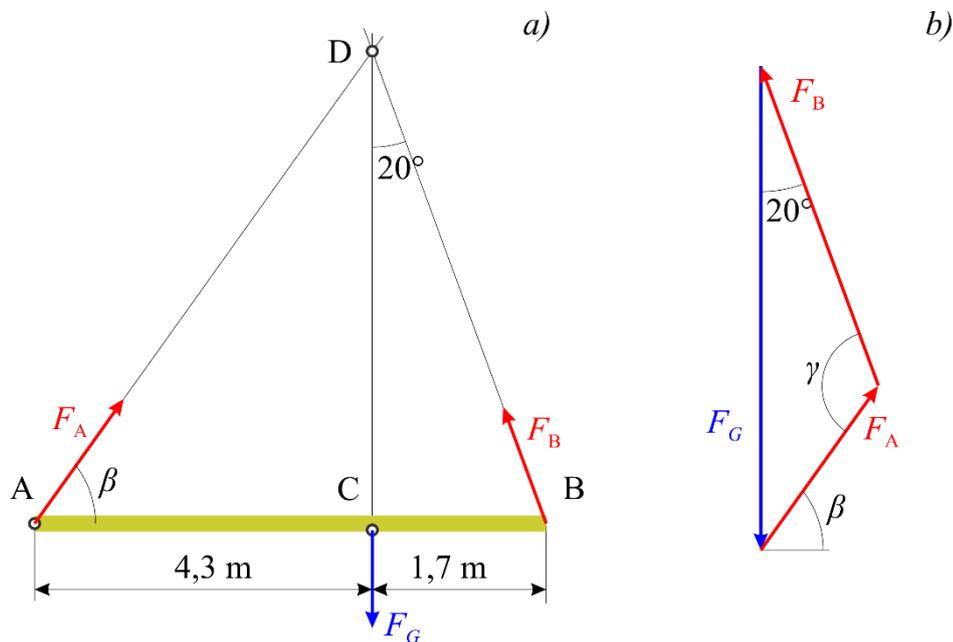
Zadano je: $a = 3,2 \text{ m}$, $b = 1,7 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$, $F_G = 4 \text{ kN}$.



Slika 2.39. Primjer 2.14.

Rješenje:

Nakon što se greda oslobodi od veza, na nju kao slobodno tijelo djeluje sustav od triju sila: težina tereta \vec{F}_G , reakcija oslonca A \vec{F}_A te reakcija glatke kosine \vec{F}_B (slika 2.40.a).



Slika 2.40. Primjer 2.14.: a) greda kao slobodno tijelo, b) trokut sila.

Pravci težine \vec{F}_G i reakcije glatke kosine \vec{F}_B su poznati. Primjenom teorema o tri neparalelne sile može se dobiti i pravac reakcije \vec{F}_A . Taj pravac prolazi točkom A i točkom D koja je sjecište pravaca preostalih dviju sila. Budući da je navedeni sustav sila u ravnoteži, trokut sila mora biti zatvoren (slika 2.40.b).

Tražene reakcije dobiju se na sljedeći način:

$$\tan 20^\circ = \frac{1,7}{\overline{CD}}; \quad \overline{CD} = \frac{1,7}{\tan 20^\circ} = 4,671;$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{CD}}{4,3} = \frac{4,671}{4,3} = 1,086279, \quad \beta = 47,37^\circ;$$

$$\gamma = 70^\circ + \beta = 70^\circ + 47,37^\circ = 117,37^\circ.$$

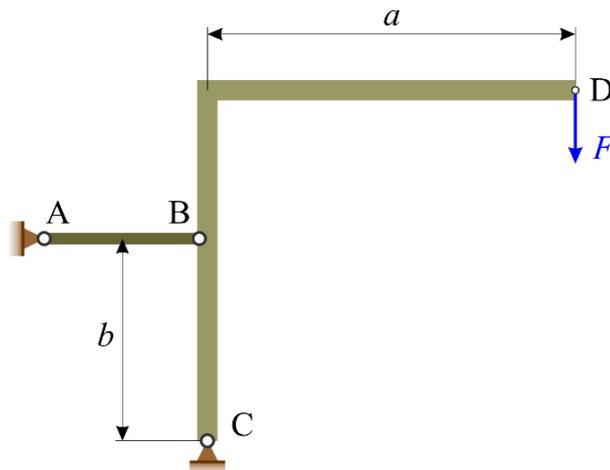
Primjenom sinusnog poučka dobije se:

$$\frac{F_A}{\sin 20^\circ} = \frac{F_G}{\sin \gamma}, \quad F_A = \frac{4 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 117,37^\circ} = 1,541 \text{ kN};$$

$$\frac{F_B}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{F_G}{\sin \gamma} \quad F_B = \frac{4 \cdot \sin 42,63^\circ}{\sin 117,37^\circ} = 3,051 \text{ kN}.$$

Primjer 2.15.

Konstrukcija prikazana na slici 2.41. opterećena je u D silom \vec{F} te vezana za podlogu štapom AB zanemarive težine i zglobnim osloncem u C. Potrebno je odrediti reakciju oslonca C i silu u štapu AB. Zadano je: $a = 520 \text{ mm}$, $b = 240 \text{ mm}$, $F = 6 \text{ kN}$.



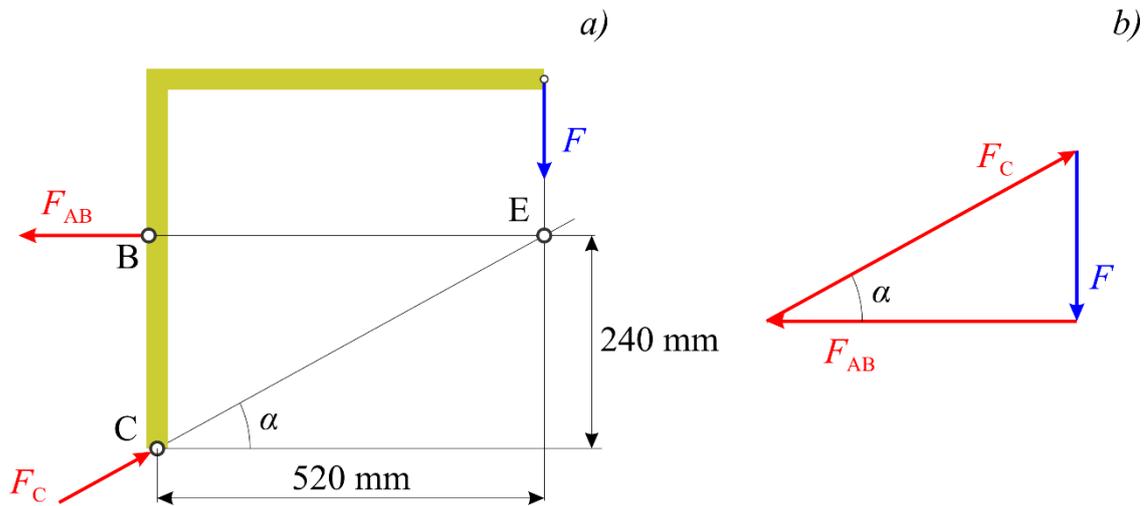
Slika 2.41. *Primjer 2.15.*

Rješenje:

Na konstrukciju oslobođenu od veza djeluju tri sile: sila \vec{F} , sila kojom štap AB djeluje na konstrukciju \vec{F}_{AB} i reakcija oslonca C \vec{F}_C .

Pravci sila \vec{F} i \vec{F}_{AB} su poznati. Primjenom teorema o tri neparalelne sile može se dobiti i pravac reakcije \vec{F}_C . Taj pravac prolazi točkom C i točkom E koja je sjecište pravaca sila \vec{F} i \vec{F}_{AB} (slika 2.42.a).

Budući da je konstrukcija u ravnoteži, trokut sile mora biti zatvoren (slika 2.42.b).



Slika 2.42. *Primjer 2.15.*: a) konstrukcija kao slobodno tijelo, b) trokut sila.

Slijede tražene reakcije veza:

$$\tan \alpha = \frac{240}{520} = 0,46154, \quad \alpha = 24,78^\circ;$$

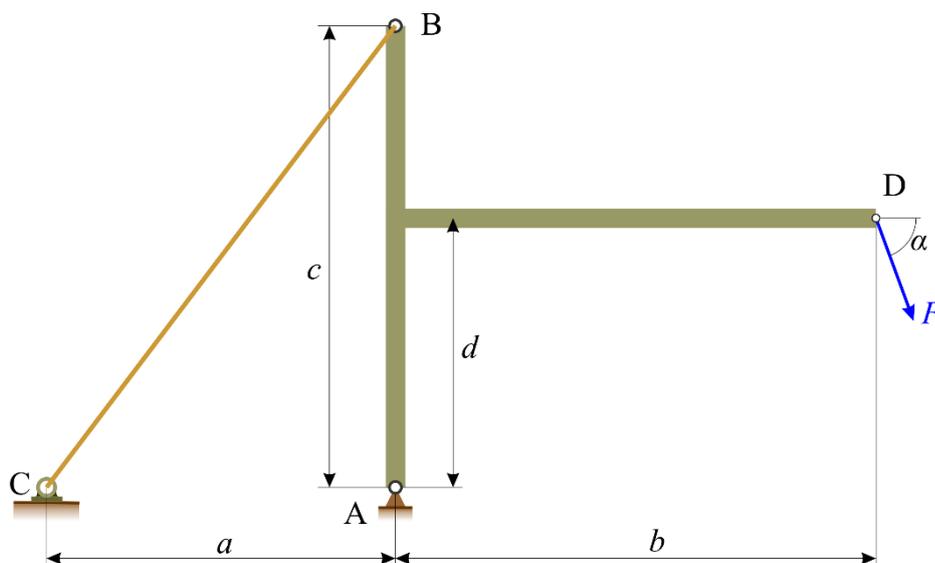
$$\tan \alpha = \frac{F}{F_{AB}}, \quad F_{AB} = \frac{F}{\tan \alpha} = \frac{6}{\tan 24,78^\circ} = 13,0 \text{ kN};$$

$$\sin \alpha = \frac{F}{F_C}; \quad F_C = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{6}{\sin 24,78^\circ} = 14,3 \text{ kN}.$$

Primjer 2.16.

Za konstrukciju opterećenu silom \vec{F} u točki D i vezanu za podlogu užetom BC te nepomičnim osloncem u A (slika 2.43.) potrebno je odrediti reakcije veza grafičkim i analitičkim postupkom.

Zadano je: $a = 4,5 \text{ m}$, $b = 6,2 \text{ m}$, $c = 6 \text{ m}$, $d = 3,5 \text{ m}$, $F = 8 \text{ kN}$, $\alpha = 70^\circ$.

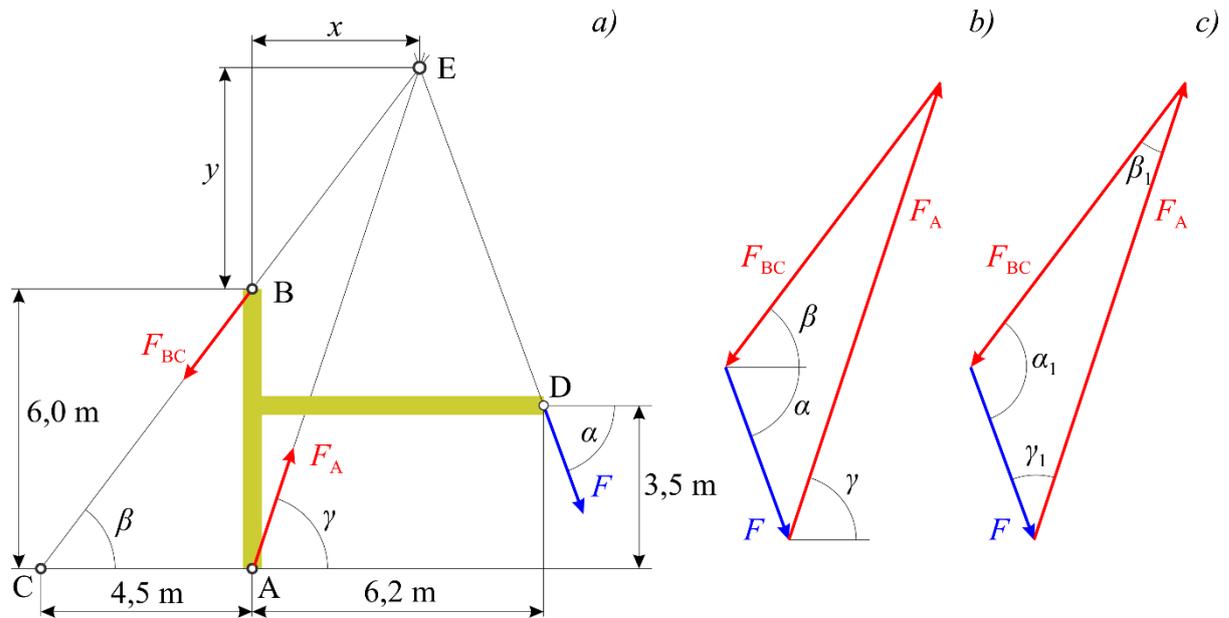


Slika 2.43. *Primjer 2.16.*

Rješenje:

Na konstrukciju oslobođenu od veza djeluju tri sile: sila \vec{F} , sila kojom uže djeluje na konstrukciju \vec{F}_{BC} i reakcija oslonca A \vec{F}_A . Pravci sila \vec{F} i \vec{F}_{BC} su poznati. Primjenjujući teorem o tri neparalelne sile, određuje se pravac reakcije \vec{F}_A koji mora proći točkom A i sjecištem pravaca ostalih dviju sila – točka E (slika 2.44.a).

Za ravnotežu navedenih sila trokut sila mora biti zatvoren (slika 2.44.b i slika 2.44.c).



Slika 2.44. Primjer 2.16.: a) konstrukcija kao slobodno tijelo, b) trokut sila, c) trokut sila.

Iz trokuta ABC može se odrediti kut β :

$$\tan \beta = \frac{6}{4,5} = 1,33333, \quad \beta = 53,13^\circ;$$

pa slijedi:

$$\tan \beta = \frac{y}{x}, \quad y = 1,333x, \quad \tan \alpha = \frac{y+2,5}{6,2-x}, \quad y = (6,2-x) \cdot \tan \alpha - 2,5.$$

Dalje je

$$1,333x = (6,2-x) \cdot \tan \alpha - 2,5 \quad x = 3,562, \quad y = 4,748,$$

pa je kut γ :

$$\tan \gamma = \frac{6+y}{x} = \frac{6+4,748}{3,562} = 3,0174, \quad \gamma = 71,66^\circ.$$

Unutarnji kutovi u trokutu sila su:

$$\alpha_1 = \alpha + \beta = 70^\circ + 53,13^\circ = 123,13^\circ;$$

$$\beta_1 = \gamma - \beta = 71,66^\circ - 53,13^\circ = 18,53^\circ;$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1 = 180^\circ - 123,13^\circ - 18,53^\circ = 38,34^\circ.$$

Tražene reakcije veza mogu se odrediti i primjenom sinusnog poučka na trokut sila:

$$\frac{F_A}{\sin \alpha_1} = \frac{F}{\sin \beta_1}, \quad F_A = \frac{8 \cdot \sin 123,13^\circ}{\sin 18,53^\circ} = 21,08 \text{ kN};$$

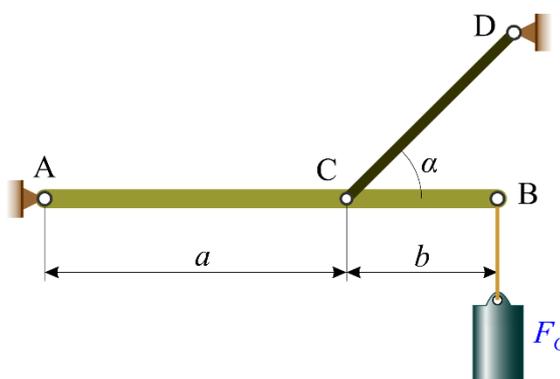
$$\frac{F_{BC}}{\sin \gamma_1} = \frac{F}{\sin \beta_1}, \quad F_{BC} = \frac{8 \cdot \sin 38,34^\circ}{\sin 18,53^\circ} = 15,62 \text{ kN}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



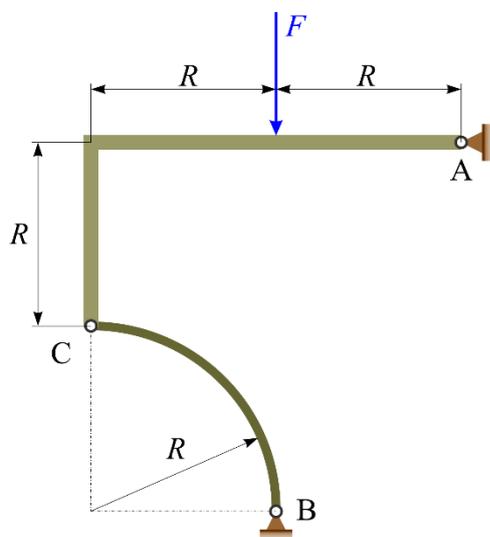
Zadatak 2.12. Greda AB zanemarive težine vezana je zglobovom A za vertikalni zid, a užetom CD za strop. U točki B ovješeno je teret težine F_G (slika Z.2.12.). Valja odrediti reakciju u zglobovu A i silu u užetu analitičkim i grafičkim postupkom.

Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $F_G = 500 \text{ N}$.



Slika Z.2.12. Zadatak 2.12.

Zadatak 2.13. Zakrivljeni štap AC opterećen je silom \vec{F} te vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i štapom zanemarive težine BC (slika Z.2.13.). Valja odrediti reakcije oslonaca A i B te silu u zglobovu C analitičkim i grafičkim postupkom. Zadano je: $F = 3 \text{ kN}$.



Slika Z.2.13. Zadatak 2.13.

2.5. STATIČKI ODREĐENI I STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI

Pri rješavanju zadataka o ravnoteži vezanog krutog tijela reakcije veza predstavljaju veličine koje nisu unaprijed poznate. Broj ovih nepoznatih reakcija ovisi o broju i karakteru veza. Odgovarajući statički zadatak možemo riješiti samo u tom slučaju kada broj nepoznatih reakcija odgovara broju uvjeta ravnoteže koji sadrže te nepoznate reakcije. Takvi zadatci nazivaju se *statički određeni*, a sustavi tijela koji zadovoljavaju ovaj uvjet nazivaju se *statički određeni sustavi*.

Zadatci kod kojih je broj nepoznatih reakcija veći od broja uvjeta ravnoteže, koji sadrže ove reakcije, nazivaju se *statički neodređeni*, dok se takvi sustavi tijela nazivaju *statički neodređeni sustavi*.

Ako s n označimo broj nepoznatih reakcija veza, a s k broj jednadžbi ravnoteže, možemo napisati sljedeću jednakost:

$$s = n - k, \quad (2.21)$$

gdje mogu nastupiti tri slučaja:

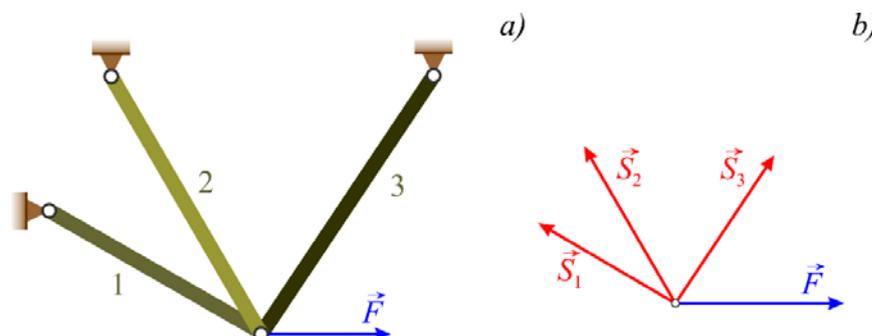
1. $s = 0$ – broj nepoznanica jednak je broju jednadžbi – zadatak je statički određen;
2. $s > 0$ – broj nepoznanica veći je od broja jednadžbi – zadatak je statički neodređen i to upravo s puta;
3. $s < 0$ – broj nepoznanica manji je od broja jednadžbi – promatrana konstrukcija je mehanizam sa $|s|$ stupnjeva slobode gibanja.

Mehanizam (pokretna struktura) jest mehanička naprava ili njezin dio koji se sastoji od pokretnih dijelova, međusobno tako povezanih da se pokretanjem jednoga uzrokuje gibanje ostalih, a najčešće služi za prijenos i pretvorbu jedne vrste gibanja u drugu vrstu gibanja.

U mehanici se mehanizmi proučavaju kao sustavi međusobno povezanih pokretnih tijela.

Na slici 2.45.a prikazana je jednostavna statički neodređena konstrukcija u ravnini sastavljena od triju štapova i opterećena silom \vec{F} u zajedničkom zglobu.

Broj nepoznatih reakcija veza je 3 (slika 2.45.b – sile u štapovima), a broj jednadžbi ravnoteže je 2 (sučeljeni sustav sila u ravnini), pa je $s = n - k = 3 - 2 = 1$, tj. jedna je veza suvišna – sustav je jedanput statički neodređen!



Slika 2.45.: a) statički neodređena konstrukcija, b) zglob kao slobodna točka s prikazom svih sila koje na njega djeluju.

Za rješavanje statički neodređenih zadataka nužno je odbaciti pretpostavku o apsolutno krutim tijelima, već ih se smatra čvrstim, tj. takvima da se pod djelovanjem sila mogu deformirati, odakle se crpe preostale potrebne jednadžbe.

Ravnotežu mehanizama, kada je $s < 0$, možemo proučavati samo uz dodatne uvjete (npr. ravnoteža mehanizma u zadanom položaju i slično).

2.6. METODE RJEŠAVANJA ZADATAKA STATIKE

Rješavanje zadataka statike svodi se na određivanje pritisaka na oslonce, odnosno njihovih reakcija, korištenjem uvjeta ravnoteže.

Oblik tih uvjeta ovisi o tome kakav sustav sila djeluje na promatrano tijelo poslije oslobađanja tijela od veza i koja se metoda rješavanja želi primijeniti (geometrijska ili analitička).

Geometrijska metoda: Ova je metoda pogodna kada je ukupni broj sila (i aktivnih i reakcija veza) tri. Pri ravnoteži pravci djelovanja ovih sila moraju se sjeći u jednoj točki, a trokut, konstruiran od tih sila, mora biti zatvoren. Konstrukcija trokuta sila obvezno započinje poznatom silom.

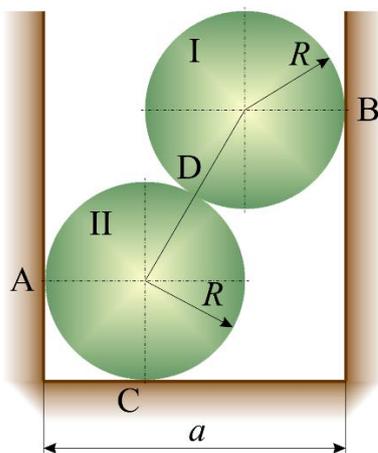
Analitička metoda: Ova se metoda može primijeniti pri proizvoljnom broju sila. Da bi se postavili uvjeti ravnoteže, kojih u slučaju konkurentnog sustava sila u ravnini ima dva, a u prostoru tri, treba prije svega odabrati koordinatni sustav u odnosu na koji će se rješavati zadatak. Taj se odabir može učiniti potpuno proizvoljno. Međutim, povoljno odabran koordinatni sustav može znatno olakšati rješavanje zadatka.

Rezultate dobivene analitičkim postupkom možemo ponekad jednostavno provjeriti geometrijskom metodom.

Primjer 2.17.

Valjci I i II, težine F_{G1} i F_{G2} i istog polumjera R , nalaze se u procijepu širine a (slika 2.46.). Potrebno je izračunati reakcije veza u svim dodirnim točkama.

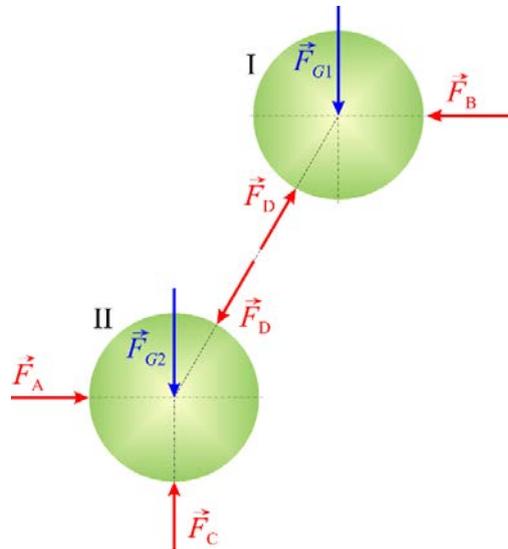
Zadano je: $F_{G1} = 50 \text{ N}$, $F_{G2} = 30 \text{ N}$, $a = 3R$.



Slika 2.46. *Primjer 2.17.*

Rješenje:

Budući da se traže sile u svim dodirnim točkama, razmotrit ćemo ravnotežu obaju valjaka. Valjke oslobađamo veza, a utjecaj veza zamjenjujemo odgovarajućim silama – reakcijama veza. Kako su sve veze ostvarene dodirrom glatkih ploha, reakcije veza imaju pravce normala u točkama dodira (slika 2.47.).



Slika 2.47. *Primjer 2.17.: Valjci I i II oslobođeni od veza*

Sa slike 2.47. vidljivo je da se sile koje djeluju na valjke u oba slučaja sijeku u jednoj točki – središtima valjaka.

Dakle, na oba valjka djeluje sučeljeni sustav sila u ravnini, pa za svaki valjak možemo postaviti po dva uvjeta ravnoteže, što upravo odgovara broju nepoznatih reakcija veza.

Jednadžbe ravnoteže za valjak I glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_D \cdot \cos 60^\circ - F_B = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_D \cdot \sin 60^\circ - 50 = 0,\end{aligned}$$

odakle slijedi:

$$F_D = 57,74 \text{ N}; \quad F_B = 28,87 \text{ N}.$$

Sada možemo napisati i jednadžbe ravnoteže za valjak II:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad -F_D \cdot \cos 60^\circ + F_A = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad -F_D \cdot \sin 60^\circ + F_C - 30 = 0,\end{aligned}$$

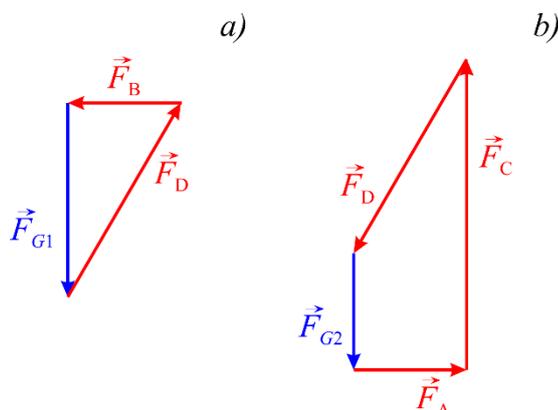
odakle je:

$$F_A = 28,87 \text{ N}; \quad F_C = 80 \text{ N}.$$

Promatrani zadatak možemo riješiti i grafičkim postupkom (slika 2.48.).

Na valjak I djeluju tri sile, pa za njihovu ravnotežu trokut sila mora biti zatvoren. Odaberemo mjerilo sila $M_F = 20 \text{ N/cm}$ () te poznatu težinu valjka I F_{G1} prikažemo dužinom duljine 2,5 cm.

Kroz početak i kraj sile F_{G1} povucimo paralele s pravcima reakcija F_D i F_B – na taj način dobijemo trokut sila (slika 2.48.a).



Slika 2.48. *Primjer 2.17.:* a) zatvoren trokut sila koje djeluju na valjak I, b) zatvoren poligon sila koje djeluju na valjak II.

Iz uvjeta da trokut sila mora biti zatvoren, određujemo smjerove traženih sila, dok intenzitete reakcija F_D i F_B dobijemo mjerenjem odgovarajućih duljina i njihovim množenjem s mjerilom sila:

$$F_D = 2,9 \text{ cm} \cdot \frac{20 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 58 \text{ N}, \quad F_B = 1,45 \text{ cm} \cdot \frac{20 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 29 \text{ N}.$$

Na valjak II djeluju četiri sile (od kojih su dvije poznate), pa za ravnotežu mora poligon sila biti zatvoren. Nanesu se u mjerilu najprije poznate sile F_D i F_{G2} . Kroz vrh sile F_{G2} vuče se paralela s pravcem reakcije F_A , a kroz početak sile F_D paralela s pravcem reakcije F_C (slika 2.48.b).

Na taj način dobije se poligon sila, koji mora biti zatvoren, a veličine nepoznatih reakcija F_A i F_C jesu:

$$F_A = 1,45 \text{ cm} \cdot \frac{20 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 29 \text{ N}, \quad F_C = 4 \text{ cm} \cdot \frac{20 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 80 \text{ N}.$$

2.7. MOMENT SILE U ODNOSU NA TOČKU

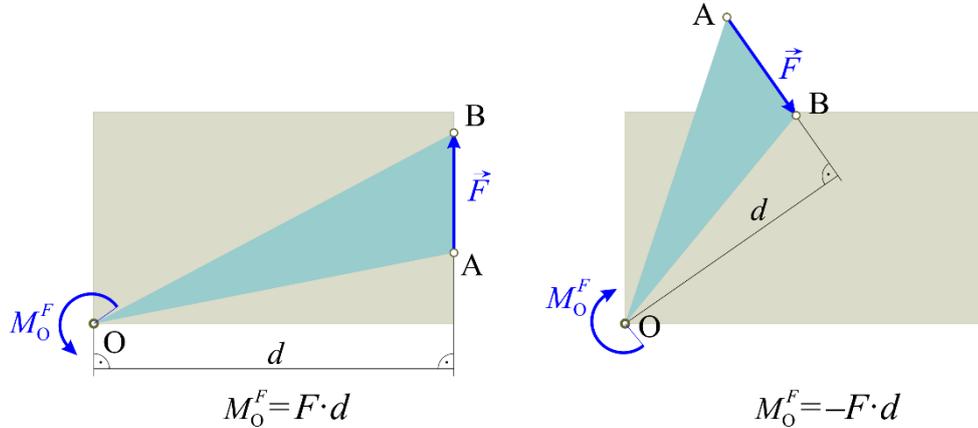
Momentom sile \vec{F} u odnosu na točku O nazivamo veličinu, uzetu s odgovarajućim predznakom, koja je jednaka produktu sile i kraka sile (slika 2.49.):

$$M_O^{\vec{F}} = \pm F \cdot d = \pm 2P_{\Delta OAB}. \quad (2.21)$$

Moment sile ovisi o intenzitetu sile F i duljini kraka sile d , i jednak je dvostrukoj površini trokuta OAB koji čine krajevi sile i točka za koju se računa njezin moment.

Krakom sile naziva se najkraća udaljenost od pravca djelovanja sile do točke O u odnosu na koju se određuje moment sile (to je okomica iz točke O na pravac djelovanja sile).

Momentom sile u odnosu na točku O izražava se težnja sile da zakrene tijelo oko te točke. Moment je pozitivan ako teži da zakrene tijelo oko točke O u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, a negativan ako teži da zakrene tijelo u smjeru kazaljke na satu (slika 2.49.). Iz definicije momenta sile za točku slijedi da se iznos momenta ne mijenja pri pomicanju hvatišta sile duž pravca njezina djelovanja.



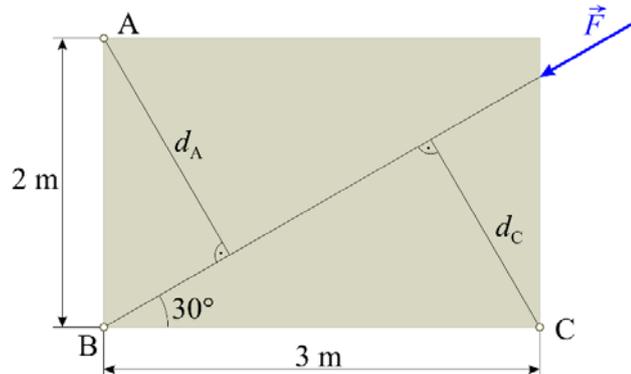
Slika 2.49. Moment sile \vec{F} u odnosu na točku O

Također, moment sile za točku O može biti jednak nuli samo u tom slučaju kada je sila jednaka nuli ili ako pravac djelovanja sile prolazi kroz točku O, tj. ako je krak sile jednak nuli.

Primjer 2.18.

Na pravokutnu ploču zadanih dimenzija djeluje sila \vec{F} (slika 2.50.).

Valja odrediti moment sile zadanog intenziteta F u odnosu na točke A, B i C ako je intenzitet sile $F = 200 \text{ N}$.



Slika 2.50. *Primjer 2.18.*

Rješenje:

Iz definicije momenta sile u odnosu na točku prema (2.21) slijedi:

$$M_A^{\vec{F}} = -F \cdot d_A, \quad d_A = 2 \cdot \cos 30^\circ = 1,732 \text{ m},$$

$$M_A^{\vec{F}} = -200 \cdot 1,732 = -346,0 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$M_B^{\vec{F}} = -F \cdot d_B, \quad d_B = 0 \text{ m},$$

$$M_B^{\vec{F}} = 0 \text{ N} \cdot \text{m};$$

$$M_C^{\vec{F}} = F \cdot d_C, \quad d_C = 3 \cdot \sin 30^\circ = 1,5 \text{ m},$$

$$M_C^{\vec{F}} = 200 \cdot 1,5 = 300 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

2.8. VARIGNONOV TEOREM O MOMENTU REZULTANTE SUČELJENOG SUSTAVA SILA U RAVNINI

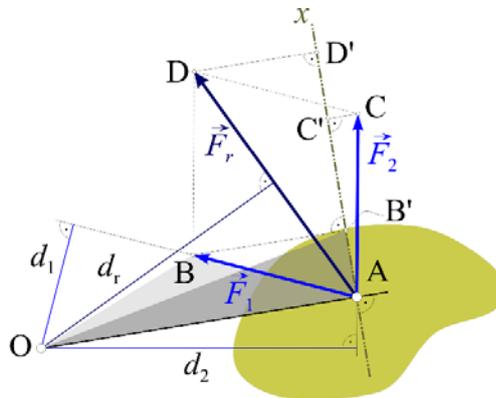
Varignonov teorem glasi:

Moment rezultante sustava sučeljenih sila u ravnini u odnosu na proizvoljno odabranu točku O jednak je algebarskoj sumi momenata komponentata u odnosu na istu točku.

$$M_O^{\vec{F}_r} = \sum_{i=1}^n M_O^{\vec{F}_i} \quad (2.22)$$

Dokaz ovog teorema izvest ćemo s pomoću slike 2.50. Zbog jednostavnosti prikaza razmotrit ćemo slučaj djelovanja dviju sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 s hvatištem u točki A. Njihova je rezultanta \vec{F}_r prikazana dijagonalom paralelograma konstruiranoga nad zadanim silama.

Sada ćemo odrediti momente zadanih sila i moment rezultante u odnosu na točku O. Uvodimo pri tom pomoćnu os x okomito na spojnicu OA.



Slika 2.51. Slika uz dokaz Varignonova teorema

$$M_O^{\vec{F}_1} = F_1 \cdot d_1 = 2P_{\Delta OAB} = 2P_{\Delta OAB'} = F_{1x} \cdot \overline{OA};$$

$$M_O^{\vec{F}_2} = F_2 \cdot d_2 = 2P_{\Delta OAC} = 2P_{\Delta OAC'} = F_{2x} \cdot \overline{OA};$$

$$M_O^{\vec{F}_r} = F_r \cdot d_r = 2P_{\Delta OAD} = 2P_{\Delta OAD'} = F_{rx} \cdot \overline{OA}.$$

Površina trokuta OAB ($P_{\Delta OAB}$) jednaka je površini trokuta OAB' ($P_{\Delta OAB'}$) jer su to dva trokuta jednakih osnovica i visina (slika 2.51.). Analogno se može utvrditi i za površine trokuta OAC i OAC', odnosno trokuta OAD i OAD'.

Projekcija rezultante na os x jest:

$$F_{rx} = F_{1x} + F_{2x}.$$

Množenjem te jednakosti s duljinom \overline{OA} dobijemo:

$$F_{rx} \cdot \overline{OA} = F_{1x} \cdot \overline{OA} + F_{2x} \cdot \overline{OA},$$

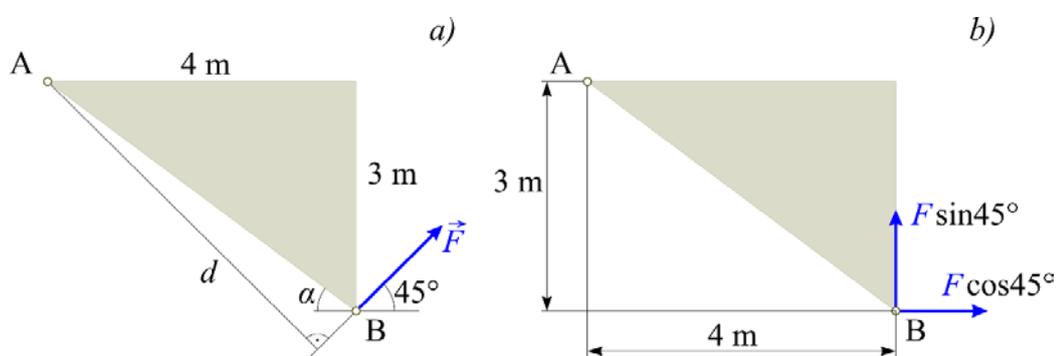
odnosno:

$$M_O^{\vec{F}_r} = M_O^{\vec{F}_1} + M_O^{\vec{F}_2},$$

čime je teorem dokazan.

Primjer 2.19.

Na trokutnu ploču zadanih dimenzija djeluje sila \vec{F} (slika 2.52.a). Valja odrediti moment sile u odnosu na točku A ako je zadano $F = 10 \text{ kN}$.



Slika 2.52. *Primjer 2.19.*: Određivanje momenta sile \vec{F} u odnosu na točku A: a) izravno, b) primjenom Varignonova teorema.

Rješenje:

- način – izravno:

$$M_A^{\vec{F}} = F \cdot d,$$

$$d = \overline{AB} \cdot \sin(\alpha + 45^\circ), \quad \overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m},$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} = 0,75, \quad \alpha = 36,9^\circ,$$

$$d = 5 \cdot \sin 81,9^\circ = 4,950 \text{ m},$$

$$M_A^{\vec{F}} = 10 \cdot 4,950 = 49,5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- način – primjenom Varignonova teorema (slika 2.52.b):

$$M_A^{\vec{F}} = F_x \cdot 3 + F_y \cdot 4,$$

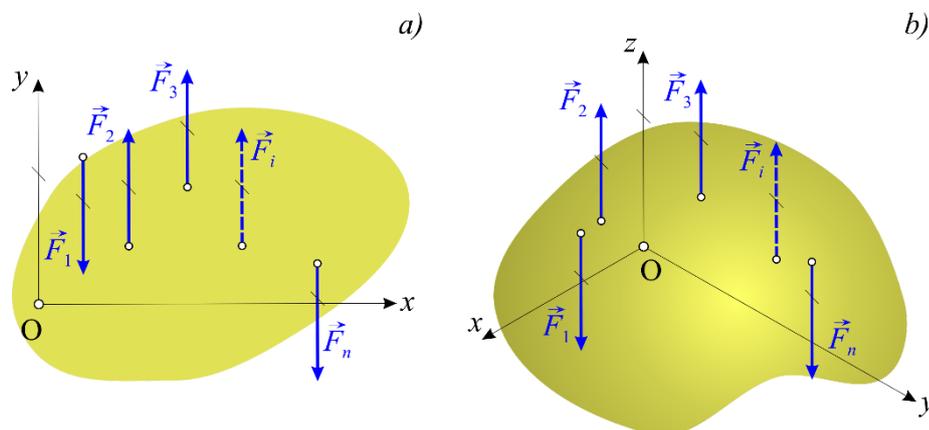
$$F_x = F \cdot \cos 45^\circ = 10 \cdot \cos 45^\circ = 7,071 \text{ kN},$$

$$F_y = F \cdot \sin 45^\circ = 10 \cdot \sin 45^\circ = 7,071 \text{ kN},$$

$$M_A^{\vec{F}} = 7,071 \cdot 3 + 7,071 \cdot 4 = 49,5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

3. PARALELNI SUSTAV SILA

Ako su pravci djelovanja svih sila koje djeluju na neko tijelo međusobno paralelni, govorimo o paralelnom sustavu sila. Ako pravci djelovanja svih sila leže u jednoj ravnini, govorimo o paralelnom sustavu sila u ravnini (slika 3.1.a); ako su pravci djelovanja svih sila sustava paralelni, ali nisu u jednoj ravnini, radi se o paralelnom sustavu sila u prostoru (slika 3.1.b).

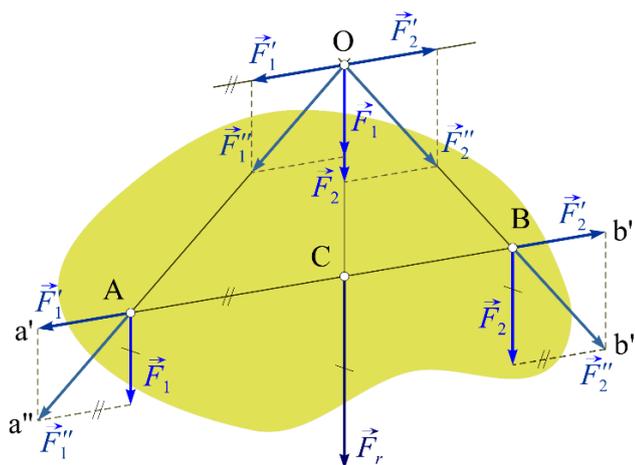


Slika 3.1. Paralelni sustav sila: a) u ravnini, b) u prostoru.

3.1. SLAGANJE I RAZLAGANJE PARALELNIH SILA

3.1.1. Slaganje dviju paralelnih sila usmjerenih u istu stranu

Ako na promatrano tijelo djeluju dvije paralelne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , tada se pravci njihova djelovanja sijeku u beskonačnosti (slika 3.2.).



Slika 3.2. Slaganje dviju sila usmjerenih u istu stranu

Sustavu stoga dodajemo uravnoteženi sustav sila (\vec{F}_1', \vec{F}_2') na pravcu AB, pri čemu je $\vec{F}_1' = -\vec{F}_2'$. Zbrajanjem svake od ovih sila s odgovarajućom zadanom silom dobijemo sile \vec{F}_1'' i \vec{F}_2'' sa sjecištem u O. Nakon pomicanja hvatišta tako dobivenih sila u točku O možemo te sile $(\vec{F}_1''$ i

\vec{F}_2) ponovno razložiti na sile \vec{F}_1 i \vec{F}_1' , odnosno \vec{F}_2 i \vec{F}_2' . Sada oduzimamo uravnoteženi sustav sila (\vec{F}_1', \vec{F}_2') i dobijemo zadane sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 na pravcu OC koji je paralelan samim silama. Zbrajanjem tih sila dobijemo rezultantu:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

intenzitet koje je:

$$F_r = F_1 + F_2. \quad (3.1)$$

Budući da je $\triangle Aa'a'' \cong \triangle ACO$ i $\triangle Bb'b'' \cong \triangle BCO$, može se pisati:

$$\overline{AC} : \overline{OC} = F_1' : F_1, \quad \overline{BC} : \overline{OC} = F_2' : F_2,$$

odakle, zbog $F_1' = F_2'$, slijedi:

$$\overline{AC} \cdot F_1 = \overline{BC} \cdot F_2.$$

Uvrštavanjem gornjih omjera u jednakost $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$ dobijemo:

$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{F_r}, \quad (3.2)$$

pa slijedi zaključak: *Rezultanta dviju paralelnih sila koje djeluju na kruto tijelo i koje su usmjerene u istu stranu, jednaka je po intenzitetu zbroju intenziteta zadanih sila, paralelna im je i usmjerena u istu stranu; pravac djelovanja rezultante prolazi između hvatišta zadanih sila, a na udaljenostima od tih točaka koje su obrnuto proporcionalne silama.*

3.1.2. Slaganje dviju paralelnih sila usmjerenih u suprotne strane

Iako bi se i u ovom slučaju moglo postupiti na gore opisani način, jednostavniji je sljedeći postupak (slika 3.3.a) u kojem ćemo pretpostaviti da je $F_1 > F_2$.

Sada u točki C tijela dodajemo uravnoteženi sustav sila \vec{F}_r i \vec{F}_r' , uz $\vec{F}_r = -\vec{F}_r'$ (slika 3.3.b).

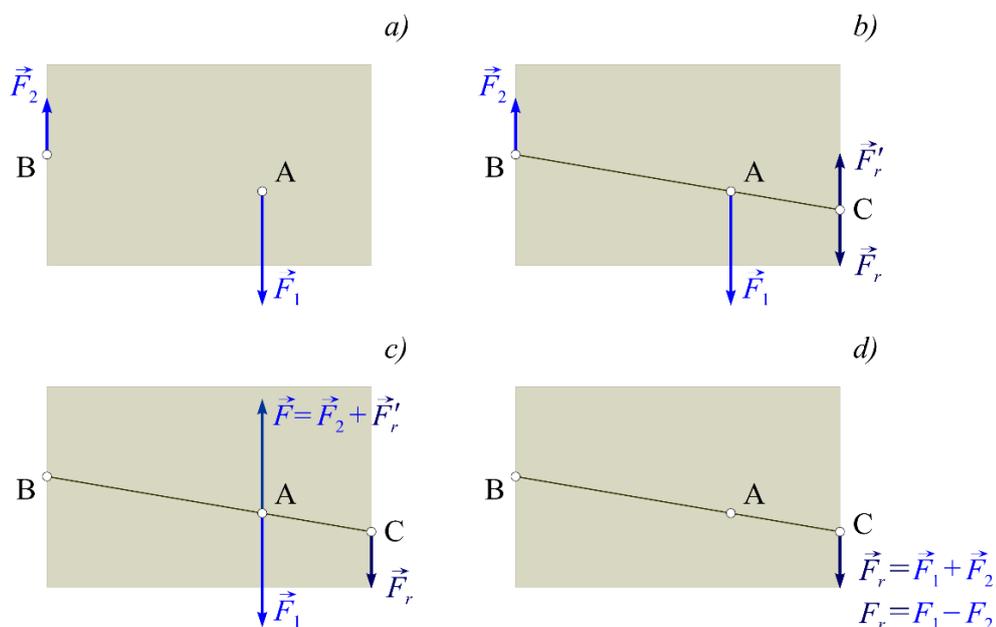
Sustav (\vec{F}_2, \vec{F}_r') zamjenjujemo rezultantom \vec{F} , pri čemu je $\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_r'$ i $\vec{F}_1 = -\vec{F}$ (slika 3.3.c).

Nakon oduzimanja uravnoteženog sustava sila (\vec{F}_1, \vec{F}) na tijelo će djelovati samo jedna sila, \vec{F}_r (slika 3.3.d), koja predstavlja rezultantu zadanog sustava sila (\vec{F}_1, \vec{F}_2), pri čemu je:

$$F_r = F_1 - F_2, \quad (3.3)$$

$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{F_r}. \quad (3.4)$$

Dakle: *Rezultanta dviju paralelnih sila koje djeluju na kruto tijelo i koje su usmjerene u suprotne strane, jednaka je po intenzitetu razlici intenziteta zadanih sila, paralelna im je i usmjerena u stranu sile većeg intenziteta. Pravac djelovanja rezultante prolazi izvan pravocrtnog odsječka koji spaja hvatišta zadanih sila, a na udaljenosti od tih točaka obrnuto proporcionalnim intenzitetima sila.*



Slika 3.3. Rezultanta dviju paralelnih sila suprotnog smjera: a) zadani sustav sila, b) dodavanje uravnoteženog sustava sila $\vec{F}_r = -\vec{F}_r'$, c) rezultanta sila $\vec{F}_2 + \vec{F}_r'$, d) rezultanta zadanih sila.

3.1.3. Razlaganje sila

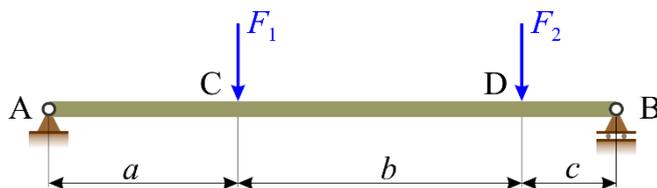
Zadatak je određen samo ako su zadani i neki dopunski uvjeti (npr. pravci djelovanja obiju traženih sila ili pak intenzitet i pravac djelovanja jedne od njih).

Primjer 3.1.

Na horizontalnu gredu zanemarive težine djeluju dvije paralelne sile istoga smjera \vec{F}_1 i \vec{F}_2 . Greda je vezana za podlogu osloncima A i B (slika 3.4.).

Valja odrediti pritiske horizontalne grede na oslonce A i B.

Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$, $F_1 = 800 \text{ N}$ i $F_2 = 500 \text{ N}$.



Slika 3.4. *Primjer 3.1.*: Horizontalna greda opterećena s dvije paralelne sile

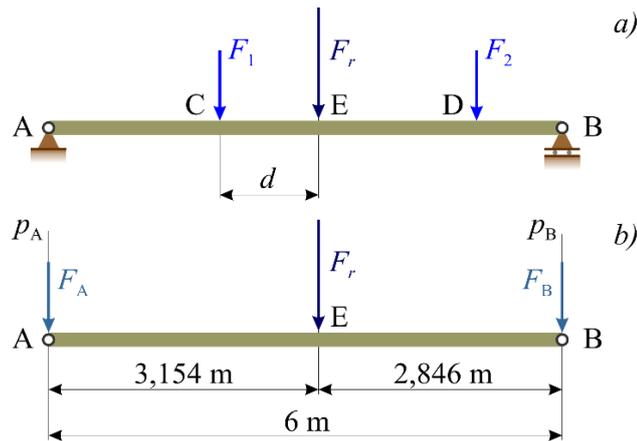
Rješenje:

Prvo odredimo rezultantu sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 (slika 3.5.a). Njezin je iznos prema (3.1):

$$F_r = F_1 + F_2 = 800 + 500 = 1300 \text{ N},$$

a njezin je položaj na gredi prema (3.2):

$$\frac{\overline{CD}}{F_r} = \frac{\overline{CE}}{F_2}, \quad \overline{CE} = \frac{F_2}{F_r} \cdot \overline{CD} = \frac{500}{1300} \cdot 3 = 1,154 \text{ m}.$$



Slika 3.5. *Primjer 3.1.:* a) rezultanta zadanih paralelnih sila, b) sile pritiska na oslonce A i B.

U sljedećem koraku silu \vec{F}_r rastavljamo na dvije komponente \vec{F}_A i \vec{F}_B duž pravaca p_A i p_B (slika 3.5.b).

Intenziteti ovih komponenata su prema (3.2):

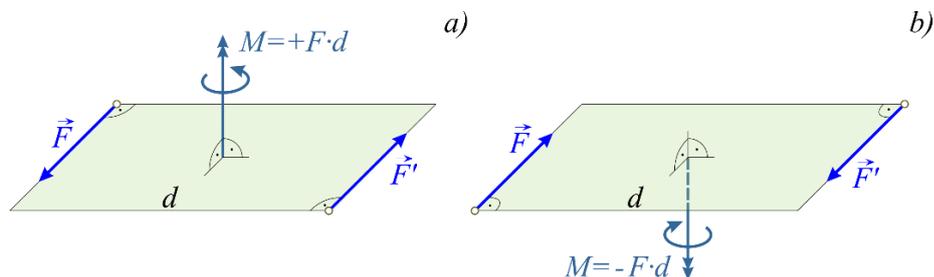
$$\frac{\overline{EB}}{F_A} = \frac{\overline{AB}}{F_r}, \quad F_A = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} \cdot F_r = \frac{2,846}{6} \cdot 1300 = 617 \text{ N},$$

$$\frac{\overline{AE}}{F_B} = \frac{\overline{AB}}{F_r}, \quad F_B = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \cdot F_r = \frac{3,154}{6} \cdot 1300 = 683 \text{ N}.$$

Sile \vec{F}_A i \vec{F}_B predstavljaju sile pritiska na oslonce A i B, dok su reakcije oslonaca A i B po iznosu jednake ovim silama pritiska, ali imaju suprotan smjer.

3.2. SPREG SILA. MOMENT SPREGA SILA

Spregom sila nazivamo sustav od dvije paralelne sile \vec{F} i \vec{F}' , jednakih intenziteta, a suprotnih smjerova, koji djeluju na kruto tijelo (slika 3.6.).



Slika 3.6.: a) spreg sila pozitivnog momenta sprega, b) spreg sila negativnog momenta sprega.

Vektorski zbroj sila koje čine spreg jest nulti vektor, tj. spreg sila nema rezultantu.

Ravnina koja prolazi kroz pravce djelovanja sila jest *ravnina sprega*. Udaljenost d između pravaca djelovanja sila naziva se *krak sprega*. Djelovanje sprega sila na kruto tijelo svodi se na zakretanje tijela koje ovisi:

- o intenzitetu sile F sprega i duljini njihova kraka d

- o položaju ravnine djelovanja sprega
- o smjeru zakretanja u toj ravnini.

Momentom sprega sila nazivamo veličinu, uzetu s odgovarajućim predznakom, koja je jednaka produktu intenziteta sila F i kraka sprega d .

$$M = \pm F \cdot d. \quad (3.5)$$

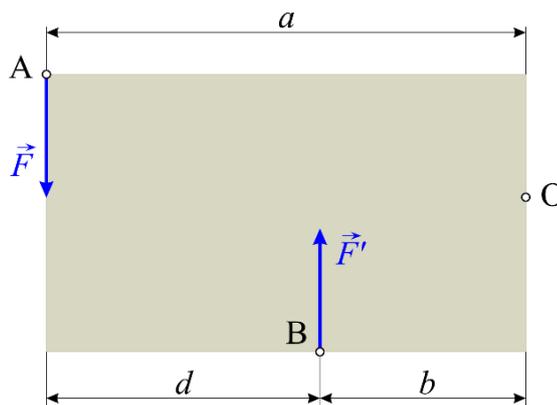
Moment sprega ima pozitivan predznak tada kada spreg teži da zakrene tijelo u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (slika 3.6.a), i negativan, kada teži da zakrene tijelo u smjeru zakretanja kazaljke na satu (slika 3.6.b).

Teorem o neovisnosti momenta sprega o odabiru točke glasi:

Algebarska suma momenata sila koje čine spreg, u odnosu na bilo koju točku koja leži u ravnini djelovanja sprega, ne ovisi o odabiru te točke i jednaka je momentu sprega sila.

$$M = M_A^{\vec{F}'} = M_B^{\vec{F}} = F \cdot d. \quad (3.6)$$

Dokaz teorema slijedi s pomoću slike 3.7.:



Slika 3.7. Uz dokaz teorema o neovisnosti momenta sprega o točki redukcije

Momenti sila \vec{F} i \vec{F}' u odnosu na točku O su:

$$M = M_O^{\vec{F}} = F \cdot a; \quad M = M_O^{\vec{F}'} = -F \cdot b,$$

a budući da je:

$$d = a - b;$$

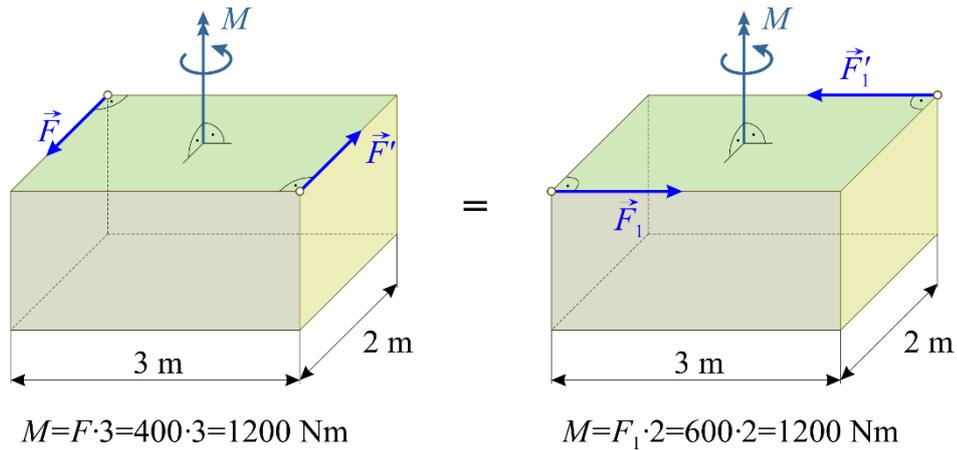
rezultirajući moment sprega iznosi:

$$M = M_O^{\vec{F}} + M_O^{\vec{F}'} = F \cdot a - F \cdot b = F \cdot d,$$

čime je tvrdnja dokazana.

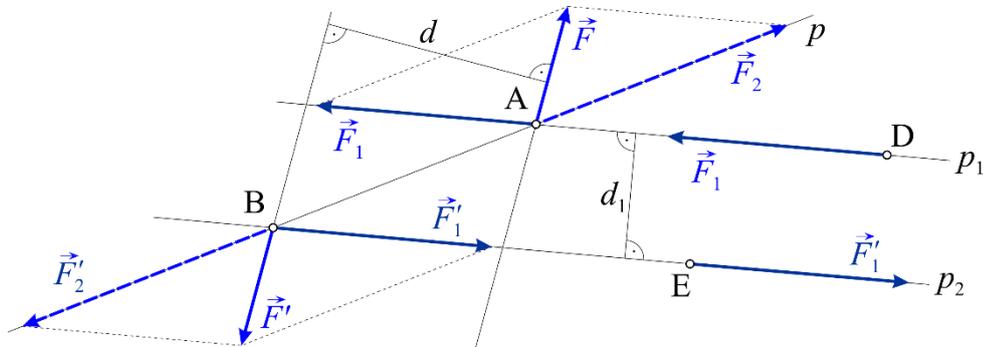
3.2.1. Ekvivalentnost spregova sila

TEOREM 1: *Ne mijenjajući djelovanje na tijelo, možemo spreg sila, koji djeluje na kruto tijelo, zamijeniti drugim spregom, koji leži u istoj ravnini i ima isti moment (slika 3.8.).*



Slika 3.8. Ekvivalentnost spregova sila

Dokaz ovog teorema dan je prema slici 3.9.:



Slika 3.9. Uz dokaz teorema o ekvivalentnosti spregova sila

Zadan je spreg sila (\vec{F} , \vec{F}') s krakom sprega d . Povucimo kroz hvatišta sila \vec{F} i \vec{F}' (točke A i B) dva paralelna pravca p_1 i p_2 , međusobna udaljenost kojih je d_1 , te pravac p koji prolazi točkama A i B. Ako sada silu \vec{F} razložimo na sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , s pravcima djelovanja p_1 i p , te silu \vec{F}' na \vec{F}'_1 i \vec{F}'_2 s pravcima p_2 i p , bit će:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}'_1, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}'_2,$$

pa možemo ukloniti uravnoteženi sustav sila (\vec{F}_2 , \vec{F}'_2).

Primjenom Varignonova teorema dobijemo:

$$M_{\vec{F}}^{\vec{F}} = M_{\vec{F}_1}^{\vec{F}_1} + M_{\vec{F}_2}^{\vec{F}_2},$$

a budući da je:

$$M_{\vec{F}}^{\vec{F}} = F \cdot d; \quad M_{\vec{F}_1}^{\vec{F}_1} = F_1 \cdot d_1; \quad M_{\vec{F}_2}^{\vec{F}_2} = 0,$$

slijedi:

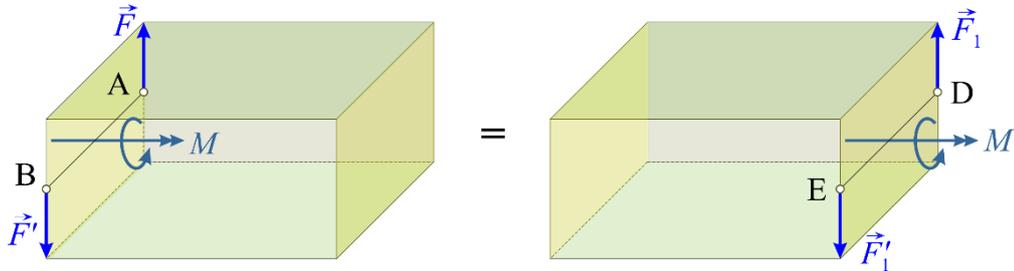
$$F \cdot d = F_1 \cdot d_1.$$

Iz gornjeg teorema slijedi:

- spreg sila možemo prenositi po volji u ravnini njegova djelovanja;

- kod zadanog sprega možemo mijenjati intenzitet sila ili pak duljinu kraka sprega, ali tako da se pri tome moment sprega ne mijenja.

TEOREM 2: *Djelovanje sprega sila na kruto tijelo se ne mijenja ako spreg prenesemo iz zadane ravnine u bilo koju proizvoljno odabranu, njoj paralelnu ravninu (slika 3.10.).*



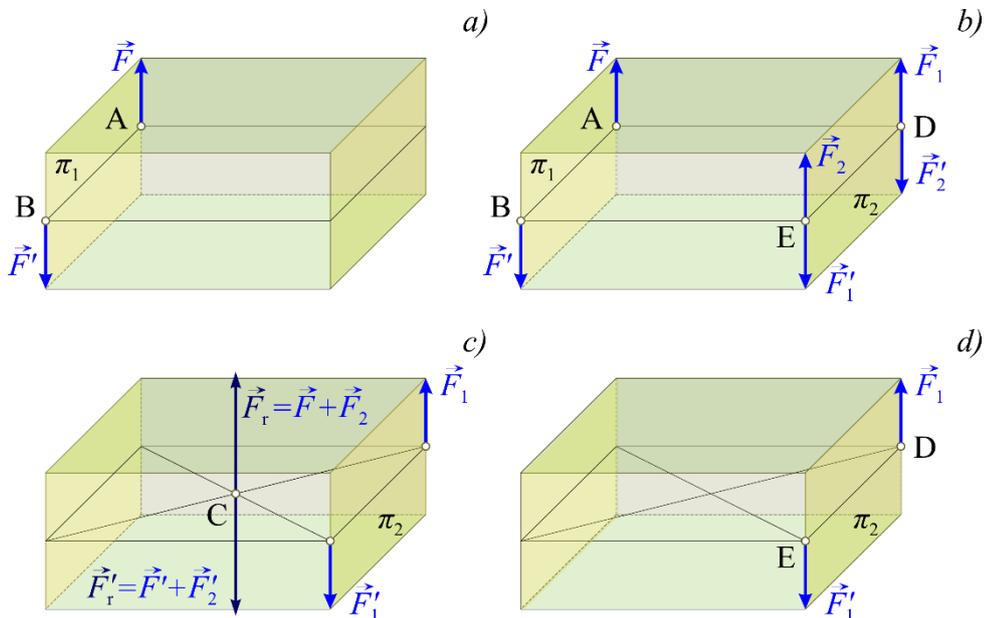
Slika 3.10. Prenošenje sprega sila iz jedne ravnine u njoj paralelnu ravninu

Neka je zadan spreg sila (\vec{F}, \vec{F}') koji djeluje u ravnini π_1 (slika 3.11.a).

Dodamo li u ravnini π_2 uravnoteženi sustav sila sastavljen od četiriju sila: \vec{F}_1 i \vec{F}_2 s hvatištem u D te \vec{F}'_1 i \vec{F}'_2 s hvatištem u E (slika 3.11.b), pri čemu je:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}; \quad \vec{F}'_1 = \vec{F}'_2 = \vec{F}'; \quad \overline{AB} = \overline{DE},$$

možemo sile \vec{F} i \vec{F}_2 zamijeniti rezultantom \vec{F}_r s hvatištem u C, a sile \vec{F}' i \vec{F}'_2 rezultantom \vec{F}'_r hvatište koje je također u tački C (slika 3.11.c).



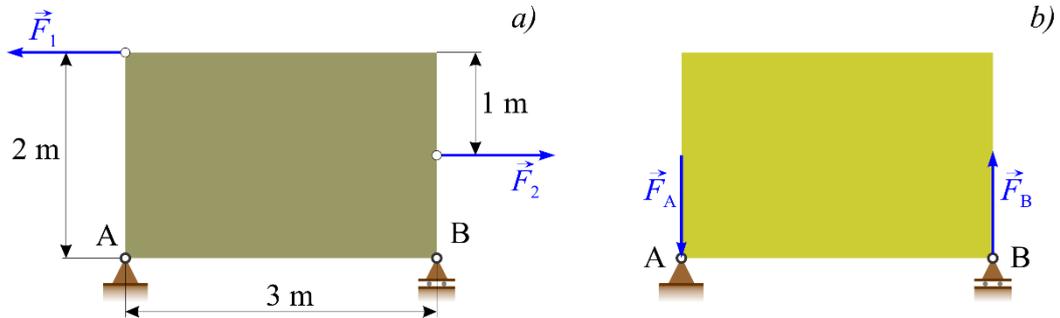
Slika 3.11. Dokaz teorema o nepromijenjenom djelovanju sprega sila pri prenošenju iz jedne ravnine u njoj paralelnu ravninu

Nadalje zaključujemo da su \vec{F}_r i \vec{F}'_r suprotni vektori na istom pravcu djelovanja, da predstavljaju uravnoteženi sustav sila te da ih, prema drugom aksiomu statike, možemo oduzeti promatranom sustavu sila. Dobili smo, dakle, spreg sila (\vec{F}_1, \vec{F}'_1) , koji je ekvivalentan osnovnom spregu (slika 3.11.d).

Na temelju ovih dvaju teorema možemo zaključiti da je moment sprega sila slobodan vektor, pa ga zato označavamo dvjema strelicama i, po pravilu desne ruke, oznakom smjera u kojem teži zakrenuti tijelo na koje djeluje.

Primjer 3.2.

Pravokutna ploča opterećena je spregom sila i vezana za podlogu osloncima A i B (slika 3.12.a). Potrebno je odrediti sile pritiska na oslonce A i B. Zadano je: $F_1 = F_2 = 600 \text{ N}$.



Slika 3.12. *Primjer.3.2.: a) pravokutna ploča opterećena spregom sila, b) spreg sila ekvivalentan zadanom spregu sila.*

Rješenje:

Prema prvom teoremu možemo zadani spreg sila (slika 3.12.a) zamijeniti spregom sila prema slici 3.12.b, pri čemu je:

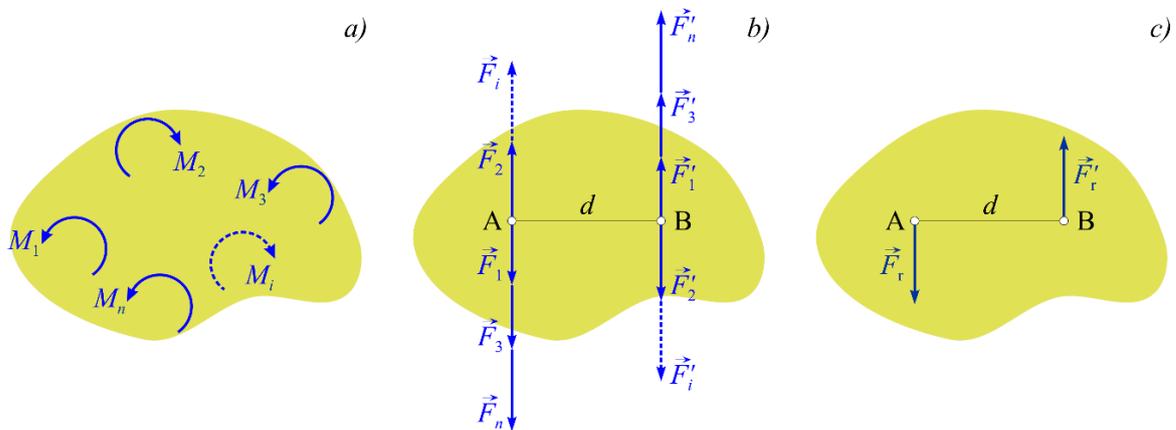
$$F_A \cdot 3 = F_1 \cdot 1, \quad F_A = \frac{F_1 \cdot 1}{3} = \frac{600 \cdot 1}{3} = 200 \text{ N}.$$

Dakle, pritisci na oslonce su

$$F_A = F_B = 200 \text{ N}.$$

3.2.2. Slaganje spregova sila koji djeluju u istoj ravnini

Teorem o slaganju spregova sila glasi: *Sustav spregova koji djeluje u jednoj ravnini možemo zamijeniti jednim spregom koji djeluje u istoj ravnini i čiji je moment jednak algebarskoj sumi momenata zadanih (komponentnih) spregova (slika 3.13.).*



Slika 3.13. *Slaganje spregova sila koji djeluju u istoj ravnini*

Neka je zadan niz spregova sila, momenti kojih su $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ (slika 3.13.a). Svaki od tih spregova možemo zamijeniti ekvivalentnim spregom s krakom d (slika 3.13.b):

$$M_1 = F_1 \cdot d; \quad M_2 = F_2 \cdot d; \quad \dots; \quad M_i = F_i \cdot d; \quad \dots, \quad M_n = F_n \cdot d.$$

Sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ s hvatištem u A možemo zamijeniti rezultantom \vec{F}_r tih sila s hvatištem u istoj točki (A), a sile $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_i, \dots, \vec{F}'_n$ s hvatištem u B možemo zamijeniti rezultantom \vec{F}'_r s hvatištem u istoj točki (B) (slika 3.13.c).

Prema Varignonovu teoremu vrijedi:

$$M = F_r \cdot d = F_1 \cdot d + (-F_2 \cdot d) + \dots + (-F_i \cdot d) + \dots + F_n \cdot d$$

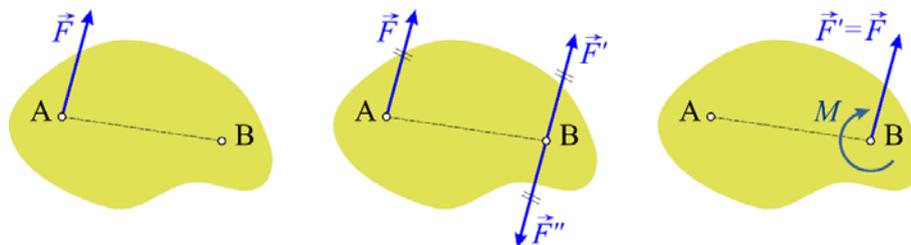
$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_i + \dots + M_n$$

ili:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = \sum M_i.$$

3.3. TEOREM O REDUKCIJI SILE NA TOČKU

Teorem glasi: *Silu \vec{F} poznatog pravca djelovanja koja djeluje na kruto tijelo u točki A možemo, ne mijenjajući njezino djelovanje, prenijeti na paralelni pravac u bilo koju točku tijela B ako pri tome dodamo spreg čiji je moment jednak momentu sile koja se prenosi u odnosu na točku u koju se prenosi.*



Slika 3.14. Prenos sile na pravac paralelan njezinu pravcu djelovanja

Neka na promatrano kruto tijelo djeluje zadana sila \vec{F} s hvatištem u točki A (slika 3.14.). Silu treba paralelno prenijeti u po volji odabranu točku B. U točki B možemo, prema drugom aksiomu, dodati uravnoteženi sustav sila (\vec{F}', \vec{F}''), pri čemu je $\vec{F}' = -\vec{F}''$. Sile \vec{F} i \vec{F}'' čine spreg čiji je moment, kako je ranije rečeno, jednak umnošku intenziteta jedne od sila i kraka sprega. Slijedi da je taj moment sprega sila jednak momentu sile \vec{F} u odnosu na točku B:

$$M = M_B^{\vec{F}}.$$

3.4. REDUKCIJA PARALELNOG SUSTAVA SILA NA ZADANU TOČKU

Ako na tijelo djeluje proizvoljan paralelni sustav sila i spregova, tada, postupnom primjenom prethodnog teorema o redukciji sile na točku, možemo i sve sile zadanog sustava reducirati na

jednu točku. Time djelovanje zadanih sila možemo zamijeniti jednom jedinom silom, koja se u ovom slučaju naziva *glavni vektor paralelnog sustava sila* i označava s \vec{F}_R .

Sve spregove momenata $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n$ možemo također zbrojiti u jedan, rezultirajući spreg momenta M_O , koji se naziva *glavni moment paralelnog sustava sila* u odnosu na točku O.

Glavni vektor paralelnog sustava sila dobije se prema

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i. \quad (3.7)$$

Kako su redukcijom sve sile došle na isti pravac koji je paralelan pravcima djelovanja svih zadanih sila, iznos glavnog vektora sila jednak je algebarskoj sumi iznosa zadanih sila i računa se prema

$$F_R = \sum F_i. \quad (3.8)$$

Vektor glavnog momenta paralelnog sustava sila u ravnini okomit je na ravninu u kojoj leže pravci djelovanja zadanih sila. Njegov iznos jednak je algebarskoj sumi momenata svih sila u odnosu na točku redukcije O i algebarskoj sumi svih zadanih spregova, te se računa prema

$$M_O = \sum M_O^{\vec{F}_i} + \sum M_j. \quad (3.9)$$

Ako se za neku točku redukcije dobije da je $M_O = 0$, glavni vektor sila \vec{F}_R postaje rezultanta \vec{F}_r zadanog sustava paralelnih sila.

Iako je

$$\vec{F}_r = \vec{F}_R, \quad F_r = F_R, \quad (3.10)$$

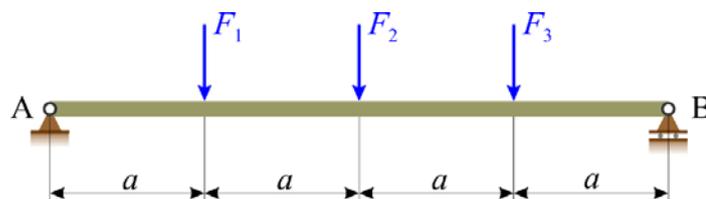
pojmovno treba razlikovati rezultantu \vec{F}_r od glavnog vektora sila \vec{F}_R . Stoga se i drugačije označavaju: rezultanta s \vec{F}_r , a glavni vektor sila s \vec{F}_R .

Primjer 3.3.

Na horizontalnu gredu AB djeluje paralelni sustav sila u ravnini sastavljen od triju sila zadanih iznosa F_1, F_2 i F_3 (slika 3.15.). Valja odrediti iznos rezultante zadanoga paralelnog sustava sila i njezin položaj u odnosu na točku A.

Potrebno je reducirati zadani sustav sila na točke A i B.

Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $F_1 = 300 \text{ N}$, $F_2 = 180 \text{ N}$, $F_3 = 250 \text{ N}$.



Slika 3.15. *Primjer 3.3.: Horizontalna greda opterećena paralelnim sustavom sila u ravnini*

Rješenje:

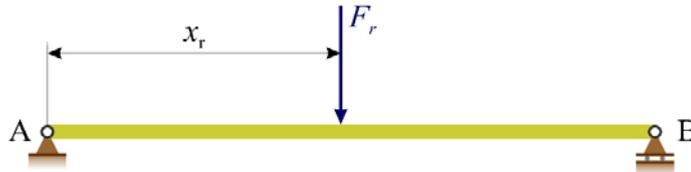
Iznos rezultante jednak je iznosu glavnog vektora sila, a dobije se prema (3.8):

$$F_r = F_1 + F_2 + F_3, \quad F_r = 300 + 180 + 250 = 730 \text{ N}, \quad \vec{F}_r = -730 \cdot \vec{j}.$$

Položaj rezultante određen je iz uvjeta da je moment rezultante u odnosu na točku A jednak algebarskom zbroju momenata zadanih sila u odnosu na istu točku (slika 3.16.).

$$-F_r \cdot x_r = -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 6,$$

$$x_r = \frac{300 \cdot 2 + 180 \cdot 4 + 250 \cdot 6}{730} = 3,863 \text{ m}.$$



Slika 3.16. *Primjer 3.3.: Rezultanta zadanih sila*

Redukcijom zadanih sila na točku A dobije se glavni vektor sila \vec{F}_R sa smjerom rezultante i glavni moment \vec{M}_A u odnosu na točku A (slika 3.17.a) prema (3.7), (3.8) i (3.9):

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 300 + 180 + 250 = 730 \text{ N}, \quad \vec{F}_R = -730 \cdot \vec{j};$$

$$M_A = -F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 6 = -300 \cdot 2 - 180 \cdot 4 - 250 \cdot 6 = -2820 \text{ N} \cdot \text{m},$$

$$\vec{M}_A = -2820 \cdot \vec{k}.$$

Glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_A međusobno su okomiti vektori.



Slika 3.17. *Primjer 3.3.: a) redukcija zadanog sustava na točku A, b) redukcija zadanog sustava na točku B.*

Na isti način dobiju se glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment sila \vec{M}_B u odnosu na točku B (slika 3.17.b):

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 300 + 180 + 250 = 730 \text{ N}, \quad \vec{F}_R = -730 \cdot \vec{j};$$

$$M_B = F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 2 = 300 \cdot 6 + 180 \cdot 4 + 250 \cdot 2 = 3020 \text{ N} \cdot \text{m},$$

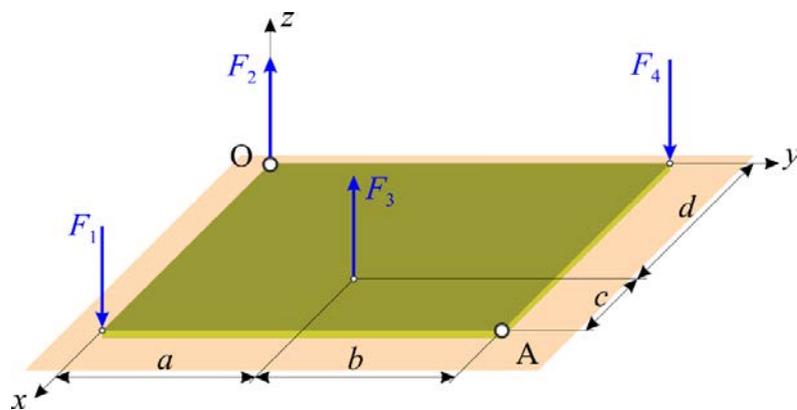
$$\vec{M}_B = 3020 \cdot \vec{k}.$$

Može se zaključiti da glavni vektor sila \vec{F}_R nije ovisan o točki redukcije i naziva se invarijanta zadanog sustava, dok se glavni moment \vec{M}_T mijenja promjenom točke redukcije T.

Primjer 3.4.

Na pravokutnu ploču djeluje prostorni paralelni sustav sila koji čine četiri sile poznatih smjerova i iznosa (slika 3.18.). Potrebno je odrediti iznos rezultante zadanog sustava sila i njezin položaj u odnosu na ishodišnu točku O. Reducirati zatim zadani sustav sila na točku A.

Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$, $d = 3 \text{ m}$, $F_1 = 800 \text{ N}$, $F_2 = 600 \text{ N}$, $F_3 = 300 \text{ N}$, $F_4 = 650 \text{ N}$.



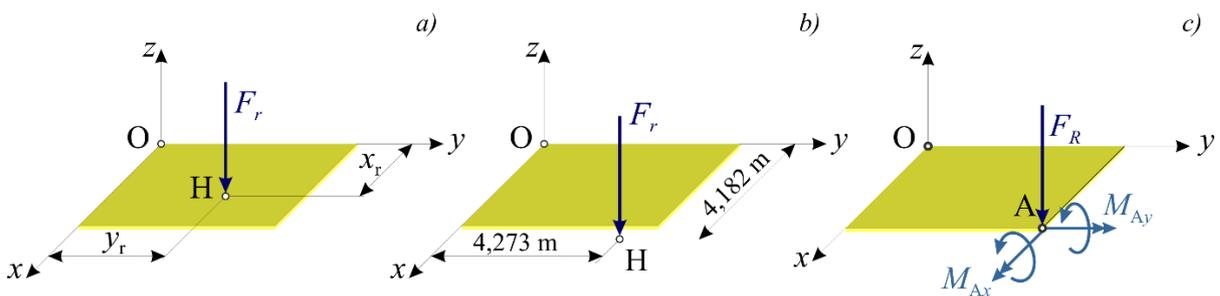
Slika 3.18. *Primjer 3.4.:* Ploča opterećena paralelnim sustavom sila u prostoru

Rješenje:

Iznos rezultante jednak je algebarskom zbroju iznosa zadanih sila, a dobije se prema:

$$F_r = -F_1 + F_2 + F_3 - F_4 = -800 + 600 + 300 - 650 = -550 \text{ N},$$

$$\vec{F}_r = -550 \cdot \vec{k}.$$



Slika 3.19. *Primjer 3.4.:* a) rezultanta zadanog sustava sila s pretpostavljenim položajem hvatišta H, b) rezultanta sa stvarnim položajem hvatišta H, c) redukcija zadanog sustava sila na točku A.

Kako su pravci djelovanja svih zadanih sila paralelni s osi z , to će i pravac djelovanja rezultante biti paralelan s osi z .

Koordinate x_r i y_r točke H, točke kroz koju prolazi pravac rezultante, mogu se odrediti iz uvjeta da je moment rezultante u odnosu na ishodišne osi x i y jednak algebarskom zbroju momenata zadanih sila u odnosu na iste osi.

Koordinate hvatišta H rezultante (slika 3.19.a) i (slika 3.19.b) mogu se dobiti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} F_r \cdot y_r &= F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 3 - F_4 \cdot 5, \\ -550 \cdot y_r &= 300 \cdot 3 - 650 \cdot 5, \quad y_r = 4,273 \text{ m}; \\ F_r \cdot x_r &= F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 0 - F_3 \cdot 3 + F_4 \cdot 0, \\ 550 \cdot x_r &= 800 \cdot 4 - 300 \cdot 3, \quad x_r = 4,182 \text{ m}. \end{aligned}$$

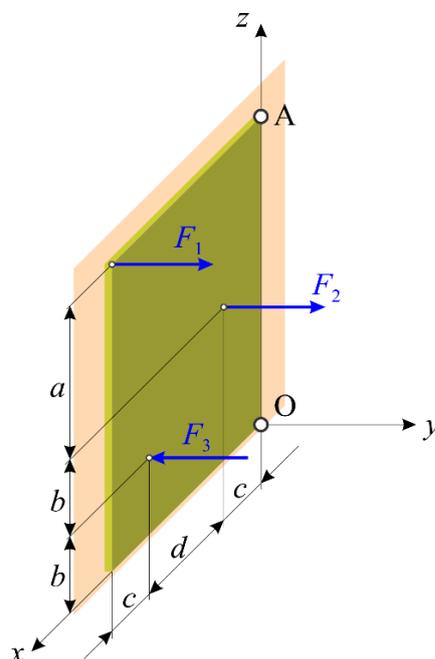
Zadani sustav sila može se u točki A zamijeniti ekvivalentnim sustavom koji čine glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_A u odnosu na točku A (slika 3.19.c), koji su dobiveni prema:

$$\begin{aligned} F_R &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -800 + 600 + 300 - 650 = -550 \text{ N}, \quad \vec{F}_R = -550 \cdot \vec{k}; \\ M_{Ax} &= F_1 \cdot 5 - F_2 \cdot 5 - F_3 \cdot 2 + F_4 \cdot 0 = 800 \cdot 5 - 600 \cdot 5 - 300 \cdot 2 = 400 \text{ N} \cdot \text{m}, \\ M_{Ay} &= F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 1 - F_4 \cdot 4 = 600 \cdot 4 + 300 \cdot 1 - 650 \cdot 4 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}, \\ \vec{M}_A &= 400 \cdot \vec{i} + 100 \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Kod paralelnog sustava sila glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_T , u odnosu na bilo koju točku T, uvijek su međusobno okomiti.

Primjer 3.5.

Pravokutna ploča opterećena je paralelnim sustavom sila u prostoru (slika 3.20.).



Slika 3.20. *Primjer 3.5.*: Ploča opterećena paralelnim sustavom sila u prostoru

Valja odrediti iznos rezultante zadanog sustava sila i njezin položaj u odnosu na ishodišnu točku O. Potrebno je također reducirati zadani sustav sila na točku A.

Zadano je: $a = 4 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$, $d = 2 \text{ m}$, $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $F_3 = 4 \text{ kN}$.

Rješenje:

Budući da su pravci djelovanja zadanih sila paralelni s osi y , to će i pravac djelovanja rezultante biti paralelan s osi y . Iznos rezultante dobiva se prema (3.7) i (3.10):

$$F_r = F_1 + F_2 - F_3, \quad F_r = 5 + 3 - 4 = 4 \text{ kN}, \quad \vec{F}_r = 4 \cdot \vec{j}.$$

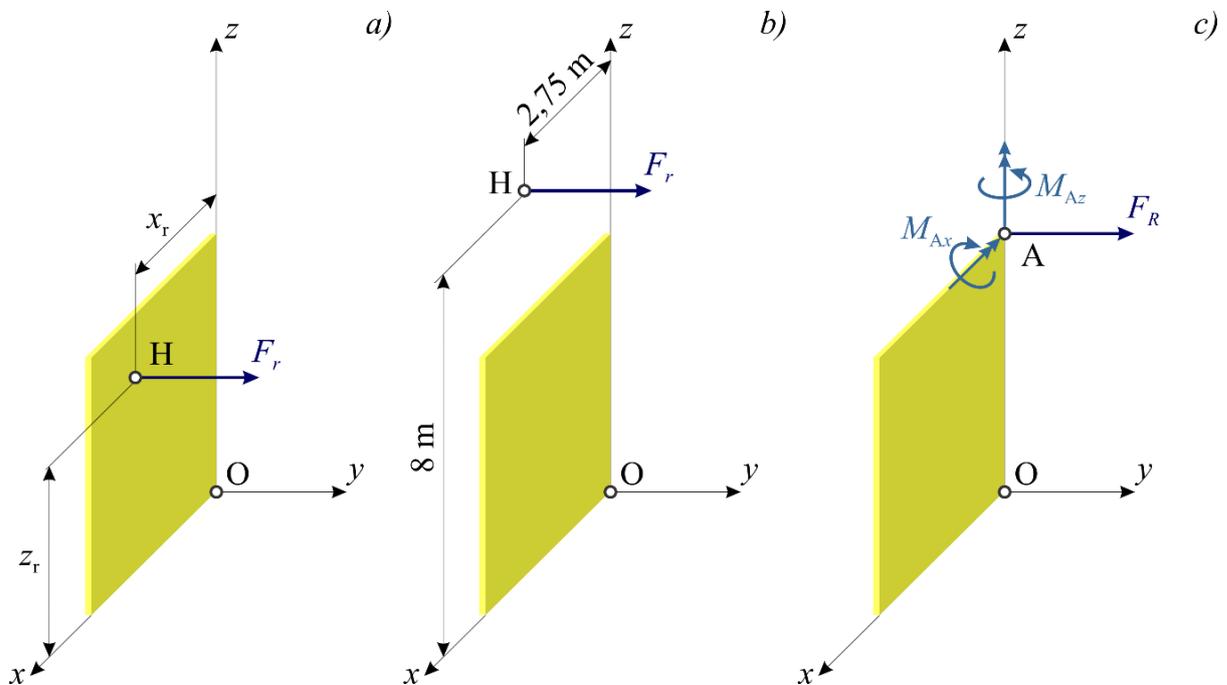
Koordinate x_r i z_r točke H, u kojoj pravac rezultante probada ploču, mogu se odrediti iz uvjeta da je moment rezultante u odnosu na ishodišne osi x i z jednak algebarskom zbroju momenata zadanih sila u odnosu na iste osi (slika 3.21.a) i (slika 3.21.b):

$$-F_r \cdot z_r = -F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 1,$$

$$-4 \cdot z_r = -5 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1, \quad z_r = 8 \text{ m};$$

$$F_r \cdot x_r = F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 3,$$

$$4 \cdot x_r = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3, \quad x_r = 2,75 \text{ m}.$$



Slika 3.21. *Primjer 3.5.:* a) rezultanta zadanog sustava sila s pretpostavljenim položajem hvatišta H, b) rezultanta sa stvarnim položaj hvatišta H, c) redukcija zadanog sustava sila na točku A.

Pri redukciji zadanih sila na točku A dobije se glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_A u odnosu na točku A (slika 3.21.c), koji se mogu dobiti prema (3.8) i (3.9):

$$F_R = F_1 + F_2 - F_3 = 5 + 3 - 4 = 4 \text{ kN}, \quad \vec{F}_R = 4 \cdot \vec{j};$$

$$M_{Ax} = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 5 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = -8 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{Az} = F_1 \cdot 4 + F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 3 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = 11 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

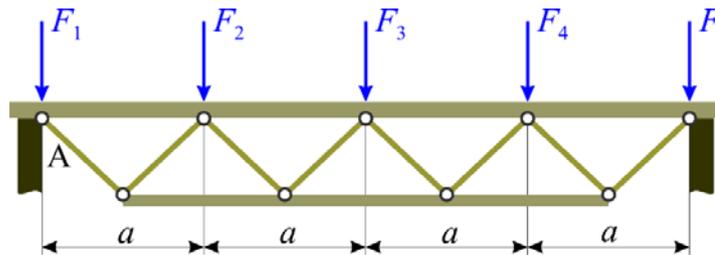
$$\vec{M}_A = -8 \cdot \vec{i} + 11 \cdot \vec{k} \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



Zadatak 3.1. Na rešetkastu konstrukciju djeluje paralelni sustav sila u ravnini (slika Z.3.1.). Valja odrediti:

- iznos i vektor rezultante zadanog sustava sila te njezin položaj u odnosu na točku A,
- glavni vektor sila i glavni moment zadanog sustava sila u točki A.

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $F_1 = 1,5 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $F_3 = 2,5 \text{ kN}$, $F_4 = 5 \text{ kN}$, $F_5 = 2 \text{ kN}$.



Slika Z.3.1. Zadatak 3.1.

3.5. RAVNOTEŽA PARALELNOG SUSTAVA SILA

Za ravnotežu paralelnog sustava sila potrebno je da oba vektora dinamike, glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_T u odnosu na proizvoljno odabranu točku T budu nulti vektori:

$$\vec{F}_R = \vec{0}, \quad \vec{M}_T = \vec{0}. \quad (3.11)$$

Uvjeti ravnoteže mogu se pisati kao dvije vektorske jednadžbe:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum \vec{M}_T^{\vec{F}_i} + \sum \vec{M}_j = \vec{0}. \quad (3.12)$$

Skalarni oblik tih jednadžbi prema (3.9) i (3.10) za paralelni sustav sila u ravnini jest:

$$\sum F = 0, \quad \sum M_T = 0. \quad (3.13)$$

Uvjeti ravnoteže mogu se pisati i u obliku:

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad (3.14)$$

ako točke A i B nisu na pravcu koji je paralelan pravcima djelovanja zadanih sila.

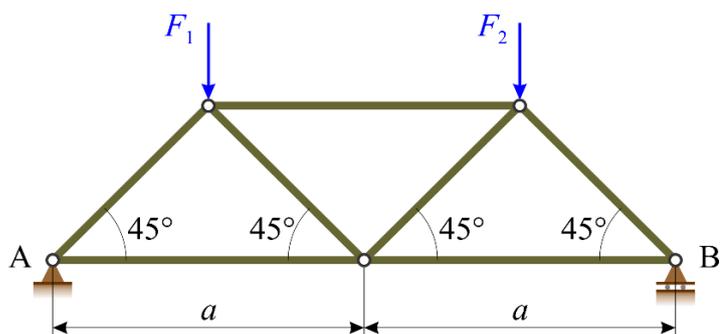
Za paralelni sustav sila u prostoru skalarne jednadžbe uvjeta ravnoteže imaju oblik:

$$\sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0. \quad (3.15)$$

U jednadžbama (3.15) pretpostavljeno je da su sve sile paralelne osi z , a momentne jednadžbe pišu se uvijek za dvije preostale osi, koje nisu paralelne s pravcima djelovanja zadanih sila.

Primjer 3.6.

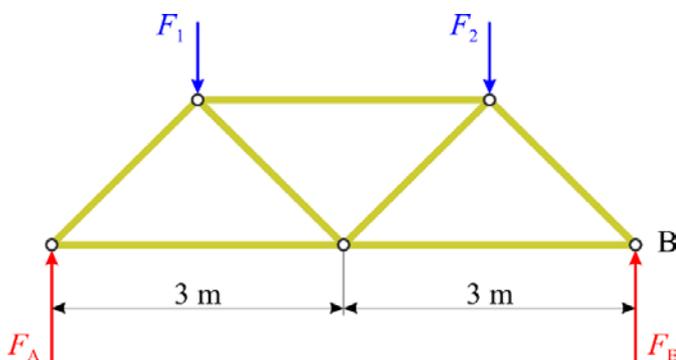
Rešetkasta konstrukcija opterećena je paralelnim sustavom sila u ravnini (slika 3.22.). Valja odrediti iznos reakcija oslonaca A i B. Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $F_1 = 3 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$.



Slika 3.22. *Primjer 3.6.: Rešetkasta konstrukcija opterećena paralelnim sustavom sila*

Rješenje:

Nakon što se rešetkasta konstrukcija oslobodi od vanjskih veza, a njihov utjecaj zamijeni reakcijama veza, na rešetku kao slobodno tijelo djeluje paralelni sustav sila u ravnini koji čine zadane sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 te reakcije veza \vec{F}_A i \vec{F}_B (slika 3.23.).



Slika 3.23. *Primjer 3.6.: Rešetkasta konstrukcija kao slobodno tijelo pod djelovanjem paralelnog sustava sila u ravnini*

Uvjeti ravnoteže mogu se napisati prema (3.13):

$$\sum F_y = 0: \quad F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0,$$

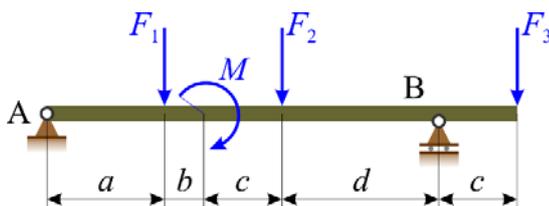
$$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot 1,5 - F_2 \cdot 4,5 + F_B \cdot 6 = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobiju se traženi iznosi reakcija oslonaca:

$$F_A = 3,5 \text{ kN}; \quad F_B = 4,5 \text{ kN}.$$

Primjer 3.7.

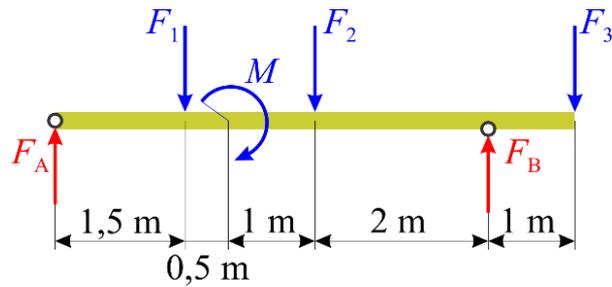
Ravni puni nosač opterećen je paralelnim sustavom sila u ravnini (slika 3.24.). Potrebno je odrediti iznos reakcija oslonaca A i B. Zadano je: $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$, $d = 2 \text{ m}$, $F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$, $F_3 = 24 \text{ kN}$, $M = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika 3.24. *Primjer 3.7.: Ravni puni nosač opterećen paralelnim sustavom sila*

Rješenje:

Nakon što se nosač oslobodi od veza i njihov utjecaj zamijeni reakcijama veza, na njega kao slobodno tijelo djeluje paralelni sustav sila i spregova u ravnini (slika 3.25.).



Slika 3.25. *Primjer 3.7.:* Ravni puni nosač kao slobodno tijelo pod djelovanjem paralelnog sustava sila u ravnini

Reakcije oslonaca A i B mogu se dobiti iz uvjeta ravnoteže prema:

$$\sum F_y = 0: \quad F_A - F_1 - F_2 - F_3 + F_B = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot 1,5 - M - F_2 \cdot 3 + F_B \cdot 5 - F_3 \cdot 6 = 0.$$

Iz druge od jednadžbi ravnoteže dobije se

$$F_B = \frac{F_1 \cdot 1,5 + M + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 6}{5} = \frac{6 \cdot 1,5 + 15 + 5 \cdot 3 + 24 \cdot 6}{5},$$

$$F_B = 36,6 \text{ kN},$$

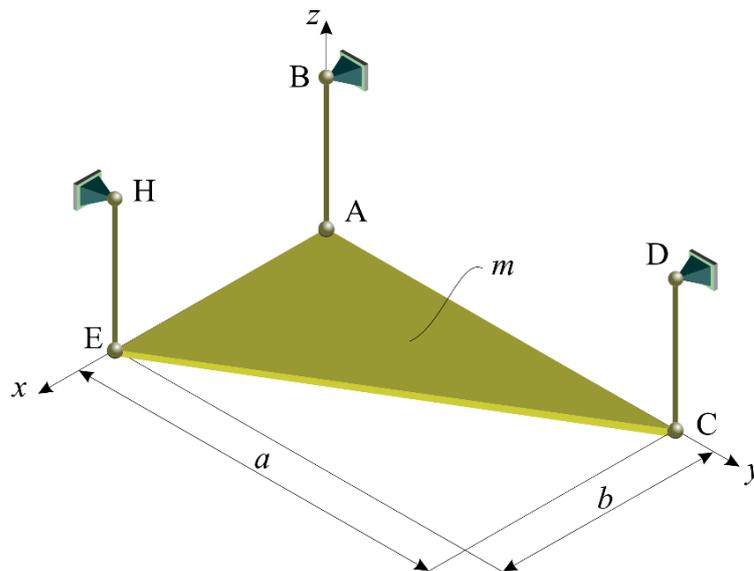
pa je iz prve jednadžbe

$$F_A = F_1 + F_2 + F_3 - F_B = 6 + 5 + 24 - 36,6,$$

$$F_A = -1,6 \text{ kN}.$$

Primjer 3.8.

Trokutna ploča zadane mase m vezana je za podlogu užetima AB, CD i EH (slika 3.26.).



Slika 3.26. *Primjer 3.8.:* Trokutna ploča pod djelovanjem vlastite težine

Valja odrediti sile u užadi. Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $m = 80 \text{ kg}$.

Rješenje:

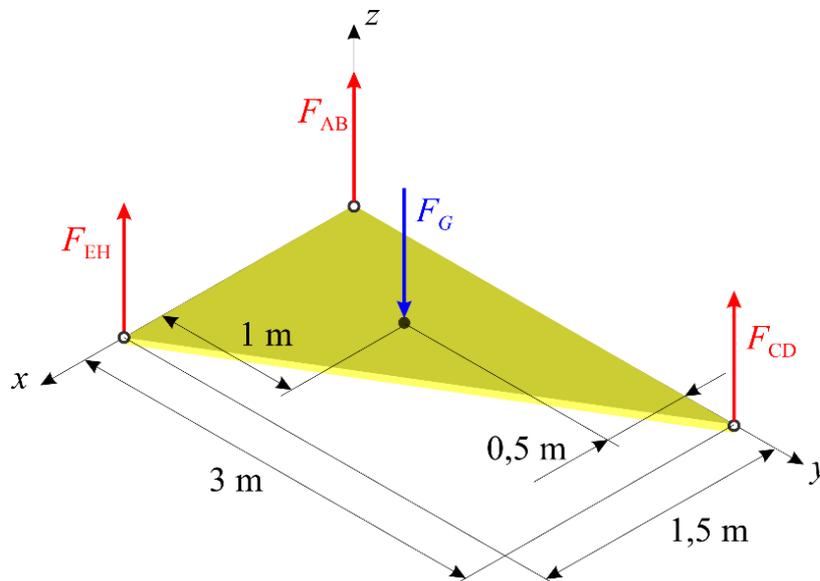
Nakon što se ploča oslobodi od veza s užetima, a njihov utjecaj zamijeni reakcijama veza, na ploču kao slobodno tijelo djeluje paralelni sustav sila u prostoru koji čine težina F_G i sile kojima užad djeluje na ploču: F_{AB} , F_{CD} i F_{EH} (slika 3.27.).

Uvjeti ravnoteže prema (3.15) glase:

$$\sum F_z = 0: \quad F_{AB} + F_{CD} + F_{EH} - m \cdot g = 0,$$

$$\sum M_{Ax} = 0: \quad -m \cdot g \cdot 1 + F_{CD} \cdot 3 = 0,$$

$$\sum M_{Ay} = 0: \quad m \cdot g \cdot 0,5 - F_{EH} \cdot 1,5 = 0.$$



Slika 3.27. *Primjer 3.8.: Trokutna ploča oslobođena od veza s prikazom svih sila*

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobiju se traženi iznosi sila kojima užad djeluje na ploču:

$$F_{AB} = F_{CD} = F_{EH} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot g = \frac{1}{3} \cdot 80 \cdot 9,81 = 261,6 \text{ N}.$$

Sile kojima ploča djeluje na užad po iznosima su jednake ovim silama sa suprotnim smjerovima.

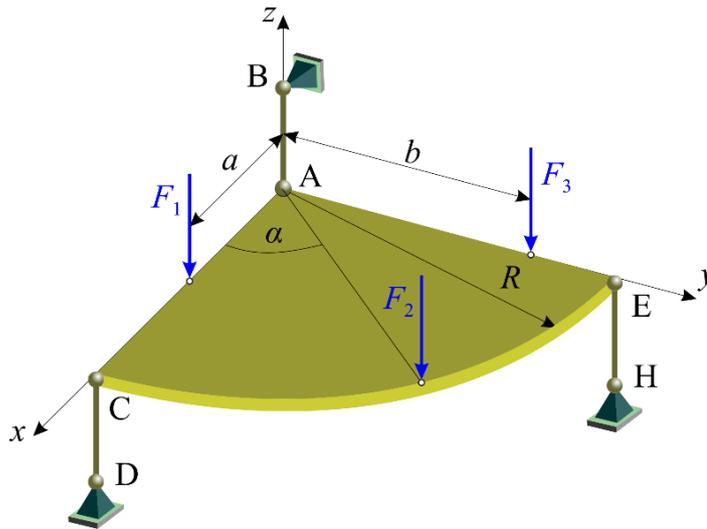
Primjer 3.9.

Ploča zanemarive težine koja ima oblik četvrtine kruga opterećena je silama \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 .

Ploča je za podlogu vezana štapovima CD i EH te užetom AB (slika 3.28.).

Valja odrediti sile u štapovima CD i EH te silu u užetu AB.

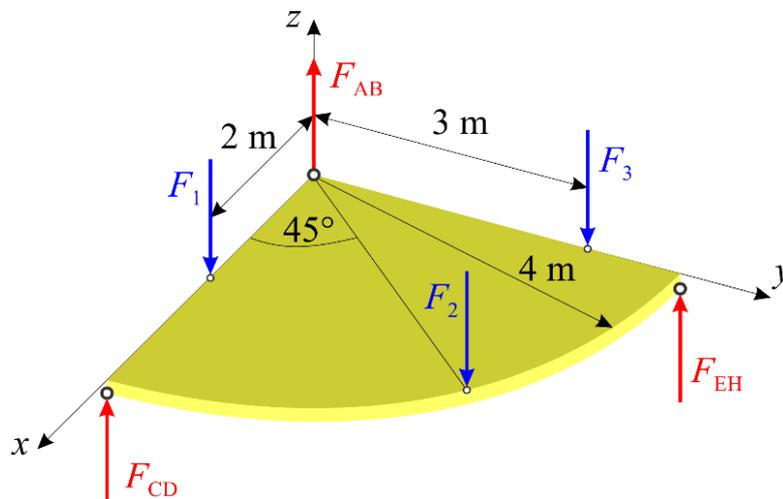
Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $R = 4 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $F_1 = 3 \text{ kN}$, $F_2 = 5 \text{ kN}$, $F_3 = 8 \text{ kN}$.



Slika 3.28. *Primjer 3.9.: Ploča oblika četvrtine kruga opterećena paralelnim sustavom sila u prostoru*

Rješenje:

Nakon što se ploča oslobodi od veza, a njihov utjecaj zamijeni reakcijama veza, dobije se prostorni paralelni sustav sila koji čine zadane sile \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 te reakcije veza: sile \vec{F}_{CD} i \vec{F}_{EH} kojima štapovi CD i EH djeluju na ploču te sila \vec{F}_{AB} kojom uže AB djeluje na ploču (slika 3.29.).



Slika 3.29. *Primjer 3.9.: Ploča oblika četvrtine kruga kao slobodno tijelo pod djelovanjem paralelnog sustava sila u prostoru*

Uvjeti ravnoteže prema (3.15) glase:

$$\sum F_z = 0: \quad F_{AB} + F_{CD} + F_{EH} - F_1 - F_2 - F_3 = 0,$$

$$\sum M_{Ax} = 0: \quad -F_2 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ - F_3 \cdot 3 + F_{EH} \cdot 4 = 0,$$

$$\sum M_{Ay} = 0: \quad F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 4 \cdot \cos 45^\circ - F_{CD} \cdot 4 = 0.$$

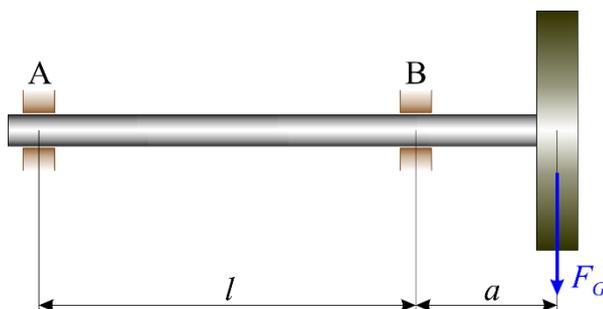
Rješavanjem navedenog sustava jednačbi dobiju se traženi iznosi sila:

$$F_{AB} = 1,430 \text{ kN}, \quad F_{CD} = 5,035 \text{ kN}, \quad F_{EH} = 9,535 \text{ kN}.$$

**Zadatak 3.2.**

Remenica transmisijskog vratila opterećena je silom iznosa F_G (slika Z.3.2.). Valja izračunati reakcije ležajeva A i B.

Zadano je: $a = 12 \text{ cm}$, $l = 32 \text{ cm}$, $F_G = 3,8 \text{ kN}$.



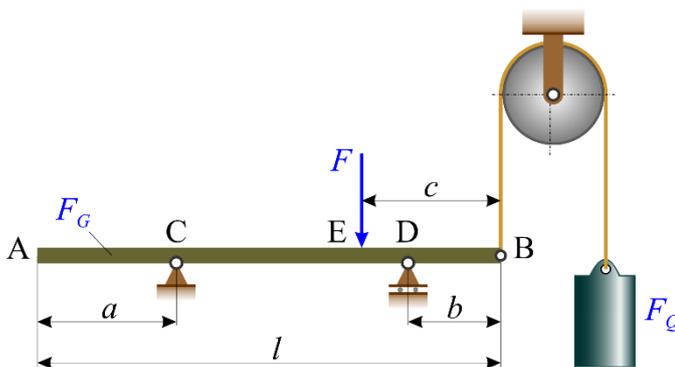
Slika Z.3.2. Zadatak 3.2.

Zadatak 3.3.

Homogena greda AB, težine F_G i duljine l , vezana je za podlogu nepomičnim osloncem u C i pomičnim osloncem u D. Greda je opterećena silom iznosa F . Na kraju B grede vezano je užo na čijem drugom kraju visi teret težine F_Q (slika Z.3.3.).

Valja odrediti reakcije oslonaca C i D.

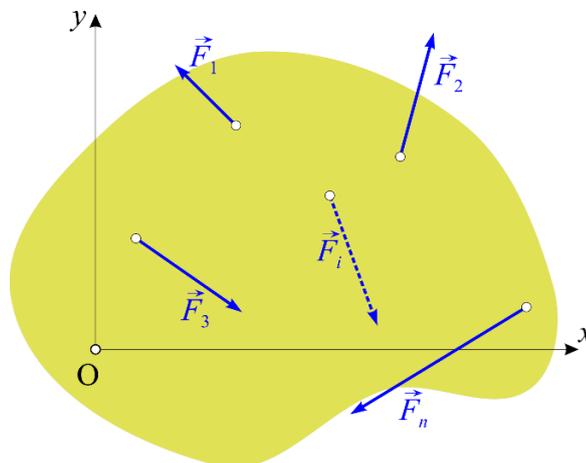
Zadano je: $a = c = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $l = 10 \text{ m}$, $F_G = 2 \text{ kN}$, $F = 8 \text{ kN}$, $F_Q = 3 \text{ kN}$.



Slika Z.3.3. Zadatak 3.3.

4. OPĆI SUSTAV SILA U RAVNINI

Ako sve sile nekog sustava sila leže u jednoj ravnini, govorimo o općem sustavu sila u ravnini (slika 4.1.).



Slika 4.1. Opći sustav sila u ravnini

4.1. REDUKCIJA OPĆEG SUSTAVA SILA U RAVNINI NA ZADANU TOČKU

U poglavlju 3.3. objašnjen je teorem o redukciji sile na točku.

Ako na tijelo djeluje proizvoljan sustav od n sila koje leže u istoj ravnini, tada, postupnom primjenom prethodnog teorema o redukciji sile na točku, možemo i sve sile zadanog sustava (slika 4.2.a) reducirati na jednu točku.

Tako ćemo redukcijom sile \vec{F}_1 na točku O dobiti u O silu \vec{F}'_1 i odgovarajući spreg sila momenta $M_O^{\vec{F}'_1} = F_1 \cdot d_1$; redukcijom sile \vec{F}_2 dobit ćemo silu \vec{F}'_2 i spreg sila momenta $M_O^{\vec{F}'_2} = F_2 \cdot d_2$; ... ; te konačno redukcijom sile \vec{F}_n dobit ćemo silu \vec{F}'_n i spreg sila momenta $M_O^{\vec{F}'_n} = F_n \cdot d_n$ (slika 4.2.b).

Pri tome je $\vec{F}'_1 = \vec{F}_1$; $\vec{F}'_2 = \vec{F}_2$; ... ; $\vec{F}'_n = \vec{F}_n$. Na taj način dobivene sile $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ čine konkurentni sustav sila u ravnini s hvatištem u O. Djelovanje ovih sila možemo zamijeniti jednom jedinom silom, koja se u ovom slučaju naziva *glavni vektor sila* i označava s \vec{F}_R .

Sve spregove momenata dobivene redukcijom sila na točku O ($M_O^{\vec{F}'_1}, M_O^{\vec{F}'_2}, \dots, M_O^{\vec{F}'_i}, \dots, M_O^{\vec{F}'_n}$) možemo zbrojiti u jedan, rezultirajući moment M_O , koji se naziva *glavni moment sustava* u odnosu na točku O (slika 4.2.d).

Glavni vektor sila računa se prema izrazu:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i, \quad (4.1)$$

a grafički se može prikazati kao završna stranica poligona sila (slika 4.2.c).

Projekcije glavnog vektora sila na koordinatne osi su:

$$F_{Rx} = \sum F_{ix}; \quad F_{Ry} = \sum F_{iy}. \quad (4.2)$$

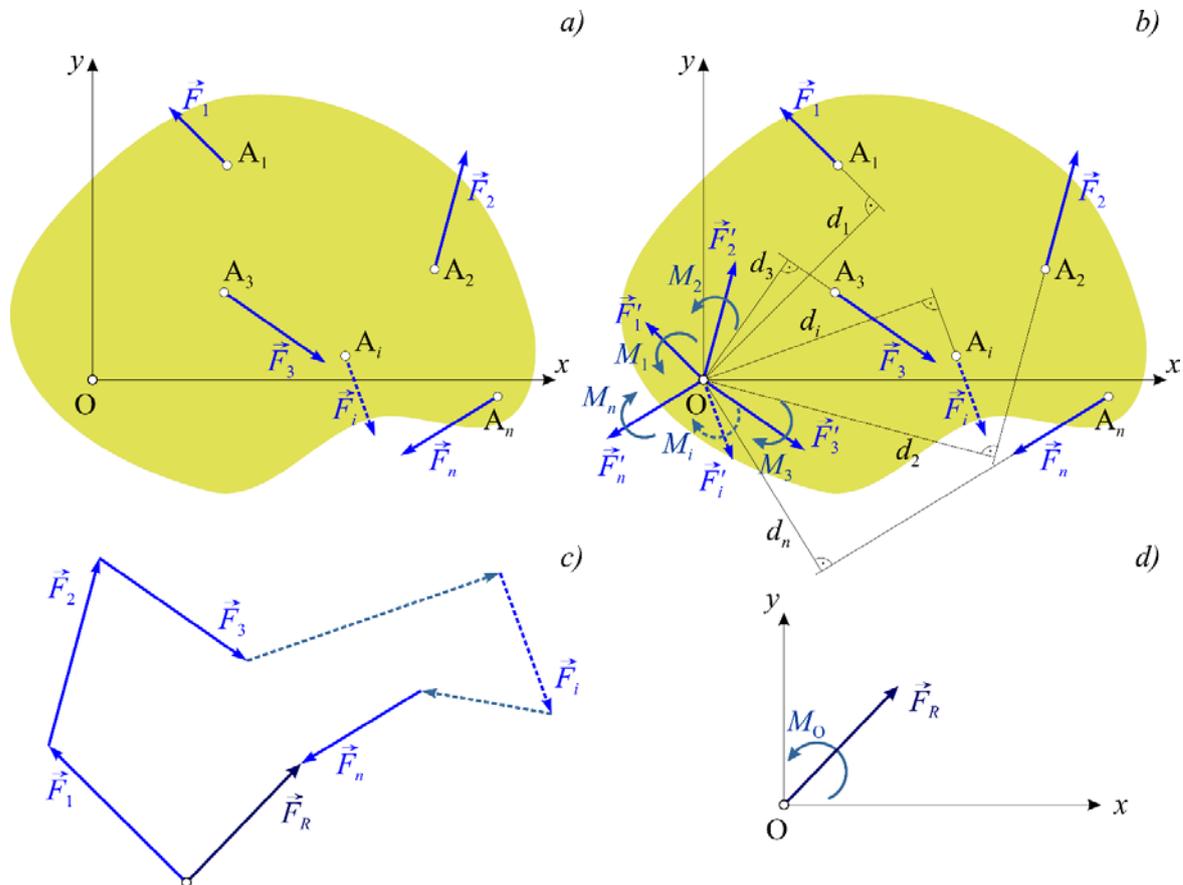
Glavni moment sustava u odnosu na točku O računa se prema:

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O^{\vec{F}_i}. \quad (4.3)$$

Ako uz sustav sila prikazan na slici 4.2.a na tijelo djeluje i niz spregova sila momenata $M_1, M_2, \dots, M_j, \dots, M_m$, tada jednadžba 4.3 poprima oblik:

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_O^{\vec{F}_i} + \sum_{j=1}^m M_j. \quad (4.3.a)$$

U izrazu (4.3.a) prvi član predstavlja algebarski zbroj momenata svih sila koje djeluju na tijelo u odnosu na točku O, a drugi član algebarski zbroj svih spregova koji djeluju na to tijelo.



Slika 4.2. a) zadani opći sustav sila u ravlini, b) redukcija svih sila na točku O, c) grafički prikaz određivanja glavnog vektora sila \vec{F}_R , d) zadani sustav reduciran na točku O.

Zaključujemo: Svaki sustav sila u ravlini koji djeluje na kruto tijelo pri svođenju (redukciji) na točku O možemo zamijeniti jednom silom \vec{F}_R , koja se naziva glavni vektor zadanoga sustava sila, s hvatištem u točki O, i spregom, čiji je moment M_O , koji se naziva glavni moment sustava u odnosu na točku O (slika 4.2.d).

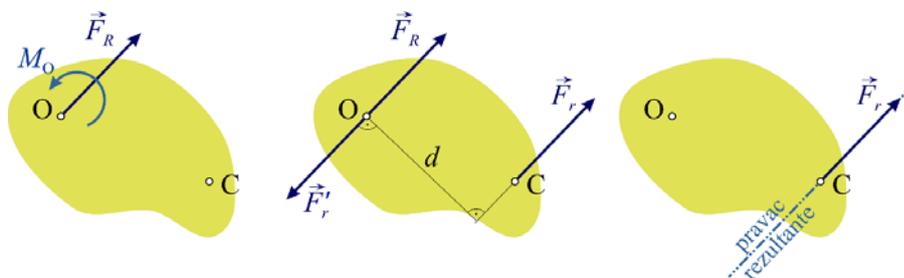
Da bismo, dakle, definirali opći sustav sila u ravnini, dovoljno je dati glavni vektor sustava sila \vec{F}_R i glavni moment tog sustava M_O u odnosu na neku po volji odabranu točku O.

Iz prethodnog izlaganja proizlazi da glavni vektor sila \vec{F}_R ne ovisi o odabiru točke na koju se vrši redukcija, dok se vrijednost glavnog momenta M_O mijenja jer se mijenjaju krakovi pojedinih sila. Zato se za glavni vektor sila kaže da je *invarijanta* zadanoga sustava sila.

4.1.1. Svođenje općeg sustava sila u ravnini na jednostavniji oblik

Ovisno o veličinama \vec{F}_R i M_O , razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R = \vec{0}$ i $M_O = 0$, sustav se nalazi u ravnoteži.
2. Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R = \vec{0}$ i $M_O \neq 0$, sustav se svodi na spreg sila čiji je moment $M_O = \sum M_O^{\vec{F}_i} + \sum M_j$. U tom slučaju veličina glavnog momenta M_O ne ovisi o odabiru točke O.
3. Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R \neq \vec{0}$, a $M_O = 0$, tada je sila \vec{F}_R ujedno i *rezultanta* \vec{F}_r zadanoga sustava sila pravac koji prolazi upravo točkom O.
4. Ako je pak $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ i $M_O \neq 0$, sustav možemo zamijeniti samo jednom silom (*rezultantom*) $\vec{F}_r = \vec{F}_R$, pravac djelovanja koje prolazi točkom C, koja je od točke O udaljena za iznos $d = |M_O| / F_R$ (slika 4.3.).



Slika 4.3. Opći sustav sila u ravnini s glavnim vektorom sila \vec{F}_R i glavnim momentom M_O u točki O reduciran u točki C na rezultantu \vec{F}_r

Naime, moment M_O možemo zamijeniti spregom (\vec{F}_r, \vec{F}_r') s krakom d , nakon čega tako dobivenom sustavu oduzmemo uravnoteženi sustav sila (\vec{F}_R, \vec{F}_r') .

4.1.2. Jednadžba pravca rezultante

Ako je za promatrani sustav sila $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ i $M_O \neq 0$ (slika 4.4.a), jednadžbu pravca rezultante u eksplicitnom obliku dobijemo zamjenom momenta M_O spregom $(\vec{F}_r, -\vec{F}_r)$ s hvatištima u točkama O i C (slika 4.4.b), pri čemu vrijede sljedeće jednakosti:

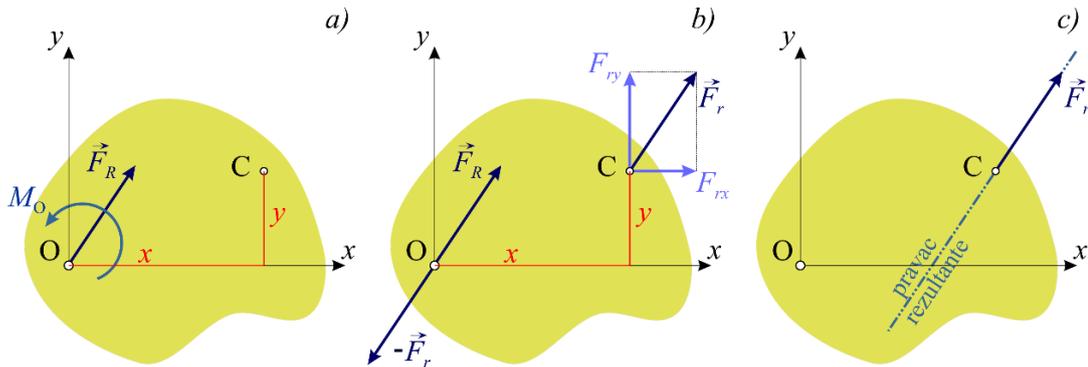
$$\vec{F}_r = \vec{F}_R \quad \text{i} \quad M_O^{\vec{F}_r} = M_O.$$

Vrijedi također, sukladno ranije izvedenim izrazima:

$$F_{Rx} = F_{rx} = \sum F_{ix};$$

$$F_{Ry} = F_{ry} = \sum F_{iy};$$

$$M_O^{\vec{F}_r} = M_O = \sum M_O^{\vec{F}_i} + \sum M_j.$$



Slika 4.4. a) sustav reduciran na točku O, b) zamjena glavnog momenta spregom sila, c) pravac rezultante.

Možemo napisati (slika 4.4.b):

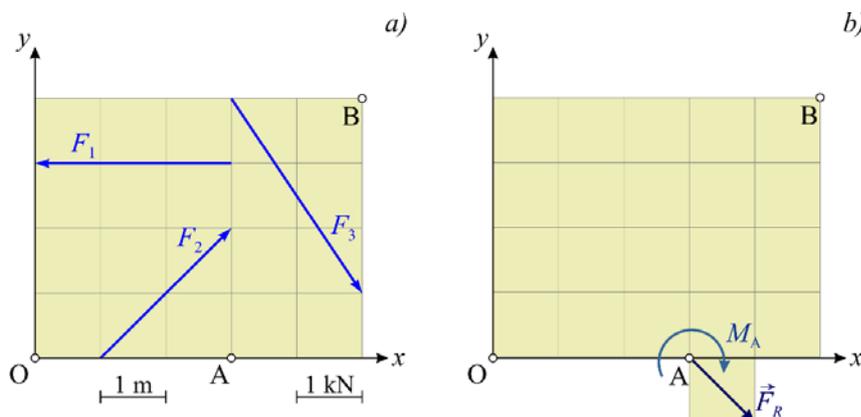
$$F_{ry} \cdot x - F_{rx} \cdot y = M_O,$$

odakle slijedi tražena jednadžba pravca rezultante (slika 4.4.c):

$$y = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} \cdot x - \frac{M_O}{F_{rx}} \quad y = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} \cdot x - \frac{M_O}{F_{rx}}. \quad (4.4)$$

Primjer 4.1.

Zadani opći sustav sila u ravni (slika 4.5.a) valja reducirati na točke A i B te odrediti intenzitet i pravac rezultante.



Slika 4.5. Primjer 4.1.: a) zadani sustav sila, b) sustav reduciran na točku A.

Rješenje:

Reducirati opći sustav sila u ravni na točku A (slika 4.5.b) znači odrediti odgovarajući glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment M_A u odnosu na tu točku.

Projekcije glavnog vektora sila na koordinatne osi mogu se izračunati prema (4.2):

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -3 + 2 + 2 = 1 \text{ kN};$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 + 2 - 3 = -1 \text{ kN}.$$

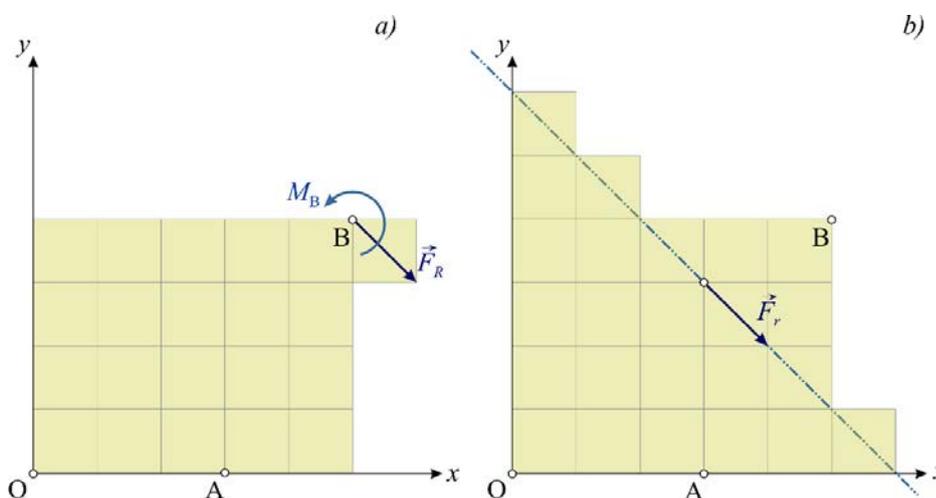
Vektorski zapis glavnog vektora sila i njegov intenzitet jesu:

$$\vec{F}_R = \vec{i} - \vec{j}, \quad F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 1,41 \text{ kN}.$$

Glavni moment u odnosu na točku A jednak je prema (4.3) sumi momenata zadanih sila u odnosu na tu točku. Moment svake sile za točku A jednak je, prema Varignonovu teoremu, sumi momenata njezinih pravokutnih komponenta za tu točku, pa imamo:

$$M_A = F_1 \cdot 3 - F_{2y} \cdot 2 - F_{3x} \cdot 4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -3 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Na isti se način može zadani sustav reducirati na točku B (slika 4.6.a).



Slika 4.6. Primjer 4.1.: a) sustav reduciran na točku B, b) vektor i pravac rezultante.

Glavni vektor sila \vec{F}_R je nepromjenljiva veličina sustava, te je za točku B isti kao i za točku A:

$$\vec{F}_R = \vec{i} - \vec{j}, \quad F_R = 1,41 \text{ kN}.$$

Glavni moment u odnosu na točku B jednak je sumi momenata zadanih sila u odnosu na tu točku. Moment svake sile za točku B jednak je, prema Varignonovu teoremu, sumi momenata njezinih pravokutnih komponenta za tu točku, pa imamo:

$$M_B = -F_1 \cdot 1 + F_{2x} \cdot 4 - F_{2y} \cdot 4 + F_{3y} \cdot 2 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Vektor rezultante jednak je glavnom vektoru sila, pa je

$$\vec{F}_r = \vec{i} - \vec{j}, \quad F_r = 1,41 \text{ kN}.$$

Jednadžba pravca rezultante dobije se prema (4.4):

$$y = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} \cdot x - \frac{M_O}{F_{rx}},$$

gdje je M_O glavni moment u odnosu na ishodišnu točku O:

$$M_O = F_1 \cdot 3 + F_{2y} \cdot 1 - F_{3x} \cdot 4 - F_{3y} \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 = -6 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Jednadžba pravca rezultante zadanoga općeg sustava sila u ravnini je (slika 4.6.b):

$$y = \frac{-1}{1} \cdot x - \frac{-6}{1} = -x + 6.$$

4.2. UVJETI RAVNOTEŽE OPĆEG SUSTAVA SILA U RAVNINI

Za ravnotežu proizvoljnog općeg sustava sila u ravnini potrebno je i dovoljno da istovremeno budu ispunjeni uvjeti:

$$\vec{F}_R = \vec{0} \text{ i } M_O = 0. \quad (4.5)$$

4.2.1. Prvi oblik uvjeta ravnoteže

S obzirom na (4.2), (4.3) i (4.5) uvjeti ravnoteže mogu se napisati kao

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \\ \sum F_{iy} &= 0; \\ \sum M_O^{\vec{F}_i} + \sum M_j &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Za ravnotežu općeg sustava sila u ravnini nužno je i dovoljno da suma projekcija svih sila na dvije koordinatne osi bude jednaka nuli i da suma momenata svih sila i spregova u odnosu na jednu po volji odabranu točku, koja leži u ravnini djelovanja sila, bude jednaka nuli.

4.2.2. Drugi oblik uvjeta ravnoteže

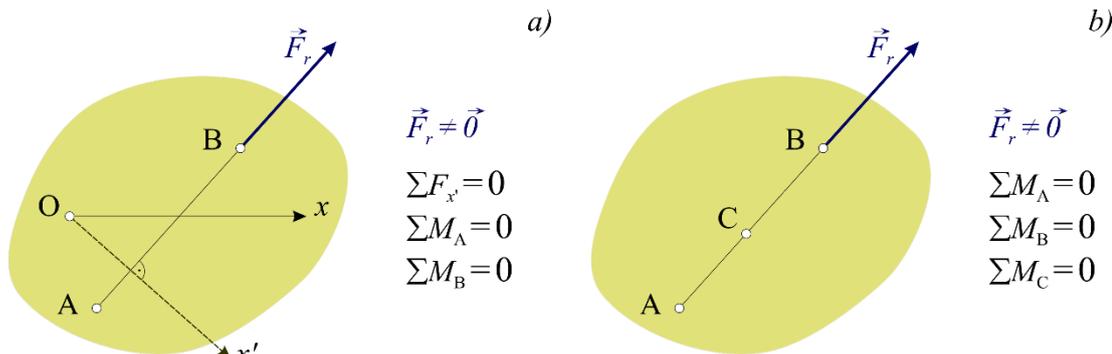
Drugi oblik uvjeta ravnoteže glasi:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0; \\ \sum M_A^{\vec{F}_i} + \sum M_j &= 0; \\ \sum M_B^{\vec{F}_i} + \sum M_j &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Za ravnotežu općeg sustava sila u ravnini nužno je i dovoljno da suma momenata svih sila i spregova u odnosu na dvije po volji odabrane točke A i B bude jednaka nuli i da suma projekcija svih sila na os Ox, koja nije okomita na pravac AB, bude jednaka nuli.

Opravdanost gore izrečenog ograničenja prikazana je slikom 4.7.a.

Naime, može se dogoditi da obje odabrane točke leže na pravcu rezultante, pa će sume momenata svih sila za te točke biti jednake nuli; ako je os Ox odabrana tako da je okomita na pravac AB, bit će projekcija rezultante na tu os jednaka nuli, iako je $F_r \neq 0$.



Slika 4.7. Ograničenje uz drugi oblik uvjeta ravnoteže

4.2.3. Treći oblik uvjeta ravnoteže

Za ravnotežu općeg sustava sila u ravnini nužno je i dovoljno da suma momenata svih sila i spregova u odnosu na tri proizvoljno odabrane točke A, B i C, koje ne leže na istom pravcu, bude jednaka nuli.

$$\begin{aligned}
 \sum M_A^{\vec{F}_i} + \sum M_j &= 0; \\
 \sum M_B^{\vec{F}_i} + \sum M_j &= 0; \\
 \sum M_C^{\vec{F}_i} + \sum M_j &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Ovo je ograničenje nužno da bi se izbjegla mogućnost odabira svih triju točaka na pravcu rezultante; tako bi bili ispunjeni uvjeti (4.8), a rezultanta bi bila različita od nule (slika 4.7.b).

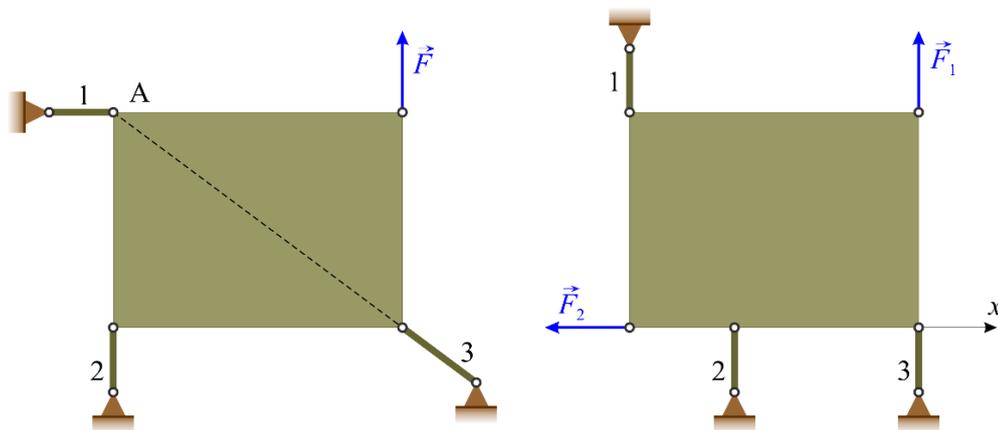
4.3. RJEŠAVANJE ZADATAKA

Uz napomene za načelni pristup rješavanju zadataka statike dane u uvodu, ovdje ćemo naglasiti sljedeće:

- pri odabiru koordinatnih osi težiti, ako je to moguće, da što veći broj sila bude paralelan nekoj osi;
- točku (točke) za koju (koje) će se postavljati sume momenata, po mogućnosti birati u presjecištima nepoznatih sila;
- uvijek voditi računa o činjenici da jednakost broja nepoznatih veličina i broja jednadžbi ravnoteže nije i dovoljan uvjet rješivosti nekog problema (slika 4.8.).

Naime, kod zadatka prikazanoga na slici 4.8.a imamo tri nepoznate veličine i tri uvjeta ravnoteže, ali problem nije moguće riješiti jer se pravci djelovanja reakcija veza sijeku u jednoj točki – uvjet $\sum M_A^{\vec{F}_i}$ nije zadovoljen!

Reakcije veza sustava na slici 4.8.b međusobno su paralelne, pa je očividno da jednadžba $\sum F_{ix} = 0$ nije zadovoljena, bez obzira na činjenicu da broj jednadžbi ravnoteže odgovara broju nepoznatih reakcija veza.

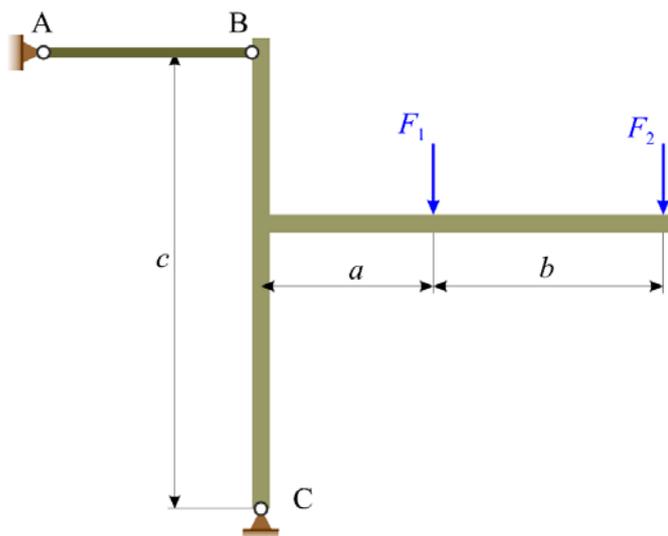


Slika 4.8.: a) zadana ploča nije u ravnoteži, b) odabrane veze ne osiguravaju ravnotežu ploče.

Primjer 4.2.

Konstrukcija opterećena koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 vezana je za podlogu nepomičnim osloncem u C te štapom zanemarive težine AB (slika 4.9.). Valja odrediti reakcije veza.

Zadano je: $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 1,6 \text{ m}$, $c = 3,2 \text{ m}$, $F_1 = 12 \text{ kN}$, $F_2 = 8 \text{ kN}$.



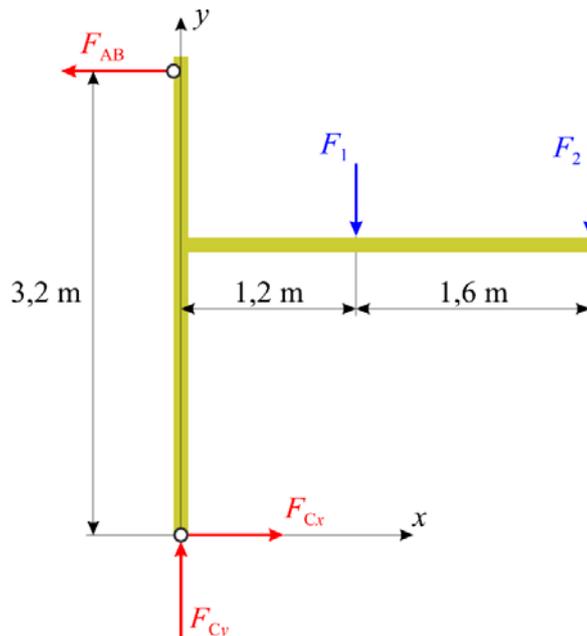
Slika 4.9. *Primjer 4.2.*

Rješenje:

Konstrukcija se oslobađa od veze sa štapom i veze s podlogom u nepomičnom osloncu C. Umjesto štapa dodaje se sila F_{AB} kojom štap djeluje na konstrukciju, a djelovanje oslonca C nadomješta se reakcijom kojoj su komponente F_{Cx} i F_{Cy} (slika 4.10.).

Uvjeti ravnoteže postavljeni za konstrukciju kao slobodno tijelo mogu se napisati prema prvom obliku (4.6):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Cx} - F_{AB} = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Cy} - F_1 - F_2 = 0, \\ \sum M_C = 0: & \quad F_{AB} \cdot 3,2 - F_1 \cdot 1,2 - F_2 \cdot 2,8 = 0. \end{aligned}$$



Slika 4.10. *Primjer 4.2.: Konstrukcija kao slobodno tijelo*

Iz treće jednadžbe dobije se:

$$F_{AB} = \frac{F_1 \cdot 1,2 + F_2 \cdot 2,8}{3,2} = \frac{12 \cdot 1,2 + 8 \cdot 2,8}{3,2} = 11,5 \text{ kN},$$

a iz prve i druge:

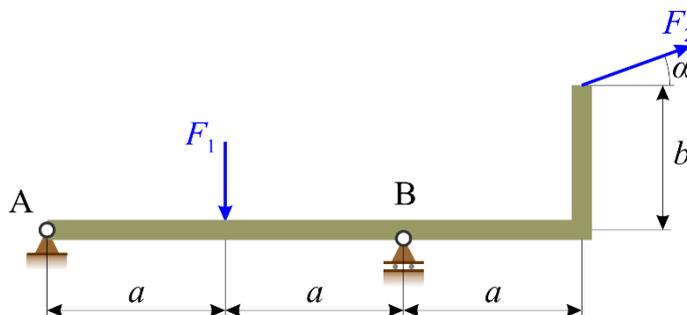
$$F_{Cx} = F_{AB} = 11,5 \text{ kN}; \quad F_{Cy} = F_1 + F_2 = 12 + 8 = 20 \text{ kN}.$$

Iznos reakcije oslonca C je

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \sqrt{11,5^2 + 20^2} = 23,1 \text{ kN}.$$

Primjer 4.3.

Zakrivljena greda zanemarive težine opterećena je koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 te vezana za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 4.11.). Valja odrediti reakcije oslonaca A i B. Zadano je: $a = 2,2 \text{ m}$, $b = 1,8 \text{ m}$, $\alpha = 20^\circ$, $F_1 = 12 \text{ kN}$, $F_2 = 8 \text{ kN}$.

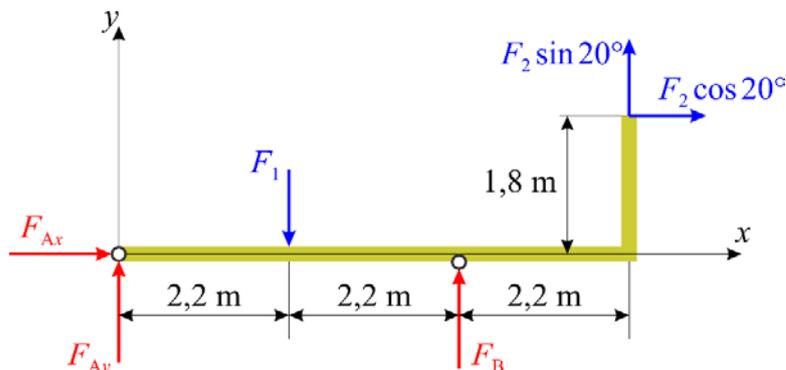


Slika 4.11. *Primjer 4.3.*

Rješenje:

Gredu je potrebno osloboditi od veza, a njihov utjecaj zamijeniti reakcijama veza.

Nepomični oslonac A djeluje na gredu reakcijskom silom kojoj su komponente F_{Ax} i F_{Ay} , a pomični oslonac B reakcijom F_B (slika 4.12.).



Slika 4.12. *Primjer 4.3.: Zakrivljena greda kao slobodno tijelo*

Uvjeti ravnoteže postavljeni za konstrukciju kao slobodno tijelo mogu se napisati u prvom obliku (4.6):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} + F_2 \cdot \cos 20^\circ = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} + F_B - F_1 + F_2 \cdot \sin 20^\circ = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad -F_1 \cdot 2,2 + F_B \cdot 4,4 - F_2 \cdot \cos 20^\circ \cdot 1,8 + F_2 \cdot \sin 20^\circ \cdot 6,6 = 0.\end{aligned}$$

Rješavanjem treće jednadžbe dobije se:

$$\begin{aligned}F_B &= \frac{F_1 \cdot 2,2 + F_2 \cdot \cos 20^\circ \cdot 1,8 - F_2 \cdot \sin 20^\circ \cdot 6,6}{4,4}, \\ F_B &= \frac{12 \cdot 2,2 + 8 \cdot \cos 20^\circ \cdot 1,8 - 8 \cdot \sin 20^\circ \cdot 6,6}{4,4} = 4,971 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Iz prve jednadžbe je

$$F_{Ax} = -F_2 \cdot \cos 20^\circ = -8 \cdot \cos 20^\circ = -7,518 \text{ kN},$$

gdje negativan predznak znači da je smjer sile F_{Ax} suprotan od pretpostavljenoga.

Iz druge se jednadžbe dobije:

$$F_{Ay} = -F_B + F_1 - F_2 \cdot \sin 20^\circ = -4,971 + 12 - 8 \cdot \sin 20^\circ = 4,293 \text{ kN}.$$

Intenzitet reakcije nepomičnog oslonca A je

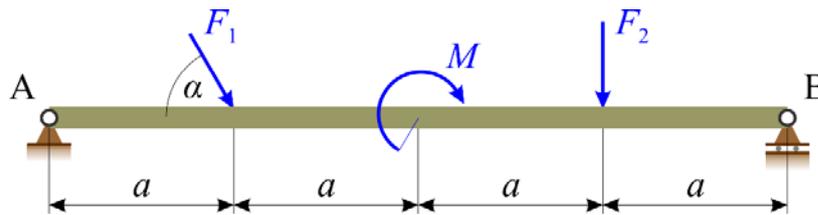
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(-7,518)^2 + 4,293^2} = 8,657 \text{ kN}.$$

Primjer 4.4.

Ravni puni nosač opterećen je dvjema koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 te spregom sila momenta M . Nosač je za podlogu vezan nepomičnim osloncem u A te pomičnim osloncem u B.

Valja odrediti reakcije oslonca A i B (slika 4.13.).

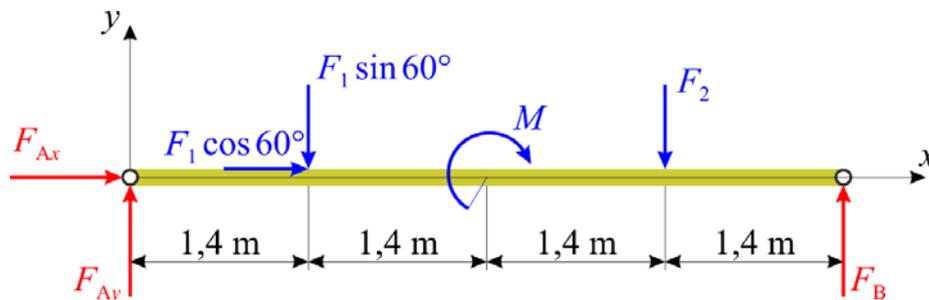
Zadano je: $a = 1,4 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$, $F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 3 \text{ kN}$, $M = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika 4.13. *Primjer 4.4.*

Rješenje:

Nakon oslobađanja od veza na nosač pored zadanog opterećenja djeluju i reakcije oslonaca A i B. Nepomični oslonac A djeluje reakcijskom silom kojoj su komponente F_{Ax} i F_{Ay} , a pomični oslonac B reakcijskom silom F_B (slika 4.14.).



Slika 4.14. *Primjer 4.4.: Zadani nosač kao slobodno tijelo*

Uvjeti ravnoteže prema drugom obliku (4.7) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_1 \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,4 - M - F_2 \cdot 4,2 + F_B \cdot 5,6 = 0,$$

$$\sum M_B = 0: \quad -F_{Ay} \cdot 5,6 + F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4,2 - M + F_2 \cdot 1,4 = 0.$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$F_{Ax} = -F_1 \cdot \cos 60^\circ = -6 \cdot 0,5 = -3 \text{ kN},$$

$$F_{Ay} = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4,2 - M + F_2 \cdot 1,4}{5,6} = \frac{6 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4,2 - 5 + 3 \cdot 1,4}{5,6} = 3,754 \text{ kN},$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3,754^2} = 4,805 \text{ kN},$$

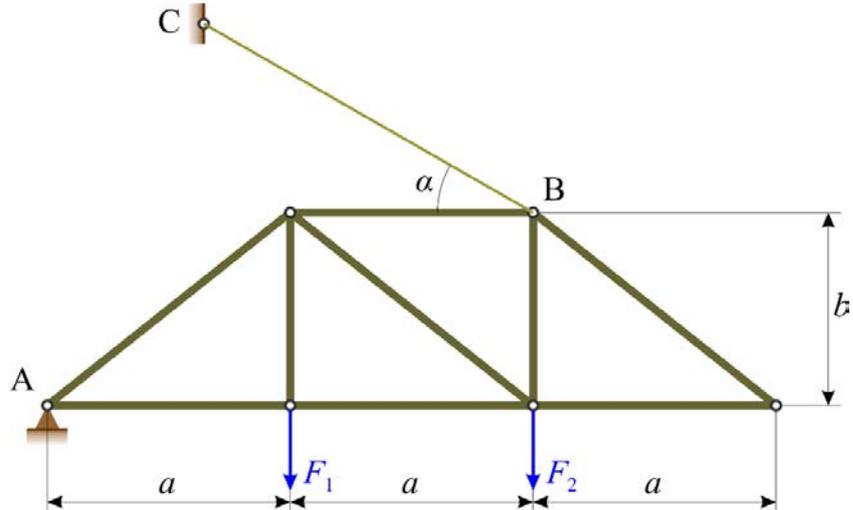
$$F_B = \frac{F_1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,4 + M + F_2 \cdot 4,2}{5,6} = \frac{6 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1,4 + 5 + 3 \cdot 4,2}{5,6} = 4,442 \text{ kN}.$$

Primjer 4.5.

Rešetkasta konstrukcija opterećena dvjema koncentriranim silama \vec{F}_1 i \vec{F}_2 vezana je za podlogu nepomičnim osloncem u A te užetom BC (slika 4.15.).

Potrebno je odrediti reakciju oslonca A i silu užeta BC.

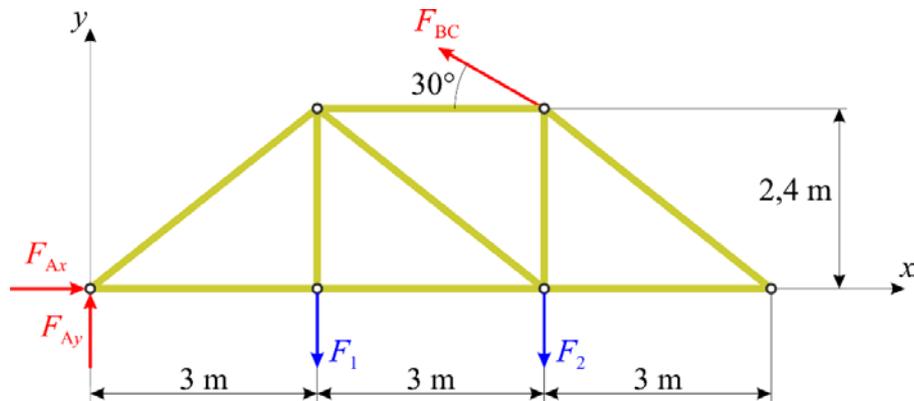
Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2,4 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 6 \text{ kN}$.



Slika 4.15. *Primjer 4.5.*

Rješenje:

Pri oslobađanju od veza nepomični oslonac A zamjenjujemo dvjema komponentama reakcije F_{Ax} i F_{Ay} , a umjesto užeta BC dodaje se sila F_{BC} kojom uže djeluje na rešetkasti nosač (slika 4.16.).



Slika 4.16. *Primjer 4.5.: Rešetkasta konstrukcija kao slobodno tijelo*

Uvjeti ravnoteže napisani prema prvom obliku glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{BC} \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_1 - F_2 + F_{BC} \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 6 + F_{BC} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2,4 + F_{BC} \cdot \sin 30^\circ \cdot 6 = 0.$$

Iz gornjih jednažbi dobije se:

$$F_{BC} = \frac{F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 6}{2,4 \cdot \cos 30^\circ + 6 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{5 \cdot 3 + 6 \cdot 6}{2,4 \cdot \cos 30^\circ + 6 \cdot \sin 30^\circ} = 10,04 \text{ kN},$$

$$F_{Ax} = F_{BC} \cdot \cos 30^\circ = 10,042 \cdot \cos 30^\circ = 8,697 \text{ kN},$$

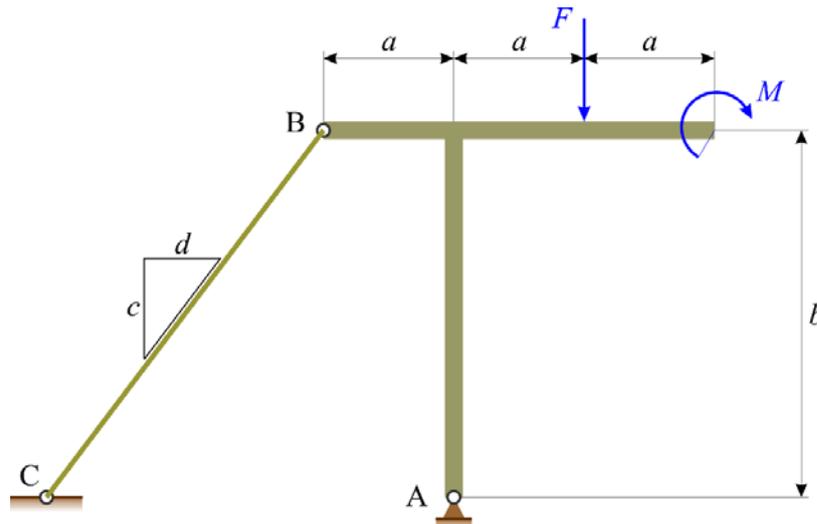
$$F_{Ay} = F_1 + F_2 - F_{BC} \cdot \sin 30^\circ = 5 + 6 - 10,042 \cdot \sin 30^\circ = 5,979 \text{ kN},$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{8,697^2 + 5,979^2} = 10,55 \text{ kN}.$$

Primjer 4.6.

Konstrukcija zanemarive težine opterećena je koncentriranom silom \vec{F} i spregom momenta M te vezana za podlogu nepomičnim osloncem u A i užetom BC (slika 4.17.). Valja odrediti reakciju oslonca A i silu užeta BC.

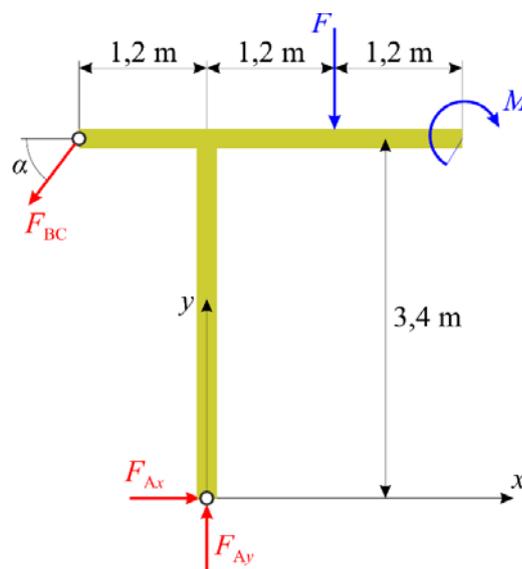
Zadano je: $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 3,4 \text{ m}$, $c/d = 4/3$, $F = 30 \text{ kN}$, $M = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika 4.17. *Primjer 4.6.*

Rješenje:

Pri oslobađanju od veza nepomični oslonac A zamjenjujemo reakcijskom silom kojoj su komponente F_{Ax} i F_{Ay} , a umjesto užeta BC dodaje se sila F_{BC} kojom uže djeluje na konstrukciju (slika 4.18.).



Slika 4.18. *Primjer 4.6.: Konstrukcija kao slobodno tijelo*

Sila F_{BC} s osi x zatvara kut α koji se dobije prema: $\tan \alpha = \frac{c}{d} = \frac{4}{3} = 1,33333$, $\alpha = 53,13^\circ$.

Uvjeti ravnoteže napisani prema prvom obliku (4.6) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{BC} \cdot \cos 53,13^\circ = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F - F_{BC} \cdot \sin 53,13^\circ = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F \cdot 1,2 - M + F_{BC} \cdot \cos 53,13^\circ \cdot 3,4 + F_{BC} \cdot \sin 53,13^\circ \cdot 1,2 = 0.$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se tražene vrijednosti reakcijskih sila:

$$F_{BC} = \frac{30 \cdot 1,2 + 15}{3,4 \cdot \cos 53,13^\circ + 1,2 \cdot \sin 53,13^\circ} = 17,0 \text{ kN};$$

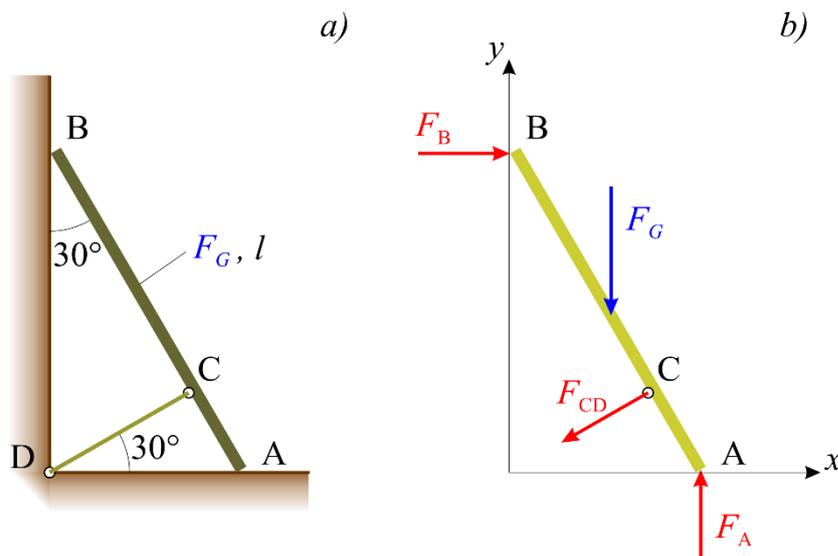
$$F_{Ax} = F_{BC} \cdot \cos 53,13^\circ = 17,0 \cdot \cos 53,13^\circ = 10,2 \text{ kN},$$

$$F_{Ay} = F + F_{BC} \cdot \sin 53,13^\circ = 30 + 17,0 \cdot \sin 53,13^\circ = 43,6 \text{ kN},$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{10,2^2 + 43,6^2} = 44,8 \text{ kN}.$$

Primjer 4.7.

Homogena greda AB duljine l i težine F_G oslanja se na glatku horizontalnu podlogu u A i na glatki vertikalni zid u B. Greda se održava u ravnoteži uz pomoć užeta CD (slika 4.19.a).



Slika 4.19. *Primjer 4.7.:* a) zadana greda, b) greda kao slobodno tijelo.

Valja odrediti reakcije veza grede. Zadano je: $F_G = 200 \text{ N}$.

Rješenje:

Nakon oslobađanja od veza na gredu AB djeluje sustav sila u ravnini koji čine težina \vec{F}_G , reakcije glatkih podloga \vec{F}_A i \vec{F}_B te sila \vec{F}_{CD} kojom uže djeluje na gredu (slika 4.19.b).

Uvjeti ravnoteže za opći sustav sila u ravnini, napisani prema prvom obliku, glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_B - F_{CD} \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_A - F_{CD} \cdot \sin 30^\circ - F_G = 0,$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_A \cdot l \cdot \sin 30^\circ - F_G \cdot 0,5l \cdot \sin 30^\circ - F_{CD} \cdot l \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava jednačbi dobiju se tražene reakcije:

$$F_A = 250 \text{ N}; \quad F_B = 86,6 \text{ N}; \quad F_{CD} = 100 \text{ N}.$$

4.4. RAVNOTEŽA SUSTAVA KRUTIH TIJELA

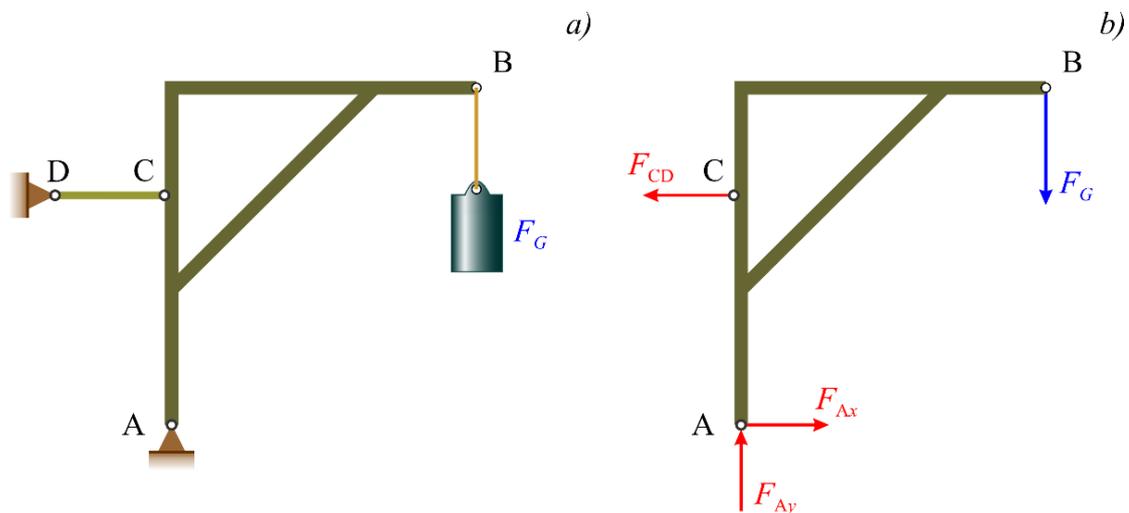
Statički proračun inženjerskih konstrukcija u većini se slučajeva svodi na razmatranje uvjeta ravnoteže konstrukcije sastavljene od sustava krutih tijela međusobno spojenih vezama (slika 4.20.a).

Veze pomoću kojih su pojedina tijela međusobno spojena nazivaju se *unutarnje veze*, za razliku od *vanjskih veza* preko kojih se čitava konstrukcija vezuje za oslonce.

Ako nakon uklanjanja vanjskih veza konstrukcija ostaje i dalje kruta (slika 4.20.b), onda se na nju, pri ispitivanju ravnoteže, primjenjuju svi zakoni koji vrijede za ravnotežu krutog tijela.

Vrlo često nailazimo na takve konstrukcije koje nakon uklanjanja vanjskih veza ne ostaju više krute (slika 4.21.a).

Prema petom aksiomu statike (princip ukrućivanja) sile koje djeluju na takve konstrukcije moraju zadovoljiti uvjete ravnoteže krutog tijela.



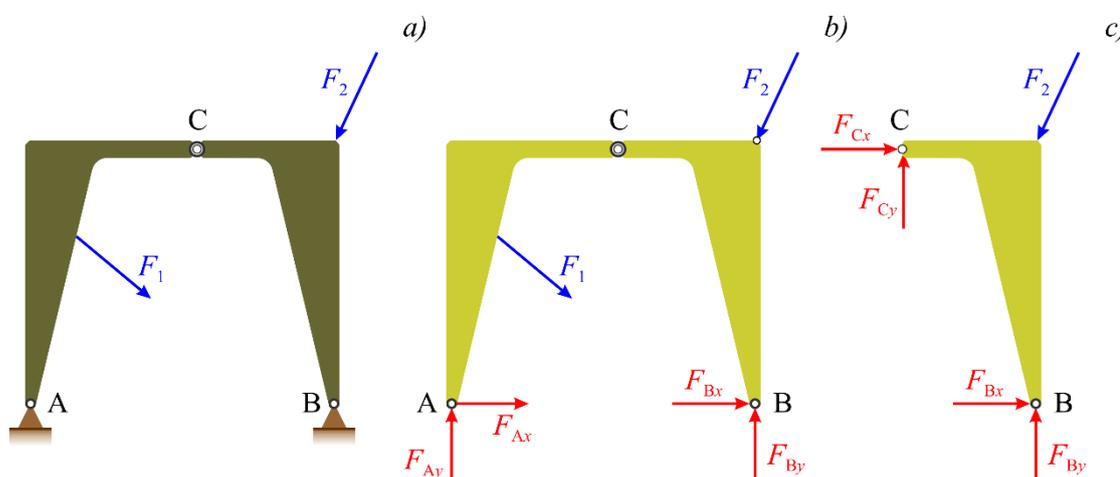
Slika 4.20. a) zadana konstrukcija, b) konstrukcija oslobođena od vanjskih veza.

Međutim, ti uvjeti nisu i dovoljni (slika 4.21.b – tri uvjeta ravnoteže za čitavu konstrukciju, a četiri nepoznate reakcije), pa se prema tome iz njih ne mogu odrediti sve nepoznate veličine. Da bi se postavili i ostali uvjeti, potrebno je razmotriti ravnotežu jednog ili više dijelova (tijela) od kojih se sastoji konstrukcija.

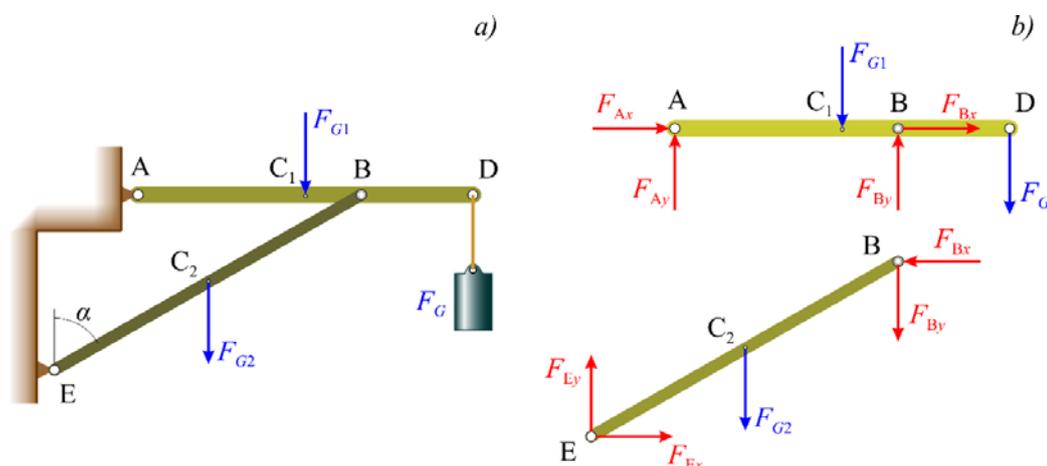
Iz konstrukcije prikazane na slici 4.21.a „oslobođen” je dio BC (slika 4.21.c), za koji se mogu postaviti tri nove jednačbe ravnoteže.

Budući da su uvedene samo dvije nove nepoznate veličine, na ovaj je način dobiven sustav od šest jednadžbi sa šest nepoznanica.

Drugi način rješavanja zadataka ove vrste sastoji se u tome da se uopće ne postavljaju uvjeti ravnoteže za konstrukciju kao cjelinu, već za svaki dio konstrukcije posebno, smatrajući svaki dio konstrukcije slobodnim krutim tijelom. U tom slučaju reakcije unutarnjih veza javljaju se uvijek u parovima, jednakih su intenziteta i pravaca djelovanja, a suprotnih smjerova.



Slika 4.21. a) konstrukcija sastavljena od dvaju krutih tijela, b) čitava konstrukcija kao slobodno tijelo s prikazom svih sila koje na nju djeluju, c) desni dio konstrukcije kao slobodno tijelo s prikazom svih sila koje na njega djeluju.



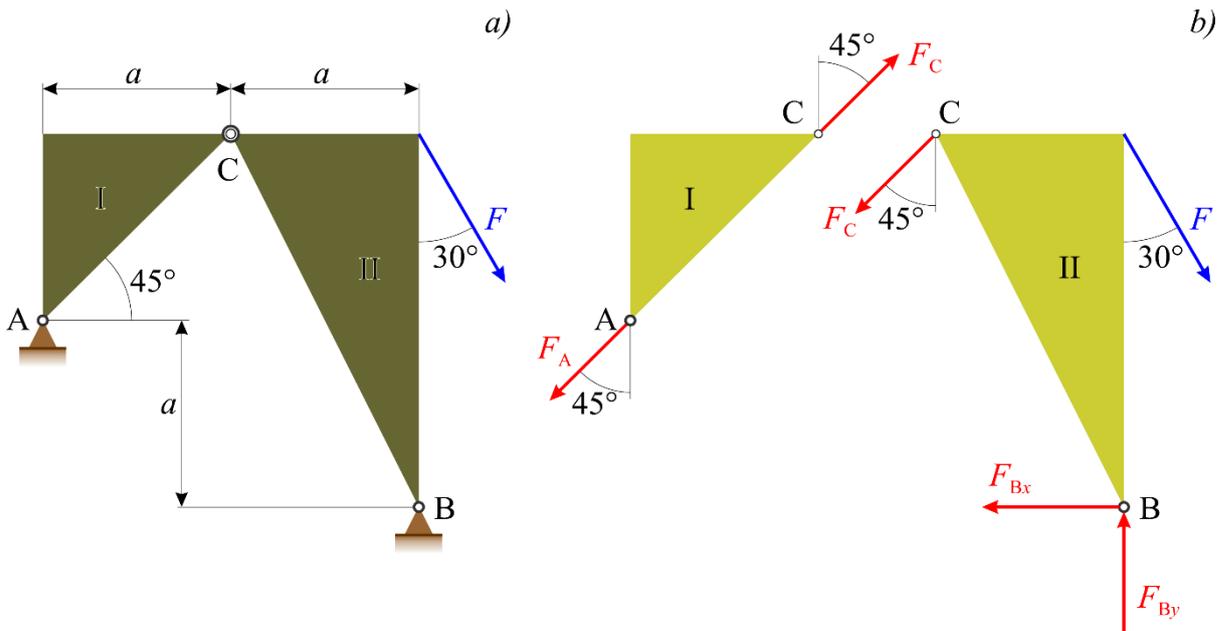
Slika 4.22. a) konstrukcija sastavljena od dvaju krutih tijela, b) dijelovi konstrukcije kao slobodno tijelo.

Primjer ovakva načina rješavanja zadataka prikazan je na slici 4.22. Oslobođanjem dijelova AD i BE konstrukcije dobije se šest jednadžbi sa šest nepoznanica. Ravnoteža konstrukcije u cjelini pri tom se ne razmatra.

Primjer 4.8.

Trokutaste ploče I i II zanemarivih težina vezane su za podlogu i međusobno zglobnim vezama A, B i C (slika 4.23.a). Ploča II opterećena je silom intenziteta F . Valja odrediti sile u svim vezama konstrukcije.

Zadano je: $F = 15 \text{ kN}$.



Slika 4.23. *Primjer 4.8.:* a) zadana konstrukcija, b) dijelovi konstrukcije kao slobodna tijela.

Rješenje:

Razmatrat ćemo ravnotežu svake ploče zasebno. U tu svrhu ploče oslobađamo od veza, a djelovanje veza nadomještamo odgovarajućim reakcijama veza (slika 4.23.b).

Na ploču I djeluju samo dvije sile F_A i F_C u zglobovima A i C, pa iz uvjeta ravnoteže dviju sila možemo zaključiti da će reakcije F_A i F_C ležati na pravcu kroz točke A i C.

Uvjeti ravnoteže za ploču II prema prvom obliku glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_C \cdot \sin 45^\circ + F \cdot \sin 30^\circ - F_{Bx} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_C \cdot \cos 45^\circ - F \cdot \cos 30^\circ + F_{By} = 0,$$

$$\sum M_B = 0: \quad -F \cdot \sin 30^\circ \cdot 2a + F_C \cdot \cos 45^\circ \cdot a + F_C \cdot \sin 45^\circ \cdot 2a = 0.$$

Iz gornjih jednadžbi dobijemo:

$$F_C = 7,07 \text{ kN}; \quad F_{Bx} = 2,50 \text{ kN}, \quad F_{By} = 18,0 \text{ kN},$$

$$F_B = \sqrt{2,50^2 + 18,0^2} = 18,2 \text{ kN} \quad F_B = \sqrt{2,50^2 + 18,0^2} = 18,2 \text{ kN}.$$

Iz ravnoteže tijela I je

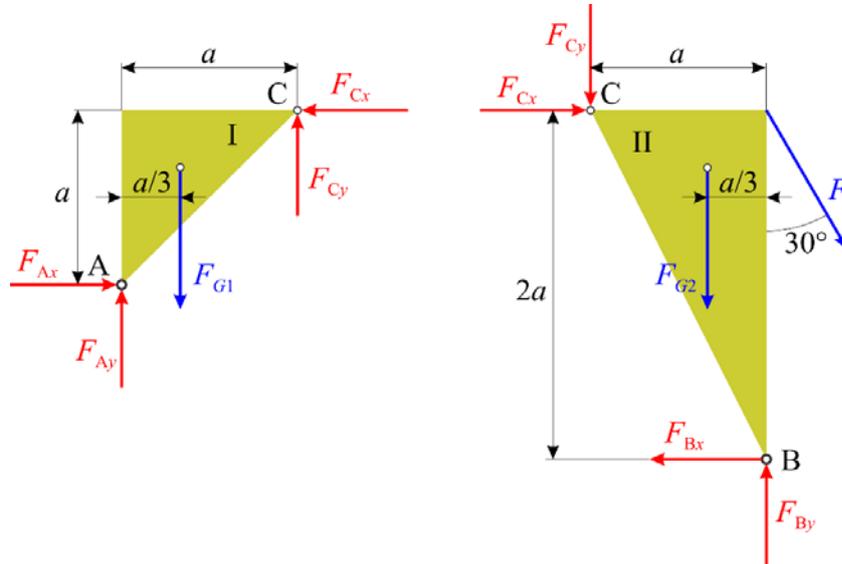
$$F_A = F_C = 7,07 \text{ kN}.$$

Primjer 4.9.

Trokutaste ploče I i II zadanih težina F_{G1} i F_{G2} vezane su za podlogu i međusobno zglobnim vezama A, B i C (slika 4.23.a). Ploča II opterećena je silom intenziteta F . Valja odrediti sile u svim vezama konstrukcije. Zadano je: $F_{G1} = 3 \text{ kN}$, $F_{G2} = 5 \text{ kN}$, $F = 15 \text{ kN}$.

Rješenje:

Ploče smo oslobodili od veza, a djelovanje veza nadomjestili odgovarajućim reakcijama veza (slika 4.24.). Smjerove pojedinih reakcija veza smo pretpostavili. Ako u rezultatu za neku reakciju dobijemo negativni predznak, to samo znači da je smjer suprotan od pretpostavljenoga.



Slika 4.24. *Primjer 4.9.: Ploče kao slobodna tijela*

Uvjeti ravnoteže za ploču I prema prvom obliku glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} - F_{Cx} = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} + F_{Cy} - F_{G1} = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad F_{Cx} \cdot a + F_{Cy} \cdot a - F_{G1} \cdot a/3 = 0.\end{aligned}$$

Uvjeti ravnoteže za ploču II glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Cx} - F_{Bx} + F \cdot \sin 30^\circ = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{By} - F_{Cy} - F_{G2} - F \cdot \cos 30^\circ = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad F_{Cy} \cdot a - F_{Cx} \cdot 2a + F_{G2} \cdot a/3 - F \cdot \sin 30^\circ \cdot 2a = 0.\end{aligned}$$

Rješavanjem navedenih jednažbi dobije se:

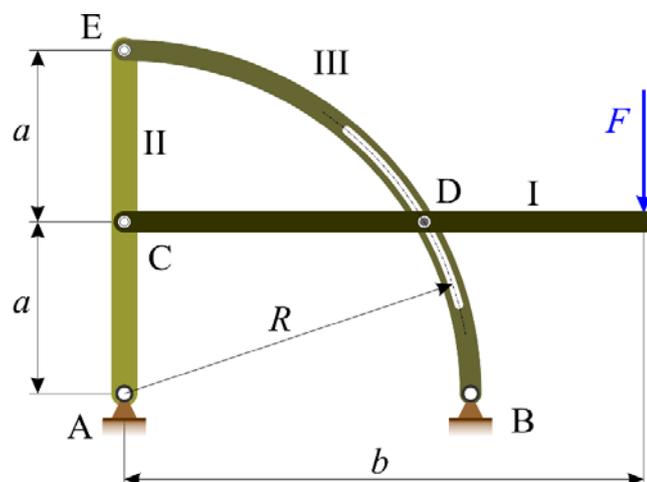
$$\begin{aligned}F_{Ax} = -4,11 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = -2,11 \text{ kN}, \quad F_A = \sqrt{(-4,11)^2 + (-2,11)^2} = 4,62 \text{ kN}; \\ F_{Bx} = 3,39 \text{ kN}, \quad F_{By} = 23,1 \text{ kN}, \quad F_B = \sqrt{3,39^2 + 23,1^2} = 23,4 \text{ kN}; \\ F_{Cx} = -4,11 \text{ kN}, \quad F_{Cy} = 5,11 \text{ kN}, \quad F_C = \sqrt{(-4,11)^2 + 5,11^2} = 6,56 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Primjer 4.10.

Konstrukcija sastavljena od triju dijelova opterećena je silom \vec{F} (slika 4.25.). Potrebno je svaki dio konstrukcije osloboditi od veza te prikazati sve sile koje djeluju na svaki dio.

Valja izračunati sve sile veza.

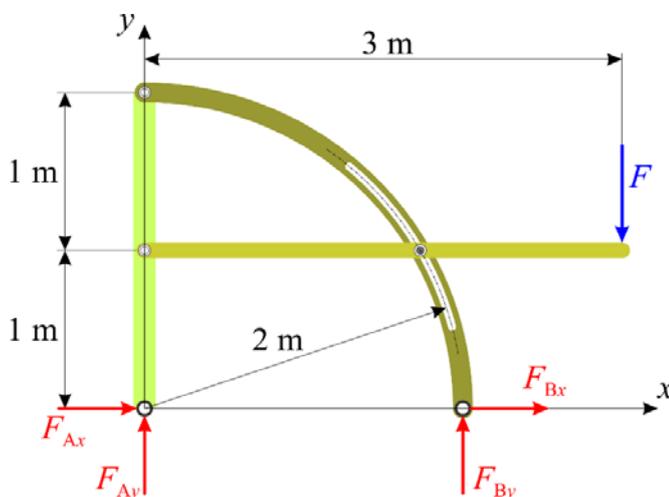
Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $R = 2 \text{ m}$, $F = 9 \text{ kN}$.



Slika 4.25. *Primjer 4.10.*

Rješenje:

Na konstrukciju nakon oslobađanja od veza djeluju vanjska aktivna sila \vec{F} te reakcije veza cilindričnih zglobova u točkama A i B, \vec{F}_A i \vec{F}_B , koje su prikazane svojim komponentama iznosa F_{Ax} i F_{Ay} , odnosno F_{Bx} i F_{By} . Smjerovi ovih reakcija su pretpostavljeni u smjeru pozitivnih osi x i y (slika 4.26.).



Slika 4.26. *Primjer 4.10.: Konstrukcija kao slobodno tijelo*

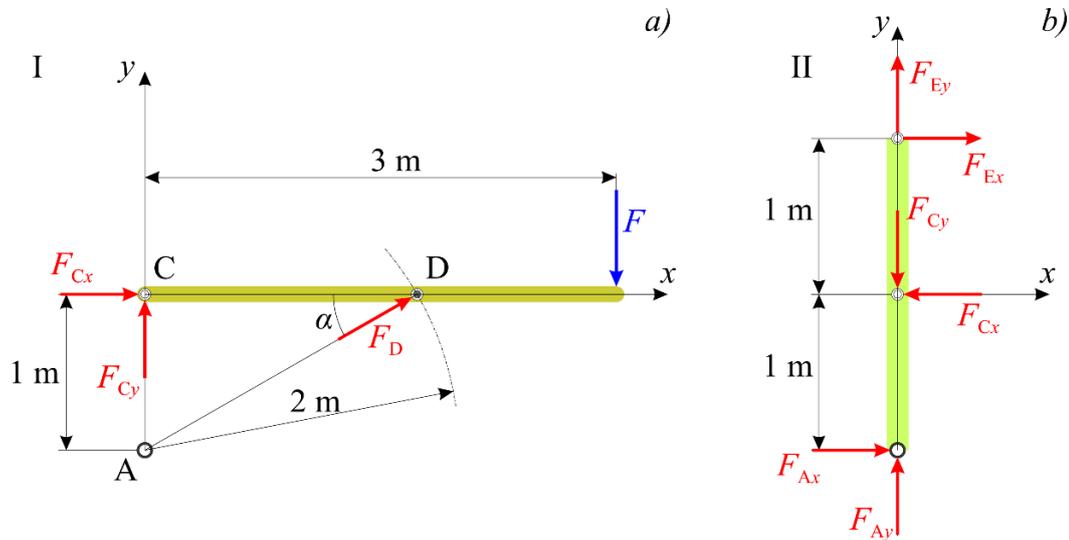
Uvjeti ravnoteže za čitavu konstrukciju glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} + F_{By} - F = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad -F \cdot 3 + F_{By} \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem druge i treće jednadžbe dobije se:

$$F_{By} = \frac{F \cdot 3}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = -F_{By} + F = -13,5 + 9 = -4,5 \text{ kN}.$$

Iz prve jednađbe slijedi $F_{Ax} = -F_{Bx}$, ali iznose tih komponenta još ne možemo odrediti.



Slika 4.27. *Primjer 4.10.: Dijelovi konstrukcije oslobođeni veza: a) dio I, b) dio II.*

Na dio konstrukcije I nakon oslobađanja od veza djeluje vanjska aktivna sila \vec{F} , reakcija cilindričnog zgloba C, kojoj su komponente F_{Cx} i F_{Cy} , kojima dio konstrukcije II djeluje na dio konstrukcije I u zglobu C (pretpostavljeni smjerovi ovih reakcija u smjeru su pozitivnih osi x i y), te sila \vec{F}_D kojom dio konstrukcije III djeluje na dio I. Ta sila je na pravcu koji spaja točke A i D s pretpostavljenim smjerom od A prema D.

Uvjeti ravnoteže za dio konstrukcije I glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad & F_{Cx} + F_D \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum F_y = 0: \quad & F_{Cy} + F_D \cdot \sin \alpha - F = 0, \\ \sum M_C = 0: \quad & -F \cdot 3 + F_D \cdot \sin \alpha \cdot \overline{CD} = 0. \end{aligned}$$

pri čemu je:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ; \quad \overline{CD} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ m}.$$

Iz treće jednađbe je:

$$F_D = \frac{F \cdot 3}{\sin \alpha \cdot \overline{CD}} = \frac{9 \cdot 3}{\sin 30^\circ \cdot \sqrt{3}} = 31,18 \text{ kN}.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu i drugu jednađbu dobije se:

$$\begin{aligned} F_{Cx} &= -F_D \cos \alpha = -31,177 \cos 30^\circ = -27 \text{ kN}, \\ F_{Cy} &= -F_D \cdot \sin \alpha + F = -31,177 \cdot \sin 30^\circ + 9 = -6,589 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \sqrt{(-27)^2 + (-6,589)^2} = 27,79 \text{ kN}.$$

Na dio konstrukcije II nakon oslobađanja od veza djeluje reakcija \vec{F}_A , kojoj su komponente F_{Ax} i $F_{Ay} = -4,5 \text{ kN}$; sila u zglobu \vec{F}_C kojom dio I djeluje na dio II s komponentama $F_{Cx} = 27 \text{ kN}$ i $F_{Cy} = 6,589 \text{ kN}$ (smjer tih komponentata sile u zglobu \vec{F}_C je suprotan od smjera komponentata kojima dio II djeluje na dio I) te sila u zglobu E \vec{F}_E kojom dio konstrukcije III djeluje na dio II s komponentama F_{Ex} i F_{Ey} (smjerovi pretpostavljeni u smjeru pozitivnih osi x i y).

Uvjeti ravnoteže napisani prema prvom obliku za dio konstrukcije II glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{Cx} + F_{Ex} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_{Cy} + F_{Ey} = 0,$$

$$\sum M_E = 0: \quad F_{Ax} \cdot 2 - F_{Cx} \cdot 1 = 0.$$

Iz treće jednadžbe je:

$$F_{Ax} = \frac{1}{2} \cdot F_{Cx} = \frac{1}{2} \cdot (-27) = -13,5 \text{ kN}.$$

Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu i drugu jednadžbu dobije se:

$$F_{Ex} = -F_{Ax} + F_{Cx} = -(-13,5) - 27 = -13,5 \text{ kN},$$

$$F_{Ey} = -F_{Ay} + F_{Cy} = -(-4,5) - 6,589 = -2,089 \text{ kN},$$

$$F_{Bx} = -F_{Ax} = -(-13,5) = 13,5 \text{ kN}.$$

Konačno je:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(-13,5)^2 + (-4,5)^2} = 14,23 \text{ kN},$$

$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = \sqrt{13,5^2 + 13,5^2} = 19,09 \text{ kN},$$

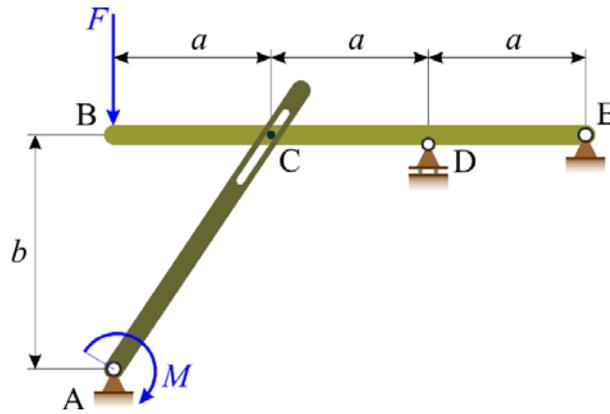
$$F_C = 27,79 \text{ kN}, \quad F_D = 31,18 \text{ kN},$$

$$F_E = \sqrt{F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2} = \sqrt{(-13,5)^2 + (-2,089)^2} = 13,66 \text{ kN}.$$

Primjer 4.11.

Konstrukcija sastavljena od dvaju dijelova opterećena je silom \vec{F} i spregom momenta M te vezana za podlogu nepomičnim osloncima u A i E i pomičnim osloncem u D. Dijelovi su međusobno povezani klizačem u C (slika 4.28.). Valja odrediti sve sile veza.

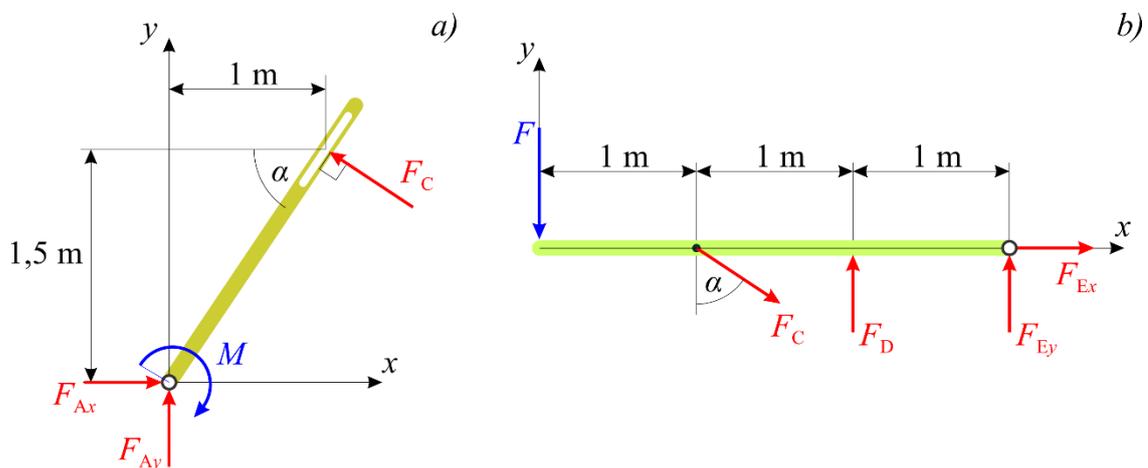
Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $F = 3 \text{ kN}$, $M = 1,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika 4.28. *Primjer 4.11.*

Rješenje:

Svaki dio konstrukcije oslobođen je od veza i prikazan kao slobodno tijelo sa svim silama koje na njega djeluju (slike 4.11.a i 4.11.b).



Slika 4.29. *Primjer 4.11.:* Dijelovi konstrukcije kao slobodna tijela: a) dio AC, b) dio BE.

Uvjeti ravnoteže za dio AC glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_C \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_C \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -M + F_C \cdot \overline{AC} = 0.$$

gdje su

$$\overline{AC} = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = 1,803 \text{ m}, \quad \tan \alpha = \frac{1,5}{1} = 1,5 \quad \alpha = 56,31^\circ.$$

Iz treće jednadžbe je

$$F_C = \frac{M}{\overline{AC}} = \frac{1,2}{1,803} = 0,666 \text{ kN};$$

nakon čega iz prve i druge slijedi:

$$F_{Ax} = F_C \cdot \sin \alpha = 0,666 \cdot \sin 56,31^\circ = 0,554 \text{ kN};$$

$$F_{Ay} = -F_C \cdot \cos 56,31^\circ = -0,666 \cdot \cos 56,31^\circ = -0,369 \text{ kN}.$$

Reakcija oslonca A iznosi:

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{0,554^2 + (-0,369)^2} = 0,666 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za dio BCDE:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ex} + F_C \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ey} + F_D - F_C \cdot \cos \alpha - F = 0,$$

$$\sum M_E = 0: \quad F \cdot 3 + F_C \cdot \cos \alpha \cdot 2 - F_D \cdot 1 = 0.$$

Iz treće jednadžbe je

$$F_D = 3 \cdot 3 + F_C \cdot \cos \alpha \cdot 2 = 9 + 0,666 \cdot \cos 56,31^\circ \cdot 2 = 9,739 \text{ kN};$$

iz prve

$$F_{Ex} = -F_C \cdot \sin \alpha = -0,666 \cdot \sin 56,31^\circ = -0,554 \text{ kN};$$

a iz druge

$$F_{Ey} = -F_D + F_C \cdot \cos \alpha + 3 = -9,739 + 0,666 \cdot \cos 56,31^\circ + 3 = -6,370 \text{ kN}.$$

Reakcija oslonca E je

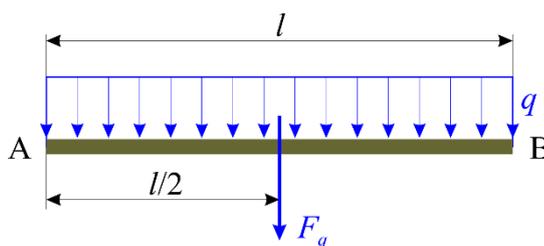
$$F_E = \sqrt{F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2} = \sqrt{(-0,554)^2 + (-6,370)^2} = 6,394 \text{ kN}.$$

4.5. KONTINUIRANA RASPODJELA SILA

Do sada razmatrane sile djelovale su u jednoj točki i nazivali smo ih koncentriranim silama. Sile, međutim, mogu djelovati na dio volumena, površine ili pak na dijelu linije. Ovim posljednjima, raspoređenima duž odsječka linije, ovdje ćemo posvetiti dio prostora. Uvest ćemo pojam *specifično opterećenje* q , koje predstavlja silu na jedinicu duljine opterećenog odsječka, a mjeri se u N/m.

Navedimo nekoliko slučajeva kontinuirano raspodijeljenog opterećenja:

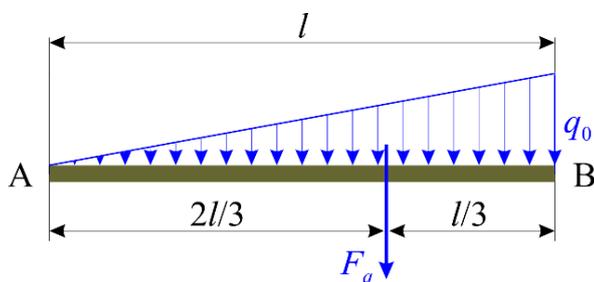
- jednolika raspodjela sila duž odsječka pravca (slika 4.30.)



Slika 4.30. Jednoliko kontinuirano opterećenje

Rezultantna sila kojom se može zamijeniti ovo opterećenje je $F_q = q \cdot l$, a smještena je po sredini opterećenja.

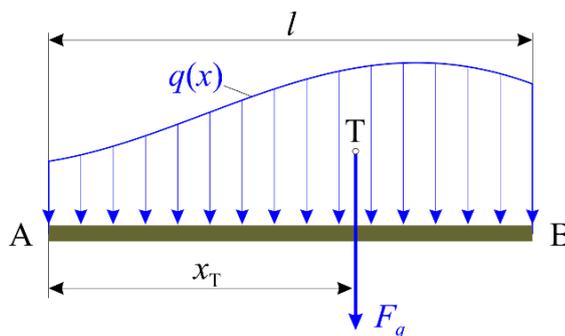
- linearna raspodjela sila duž odsječka pravca (slika 4.31.)



Slika 4.31. *Linearno (trokutno) raspodijeljeno kontinuirano opterećenje*

Rezultantna sila kojom se može zamijeniti ovo opterećenje je $F_q = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l$, a smještena je u težištu trokuta.

- proizvoljna raspodjela sila duž odsječka pravca (slika 4.32.)



Slika 4.32. *Proizvoljno raspodijeljeno kontinuirano opterećenje*

Rezultantna sila kojom se može zamijeniti ovo opterećenje je

$$F_q = \int_0^l q(x) dx,$$

a smještena je u težištu lika omeđenog funkcijom opterećenja i osi x .

- jednolika raspodjela sila po kružnom luku (slika 4.33.)

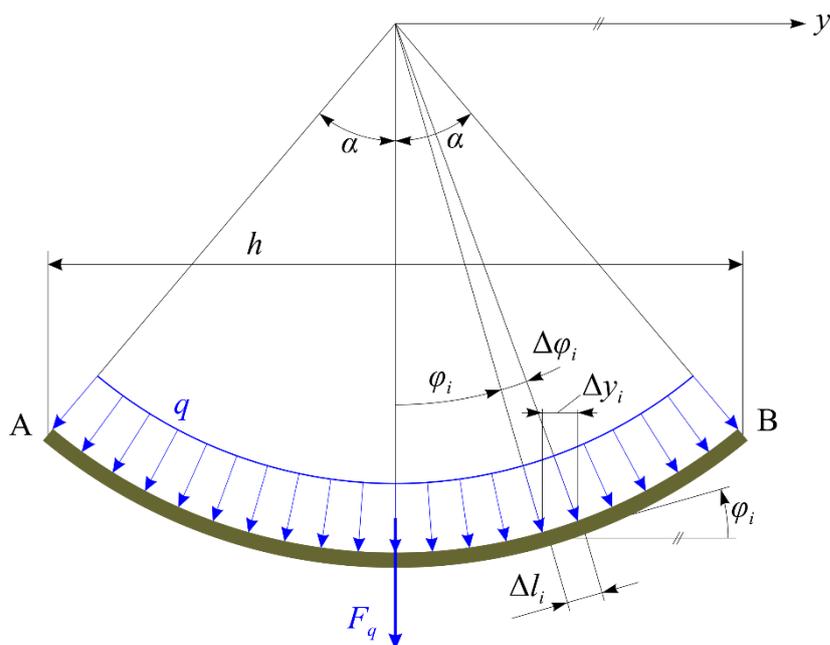
Rezultantna sila kojom se može zamijeniti ovo opterećenje je:

$$F_q = \sum q \cdot \Delta l_i \cdot \cos \varphi_i; \quad \Delta l_i \cdot \cos \varphi_i = \Delta y_i;$$

$$F_q = \sum q \cdot \Delta y_i = q \cdot \sum \Delta y_i; \quad \sum \Delta y_i = \overline{AB} = h;$$

$$F_q = q \cdot h.$$

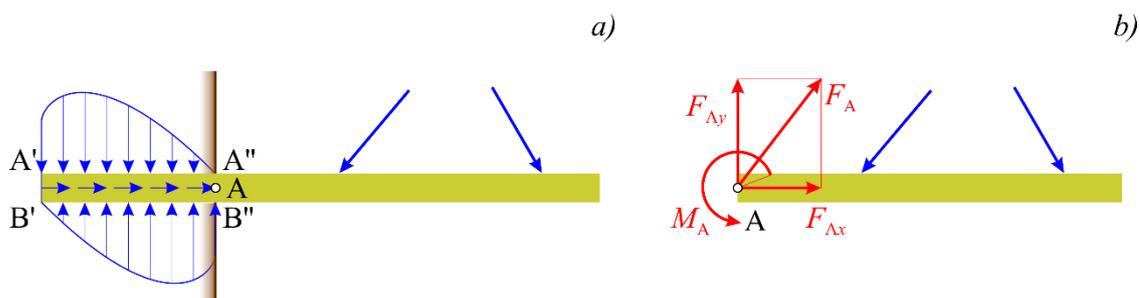
Dakle, rezultantna sila jednaka je produktu kontinuiranog opterećenja i duljine tetive AB, a smještena je na simetrali kružnog luka.



Slika 4.33. Jednolika raspodjela sila po kružnom luku

4.6. VEZA UKLJEŠTENJEM

Kod veze ostvarene uklještenjem (slika 4.34.a) na tijelo duž linija A'A'' i B'B'' djeluje sustav kontinuirano raspoređenih sila. Ako te sile reduciramo na točku A, možemo ih zamijeniti nepoznatom silom \vec{F}_A s hvatištem u A i spregom sila čiji je moment M_A . Ove veličine (\vec{F}_A i M_A) nisu unaprijed poznate, a određujemo ih iz jednadžbi ravnoteže. Silu \vec{F}_A zamjenjujemo pri tome projekcijama F_{Ax} i F_{Ay} kao nepoznanicama, pa je za određivanje reakcije veze uklještenjem potrebno odrediti tri veličine: F_{Ax} , F_{Ay} i M_A (slika 4.34.b).

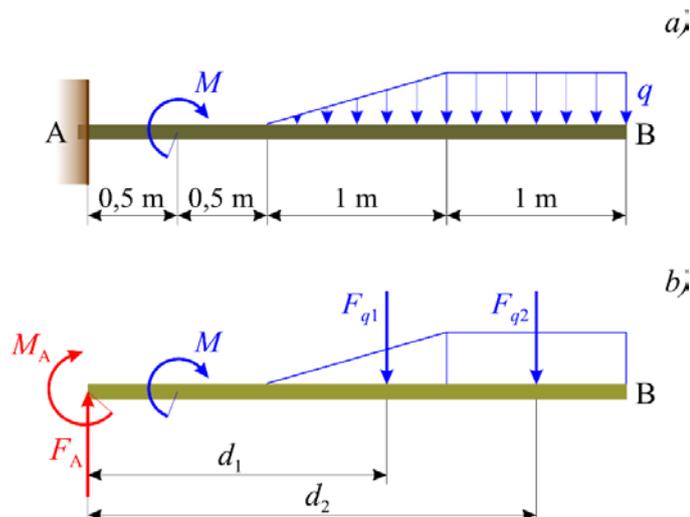


Slika 4.34. a) veza ostvarena uklještenjem, b) reakcijska sila i reakcijski moment veze ostvarene uklještenjem.

Primjer 4.12.

Konzolni nosač opterećen je spregom momenta M te linearno i jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem q (slika 4.35.a). Valja odrediti reakcijsku silu i reakcijski moment na mjestu uklještenja.

Zadano je: $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$ i $q = 8 \text{ kN/m}$.



Slika 4.35. *Primjer 4.12.: a) konzolni nosač, b) konzolni nosač kao slobodno tijelo.*

Na nosač nakon oslobađanja od veza djeluje opći sustav sila u ravnini koji čine: spreg momenta M , sila \vec{F}_{q1} kojom zamjenjujemo linearno raspodijeljeno kontinuirano opterećenje, sila \vec{F}_{q2} kojom zamjenjujemo jednoliko raspodijeljeno kontinuirano opterećenje, reakcijska sila \vec{F}_A i reakcijski spreg momenta M_A kojima uklještenje djeluje na nosač (slika 4.35.b).

Sila \vec{F}_{q1} smještena je u težište trokuta i iznosi:

$$d_1 = 1,667 \text{ m}, \quad F_{q1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 = 4 \text{ kN};$$

dok je sila \vec{F}_{q2} smještena u težište pravokutnika i iznosi:

$$d_2 = 2,5 \text{ m}, \quad F_{q2} = q \cdot 1 = 8 \cdot 1 = 8 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: \quad & F_A - F_{q1} - F_{q2} = 0, \\ \sum M_A = 0: \quad & -M_A - M - F_{q1} \cdot 1,667 - F_{q2} \cdot 2,5 = 0. \end{aligned}$$

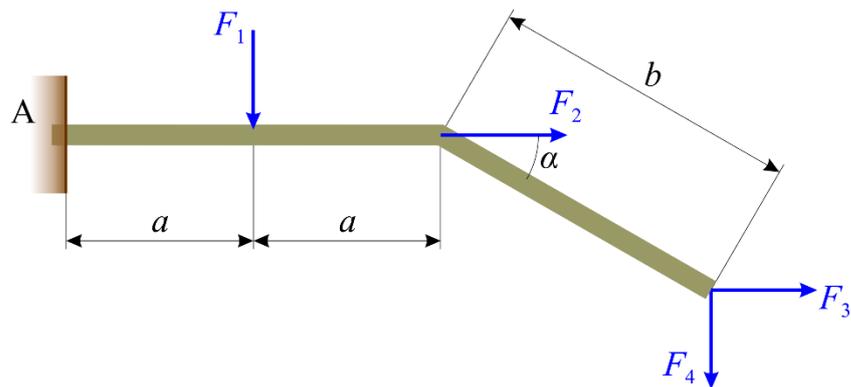
Iz gornjih jednadžbi je:

$$F_A = 12 \text{ kN}; \quad M_A = -36,70 \text{ kN}.$$

Kako je reakcijski moment uklještenja M_A negativan, zaključujemo da mu je smjer pogrešno pretpostavljen.

Primjer 4.13.

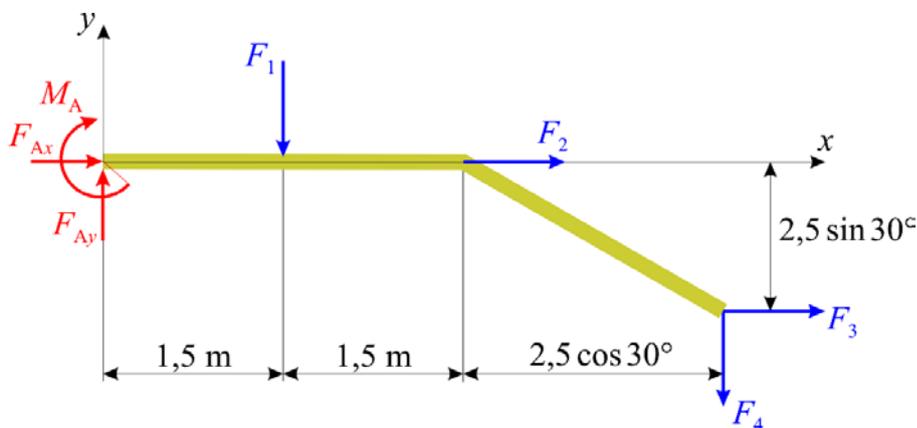
Zakrivljeni štap zanemarive težine opterećen je četirima koncentriranim silama i vezan za podlogu uklještenjem u A. Valja odrediti reakcijsku silu i reakcijski moment na mjestu uklještenja ako je zadano: $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 2,5 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 300 \text{ N}$, $F_3 = 250 \text{ N}$, $F_4 = 600 \text{ N}$.



Slika 4.36. *Primjer 4.13.*

Rješenje:

Štap se oslobađa od veze s podlogom na mjestu ukleštenja te se na tom mjestu dodaju dvije komponente reakcijske sile F_{Ax} i F_{Ay} i reakcijski moment M_A (slika 4.37.).



Slika 4.37. *Primjer 4.13.: Zakrivljeni štap kao slobodno tijelo*

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_2 + F_3 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_1 - F_4 = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -M_A - F_1 \cdot 1,5 + F_3 \cdot 2,5 \cdot \sin 30^\circ - F_4 \cdot (3 + 2,5 \cdot \cos 30^\circ) = 0.$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se tražene veličine kako slijedi:

$$F_{Ax} = -F_2 - F_3 = -300 - 250 = -550 \text{ N},$$

$$F_{Ay} = F_1 + F_4 = 500 + 600 = 1100 \text{ N},$$

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(-550)^2 + 1100^2} = 1230 \text{ N},$$

$$M_A = -F_1 \cdot 1,5 + F_3 \cdot 2,5 \cdot \sin 30^\circ - F_4 \cdot (3 + 2,5 \cdot \cos 30^\circ),$$

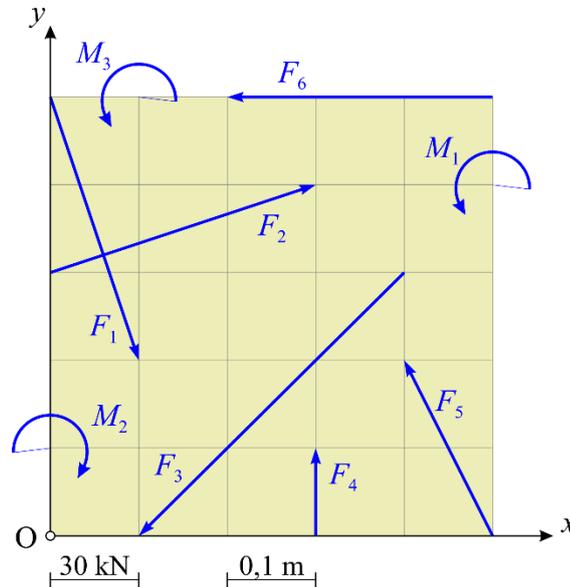
$$M_A = -500 \cdot 1,5 + 250 \cdot 2,5 \cdot \sin 30^\circ - 600 \cdot (3 + 2,5 \cdot \cos 30^\circ) = -3537 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



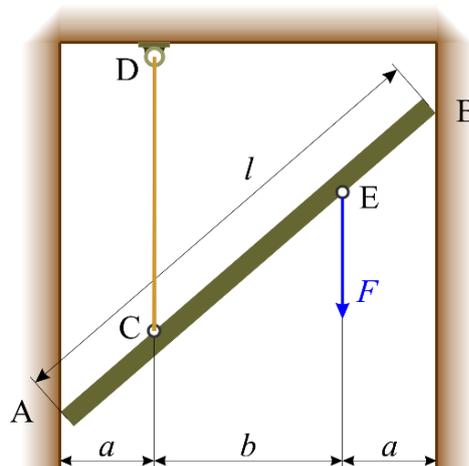
Zadatak 4.1. Zadan je opći sustav sila i spregova u ravni (slika Z.4.1.). Valja odrediti vektor i iznos rezultante te jednadžbu pravca njezina djelovanja.

Zadano je: $M_1 = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_3 = 19 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika Z.4.1. Zadatak 4.1.

Zadatak 4.2. Homogena greda duljine l i težine F_G opterećena je silom \vec{F} u točki E.



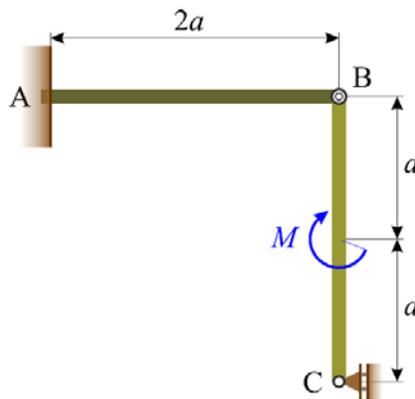
Slika Z.4.2. Zadatak 4.2.

Greda se u točkama A i B oslanja na zid, dok je užetom CD vezana za strop (slika Z.4.2.). Valja odrediti reakcije svih veza grede.

Zadano je: $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $l = 3 \text{ m}$, $F_G = 2 \text{ kN}$, $F = 5 \text{ kN}$.

Zadatak 4.3. Dvije homogene grede, AB težine F_{G1} i BC težine F_{G2} , međusobno su povezane zglobovima u B. Greda BC opterećena je spregom sila momenta M (slika Z.4.3.). Valja odrediti sile u svim vezama.

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $F_{G1} = 1 \text{ kN}$, $F_{G2} = 2 \text{ kN}$, $M = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

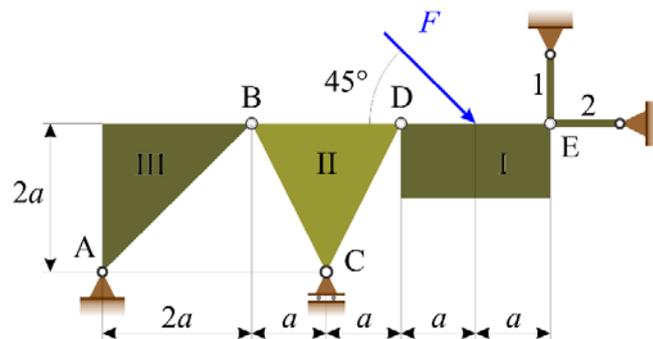


Slika Z.4.3. *Zadatak 4.3.*

Zadatak 4.4. Konstrukcija sastavljena od triju ploča I, II i III zanemarivih težina opterećena je koncentriranom silom \vec{F} . Konstrukcija je za podlogu vezana nepomičnim osloncem u A, pomičnim osloncem u C te štapovima zanemarivih težina 1 i 2.

Ploče su međusobno povezane zglobovima u B i D (slika Z.4.4.).

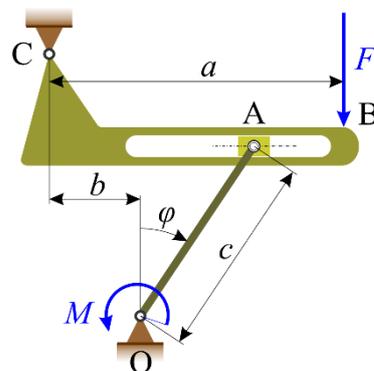
Valja odrediti sile u svim vezama. Zadano je: $F = 20 \text{ kN}$.



Slika Z.4.4. *Zadatak 4.4.*

Zadatak 4.5. Mehanizam čine poluga OA, klizač A i kulisa BC. Mehanizam je opterećen koncentriranom silom \vec{F} (slika Z.4.5.). Valja odrediti intenzitet sile \vec{F} za ravnotežni položaj prikazan slikom. Trenje na dodirnim površinama može se zanemariti.

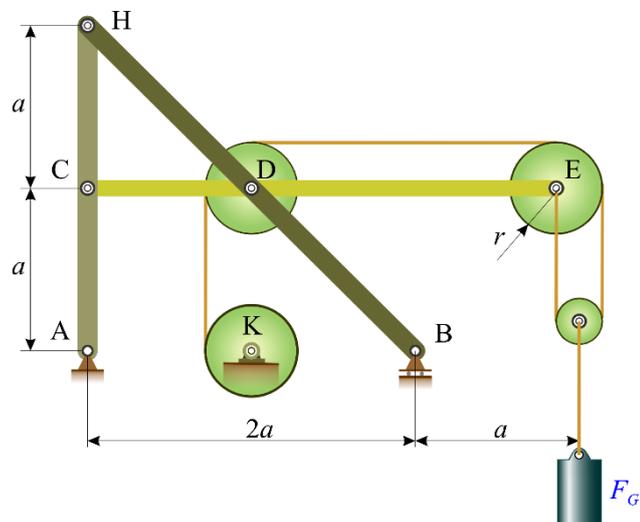
Zadano je: $a = 25 \text{ cm}$; $b = 7,5 \text{ cm}$; $c = 10 \text{ cm}$; $M = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $\varphi = 30^\circ$.



Slika Z.4.5. *Zadatak 4.5.*

Zadatak 4.6. Sastavljena konstrukcija koristi se za podizanje tereta težine F_G (slika Z.4.6.). Zanimajući težine pojedinih dijelova konstrukcije i trenje na dodirnim površinama, odrediti sile u svim vezama.

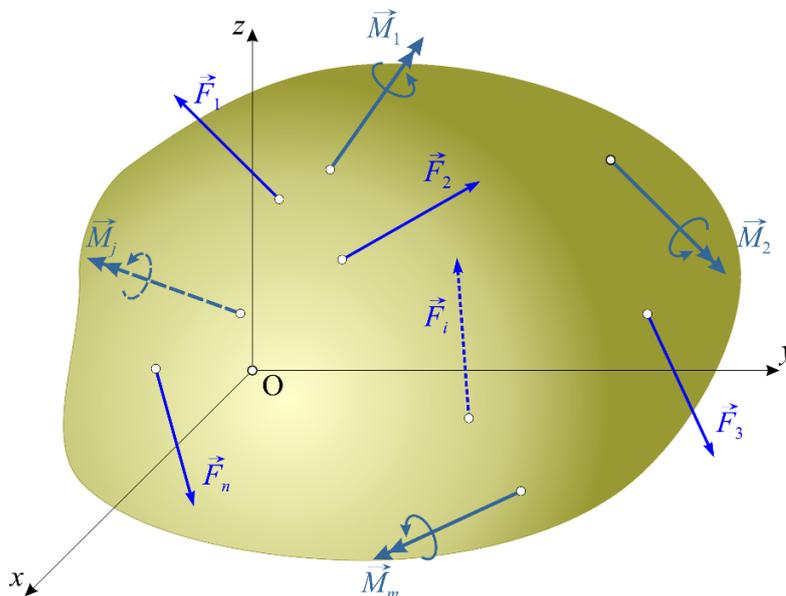
Zadano je: $a = 1 \text{ m}$; $r = 0,4 \text{ m}$; $F_G = 20 \text{ kN}$.



Slika Z.4.6. Zadatak 4.6.

5. OPĆI SUSTAV SILA U PROSTORU

Ako na tijelo djeluje sustav sila i spregova kojima vektori ne leže u istoj ravnini, radi se o općem sustavu sila u prostoru (slika 5.1.).

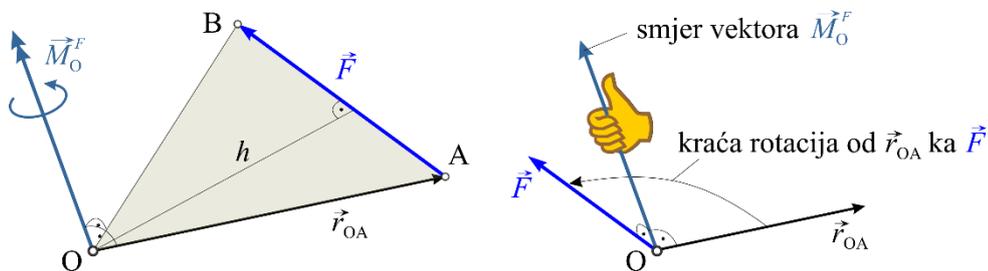


Slika 5.1. Opći sustav sila u prostoru

5.1. MOMENT SILE U ODNOSU NA TOČKU KAO VEKTOR

Pri proučavanju općeg sustava sila u ravnini moment sile u odnosu na točku promatrali smo kao skalarnu veličinu. Takvo predočavanje momenta sile moguće je, međutim, samo pri djelovanju ravninskih sustava sila jer je moment sile u odnosu na točku O vektorska veličina, koja je jednaka vektorskom produktu radijus vektora položaja hvatišta sile u odnosu na točku O i same sile (slika 5.2.):

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}. \quad (5.1)$$



Slika 5.2. Vektor momenta sile u odnosu na točku O te njegov smjer određen pravilom desne ruke

Vektorski karakter momenta sile u odnosu na točku ogleda se u nepromjenjivosti njegova intenziteta promjenom koordinatnog sustava i u načinu zbrajanja dvaju momenata: momenti sile u odnosu na točku zbrajaju se geometrijski.

Iz definicije vektorskog produkta slijedi:

- intenzitet momenta sile u odnosu na točku dan je izrazom:

$$|\vec{M}_O^{\vec{F}}| = M_O^{\vec{F}} = r_{OA} \cdot F \cdot \sin \angle(\vec{r}_{OA}, \vec{F}) = F \cdot h = 2 \cdot P_{\Delta OAB}, \quad (5.2)$$

- pravac momenta sile u odnosu na točku okomit je na ravninu definiranu pravcem sile i točkom O,
- smjer vektora momenta određuje se po pravilu desne ruke: kada se svijenim prstima desne ruke pokazuje smjer u kojem sila nastoji zakrenuti tijelo oko točke (kraća rotacija od vrha vektora \vec{r}_{OA} ka vektoru \vec{F}), palac te ruke pokazuje smjer vektora momenta.

Izražavanjem radijus vektora položaja \vec{r}_{OA} i sile \vec{F} preko njihovih pravokutnih komponenata:

$$\vec{r}_{OA} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \cdot \vec{j} + r_z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

i uvrštavanjem u izraz (5.1) dobijemo:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = (F_z \cdot r_y - F_y \cdot r_z) \cdot \vec{i} + (F_x \cdot r_z - F_z \cdot r_x) \cdot \vec{j} + (F_y \cdot r_x - F_x \cdot r_y) \cdot \vec{k}, \quad (5.3)$$

odakle slijedi da su projekcije momenta sile u odnosu na točku, na osi koordinatnog sustava:

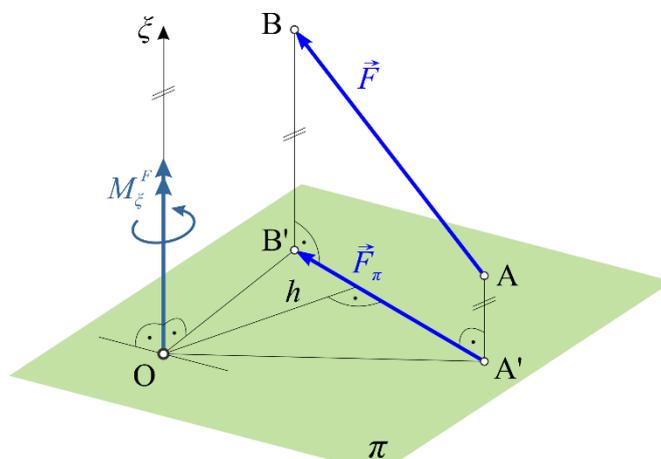
$$M_{Ox}^{\vec{F}} = F_z \cdot r_y - F_y \cdot r_z; \quad M_{Oy}^{\vec{F}} = F_x \cdot r_z - F_z \cdot r_x; \quad M_{Oz}^{\vec{F}} = F_y \cdot r_x - F_x \cdot r_y.$$

Moment sile u odnosu na točku možemo prikazati i determinantom:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

razvojem koje se po prvom retku dobije jednakost (5.3).

5.2. MOMENT SILE U ODNOSU NA OS



Slika 5.3. Moment sile u odnosu na os

Momentom sile u odnosu na os nazivamo skalarnu veličinu, uzetu s odgovarajućim predznakom, koja je jednaka produktu intenziteta projekcije sile na ravninu okomitu na promatranu os i najkraće udaljenosti od pravca te projekcije do točke u kojoj os probada ravninu (slika 5.3.):

$$M_{\xi}^{\vec{F}} = \pm F_{\pi} \cdot h. \quad (5.5)$$

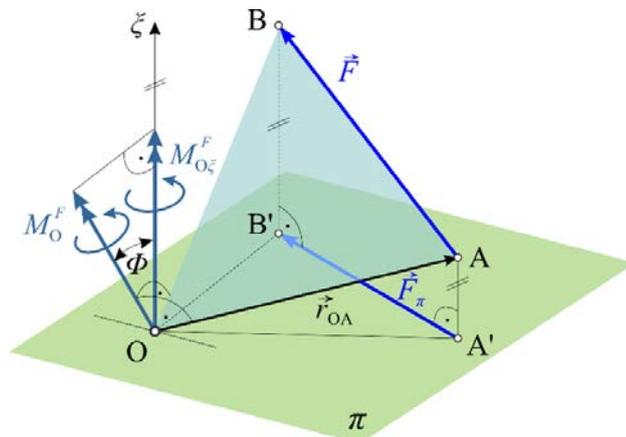
Moment sile u odnosu na os je pozitivan ako za promatrača, koji gleda iz smjera pozitivnog dijela osi ξ , projekcija F_{π} teži da zakrene tijelo u smjeru suprotnom od smjera rotacije kazaljke na satu.

Moment sile u odnosu na os bit će jednak nuli u slučaju da pravac djelovanja sile siječe zadanu os ($h = 0$) ili pak u slučaju da je pravac djelovanja sile paralelan s promatranom osi (kada je $F_{\pi} = 0$).

5.3. VEZA IZMEĐU MOMENTA SILE U ODNOSU NA TOČKU I NA OS

Ova veza dana je sljedećim teoremom:

Projekcija momenta sile u odnosu na točku na po volji odabranu os, koja prolazi kroz tu točku, jednaka je momentu sile u odnosu na tu os (slika 5.4.).



Slika 5.4. Veza između momenta sile u odnosu na točku i na os

Intenzitet momenta sile u odnosu na točku O, odnosno u odnosu na os ξ jest:

$$M_O^{\vec{F}} = 2 \cdot P_{\Delta OAB}; \quad M_{\xi}^{\vec{F}} = 2 \cdot P_{\Delta OA'B'}.$$

Vrijedi također:

$$M_{O\xi}^{\vec{F}} = M_O^{\vec{F}} \cdot \cos \Phi \quad \text{te} \quad P_{\Delta OA'B'} = P_{\Delta OAB} \cdot \cos \Phi,$$

odakle slijedi:

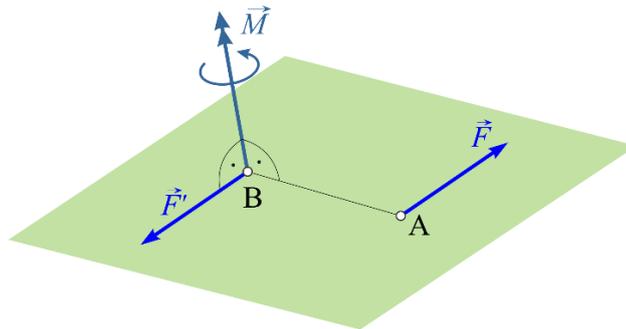
$$M_{O\xi}^{\vec{F}} = M_{\xi}^{\vec{F}},$$

čime smo gornji teorem dokazali.

Upravo poglavlja 5.2. i 5.3. upućuju na opravdanost rada s momentom sile kao skalarom pri analizi općeg sustava sila u ravnini. Naime, sila koja leži u ravnini Oxy imaće moment u odnosu na bilo koju točku te ravnine koji je paralelan s osi z . Projekcija tog momenta na os z jednaka je momentu sile u odnosu na os z , a to je skalarna veličina.

5.4. SPREG SILA. MOMENT SPREGA SILA

Moment sprega sila jest vektorska veličina čiji je intenzitet jednak produktu intenziteta jedne od sila koje čine spreg i kraka sprega, pravac mu je okomit na ravninu sprega, a smjer mu je određen po pravilu desne ruke (slika 5.5.).



Slika 5.5. Spreg sila i njegov moment

Budući da spreg sila možemo pomicati u ravnini njegova djelovanja, ili pak u ravninu njoj paralelnu, to vektor momenta sprega \vec{M} možemo nanijeti u bilo kojoj točki krutog tijela – kažemo da je moment sprega sila *slobodan vektor*. Očividno je da je vektor momenta sprega jednak vektoru momenta jedne od sila za točku u kojoj djeluje druga sila:

$$\vec{M} = \vec{M}_B^{\vec{F}} = \vec{M}_A^{\vec{F}'} . \quad (5.6)$$

5.5. SLAGANJE SPREGOVA SILA U PROSTORU

Slaganje spregova sila pojasnit ćemo na primjeru dvaju spregova (slika 5.6.).

Vektori momenata prikazanih spregova sila s obzirom na (5.6) jesu:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1; \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_2 .$$

Budući da rezultante sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 te \vec{F}_1' i \vec{F}_2' :

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \quad \vec{F}_r' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$$

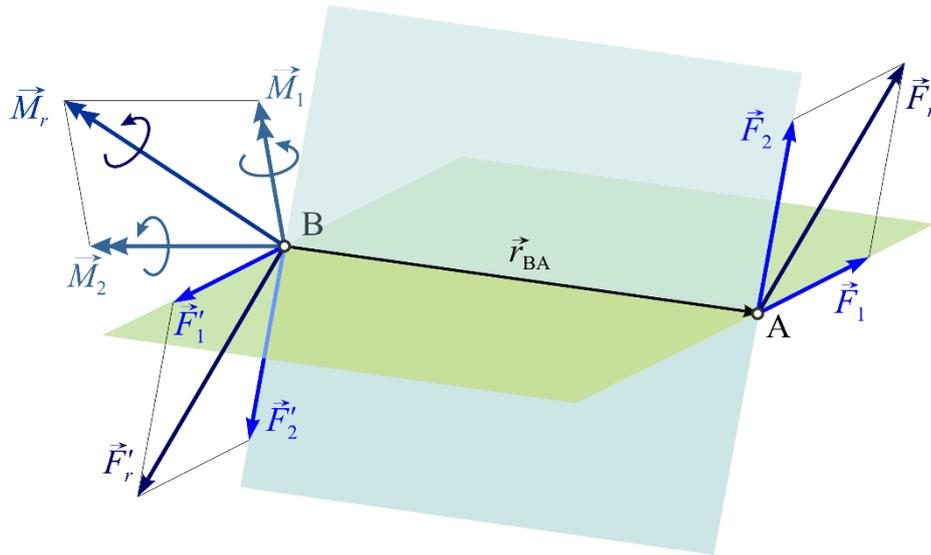
također čine spreg sila, čiji je moment:

$$\vec{M}_r = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_r = \vec{r}_{BA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_2 ,$$

možemo pisati:

$$\vec{M}_r = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 ,$$

tj. rezultirajući moment sprega \vec{M}_r dobijemo kao dijagonalu paralelograma konstruiranoga nad vektorima \vec{M}_1 i \vec{M}_2 .



Slika 5.6. Slaganje dvaju spregova sila

Postupnom primjenom gore opisanog postupka možemo odrediti moment rezultirajućeg sprega kada je zadan sustav od više spregova sila momenti kojih su $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_i, \dots, \vec{M}_n$:

$$\vec{M}_r = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_i + \dots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_i, \quad (5.7)$$

projekcije kojega na koordinatne osi jesu:

$$M_{rx} = \sum M_{ix}; \quad M_{ry} = \sum M_{iy}; \quad M_{rz} = \sum M_{iz}. \quad (5.8)$$

Konačno, intenzitet momenta rezultirajućeg sprega sila jest:

$$M_r = \sqrt{M_{rx}^2 + M_{ry}^2 + M_{rz}^2}, \quad (5.9)$$

pa slijedi zaključak:

Proizvoljni sustav spregova, koji djeluje na kruto tijelo, možemo zamijeniti jednim spregom čiji je moment jednak geometrijskoj (vektorskoj) sumi momenata komponentnih spregova.

5.5.1. Uvjeti ravnoteže sustava spregova

Budući da proizvoljni sustav spregova, koji djeluje na kruto tijelo, možemo zamijeniti jednim spregom, to je za ravnotežu sustava nužno i dovoljno da taj, rezultirajući vektor mora biti jednak nultom vektoru:

$$\vec{M}_r = \sum \vec{M}_i = \vec{0},$$

odnosno:

$$(1) M_{rx} = \sum M_{ix} = 0; \quad (2) M_{ry} = \sum M_{iy} = 0; \quad (3) M_{rz} = \sum M_{iz} = 0. \quad (5.10)$$

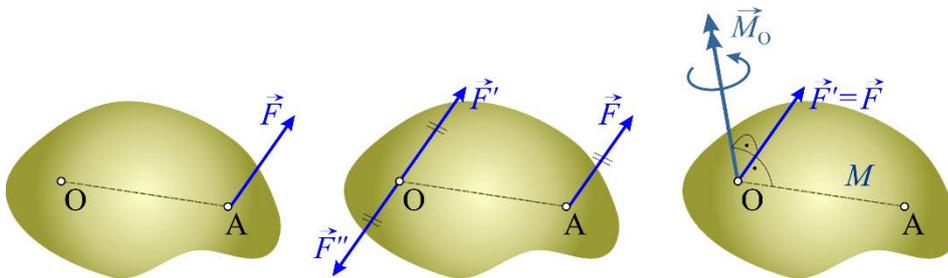
5.6. REDUKCIJA PROSTORNOG SUSTAVA SILA NA ZADANU TOČKU

Slično kao kod općeg sustava sila u ravnini, dokazat ćemo sljedeći teorem:

Proizvoljni prostorni sustav sila, koji djeluje na kruto tijelo, možemo, pri redukciji na po volji odabranu točku O, zamijeniti jednom silom \vec{F}_R (glavni vektor sila) s hvatištem u O i jednim spregom momenta \vec{M}_O (glavni vektor momenata), koji je jednak vektorskoj sumi momenata svih sila u odnosu na točku O.

Da bismo dokazali navedeni teorem, promotrit ćemo paralelni pomak jedne sile u točku O (slika 5.7.). U točki O dodajemo uravnoteženi sustav od dviju sila, \vec{F}' i \vec{F}'' , pri čemu zadana sila \vec{F} sa silom \vec{F}'' čini spreg sila čiji je moment:

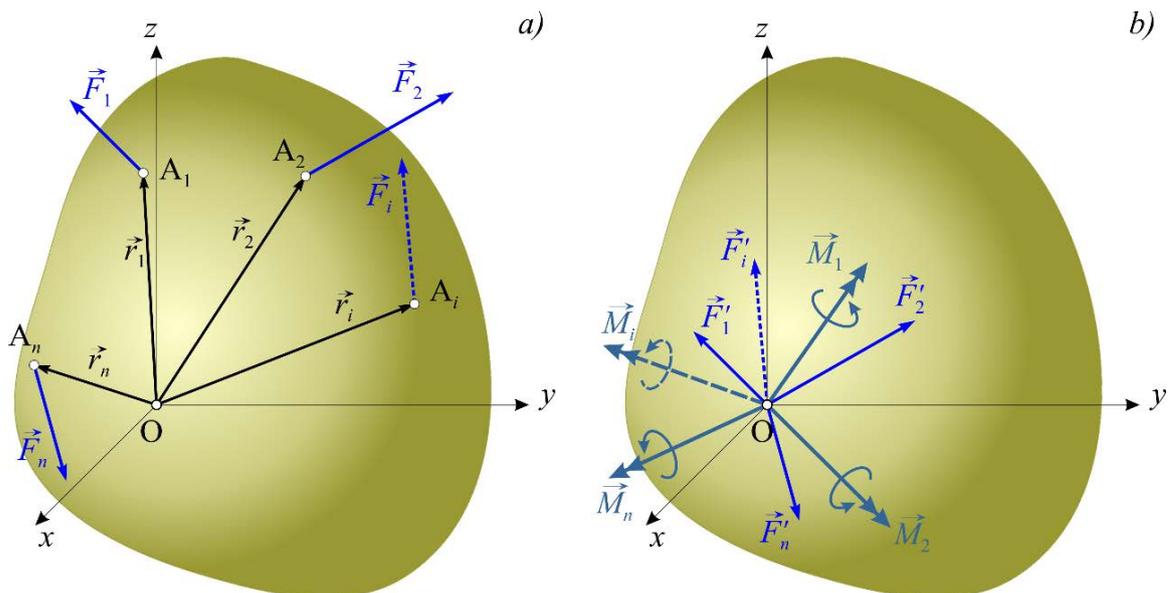
$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}}.$$



Slika 5.7. Redukcija sile na zadanu točku O

Slijedi: Silu \vec{F} s hvatištem u točki A možemo, paralelno njoj samoj, pomaknuti u po volji odabranu točku O ako zadanoj sili pridodamo spreg čiji je moment jednak momentu sile \vec{F} u odnosu na točku O.

Neka je sada zadan proizvoljni sustav sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ koji djeluje na kruto tijelo (slika 5.8.a).

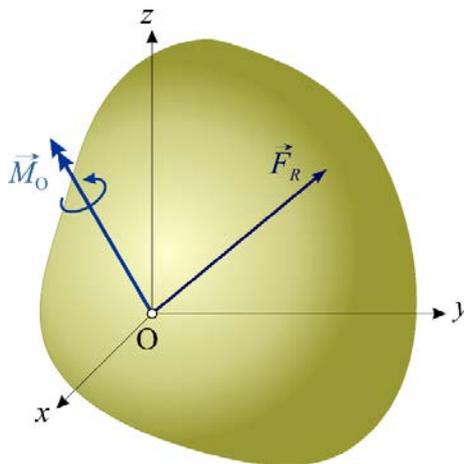


Slika 5.8. a) zadani opći sustav sila u prostoru, b) zadani sustav sila reduciran na točku O.

Postupnim paralelnim prenošenjem svake od sila u točku O dobijemo u toj točki n sila, koje sve možemo zamijeniti jednom silom \vec{F}_R s hvatištem u točki O, i n spregova sila, koje možemo zamijeniti jednim spregom čiji je moment \vec{M}_O .

Glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_O (slika 5.9.) jesu:

$$(1) \vec{F}_R = \sum \vec{F}_i; \quad (2) \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i}. \quad (5.11)$$



Slika 5.9. Glavni vektor sila i glavni moment u točki O

S obzirom na teorem o projekcijama vektora na os možemo pisati:

$$(1) F_{Rx} = \sum F_{ix}; \quad (2) F_{Ry} = \sum F_{iy}; \quad (3) F_{Rz} = \sum F_{iz}, \quad (5.12)$$

$$(4) M_{Ox} = \sum M_{Ox}^{\vec{F}_i}; \quad (5) M_{Oy} = \sum M_{Oy}^{\vec{F}_i}; \quad (6) M_{Oz} = \sum M_{Oz}^{\vec{F}_i}. \quad (5.13)$$

Iz teorema koji smo ovdje dokazali slijedi da su dva prostorna sustava sila ekvivalentna ako im se poklapaju glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni vektor momenata \vec{M}_O za jednu, istu točku O. Također, glavnim vektorom sila i glavnim vektorom momenata potpuno je određen prostorni sustav sila.

Ako na tijelo, uz n sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$, djeluje i m spregova sila momenata $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_j, \dots, \vec{M}_m$ koji su slobodni vektori i čije se djelovanje neće promijeniti pomicanjem u točku O, glavni vektor momenata bit će

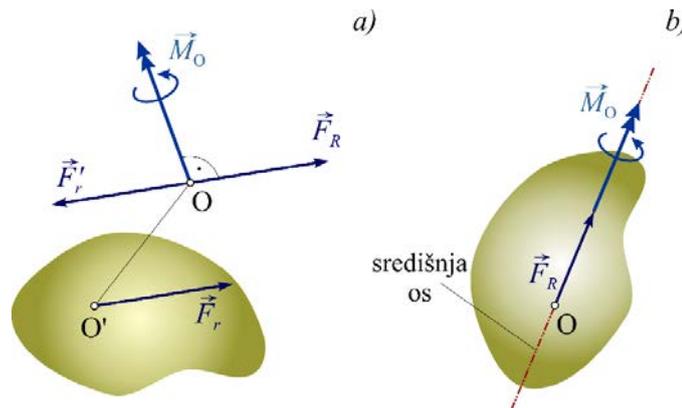
$$\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O^{\vec{F}_i} + \sum \vec{M}_j. \quad (5.14)$$

5.6.1. Svođenje prostornog sustava sila na jednostavniji oblik

Ovisno o intenzitetima glavnog vektora sila \vec{F}_R i glavnog vektora momenata \vec{M}_O , kao i o međusobnom položaju pravaca njihova djelovanja, razlikujemo sljedeće slučajeve:

- a) Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R = \vec{0}$ i $\vec{M}_O = \vec{0}$, sustav se nalazi u ravnoteži.

- b) Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R = \vec{0}$ i $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, sustav se svodi na spreg sila čiji je moment \vec{M}_O .
- c) Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ i $\vec{M}_O = \vec{0}$, sustav se svodi na rezultantu $\vec{F}_r = \vec{F}_R$, pravac koje prolazi upravo točkom O.
- d) Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ i $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ te ako je vektor \vec{F}_R okomit na \vec{M}_O , sustav se također svodi na rezultantu, pravac koje prolazi izvan točke O (slika 5.10.a).
- e) Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ i $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ te ako je vektor \vec{F}_R paralelan s \vec{M}_O , sustav se ne može svesti na jednostavniji oblik jer je moment sprega sila slobodan vektor. Kažemo da se sustav svodi na *dinamički vijak*, os kojega prolazi točkom O i naziva se *središnja os prostornog sustava sila* (slika 5.10.b).
- f) Ako je za zadani sustav sila $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ i $\vec{M}_O \neq \vec{0}$ te ako vektor \vec{F}_R nije okomit niti paralelan s \vec{M}_O , sustav se također svodi na dinamički vijak, os kojega, međutim, ne prolazi točkom O, nego je pomaknuta. Naime, glavni vektor momenata može se u tom slučaju rastaviti na dvije komponente: jednu okomitu na \vec{F}_R , a drugu paralelnu s \vec{F}_R .



Slika 5.10. a) glavni vektor sila i glavni moment u točki O kao međusobno okomiti vektori, b) središnja os prostornog sustava sila.

Primjer 5.1.

Zadan je opći sustav sila u prostoru:

$$\vec{F}_1 = 5 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j} + 7 \cdot \vec{k} \text{ s hvatištem u } A(-2; 4; -5);$$

$$\vec{F}_2 = -3 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k} \text{ s hvatištem u } B(3; 1; 7);$$

$$\vec{F}_3 = 4 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j} - 9 \cdot \vec{k} \text{ s hvatištem u } C(-2; 5; 4);$$

$$\vec{M}_1 = 3 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j} + 7 \cdot \vec{k}.$$

Valja reducirati zadani sustav na točku D (5; -2; 3).

Rješenje:

Zadani sustav reducira se u točki D na glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment sila \vec{M}_D u odnosu na točku D.

Glavni vektor sila \vec{F}_R dobije se prema prvom od izraza (5.11), a glavni moment sila \vec{M}_D u odnosu na točku D dobije se prema (5.14):

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{F}_R = (5-3+4) \cdot \vec{i} + (-6+8+8) \cdot \vec{j} + (7-4-9) \cdot \vec{k} = 6 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} - 6 \cdot \vec{k},$$

$$|\vec{F}_R| = F_R = \sqrt{6^2 + 10^2 + (-6)^2} = 13,11 \text{ kN};$$

$$\vec{M}_D = \vec{M}_D^{\vec{F}_1} + \vec{M}_D^{\vec{F}_2} + \vec{M}_D^{\vec{F}_3} + \vec{M}_1,$$

gdje su:

$$\vec{M}_D^{\vec{F}_1} = \vec{r}_{DA} \times \vec{F}_1,$$

$$\vec{r}_{DA} = (x_A - x_D) \cdot \vec{i} + (y_A - y_D) \cdot \vec{j} + (z_A - z_D) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{DA} = (-2-5) \cdot \vec{i} + (4+2) \cdot \vec{j} + (-5-3) \cdot \vec{k} = -7 \cdot \vec{i} + 6 \cdot \vec{j} - 8 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{M}_D^{\vec{F}_1} = \vec{r}_{DA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 6 & -8 \\ 5 & -6 & 7 \end{vmatrix} = -6 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_D^{\vec{F}_2} = \vec{r}_{DB} \times \vec{F}_2,$$

$$\vec{r}_{DB} = (x_B - x_D) \cdot \vec{i} + (y_B - y_D) \cdot \vec{j} + (z_B - z_D) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{DB} = (3-5) \cdot \vec{i} + (1+2) \cdot \vec{j} + (7-3) \cdot \vec{k} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{M}_D^{\vec{F}_2} = \vec{r}_{DB} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = -44 \cdot \vec{i} - 20 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_D^{\vec{F}_3} = \vec{r}_{DC} \times \vec{F}_3,$$

$$\vec{r}_{DC} = (x_C - x_D) \cdot \vec{i} + (y_C - y_D) \cdot \vec{j} + (z_C - z_D) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{DC} = (-2-5) \cdot \vec{i} + (5+2) \cdot \vec{j} + (4-3) \cdot \vec{k} = -7 \cdot \vec{i} + 7 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{M}_D^{\vec{F}_3} = \vec{r}_{DC} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -71 \cdot \vec{i} - 59 \cdot \vec{j} - 84 \cdot \vec{k}.$$

Glavni moment sila u odnosu na točku D jest:

$$\vec{M}_D = (-6 - 44 - 71 + 3) \cdot \vec{i} + (9 - 20 - 59 + 8) \cdot \vec{j} + (12 - 7 - 84 + 7) \cdot \vec{k},$$

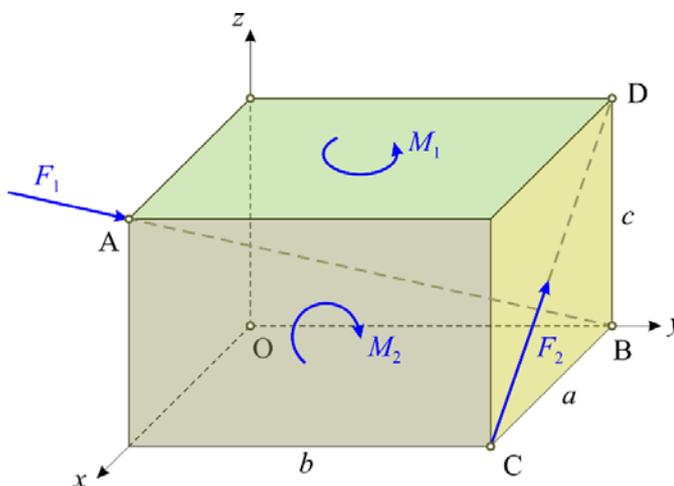
$$\vec{M}_D = -118 \cdot \vec{i} - 62 \cdot \vec{j} - 72 \cdot \vec{k},$$

$$M_D = \sqrt{(-118)^2 + (-62)^2 + (-72)^2} = 151,5 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Primjer 5.2.

Na tijelo oblika kvadra djeluje opći sustav sila u prostoru (slika 5.11.).

Valja reducirati zadani sustav sila na točku O ako je zadano: $a = 2 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$, $F_1 = 350 \text{ N}$, $F_2 = 490 \text{ N}$, $M_1 = 220 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_2 = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$.



Slika 5.11. Primjer 5.2.

Rješenje:

Redukcijom zadanog sustava sila na ishodišnu točku O dobije se glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment sustava sila \vec{M}_O u odnosu na tu točku.

Glavni vektor sila \vec{F}_R dobije se prema (5.11):

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

gdje su sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 u vektorskom zapisu:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_{AB}; \quad \vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{e}_{CD}.$$

Koordinate točaka A, B, C i D jesu: A(2; 0; 3), B(0; 4; 0), C(2; 4; 0) i D(0; 4; 3).

Jedinični vektori dobiveni prema (2.15) jesu:

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}, \quad \vec{r}_{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AB} &= (0-2) \cdot \vec{i} + (4-0) \cdot \vec{j} + (0-3) \cdot \vec{k} = -2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}, \\ r_{AB} &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5,3852, \\ \vec{e}_{AB} &= \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}}{5,3852} = -0,3714 \cdot \vec{i} + 0,7428 \cdot \vec{j} - 0,5571 \cdot \vec{k}; \\ \vec{e}_{CD} &= \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}}, \\ \vec{r}_{CD} &= (x_D - x_C) \cdot \vec{i} + (y_D - y_C) \cdot \vec{j} + (z_D - z_C) \cdot \vec{k}, \\ \vec{r}_{CD} &= (0-2) \cdot \vec{i} + (4-4) \cdot \vec{j} + (3-0) \cdot \vec{k} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}, \\ r_{CD} &= \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3,6056, \\ \vec{e}_{CD} &= \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}} = \frac{-2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{k}}{3,6056} = -0,5547 \cdot \vec{i} + 0,8320 \cdot \vec{k}.\end{aligned}$$

Vektorski zapisi sila su

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= F_1 \cdot \vec{e}_{AB} = 350 \cdot (-0,3714 \cdot \vec{i} + 0,7428 \cdot \vec{j} - 0,5571 \cdot \vec{k}), \\ \vec{F}_1 &= -130 \cdot \vec{i} + 260 \cdot \vec{j} - 195 \cdot \vec{k}; \\ \vec{F}_2 &= F_2 \cdot \vec{e}_{CD} = 490 \cdot (-0,5547 \cdot \vec{i} + 0,8320 \cdot \vec{k}) = -271,8 \cdot \vec{i} + 407,7 \cdot \vec{k}.\end{aligned}$$

Glavni vektor sila je

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= (-130 \cdot \vec{i} + 260 \cdot \vec{j} - 195 \cdot \vec{k}) + (-271,8 \cdot \vec{i} + 407,7 \cdot \vec{k}), \\ \vec{F}_R &= -401,8 \cdot \vec{i} + 260 \cdot \vec{j} + 212,7 \cdot \vec{k}, \\ F_R &= \sqrt{(-401,8)^2 + 260^2 + 212,7^2} = 523,7 \text{ N}.\end{aligned}$$

Glavni moment sustava sila u odnosu na točku O računa se prema (5.14):

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}_1} + \vec{M}_O^{\vec{F}_2} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

gdje su

$$\begin{aligned}\vec{M}_O^{\vec{F}_1} &= \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ -130 & 260 & -195 \end{vmatrix}, \\ \vec{M}_O^{\vec{F}_1} &= (0 - 3 \cdot 260) \cdot \vec{i} - [2 \cdot (-195) - 3 \cdot (-130)] \cdot \vec{j} + (2 \cdot 260 - 0) \cdot \vec{k}, \\ \vec{M}_O^{\vec{F}_1} &= -780 \cdot \vec{i} + 520 \cdot \vec{k};\end{aligned}$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_2} = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C & y_C & z_C \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ -271,8 & 0 & 407,7 \end{vmatrix},$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_2} = (4 \cdot 407,7 - 0) \cdot \vec{i} - (2 \cdot 407,7 - 0) \cdot \vec{j} + [0 - 4 \cdot (-271,8)] \cdot \vec{k},$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_2} = 1630,8 \cdot \vec{i} - 815,4 \cdot \vec{j} + 1087,2 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_1 = 220 \cdot \vec{k}; \quad \vec{M}_2 = -300 \cdot \vec{i}.$$

Glavni moment sila u odnosu na ishodišnu točku O jest:

$$\vec{M}_O = (-780 + 1630,8 - 300) \cdot \vec{i} + (-815,4) \cdot \vec{j} + (520 + 1087,2 + 220) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{M}_O = 550,8 \cdot \vec{i} - 815,4 \cdot \vec{j} + 1827,2 \cdot \vec{k},$$

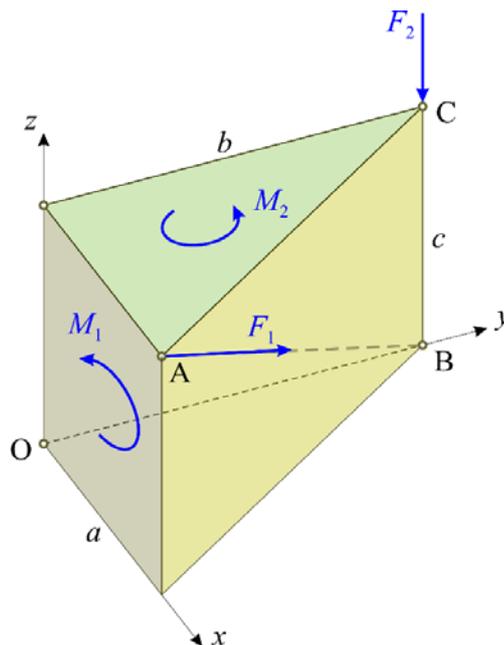
$$M_O = \sqrt{550,8^2 + (-815,4)^2 + 1827,2^2} = 2075 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Dakle, zadani prostorni sustav sila reducira se u ishodišnoj točki na dinamiku koju čine glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment \vec{M}_O sustava sila u odnosu na točku O:

$$\vec{F}_R = -401,8 \cdot \vec{i} + 260 \cdot \vec{j} + 212,7 \cdot \vec{k}; \quad \vec{M}_O = 550,8 \cdot \vec{i} - 815,4 \cdot \vec{j} + 1827,2 \cdot \vec{k}.$$

Primjer 5.3.

Na tijelo oblika prizme djeluje opći sustav sila u prostoru (slika 5.12.). Potrebno je reducirati zadani sustav sila na ishodišnu točku O. Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 4 \text{ m}$, $F_1 = 8 \text{ kN}$, $F_2 = 6 \text{ kN}$, $M_1 = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika 5.12. Primjer 5.3.

Rješenje:

Redukcijom se dobije glavni vektor sila \vec{F}_R i glavni moment sustava sila \vec{M}_O u odnosu na ishodišnu točku O.

Glavni vektor sila \vec{F}_R dobije se prema (5.11):

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

gdje se sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 u vektorskom zapisu dobiju s pomoću jediničnih vektora:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_{AB} \quad \vec{F}_2 = -F_2 \cdot \vec{k}.$$

Koordinate točaka su A(2; 0; 4), B(0; 3; 0) i C(0; 3; 4), pa je:

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}}, \quad \vec{r}_{AB} = (0-2) \cdot \vec{i} + (3-0) \cdot \vec{j} + (0-4) \cdot \vec{k} = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k},$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5,3852,$$

$$\vec{e}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - 4 \cdot \vec{k}}{5,3852} = -0,3714 \cdot \vec{i} + 0,5571 \cdot \vec{j} - 0,7428 \vec{k}.$$

Vektorski zapisi sila su

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{e}_{AB} = 8 \cdot \vec{e}_{AB} = -2,971 \cdot \vec{i} + 4,457 \cdot \vec{j} - 5,942 \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_2 = -6 \cdot \vec{k}.$$

Glavni vektor sila je

$$\vec{F}_R = -2,971 \cdot \vec{i} + 4,457 \cdot \vec{j} + (-5,942 - 6) \cdot \vec{k} = -2,971 \cdot \vec{i} + 4,457 \cdot \vec{j} - 11,942 \cdot \vec{k}.$$

Glavni moment \vec{M}_O u odnosu na ishodišnu točku dobije se prema (5.14):

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}_1} + \vec{M}_O^{\vec{F}_2} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

gdje su

$$\vec{M}_1 = -M_1 \cdot \vec{j} = -10 \cdot \vec{j}; \quad \vec{M}_2 = M_2 \cdot \vec{k} = 12 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_1} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ -2,971 & 4,457 & -5,942 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_1} = -17,828 \cdot \vec{i} + 8,914 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_2} = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C & y_C & z_C \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -18 \cdot \vec{i}.$$

Glavni moment zadanog sustava sila u odnosu na ishodišnu točku jest:

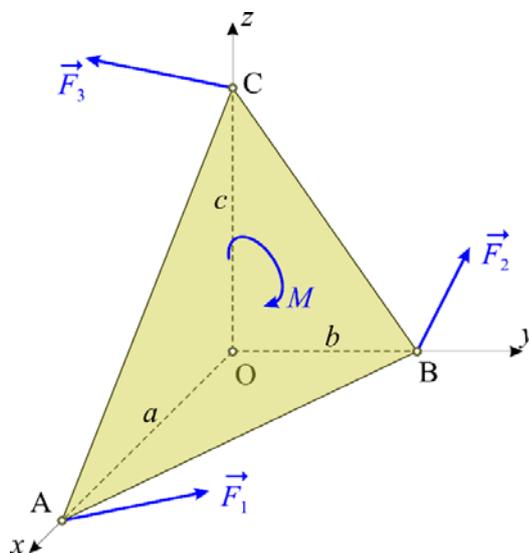
$$\vec{M}_O = (-17,828 - 18) \cdot \vec{i} + (-10) \cdot \vec{j} + (12 + 8,914) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = -35,828 \cdot \vec{i} - 10 \cdot \vec{j} + 20,914 \cdot \vec{k}.$$

Primjer 5.4.

Na trokutnu ploču djeluje opći sustav sila u prostoru (slika 5.13.). Spreg sila momenta M djeluje u ravnini ABC. Reducirati zadani sustav sila na ishodišnu točku O.

Zadano je: $a = 2$ m, $b = 1$ m, $c = 2$ m, $\vec{F}_1 = 5 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ kN; $\vec{F}_2 = 5 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}$ kN; $\vec{F}_3 = 12 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ kN; $M = 10 \cdot \sqrt{6}$ kN·m.



Slika 5.13. Primjer 5.4.

Rješenje:

Glavni vektor sila dobije se prema (5.11):

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

$$\vec{F}_R = (5 + 0 + 12) \cdot \vec{i} + (10 + 5 - 6) \cdot \vec{j} + (2 + 6 + 2) \cdot \vec{k} = 17 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j} + 10 \cdot \vec{k},$$

$$F_R = \sqrt{17^2 + 9^2 + 10^2} = 21,68 \text{ kN}.$$

Glavni moment sustava sila \vec{M}_O u odnosu na točku O jednak je

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}_1} + \vec{M}_O^{\vec{F}_2} + \vec{M}_O^{\vec{F}_3} + \vec{M},$$

gdje su

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_1} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot \vec{j} + 20 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_2} = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B & y_B & z_B \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \vec{i};$$

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_3} = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_C & y_C & z_C \\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 12 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot \vec{i} + 24 \cdot \vec{j}.$$

Vektor \vec{M} dobijemo množenjem intenziteta M jediničnim vektorom koji ima pravac i smjer vektora \vec{M} , tj. koji je okomit na ravninu ABC. Neka je to vektor \vec{n}_0 , koji se dobije dijeljenjem bilo kojeg vektora \vec{n} paralelnoga vektoru \vec{n}_0 s intenzitetom tog vektora.

Vektor \vec{n} možemo dobiti vektorskim množenjem bilo kojih dvaju vektora koji leže u ravnini ABC.

Neka su to upravo vektori \vec{AB} i \vec{AC} , pri čemu na prvom mjestu u tom vektorskom produktu mora biti vektor \vec{AC} , kako bi se smjer vektora \vec{n} poklopio sa smjerom vektora \vec{M} :

$$\vec{AC} = (x_C - x_A) \cdot \vec{i} + (y_C - y_A) \cdot \vec{j} + (z_C - z_A) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{AC} = (0 - 2) \cdot \vec{i} + (0 - 0) \cdot \vec{j} + (2 - 0) \cdot \vec{k} = -2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{AB} = (x_C - x_B) \cdot \vec{i} + (y_C - y_B) \cdot \vec{j} + (z_C - z_B) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{AB} = (0 - 2) \cdot \vec{i} + (1 - 0) \cdot \vec{j} + (0 - 0) \cdot \vec{k} = -2 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k},$$

$$|\vec{n}| = n = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}.$$

Slijedi:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{n} = -\frac{2}{2 \cdot \sqrt{6}} \cdot \vec{i} - \frac{4}{2 \cdot \sqrt{6}} \cdot \vec{j} - \frac{2}{2 \cdot \sqrt{6}} \cdot \vec{k} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \vec{k},$$

pa je vektor momenta sprega sila:

$$\vec{M} = M \cdot \vec{n}_0 = 10 \cdot \sqrt{6} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \vec{i} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \vec{k} \right) = -10 \cdot \vec{i} - 20 \cdot \vec{j} - 10 \cdot \vec{k}.$$

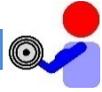
Glavni moment sustava sila u odnosu na točku O jest:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^{\vec{F}_1} + \vec{M}_O^{\vec{F}_2} + \vec{M}_O^{\vec{F}_3} + \vec{M},$$

$$\vec{M}_O = (0+6+12-10) \cdot \vec{i} + (-4+0+24-20) \cdot \vec{j} + (20+0+0-10) \cdot \vec{k},$$

$$M_O = \sqrt{8^2 + 10^2} = 12,8 \text{ kN} \cdot \text{m}; \quad \vec{M}_O = 8 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{k}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 5.1. Zadani opći sustav sila u prostoru:

$$\vec{F}_1 = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + \vec{k} \quad \text{s hvatištem u } A(3; 3; 1);$$

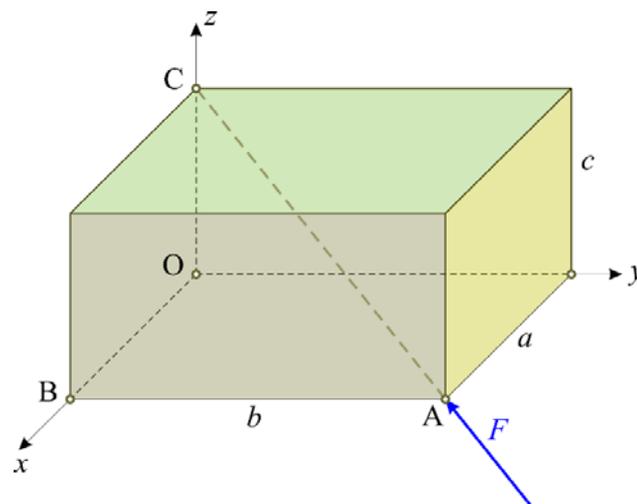
$$\vec{F}_2 = 5 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} \quad \text{s hvatištem u } B(-1; -1; -1);$$

$$\vec{F}_3 = -1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} \quad \text{s hvatištem u } C(2; -1; 1);$$

$$\vec{M} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$$

reducirati na ishodišnu točku O (0; 0; 0).

Zadatak 5.2. Zadan je intenzitet sile $F = 100 \text{ N}$ s hvatištem u točki A. Pravac djelovanja sile prolazi točkom C (slika Z.5.2.). Valja odrediti silu i moment u točki B koji bi imali isto djelovanje kao i zadana sila. Zadano: $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$.



Slika Z.5.2. *Zadatak 5.2.*

5.7. UVJETI RAVNOTEŽE OPĆEG SUSTAVA SILA U PROSTORU

Kao što smo pokazali u poglavlju 5.6., opći sustav sila u prostoru možemo reducirati na po volji odabranu točku O i zamijeniti glavnim vektorom sila \vec{F}_R i glavnim vektorom momenata \vec{M}_O , koji su analitički određeni jednakostima (5.11). Da bi proizvoljni sustav sila u prostoru bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da jednovremeno bude i $\vec{F}_R = \vec{0}$ i $\vec{M}_O = \vec{0}$. Ti vektori mogu biti nulti vektori, tada i samo tada, kada su im sve projekcije na koordinatne osi jednake nuli, tj. kada je:

$$\begin{aligned}
F_{Ry} &= \sum F_{ix} = 0; \\
F_{Rx} &= \sum F_{iy} = 0; \\
F_{Rz} &= \sum F_{iz} = 0; \\
M_{Ox} &= \sum M_{Ox}^{\vec{F}_i} + \sum M_{jx} = 0; \\
M_{Oy} &= \sum M_{Oy}^{\vec{F}_i} + \sum M_{jy} = 0; \\
M_{Oz} &= \sum M_{Oz}^{\vec{F}_i} + \sum M_{jz} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

odnosno, kazano riječima: za ravnotežu proizvoljnog prostornog sustava sila potrebno je i dovoljno da suma projekcija svih sila na svaku od triju koordinatnih osi bude jednaka nuli i da suma momenata tih sila za svaku od osi bude jednaka nuli.

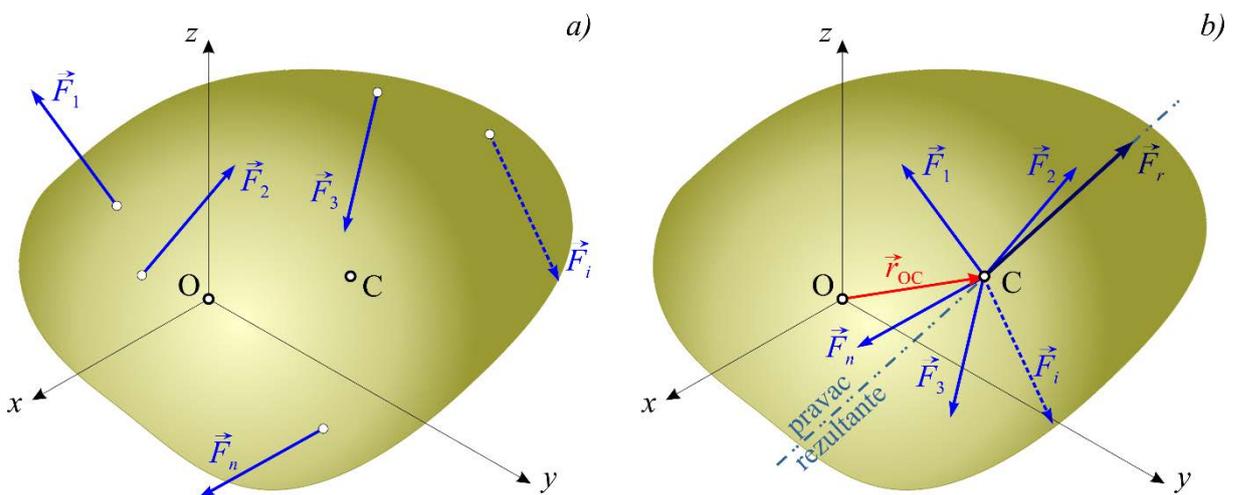
5.8. VARIGNONOV TEOREM O MOMENTU REZULTANTE ZA TOČKU

Ako se zadani sustav sila svodi samo na rezultantu, onda je moment rezultante za po volji odabranu točku jednak vektorskoj sumi momenata njezinih komponenata za tu istu točku.

Dokaz ovog teorema slijedi sa slike 5.14. Naime, svođenjem zadanog sustava sila na bilo koju točku na pravcu rezultante (npr. C), dobit ćemo u toj točki konkurentni sustav sila s rezultantom \vec{F}_r , pri čemu je glavni vektor momenata jednak nultom vektoru. Dalje je:

$$M_{O}^{\vec{F}_i} = \sum \vec{r}_{OC} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_r = M_{O}^{\vec{F}_r}.$$

Iz jednakosti ovih vektora slijedi i jednakost njihovih projekcija na po volji odabranu os.

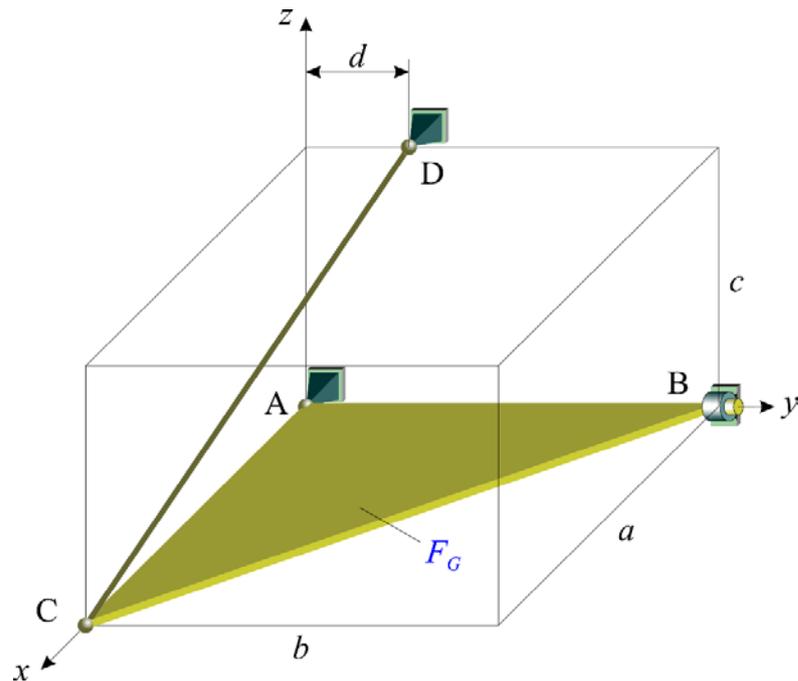


Slika 5.14. Uz Varignonov teorem: a) zadani sustav sila, b) sustav reduciran na rezultantu.

Primjer 5.5.

Trokutna ploča težine \vec{F}_G vezana je za podlogu sfernim osloncem u A, cilindričnim osloncem u B te užetom CD (slika 5.15.). Valja odrediti reakcije svih veza.

Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $d = 0,75 \text{ m}$, $F_G = 8 \text{ kN}$.

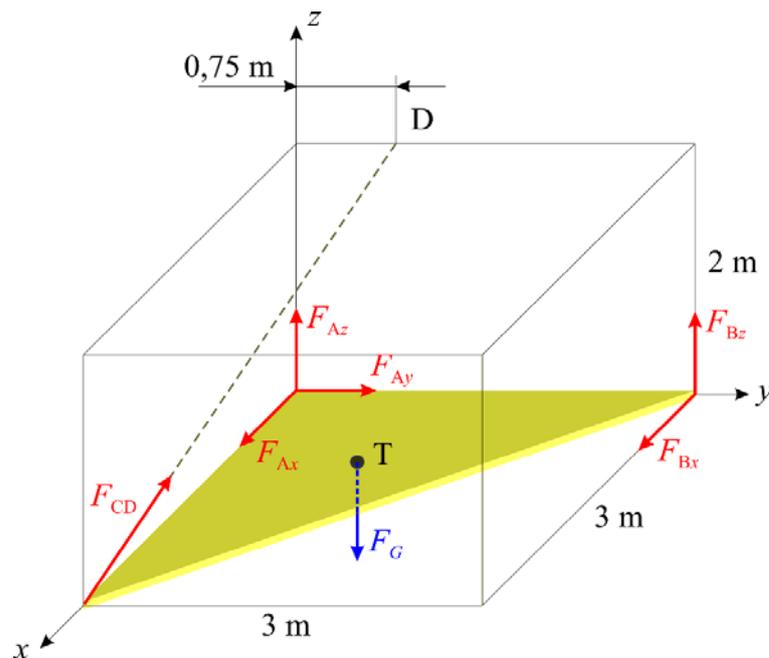


Slika 5.15. *Primjer 5.5.*

Rješenje:

Ploču treba osloboditi od veza, a njihov utjecaj nadomjestiti reakcijama veza.

Umjesto sfernog oslonca u A dodaju se tri komponente reakcijske sile F_{Ax} , F_{Ay} i F_{Az} ; umjesto cilindričnog oslonca u B dvije komponente reakcijske sile F_{Bx} i F_{Bz} ; umjesto užeta dodaje se sila iznosa F_{CD} kojom uže djeluje na ploču (slika 5.16.).



Slika 5.16. *Primjer 5.5.: Trokutna ploča oslobođena od veza*

Vektorski zapisi svih sila koje djeluju na ploču jesu:

$$\vec{F}_G = -8 \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_A = F_{Ax} \cdot \vec{i} + F_{Ay} \cdot \vec{j} + F_{Az} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_B = F_{Bx} \cdot \vec{i} + F_{Bz} \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{e}_{CD}.$$

Koordinate točkaca C i D su $C(3; 0; 0)$, $D(0; 0,75; 2)$, pa je jedinični vektor \vec{e}_{CD} :

$$\vec{e}_{CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}}, \quad \vec{r}_{CD} = (x_D - x_C) \cdot \vec{i} + (y_D - y_C) \cdot \vec{j} + (z_D - z_C) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{CD} = (0-3) \cdot \vec{i} + (0,75-0) \cdot \vec{j} + (2-0) \cdot \vec{k} = -3 \cdot \vec{i} + 0,75 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k},$$

$$r_{CD} = \sqrt{(-3)^2 + 0,75^2 + 2^2} = 3,683,$$

$$\vec{e}_{CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}} = \frac{-3 \cdot \vec{i} + 0,75 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}}{3,683} = -0,815 \cdot \vec{i} + 0,204 \cdot \vec{j} + 0,543 \cdot \vec{k}.$$

Vektorski zapis sile \vec{F}_{CD} je

$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{e}_{CD} = F_{CD} \cdot (-0,815 \cdot \vec{i} + 0,204 \cdot \vec{j} + 0,543 \cdot \vec{k}),$$

$$\vec{F}_{CD} = -0,815 \cdot F_{CD} \cdot \vec{i} + 0,204 \cdot F_{CD} \cdot \vec{j} + 0,543 \cdot F_{CD} \cdot \vec{k}.$$

Momenti pojedinih sila u odnosu na točku A jesu:

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_A} = \vec{0};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_B} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ F_{Bx} & 0 & F_{Bz} \end{vmatrix} = 3 \cdot F_{Bz} \cdot \vec{i} - 3 \cdot F_{Bx} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_{CD}} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3,0 & 0 & 0 \\ -0,815F_{CD} & 0,204F_{CD} & 0,543F_{CD} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_{CD}} = -1,630 \cdot F_{CD} \cdot \vec{j} + 0,611 \cdot F_{CD} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_G} = \vec{r}_{AT} \times \vec{F}_G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -8 \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}.$$

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Bx} - 0,815 \cdot F_{CD} = 0;$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + 0,204 \cdot F_{CD} = 0;$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} + F_{Bz} + 0,543F_{CD} - 8 = 0;$$

$$\begin{aligned}\sum M_x = 0: & \quad 3 \cdot F_{Bz} - 8 = 0; \\ \sum M_y = 0: & \quad -1,630 \cdot F_{CD} + 8 = 0; \\ \sum M_z = 0: & \quad -3 \cdot F_{Bx} + 0,611 \cdot F_{CD} = 0.\end{aligned}$$

Iz gornjih jednačbi dobiju se tražene reakcije veza:

$$F_{Ax} = 3,0 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = -1,0 \text{ kN}, \quad F_{Az} = 2,7 \text{ kN},$$

$$F_A = \sqrt{3,0^2 + (-1,0)^2 + 2,7^2} = 4,14 \text{ kN},$$

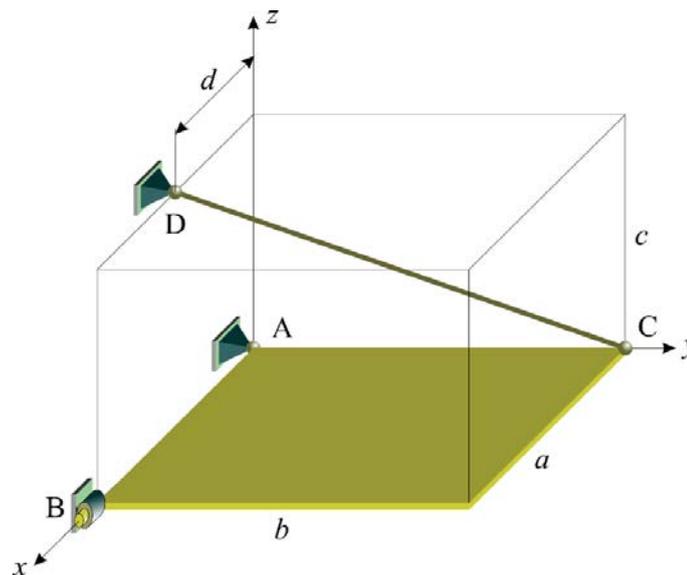
$$F_{Bx} = 1,0 \text{ kN}, \quad F_{Bz} = 2,7 \text{ kN},$$

$$F_B = \sqrt{1,0^2 + 2,7^2} = 2,88 \text{ kN},$$

$$F_{CD} = 4,91 \text{ kN}.$$

Primjer 5.6.

Pravokutna ploča opterećena je vlastitom težinom te vezana za podlogu sfernim osloncem u A, cilindričnim osloncem u B i užetom CD (slika 5.17.). Valja odrediti reakcije u osloncima A i B te silu u užetu CD ako je zadano: $a = 3 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $d = 1,5 \text{ m}$, $F_G = 12 \text{ kN}$.

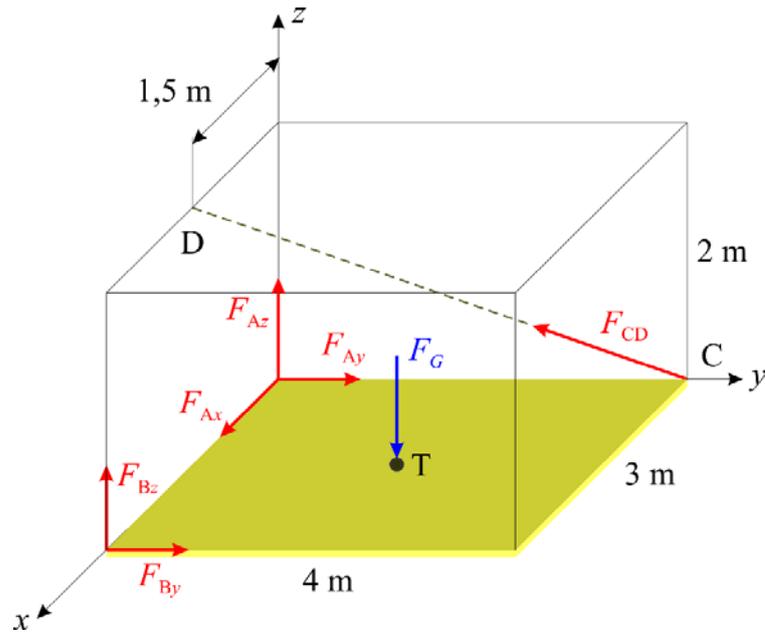


Slika 5.17. *Primjer 5.6.*

Rješenje:

Ploču treba osloboditi od veza, a njihov utjecaj nadomjestiti reakcijama veza.

Umjesto sfernog oslonca u A dodaju se tri komponente reakcijske sile F_{Ax} , F_{Ay} i F_{Az} ; umjesto cilindričnog oslonca u B dvije komponente reakcijske sile F_{Bx} i F_{Bz} ; umjesto užeta dodaje se sila iznosa F_{CD} kojom uže djeluje na ploču (slika 5.18.).



Slika 5.18. *Primjer 5.6.*: Pravokutna ploča kao slobodno tijelo

Vektorski zapisi sila koje djeluju na ploču jesu:

$$\vec{F}_G = -12 \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_A = F_{Ax} \cdot \vec{i} + F_{Ay} \cdot \vec{j} + F_{Az} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_B = F_{By} \cdot \vec{j} + F_{Bz} \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{e}_{CD}.$$

Koordinate točaka C i D su $C(0; 4; 0)$ i $D(1,5; 0; 2)$, pa je jedinični vektor \vec{e}_{CD} :

$$\vec{e}_{CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}}, \quad \vec{r}_{CD} = (x_D - x_C) \cdot \vec{i} + (y_D - y_C) \cdot \vec{j} + (z_D - z_C) \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_{CD} = 1,5 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}, \quad r_{CD} = \sqrt{1,5^2 + (-4)^2 + 2^2} = 4,717,$$

$$\vec{e}_{CD} = \frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}} = \frac{1,5 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}}{4,717} = 0,318 \cdot \vec{i} - 0,848 \cdot \vec{j} + 0,424 \cdot \vec{k}.$$

Vektorski zapis sile \vec{F}_{CD} je

$$\vec{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \vec{e}_{CD} = F_{CD} \cdot (0,318 \cdot \vec{i} - 0,848 \cdot \vec{j} + 0,424 \cdot \vec{k}),$$

$$\vec{F}_{CD} = 0,318 \cdot F_{CD} \cdot \vec{i} - 0,848 \cdot F_{CD} \cdot \vec{j} + 0,424 \cdot F_{CD} \cdot \vec{k}.$$

Momenti svih sila u odnosu na točku A dobiju se prema:

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_A} = \vec{0};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_B} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & F_{By} & F_{Bz} \end{vmatrix} = -3 \cdot F_{Bz} \cdot \vec{j} + 3 \cdot F_{By} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_{CD}} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_{CD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ 0,318 \cdot F_{CD} & -0,848 \cdot F_{CD} & 0,424 \cdot F_{CD} \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_{CD}} = 1,696 \cdot F_{CD} \cdot \vec{i} - 1,272 \cdot F_{CD} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_G} = \vec{r}_{AT} \times \vec{F}_G = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1,5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = -24 \cdot \vec{i} + 18 \cdot \vec{j}.$$

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + 0,318 \cdot F_{CD} = 0;$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_{By} - 0,848 \cdot F_{CD} = 0;$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} + F_{Bz} + 0,424 \cdot F_{CD} - 12 = 0;$$

$$\sum M_x = 0: \quad 1,696 \cdot F_{CD} - 24 = 0;$$

$$\sum M_y = 0: \quad -3 \cdot F_{Bz} + 18 = 0;$$

$$\sum M_z = 0: \quad 3 \cdot F_{By} - 1,272 \cdot F_{CD} = 0.$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se tražene reakcije veza:

$$F_{Ax} = -4,5 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 6 \text{ kN}, \quad F_{Az} = 0 \text{ kN}, \quad F_A = \sqrt{(-4,5)^2 + 6^2 + 0^2} = 7,5 \text{ kN};$$

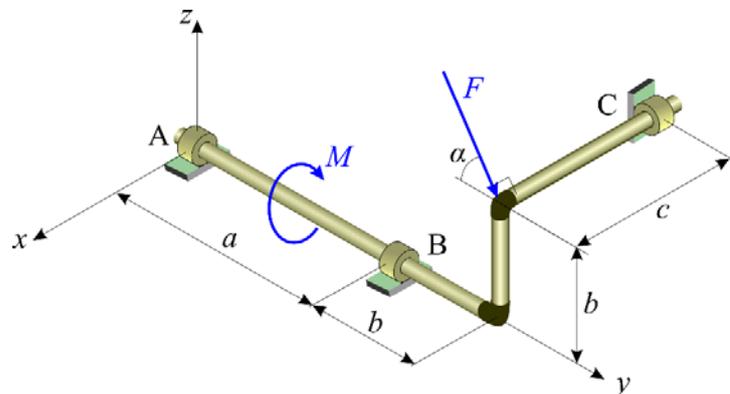
$$F_{By} = 6 \text{ kN}, \quad F_{Bz} = 6 \text{ kN}, \quad F_B = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,485 \text{ kN};$$

$$F_{CD} = 14,151 \text{ kN}.$$

Primjer 5.7.

Cijev opterećena koncentriranom silom i momentom vezana je za podlogu cilindričnim osloncima u A, B i C (slika 5.19.). Valja odrediti reakcije oslonaca.

Zadano je: $a = 0,8 \text{ m}$, $b = 0,4 \text{ m}$, $c = 0,6 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $F = 5 \text{ kN}$, $M = 0,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

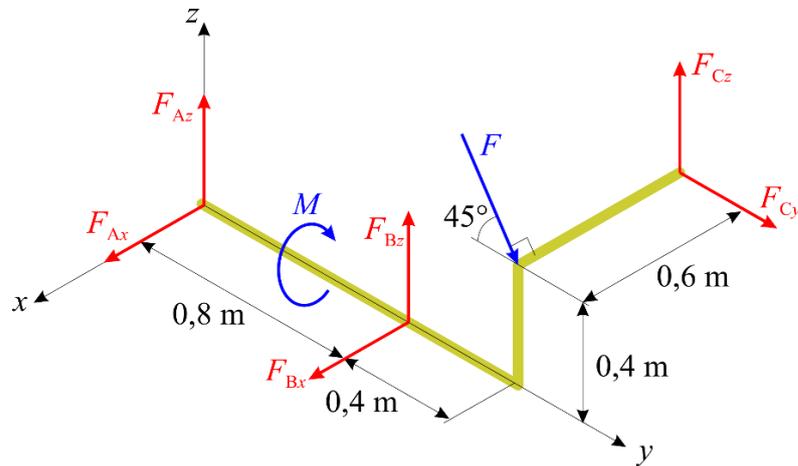


Slika 5.19. *Primjer 5.7.*

Rješenje:

Cijev treba osloboditi od veza, a njihov utjecaj nadomjestiti reakcijama veza.

Budući da su svi oslonci cilindrični, umjesto oslonca u A dodaju se dvije komponente reakcijske sile F_{Ax} i F_{Az} , umjesto oslonca u B dvije komponente reakcijske sile F_{Bx} i F_{Bz} te umjesto oslonca u C dvije komponente reakcijske sile F_{Cy} i F_{Cz} (slika 5.20.).



Slika 5.20. *Primjer 5.7.*: Cijev kao slobodno tijelo

Vektorski zapisi svih sila i sprega momenta M , koji djeluju na cijev jesu:

$$\vec{F} = F \cdot \cos 45^\circ \cdot \vec{j} - F \cdot \sin 45^\circ \cdot \vec{k} = 5 \cdot 0,707 \cdot \vec{j} - 5 \cdot 0,707 \cdot \vec{k} = 3,535 \cdot \vec{j} - 3,535 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M} = -M \cdot \vec{j} = -0,6 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{F}_A = F_{Ax} \cdot \vec{i} + F_{Az} \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_B = F_{Bx} \cdot \vec{i} + F_{Bz} \cdot \vec{k}; \quad \vec{F}_C = F_{Cy} \cdot \vec{j} + F_{Cz} \cdot \vec{k}.$$

Momenti svih sila u odnosu na točku A jesu:

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{r}_{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1,2 & 0,4 \\ 0 & 3,535 & -3,535 \end{vmatrix} = -5,656 \cdot \vec{i};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_A} = \vec{0};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_B} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0,8 & 0 \\ F_{Bx} & 0 & F_{Bz} \end{vmatrix} = 0,8 \cdot F_{Bz} \cdot \vec{i} - 0,8 \cdot F_{Bx} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_C} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,6 & 1,2 & 0,4 \\ 0 & F_{Cy} & F_{Cz} \end{vmatrix} = (1,2 \cdot F_{Cz} - 0,4 \cdot F_{Cy}) \cdot \vec{i} + 0,6 \cdot F_{Cz} \cdot \vec{j} - 0,6 \cdot F_{Cy} \cdot \vec{k}.$$

Uvjeti ravnoteže glase:

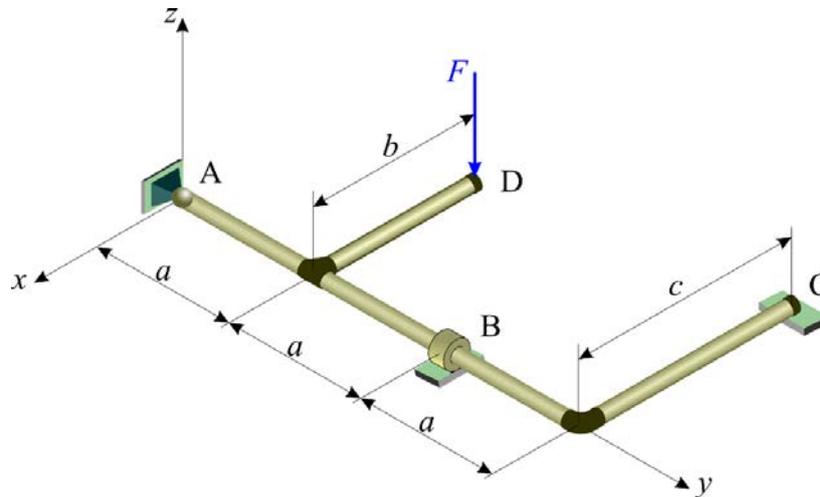
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0; \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Cy} + 3,535 = 0; \\ \sum F_z = 0: & \quad F_{Az} + F_{Bz} + F_{Cz} - 3,535 = 0; \\ \sum M_x = 0: & \quad 0,8 \cdot F_{Bz} - 0,4 \cdot F_{Cy} + 1,2 \cdot F_{Cz} - 5,656 = 0; \\ \sum M_y = 0: & \quad 0,6 \cdot F_{Cz} - 0,6 = 0; \\ \sum M_z = 0: & \quad -0,8 \cdot F_{Bx} - 0,6 \cdot F_{Cy} = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjeg sustava jednačbi dobije se:

$$\begin{aligned} F_{Ax} = -2,651 \text{ kN}, \quad F_{Az} = -1,268 \text{ kN}, \quad F_A = \sqrt{(-2,651)^2 + (-1,268)^2} = 2,939 \text{ kN}; \\ F_{Bx} = 2,651 \text{ kN}, \quad F_{Bz} = 3,803 \text{ kN}, \quad F_B = \sqrt{2,651^2 + 3,803^2} = 4,636 \text{ kN}; \\ F_{Cy} = -3,535 \text{ kN}, \quad F_{Cz} = 1 \text{ kN}, \quad F_C = \sqrt{(-3,535)^2 + 1^2} = 3,674 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Primjer 5.8.

Cijev opterećena koncentriranom silom vezana je za podlogu sfernim osloncem u A i cilindričnim osloncem u B. U točki C cijev je naslonjena na glatku podlogu (slika 5.21.).



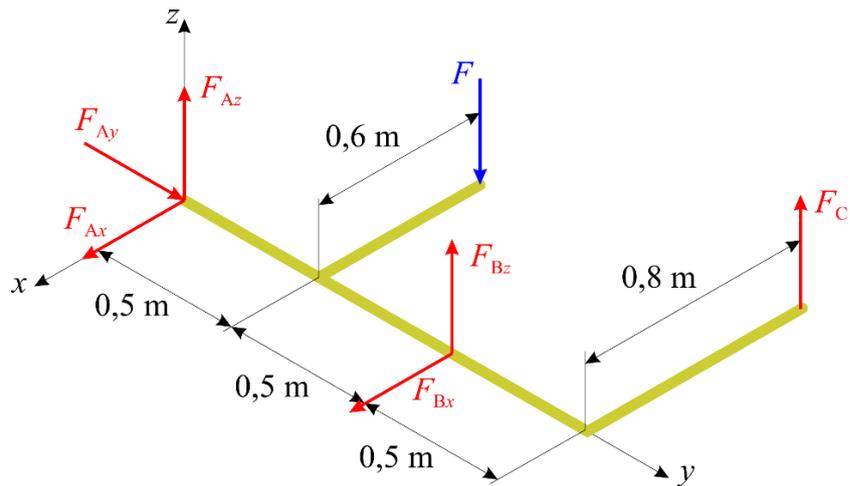
Slika 5.21. *Primjer 5.8.*

Valja odrediti reakcije oslonaca ako je zadano: $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 0,6 \text{ m}$, $c = 0,8 \text{ m}$, $F = 1,5 \text{ kN}$.

Rješenje:

Cijev treba osloboditi od veza, a njihov utjecaj nadomjestiti reakcijama veza.

Umjesto sfernog oslonca u A dodat ćemo tri komponente reakcijske sile: F_{Ax} , F_{Ay} i F_{Az} ; umjesto cilindričnog oslonca u B dvije komponente reakcijske sile: F_{Bx} i F_{Bz} , a glatku podlogu u C zamijenit ćemo reakcijskom silom F_C (slika 5.22.).



Slika 5.22. *Primjer 5.8.: Cijev kao slobodno tijelo*

Vektorski zapisi svih sila koje djeluju na cijev jesu:

$$\vec{F} = -F \cdot \vec{k} = -1,5 \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_A = F_{Ax} \cdot \vec{i} + F_{Ay} \cdot \vec{j} + F_{Az} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_B = F_{Bx} \cdot \vec{i} + F_{Bz} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{F}_C = F_C \cdot \vec{k}.$$

Momenti sila u odnosu na točku A jesu:

$$\vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{r}_{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,6 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 \end{vmatrix} = -0,75 \cdot \vec{i} - 0,9 \cdot \vec{j};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_A} = \vec{0};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_B} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ F_{Bx} & 0 & F_{Bz} \end{vmatrix} = F_{Bz} \cdot \vec{i} - F_{Bx} \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M}_A^{\vec{F}_C} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,8 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & F_C \end{vmatrix} = 1,5F_C \cdot \vec{i} + 0,8F_C \cdot \vec{j}.$$

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{Bx} = 0;$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} = 0;$$

$$\sum F_z = 0: \quad F_{Az} + F_{Bz} + F_C - 1,5 = 0;$$

$$\sum M_x = 0: \quad F_{Bz} + 1,5 \cdot F_C - 0,75 = 0;$$

$$\sum M_y = 0: \quad 0,8 \cdot F_C - 0,9 = 0;$$

$$\sum M_z = 0: \quad -F_{Bx} = 0.$$

Iz gornjeg sustava jednažbi dobije se:

$$F_{Ax} = 0 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 0 \text{ kN}, \quad F_{Az} = -1,313 \text{ kN}, \quad F_A = 1,313 \text{ kN};$$

$$F_{Bx} = 0 \text{ kN}, \quad F_{Bz} = -0,938 \text{ kN}, \quad F_B = 0,938 \text{ kN};$$

$$F_C = 1,125 \text{ kN}.$$

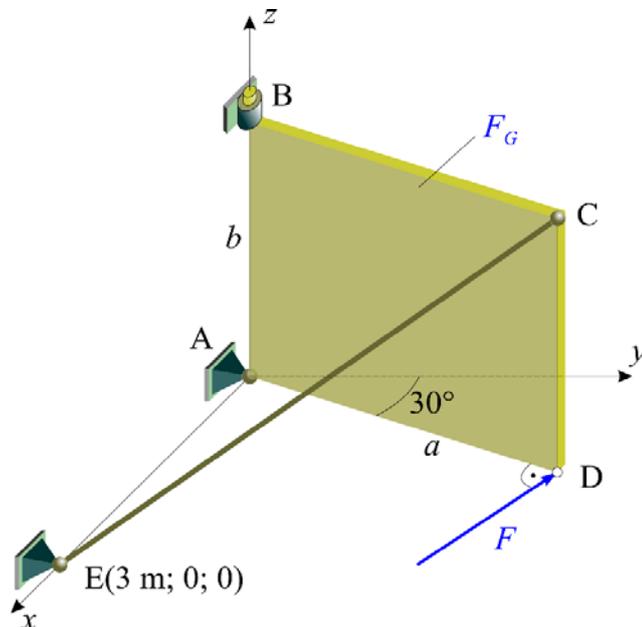
ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 5.3. Pravokutna ploča ABCD, stranica a i b te težine F_G , učvršćena je za podlogu sfernim zglobovima u A, cilindričnim u B i štapom CE zanemarive težine.

Sila \vec{F} djeluje u vrhu D okomito na ravninu ploče (slika Z.5.3.).

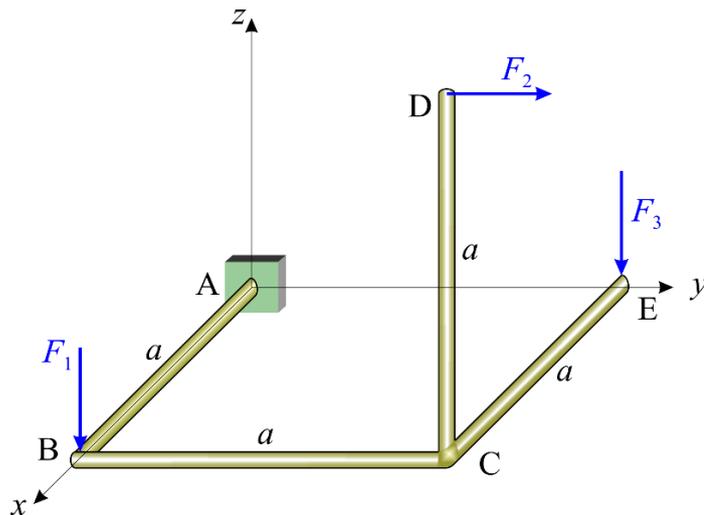
Valja odrediti reakcije oslonaca A i B te silu u štapu CE ako je zadano: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F_G = 200 \text{ N}$, $F = 200 \text{ N}$.



Slika Z.5.3. *Zadatak 5.3.*

Zadatak 5.4. Potrebno je odrediti komponente reakcije u uklještenju A konzole opterećene trima koncentriranim silama (slika Z.5.4.).

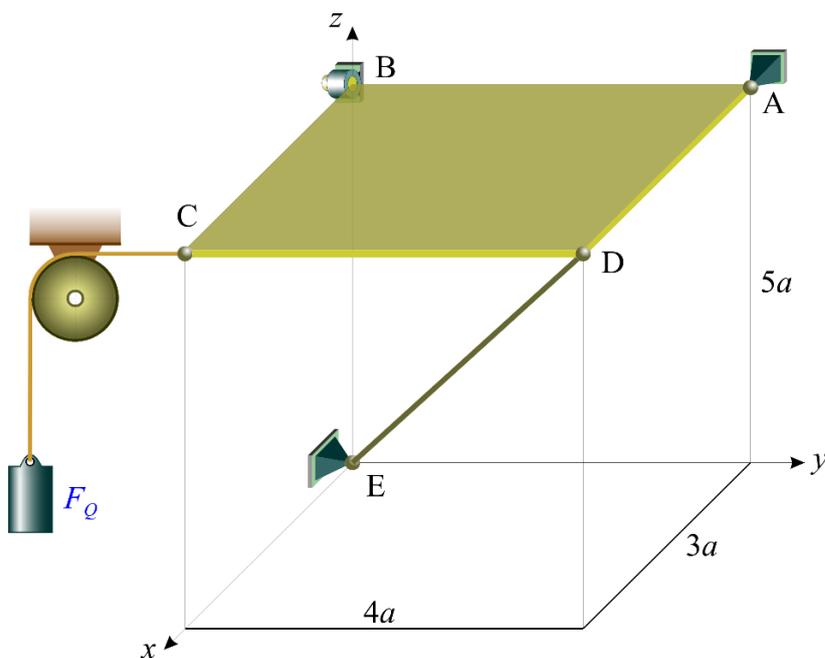
Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $F_1 = 300 \text{ N}$, $F_2 = 200 \text{ N}$, $F_3 = 400 \text{ N}$.



Slika Z.5.4. *Zadatak 5.4.*

Zadatak 5.5. Homogena pravokutna ploča težine F_G vezana je u A sfernim, a u B cilindričnim zglobovima. Ploča se u ravnotežnom stanju održava pomoću štapa DE. Za kraj C ploče vezano je užo, paralelno stranici AB, na kraju kojega visi teret težine $F_Q = 2 \cdot F_G$ (slika Z.5.5.).

Potrebno je odrediti reakcije veza ploče.

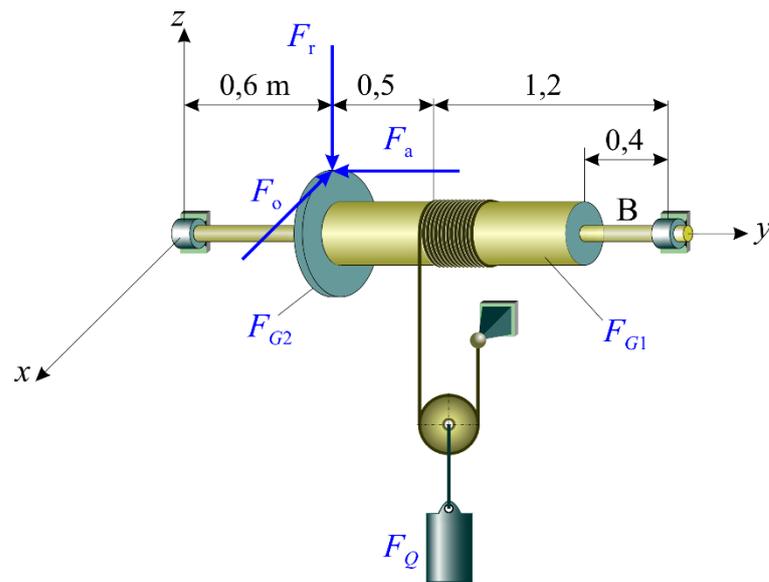


Slika Z.5.5. *Zadatak 5.5.*

Zadatak 5.6. Uređaj za podizanje tereta prikazan je na slici Z.5.6. Podizanje tereta ostvaruje se djelovanjem elektromotora preko pužnog vijka čije je djelovanje na pužno kolo prikazano silama F_o , F_r i F_a .

Valja odrediti silu F_o potrebnu za jednoliko podizanje tereta težine F_Q te reakcije u osloncima A i B.

Zadano: $F_r = 0,2 \cdot F_o$, $F_a = 0,6 \cdot F_o$, $F_{G1} = 1 \text{ kN}$, $F_{G2} = 0,5 \text{ kN}$, $F_Q = 50 \text{ kN}$, $r_2 = 2 \cdot r_1 = 40 \text{ cm}$.



Slika Z.5.6. *Zadatak 5.6.*

6. REŠETKASTI NOSAČI

Rešetkom nazivamo krutu konstrukciju sastavljenu od ravnih štapova, koji su međusobno spojeni zglobovima (cilindrični zglob). Mjesta spajanja štapova nazivamo *čvorovima* rešetke. Pri razmatranju rešetkastih nosača uvodimo sljedeće pretpostavke:

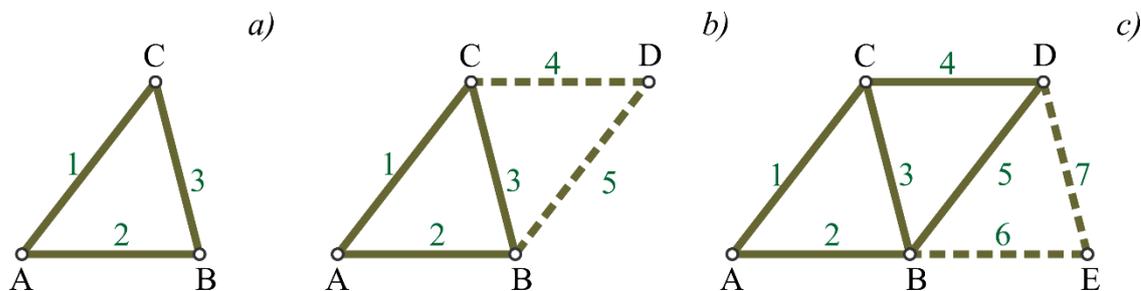
- vanjsko opterećenje djeluje samo u čvorovima rešetke;
- štapovi rešetke opterećeni su samo na istezanje (vlak) ili sabijanje (tlak);
- vlastita težina štapova u većini je slučajeva mala u odnosu na vanjsko opterećenje, pa se može zanemariti (ako se uzima u obzir, raspoređuje se u čvorne točke štapa);
- trenje u zglobovima može se zanemariti.

Ravninska rešetka jest rešetka kojoj svi štapovi i sve vanjsko opterećenje leže u jednoj te istoj ravnini.

Osnovni element ravninske rešetke je trokut sastavljen od triju štapova međusobno spojenih zglobovima (slika 6.1.a). Osnovni element **ABC** možemo proširivati dodajući dva nova štapa, **BD** i **CD**, koji se na postojeću rešetku vezuju u čvorovima **B** i **C**, a međusobno su povezani u čvoru **D**, pri čemu čvor **D** ne leži na pravcu BC (slika 6.1.b). Tako dobivena nova rešetka je kruta (ne mijenja oblik pod djelovanjem opterećenja).

Rešetku dalje proširujemo dodajući nova dva štapa, **BE** i **DE**, koji se vezuju na čvorove **B** i **D**, a međusobno su zglobovno spojeni u čvoru **E** (slika 6.1.c).

Na taj način dobivena rešetka naziva se jednostavna rešetka. Dakle, jednostavnu rešetku dobijemo dodajući na osnovni trokut dva nova štapa i jedan čvor i taj postupak ponavljamo.



Slika 6.1. a) osnovni element rešetkaste konstrukcije u ravnini, b) proširenje osnovnog elementa s dva nova štapa, c) dodatno proširenje s nova dva štapa.

Neka je broj štapova označen sa s , a broj čvorova s n . Kod jednostavne rešetke broj je štapova dakle:

$$s = 3 + 2 \cdot (n - 3).$$

Pri rješavanju rešetkastog nosača javljaju se sljedeće nepoznanice:

- s – broj nepoznatih sila u štapovima
- r – broj nepoznatih reakcija veza, za rešetku u ravnini je $r = 3$.

Dakle, broj nepoznanica je $s + r$, a broj uvjeta ravnoteže $2 \cdot n$ (za svaki čvor po dva uvjeta ravnoteže).

Ako je broj uvjeta ravnoteže jednak broju nepoznanica: $2 \cdot n = s + r$ ili za rešetku u ravlini $s = 2 \cdot n - 3$, rešetku nazivamo statički određenom (slika 6.2.a):

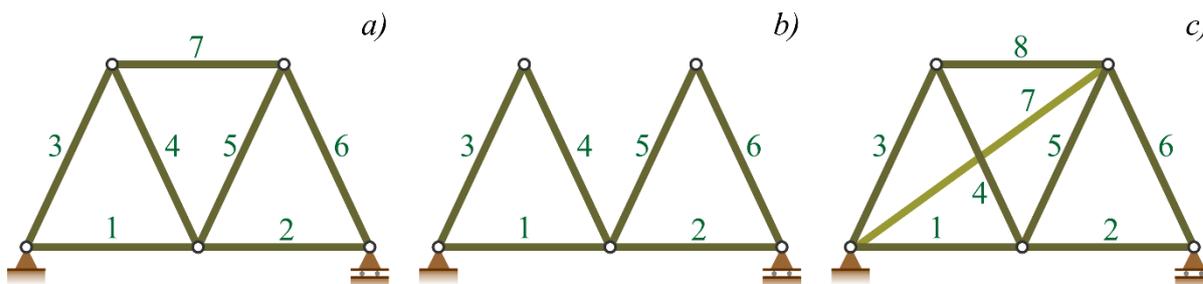
$$s = 7, \quad n = 5, \quad 7 = 2 \cdot 5 - 3, \quad 7 = 7.$$

Ako je $s < 2 \cdot n - 3$, rešetka je nestabilna (slika 6.2.b):

$$s = 6, \quad n = 5, \quad 6 < 2 \cdot 5 - 3, \quad 6 < 7.$$

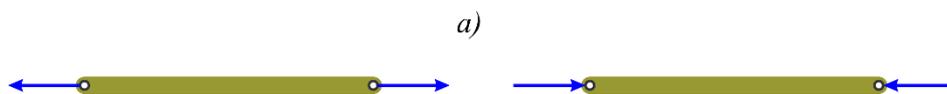
Ako je $s > 2 \cdot n - 3$, rešetka je statički neodređena (slika 6.2.c):

$$s = 8, \quad n = 5, \quad 8 > 2 \cdot 5 - 3, \quad 8 > 7.$$



Slika 6.2. a) statički određena rešetka, b) nestabilna rešetka, c) statički neodređena rešetka.

Štapovi rešetke opterećeni su na rastezanje (vlak – slika 6.3.a) ili sabijanje (tlak – slika 6.3.b).



Slika 6.3. Opterećenje štapa rešetke: a) vlačno opterećen, b) tlačno opterećen.

Pri analizi rešetke razmatramo:

- vanjsku ravnotežu – za određivanje reakcija u osloncima,
- unutarnju ravnotežu – za određivanje sila u štapovima.

Sile u štapovima određujemo:

- metodom čvorova,
- metodom presjeka.

6.1. METODA ČVOROVA

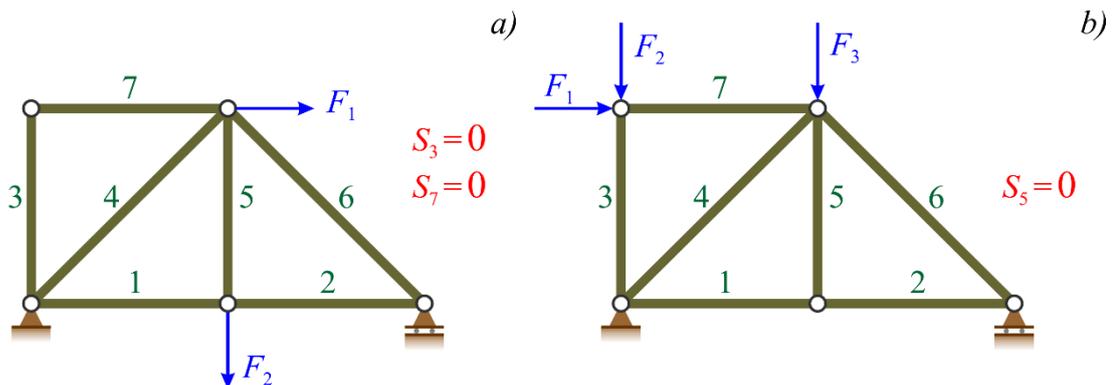
Pri određivanju sila u štapovima ovom metodom preporuča se sljedeći postupak:

- osloboditi rešetku od veza u osloncima,
- dodati reakcije veza,
- iz uvjeta ravnoteže za cijelu rešetku odrediti reakcije u osloncima,
- izrezati čvor na koji djeluje najmanje jedna poznata sila i najviše dvije nepoznate sile,
- pretpostaviti u svim štapovima vlačne sile (pozitivan predznak označava onda vlačne sile, a negativan tlačne),

- postaviti uvjete ravnoteže za promatrani čvor iz kojih određujemo nepoznate sile,
- nastaviti izrezivanjem čvorova u kojima je najmanje jedna poznata, a najviše dvije nepoznate sile, sve dok ne odredimo sve sile u štapovima.

Postupak se bitno pojednostavljuje ako neki štapovi nisu opterećeni, tj. ako je u njima sila jednaka nuli – tzv. nulti štapovi.

Ako se u čvoru sastaju samo dva štapa, a na čvor ne djeluju ni vanjske aktivne niti pasivne sile, sile u tim štapovima jednake su nuli (slika 6.4.a – štapovi 3 i 7).



Slika 6.4. Štapovi u kojima je sila jednaka nuli: a) zglob s dva štapa, b) zglob s tri štapa.

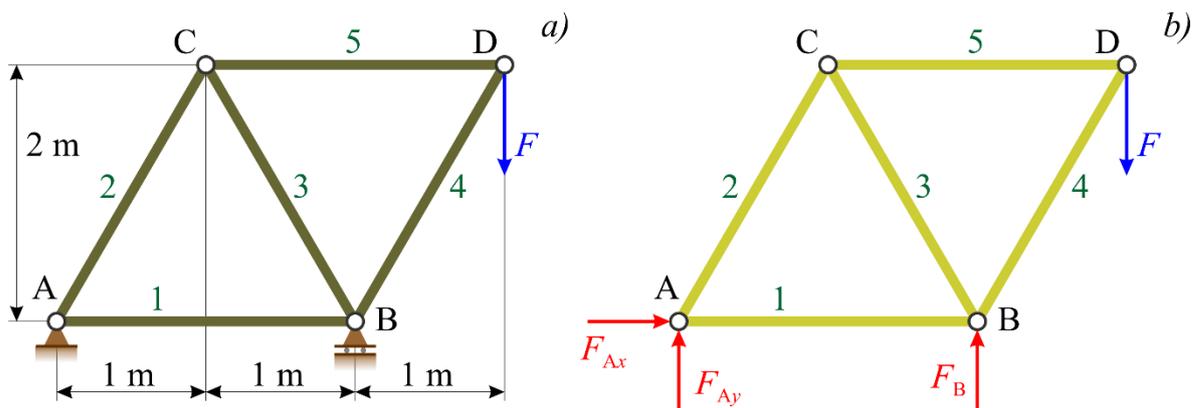
Ako se u čvoru sastaju tri štapa od kojih dva leže na istom pravcu, a na čvor ne djeluju nikakve vanjske sile niti reakcijske sile, tada je sila u trećem štapu jednaka nuli (slika 6.4.b – štap 5).

Primjer 6.1.

Rešetkasti nosač opterećen je koncentriranom silom iznosa F i vezan je za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 6.5.a).

Valja odrediti reakcije oslonaca i sile u svim štapovima rešetkastog nosača metodom čvorova.

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F = 6 \text{ kN}$.



Slika 6.5. Primjer 6.1.: a) zadana rešetka, b) rešetka oslobođena veza.

Rješenje:

Reakcije oslonaca određujemo razmatranjem vanjske ravnoteže rešetke. Rešetku u osloncima A i B oslobađamo od veza, a djelovanje veza nadomještamo odgovarajućim silama – reakcijama

veza: nepomični oslonac u A dvjema komponentama reakcijske sile F_{Ax} i F_{Ay} , a pomični oslonac reakcijom F_B (slika 6.5.b).

Uvjeti ravnoteže prema drugom obliku glase:

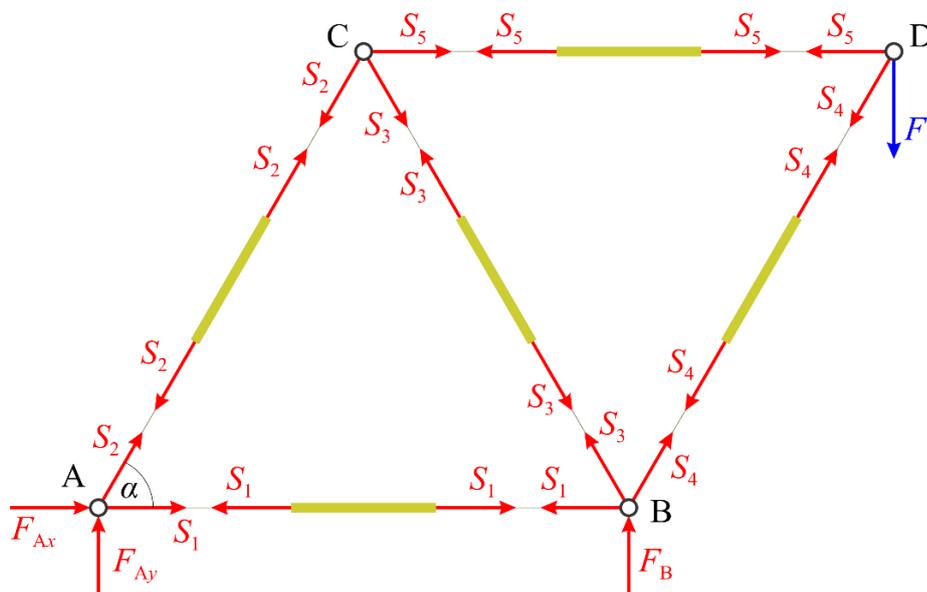
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad F_B \cdot 2 - F \cdot 3 = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad -F_{Ay} \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Rješavanjem navedenih jednadžbi dobiju se tražene reakcije oslonaca:

$$F_{Ax} = 0 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = -3 \text{ kN}; \quad F_B = 9 \text{ kN}.$$

Smjer reakcije F_{Ay} pogrešno je pretpostavljen.

Sile u štapovima rešetkastog nosača određujemo razmatranjem unutarnje ravnoteže rešetke, tj. postavljanjem uvjeta ravnoteže za svaki čvor rešetke. Stoga i naziv ove metode – *metoda čvorova*. Budući da na svaki čvor djeluje sučeljeni sustav sila u ravnini, mogu se za svaki čvor napisati dva uvjeta ravnoteže. Pretpostavlja se vlačno opterećenje svih štapova. Štapovi na čvorove djeluju silama istog intenziteta, ali suprotnog smjera. Dakle sve sile kojima štapovi djeluju na čvor imaju pretpostavljeni smjer od čvora (slika 6.6.).



Slika 6.6. *Primjer 6.1.: Elementi rešetkaste konstrukcije (čvorovi i štapovi) oslobođeni od veza*

Uvjeti ravnoteže za čvor A glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} + S_2 \cdot \cos \alpha + S_1 = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} + S_2 \cdot \sin \alpha = 0,\end{aligned}$$

gdje je kut α dobiven na sljedeći način:

$$\tan \alpha = \frac{2}{1} = 2, \quad \alpha = 63,4^\circ.$$

Iz gornjih jednađzbi dobijemo:

$$S_1 = -1,50 \text{ kN}; \quad S_2 = 3,35 \text{ kN}.$$

Negativan predznak uz iznos sile u štapu 1 znači da je taj štap opterećen tlačno.

Uvjeti ravnoteže za čvor B jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_1 - S_3 \cdot \cos \alpha + S_4 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_B + S_3 \cdot \sin \alpha + S_4 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Rješavanjem sustava jednađzbi dobijemo:

$$S_3 = -3,35 \text{ kN}; \quad S_4 = -6,71 \text{ kN}.$$

Štapovi 3 i 4 opterećeni su tlačno.

Jednađzbe ravnoteže za čvor C glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_2 \cdot \cos \alpha + S_3 \cdot \cos \alpha + S_5 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -S_2 \cdot \sin \alpha - S_3 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Iz prve jednađzbe je

$$S_5 = 3,0 \text{ kN},$$

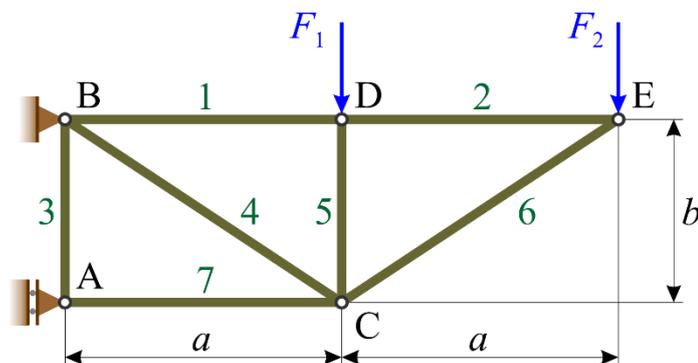
dok druga jednađzba može poslužiti kao kontrola s obzirom na to da smo sile u štapovima 2 i 3 već odredili ($S_2 = -S_3$).

Isto tako uvjeti ravnoteže za čvor D mogu poslužiti kao kontrola dobivenih rezultata jer smo već odredili sile u svim štapovima.

Primjer 6.2.

Rešetkasti nosač opterećen dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 vezan je za podlogu pomičnim osloncem u A i nepomičnim osloncem u B (slika 6.7.). Valja odrediti reakcije oslonaca i sile u svim štapovima rešetkastog nosača metodom čvorova.

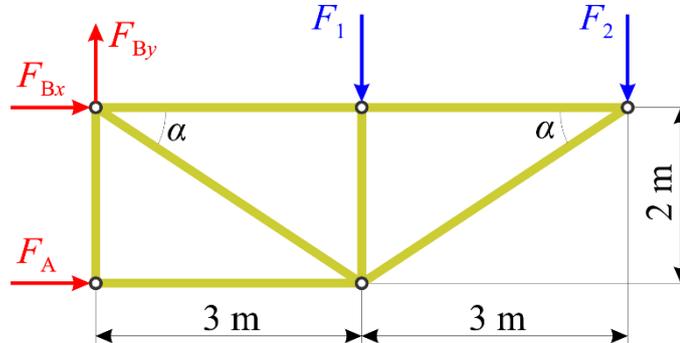
Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 8 \text{ kN}$.



Slika 6.7. *Primjer 6.2.*

Rješenje:

Rešetkasti nosač oslobađa se od veza te se djelovanje pomičnog oslonca zamjenjuje reakcijom F_A , a nepomičnog oslonca dvjema komponentama reakcije F_{Bx} i F_{By} . Na rešetku djeluje opći sustav sila u ravnini (slika 6.8.).



Slika 6.8. *Primjer 6.2.*: Rešetkasta konstrukcija kao slobodno tijelo

Uvjeti ravnoteže glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_A + F_{Bx} = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{By} - F_1 - F_2 = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad F_A \cdot 2 - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 6 = 0.\end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se tražene reakcije oslonaca:

$$F_A = 31,5 \text{ kN}; \quad F_{Bx} = -31,5 \text{ kN}, \quad F_{By} = 13 \text{ kN}, \quad F_B = 34,077 \text{ kN}.$$

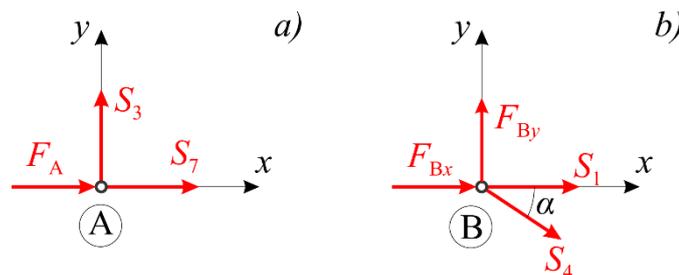
Određivanje sila u štapovima rešetkastog nosača metodom čvorova može započeti od čvora na koji djeluje barem jedna poznata sila i najviše dvije nepoznate sile kojima štapovi djeluju na čvor. Navedeni uvjet u ovom zadatku ispunjavaju čvorovi A i E.

Jednadžbe ravnoteže za čvor A glase (slika 6.9.a):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_A + S_7 = 0, \\ \sum F_y = 0: & \quad S_3 = 0,\end{aligned}$$

pa su tražene sile u štapovima 3 i 7:

$$S_3 = 0; \quad S_7 = -31,5 \text{ kN}.$$



Slika 6.9. *Primjer 6.2.*: Ravnoteža čvorova rešetke: a) čvor A, b) čvor B.

Uvjeti ravnoteže napisani za čvor B glase (slika 6.9.b):

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} + S_1 + S_4 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{By} - S_4 \cdot \sin \alpha = 0,$$

gdje kut α dobijemo iz geometrije rešetkastog nosača:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} = 0,66667 \quad \alpha = 33,69^\circ.$$

Iz gornjih jednažbi dobiju se tražene sile u štapovima 1 i 4:

$$S_1 = 12,0 \text{ kN}; \quad S_4 = 23,436 \text{ kN}.$$

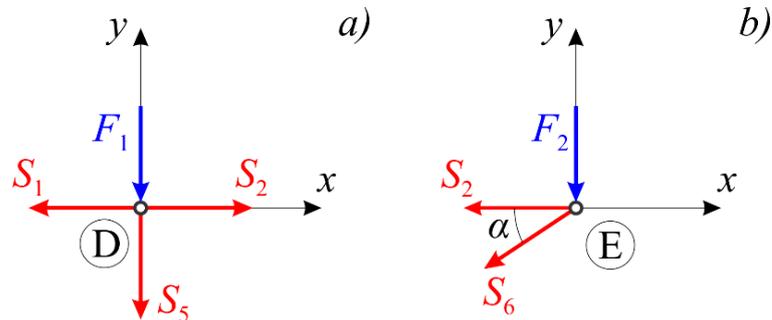
Uvjeti ravnoteže čvora D (slika 6.10.a) jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad S_2 - S_1 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -S_5 - F_1 = 0.$$

Sile u štapovima 2 i 5 su

$$S_2 = 12,0 \text{ kN}; \quad S_5 = -5 \text{ kN}.$$



Slika 6.10. *Primjer 6.2.*: Ravnoteža čvorova rešetke: a) čvor D, b) čvor E.

Uvjeti ravnoteže čvora E (slika 6.10.b) jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_2 - S_6 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -S_6 \cdot \sin \alpha - F_2 = 0.$$

Iz prve od gornjih jednažbi je

$$S_6 = -14,422 \text{ kN},$$

a druga jednažba može poslužiti kao kontrola izračunanih vrijednosti:

$$-(-14,422) \cdot \sin 33,69^\circ - 8 = -0,22$$

$$-0,22 \neq 0.$$

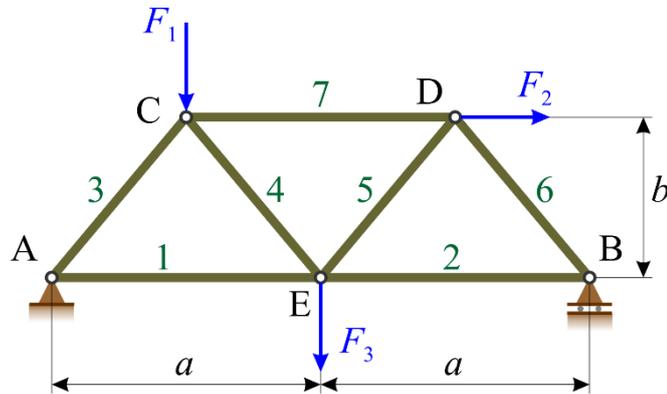
Mala nejednakost lijeve i desne strane jednažbe posljedica je zaokruživanja brojeva.

Primjer 6.3.

Rešetkasta konstrukcija opterećena je trima koncentriranim silama iznosa F_1 , F_2 i F_3 te vezana za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 6.11.).

Valja odrediti reakcije oslonaca i sile u svim štapovima rešetkastog nosača metodom čvorova.

Zadano je: $a = 2,5$ m, $b = 1,5$ m, $F_1 = 6$ kN, $F_2 = 12$ kN, $F_3 = 8$ kN.

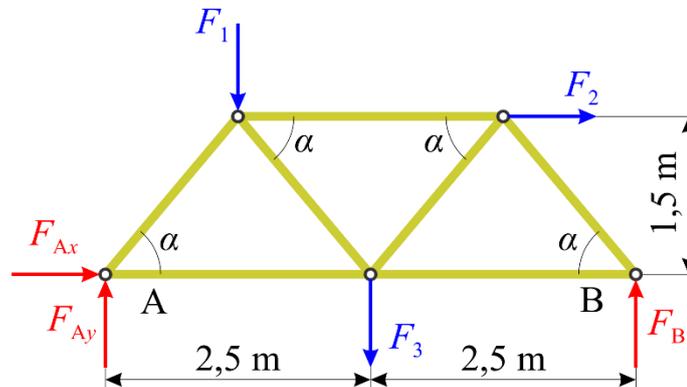


Slika 6.11. Primjer 6.3.

Rješenje:

Rešetkasti nosač oslobađa se od veza te se djelovanje nepomičnog oslonca u A zamjenjuje dvjema komponentama reakcije F_{Ax} i F_{Ay} , a pomičnog oslonca u B reakcijom F_B .

Na rešetku djeluje opći sustav sila u ravni (slika 6.12.), pa se uvjeti ravnoteže mogu napisati prema prvom obliku:



Slika 6.12. Primjer 6.3.: Rešetkasta konstrukcija oslobođena od veza

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_2 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + F_B - F_1 - F_3 = 0,$$

$$\sum M_B = 0: \quad -F_1 \cdot 1,25 - F_2 \cdot 1,5 - F_3 \cdot 2,5 + F_B \cdot 5 = 0.$$

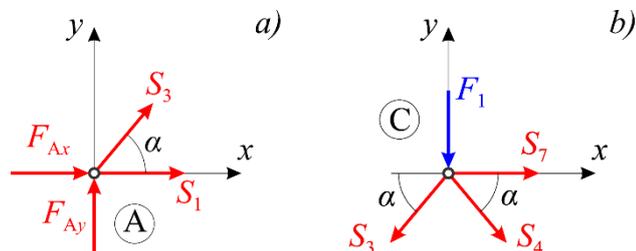
Rješavanjem navedenih jednadžbi dobiju se reakcije oslonaca:

$$F_{Ax} = -12 \text{ kN}, \quad F_{Ay} = 4,9 \text{ kN}, \quad F_A = 12,962 \text{ kN}; \quad F_B = 9,1 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže čvora A glase (slika 6.13.a):

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + S_1 + S_3 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{Ay} + S_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$



Slika 6.13. *Primjer 6.3.*: Ravnoteža čvorova rešetke: a) čvor A, b) čvor C.

gdje se kut α može dobiti iz geometrije rešetke:

$$\tan \alpha = \frac{b}{0,5a} = \frac{1,5}{1,25} = 1,2 \quad \alpha = 50,19^\circ.$$

Iz prve jednadžbe je

$$S_3 = -\frac{F_{Ay}}{\sin \alpha} = -\frac{4,9}{\sin 50,19^\circ} = -6,379 \text{ kN},$$

a iz druge

$$S_1 = -F_{Ax} - S_3 \cdot \cos \alpha = -(-12) - (-6,379) \cdot \cos 50,19^\circ = 16,084 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže čvora C (slika 6.13.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_3 \cdot \cos \alpha + S_4 \cdot \cos \alpha + S_7 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -S_3 \cdot \sin \alpha - S_4 \cdot \sin \alpha - F_1 = 0.$$

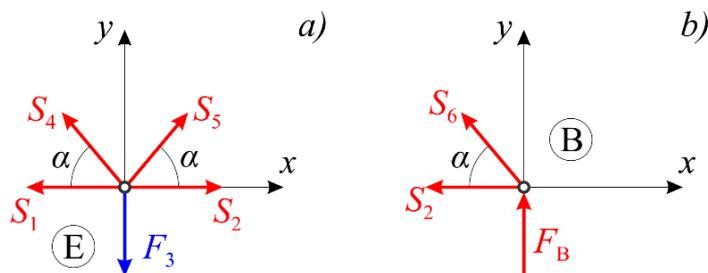
Iz prve se jednadžbe dobije:

$$S_4 = \frac{-S_3 \sin \alpha - F_1}{\sin \alpha} = \frac{-(-6,379) \cdot \sin 50,19^\circ - 6}{\sin 50,19^\circ} = -1,432 \text{ kN},$$

a iz druge:

$$S_7 = S_3 \cdot \cos \alpha - S_4 \cdot \cos \alpha = -6,379 \cdot \cos 50,19^\circ - (-1,432) \cdot \cos 50,19^\circ$$

$$S_7 = -3,167 \text{ kN}.$$



Slika 6.14. *Primjer 6.3.*: Ravnoteža čvorova rešetke: a) čvor E, b) čvor B.

Uvjeti ravnoteže za čvor E (slika 6.14.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad S_2 + S_5 \cdot \cos \alpha - S_4 \cdot \cos \alpha - S_1 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad S_4 \cdot \sin \alpha + S_5 \cdot \sin \alpha - F_3 = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobiju se sile u štapovima 2 i 5:

$$S_2 = 7,583 \text{ kN}; \quad S_5 = 11,846 \text{ kN}.$$

Jednadžbe ravnoteže za čvor B (slika 6.14.b) jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad -S_2 - S_6 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_B + S_6 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Iz prve jednadžbe je

$$S_6 = -\frac{S_2}{\cos \alpha} = -\frac{7,583}{\cos 50,19^\circ} = -11,844 \text{ kN},$$

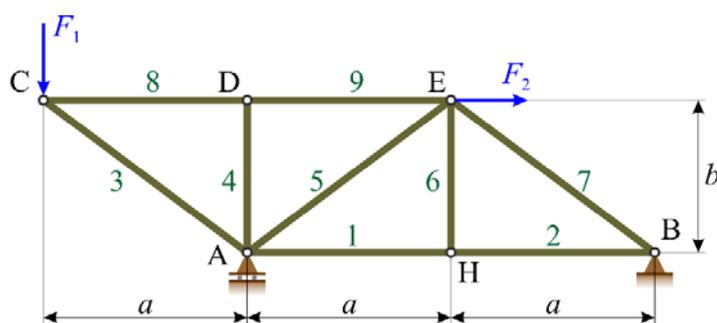
a druga jednadžba može poslužiti kao kontrola izračunanih vrijednosti:

$$9,1 + (-11,844) \cdot \sin 50,19^\circ = 0,0018 \cong 0.$$

Mala nejednakost lijeve i desne strane jednadžbe (0,0018) posljedica je zaokruživanja vrijednosti na tri decimalne.

Primjer 6.4.

Rešetkasta konstrukcija opterećena je dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 te vezana za podlogu pomičnim osloncem u A i nepomičnim osloncem u B (slika 6.15.). Valja odrediti reakcije oslonaca i sile u svim štapovima rešetkastog nosača metodom čvorova ako je zadano: $a = 4 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $F_1 = 15 \text{ kN}$, $F_2 = 10 \text{ kN}$.



Slika 6.15. *Primjer 6.4.*

Rješenje:

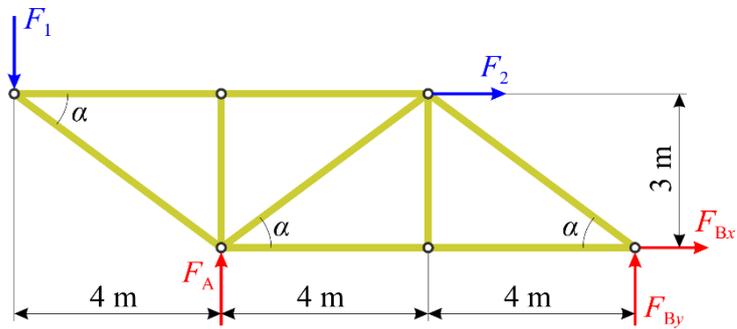
Rešetkasti nosač oslobađa se od veza te se djelovanje pomičnog oslonca u A zamjenjuje reakcijom F_A , a nepomičnog oslonca u B dvjema komponentama reakcije F_{Bx} i F_{By} .

Na rešetku djeluje opći sustav sila u ravnini (slika 6.16.), pa su uvjeti ravnoteže:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} + F_2 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_A + F_{By} - F_1 = 0,$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_1 \cdot 12 - F_2 \cdot 3 - F_A \cdot 8 = 0.$$

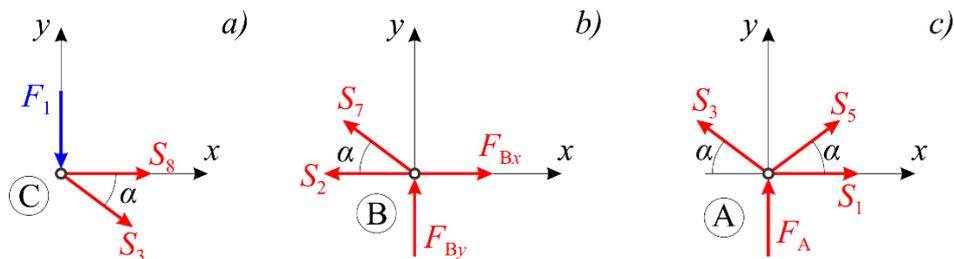


Slika 6.16. *Primjer 6.4.*: Rešetkasta konstrukcija kao slobodno tijelo

Iz gornjih jednadžbi ravnoteže dobiju se reakcije oslonaca:

$$F_A = 18,75 \text{ kN}; \quad F_{Bx} = -10 \text{ kN}, \quad F_{By} = -3,75 \text{ kN}, \quad F_B = 10,68 \text{ kN}.$$

Sile u štapovima zadanoga rešetkastog nosača mogu se izračunati korištenjem metode čvorova. Kako na čvorove D i H ne djeluju vanjske sile, a dva štapa leže na istom pravcu, može se zaključiti da su $S_4 = 0$ i $S_6 = 0$, te vrijedi $S_1 = S_2$ i $S_8 = S_9$.



Slika 6.17. *Primjer 6.4.*: Ravnoteža čvorova rešetke: a) čvor C, b) čvor B, c) čvor A.

Uvjeti ravnoteže za čvor C (slika 6.17.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad S_3 \cdot \cos \alpha + S_8 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_1 - S_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

gdje je kut α iz jednog od trokuta rešetke:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} = 0,75, \quad \alpha = 36,87^\circ.$$

Iz druge jednadžbe je

$$S_3 = -\frac{F_1}{\sin \alpha} = -\frac{15}{\sin 36,87^\circ} = -25,0 \text{ kN},$$

a iz prve

$$S_8 = -S_3 \cdot \cos \alpha = -(-25) \cdot \cos 36,87^\circ = 20 \text{ kN}; \quad S_9 = S_8 = 20 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za čvor B (slika 6.17.b) jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} - S_2 - S_7 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{By} + S_7 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Iz gornjih jednađbe dobije se:

$$S_2 = -15,0 \text{ kN}, \quad S_7 = 6,25 \text{ kN}.$$

Iz ravnoteže čvora H je

$$S_1 = S_2 = -15,0 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže čvora A (slika 6.17.c) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad S_1 + S_5 \cdot \cos \alpha - S_3 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_A + S_3 \cdot \sin \alpha + S_5 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Iz prve jednađbe je

$$S_5 = \frac{S_3 \cdot \cos \alpha - S_1}{\cos \alpha} = \frac{-25 \cdot \cos 36,87^\circ - (-15)}{\cos 36,87^\circ} = -6,25 \text{ kN}.$$

Druga jednađba može poslužiti kao kontrola izračunanih vrijednosti:

$$18,75 + (-25) \cdot \sin 36,87^\circ + (-6,25) \cdot \sin 36,87^\circ = 0,0004 \approx 0.$$

Mala nejednakost lijeve i desne strane jednađbe posljedica je zaokruživanja brojeva.

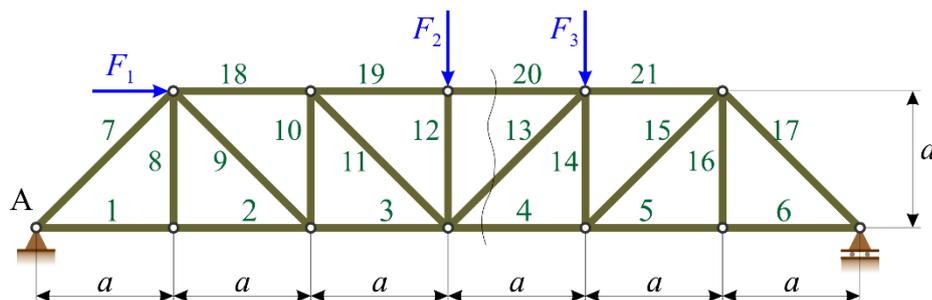
6.2. METODA PRESJEKA

Metoda presjeka pogodna je u slučajevima kada želimo odrediti sile samo u nekim štapovima rešetkastog nosača. Zamišljeni presjek može ići najviše preko triju štapova, a rešetku presjecamo preko onih štapova u kojima želimo odrediti sile. Time je rešetka rastavljena na dva dijela, koja također moraju biti u ravnoteži.

Sile u štapovima dobit ćemo promatranjem ravnoteže ili jednog ili drugog dijela rešetke. Odabrat ćemo onaj dio za koji je lakše izračunati sile u štapovima.

Primjer 6.5.

Rešetkasti nosač opterećen je trima koncentriranim silama iznosa F_1 , F_2 i F_3 te vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 6.18.).



Slika 6.18. Primjer 6.5.

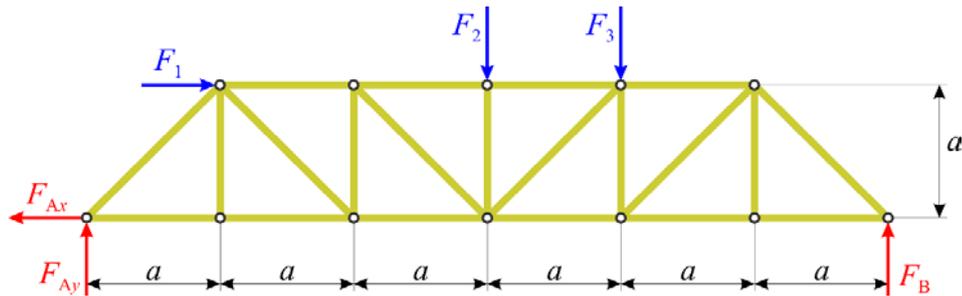
Potrebno je odrediti reakcije oslonaca i sile u štapovima 4, 13 i 20 metodom presjeka.

Zadano je: $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$, $F_3 = 3 \text{ kN}$.

Rješenje:

Prije određivanja sila u štapovima potrebno je odrediti reakcije u osloncima iz uvjeta ravnoteže cijele konstrukcije.

Rešetkasti nosač oslobađa se od veza te se djelovanje nepomičnog oslonca u A zamjenjuje dvjema komponentama reakcije F_{Ax} i F_{Ay} , a pomičnog oslonca u B reakcijom F_B .



Slika 6.19. *Primjer 6.5.: Rešetkasti nosač oslobođen od veza*

Na rešetku djeluje opći sustav sila u ravnini (slika 6.19.).

Jednadžbe ravnoteže prema drugom obliku (4.7) glase:

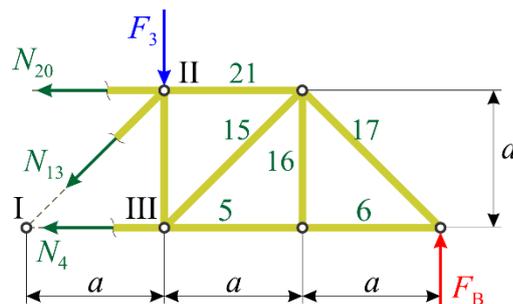
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{Ax} + F_1 = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad F_B \cdot 6 \cdot a - F_1 \cdot a - F_2 \cdot 3 \cdot a - F_3 \cdot 4 \cdot a = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad -F_{Ay} \cdot 6 \cdot a - F_1 \cdot a + F_2 \cdot 3 \cdot a + F_3 \cdot 2 \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se reakcije oslonaca:

$$F_{Ax} = 5 \text{ kN}; \quad F_{Ay} = 2,17 \text{ kN}; \quad F_B = 4,83 \text{ kN}.$$

Da bismo *metodom presjeka* odredili sile u štapovima 4, 13 i 20, potrebno je učiniti zamišljeni presjek rešetke preko tih štapova. Time je rešetka rastavljena na dva dijela, a utjecaj jednog dijela na drugi zamijenit ćemo odgovarajućim silama. Budući da je cijela konstrukcija u ravnoteži, to i oba tako dobivena dijela konstrukcije moraju biti u ravnoteži.

Tražene sile u štapovima odredit ćemo razmatranjem ravnoteže desnog dijela rešetkastog nosača (slika 6.20.).



Slika 6.20. *Primjer 6.5.: Dio rešetkastog nosača desno od presjeka kao slobodno tijelo*

Uvjeti ravnoteže prema trećem obliku (4.8) glase:

$$\sum M_I = 0: \quad F_B \cdot 3 \cdot a + N_{20} \cdot a - F_3 \cdot a = 0,$$

$$\sum M_{II} = 0: \quad F_B \cdot 2 \cdot a - N_4 \cdot a = 0,$$

$$\sum M_{III} = 0: \quad F_B \cdot 2 \cdot a + N_{20} \cdot a + N_{13} \cdot \cos 45^\circ \cdot a = 0.$$

Rješavanjem gornjih jednažbi dobije se:

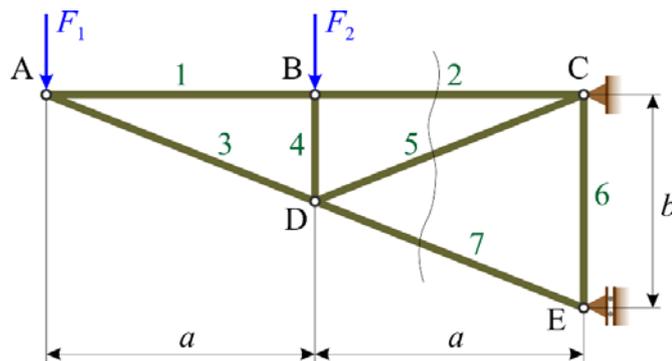
$$N_{20} = -11,5 \text{ kN}; \quad N_4 = 9,67 \text{ kN}; \quad N_{13} = 2,59 \text{ kN}.$$

Štap 20 opterećen je na tlak.

Primjer 6.6.

Rešetkasti nosač opterećen je dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 te vezan za podlogu nepomičnim osloncem u C i pomičnim osloncem u E (slika 6.21.). Valja odrediti sile u štapovima 2, 5 i 7 metodom presjeka.

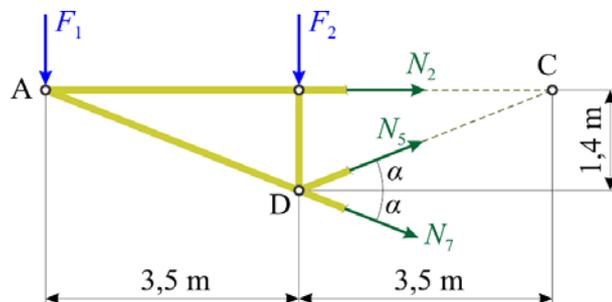
Zadano je: $a = 3,5 \text{ m}$, $b = 2,8 \text{ m}$, $F_1 = 5 \text{ kN}$, $F_2 = 6 \text{ kN}$.



Slika 6.21. *Primjer 6.6.*

Rješenje:

Rešetkastu konstrukciju treba presjeći preko štapova 2, 5 i 7 te promatrati ravnotežu odsječenog dijela rešetke ili s lijeve ili s desne strane presjeka. Ovdje je odabran odsječeni dio s lijeve strane presjeka (slika 6.22.).



Slika 6.22. *Primjer 6.6.: Dio rešetkastog nosača lijevo od presjeka kao slobodno tijelo*

Uvjeti ravnoteže za taj dio mogu se napisati u obliku:

$$\sum M_C = 0: \quad F_1 \cdot 7 + F_2 \cdot 3,5 + N_7 \cdot \cos \alpha \cdot 1,4 + N_5 \cdot \sin \alpha \cdot 3,5 = 0,$$

$$\sum M_D = 0: F_1 \cdot 3,5 - N_2 \cdot 1,4 = 0,$$

$$\sum M_A = 0: -F_2 \cdot 3,5 + N_5 \cdot \cos \alpha \cdot 1,4 + N_5 \cdot \sin \alpha \cdot 3,5 = 0,$$

gdje je kut α dobiven prema geometriji rešetke:

$$\tan \alpha = \frac{b}{2a} = \frac{2,8}{7} = 0,4, \quad \alpha = 21,80^\circ.$$

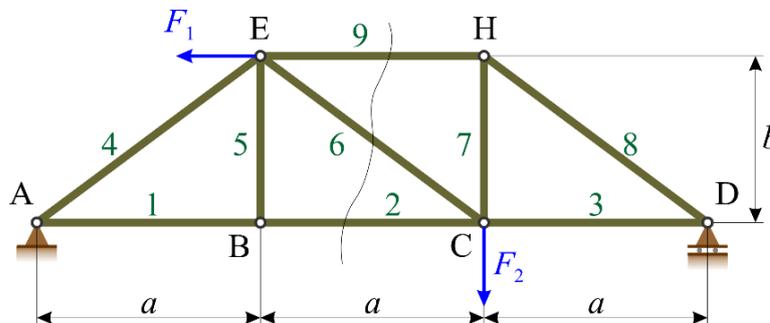
Rješavanjem gornjih jednačbi dobije se:

$$N_2 = 12,5 \text{ kN}, \quad N_5 = 8,078 \text{ kN}, \quad N_7 = -21,54 \text{ kN}.$$

Primjer 6.7.

Rešetkasti nosač vezan je za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u D te opterećen dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 (slika 6.23.). Valja odrediti sile u štapovima 2, 6 i 9 metodom presjeka.

Zadano je: $a = 3,2 \text{ m}$, $b = 2,4 \text{ m}$, $F_1 = 12 \text{ kN}$, $F_2 = 9 \text{ kN}$.

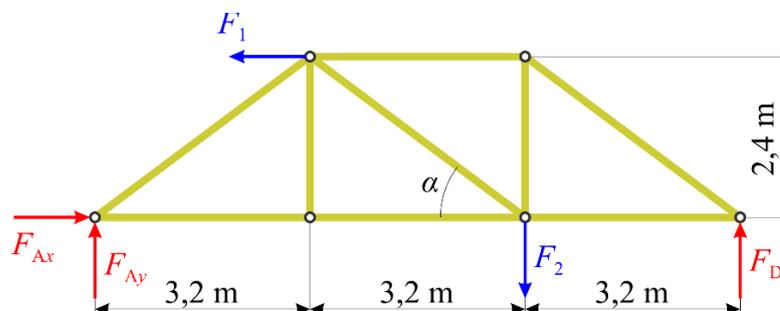


Slika 6.23. Primjer 6.7.

Rješenje:

Rešetkasti nosač treba presjeći preko štapova 2, 6 i 9 te promatrati ravnotežu odsječenog dijela rešetke ili s lijeve ili s desne strane presjeka.

Ovdje je odabran odsječeni dio s desne strane presjeka. Prije određivanja sile u označenim štapovima potrebno je pronaći reakciju oslonca D F_D . Ta reakcija dobit će se postavljanjem uvjeta ravnoteže za cijeli rešetkasti nosač (slika 6.24.).



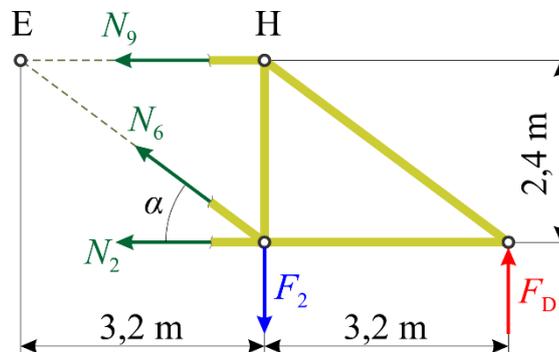
Slika 6.24. Primjer 6.7.: Rešetkasti nosač kao slobodno tijelo

$$\sum M_A = 0: F_1 \cdot 2,4 - F_2 \cdot 6,4 + F_D \cdot 9,6 = 0,$$

odakle je

$$F_D = \frac{-F_1 \cdot 2,4 + F_2 \cdot 6,4}{9,6} = \frac{-12 \cdot 2,4 + 9 \cdot 6,4}{9,6} = 3 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za odsječeni dio nosača s desne strane presjeka (slika 6.25) mogu se napisati u obliku:



Slika 6.25. *Primjer 6.7.*: Dio rešetkastog nosača desno od presjeka kao slobodno tijelo

$$\sum M_E = 0: \quad F_D \cdot 6,4 - F_2 \cdot 3,2 - N_2 \cdot 2,4 = 0,$$

$$\sum M_C = 0: \quad F_D \cdot 3,2 + N_9 \cdot 2,4 = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad N_6 \cdot \sin \alpha - F_2 + F_D = 0,$$

gdje je kut α dobiven prema geometriji rešetkastog nosača:

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \frac{2,4}{3,2} = 0,75, \quad \alpha = 36,87^\circ.$$

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobiju se tražene sile u štapovima:

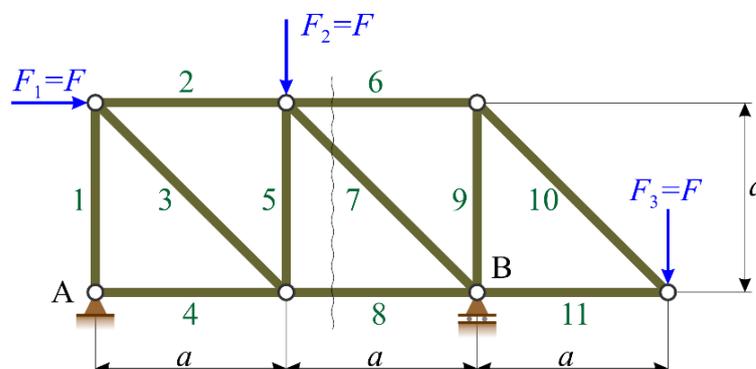
$$N_2 = -4 \text{ kN}, \quad N_6 = 10 \text{ kN}, \quad N_9 = -4 \text{ kN}.$$

Štapovi 2 i 9 opterećeni su tlačno.

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 6.1. Rešetkasti nosač opterećen je trima koncentriranim silama iznosa F_1 , F_2 i F_3 te vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika Z.6.1.).



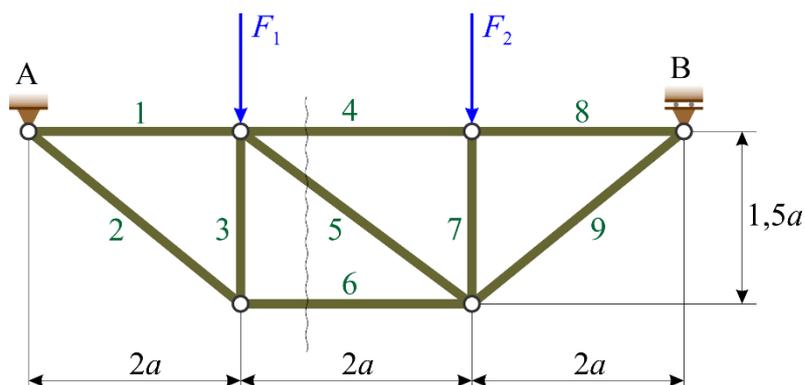
Slika Z.6.1. *Zadatak 6.1.*

Valja odrediti reakcije oslonaca i sile u svim štapovima metodom čvorova. Sile u označenim štapovima izračunati metodom presjeka. Zadano je: $F = 10 \text{ kN}$.

Rezultate provjeriti s pomoću programskog paketa MDSolids.

Zadatak 6.2. Rešetkasti nosač opterećen je dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 te vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika Z.6.2.). Potrebno je odrediti reakcije oslonaca te sile u svim štapovima metodom čvorova. Sile u označenim štapovima izračunati metodom presjeka. Zadano je: $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 40 \text{ kN}$.

Rezultate provjeriti s pomoću programskog paketa MDSolids.



Slika Z.6.2. *Zadatak 6.2.*

7. PUNI RAVNINSKI NOSAČI

Svako kruto tijelo vezano za nepokretnu podlogu i opterećeno silama naziva se nosač.

Nosači, s obzirom na karakter sustava sila koji na njih djeluje, mogu biti ravninski i prostorni. Nosač je ravninski ako os nosača i sve sile (tj. opterećenje nosača) leže u istoj ravnini.

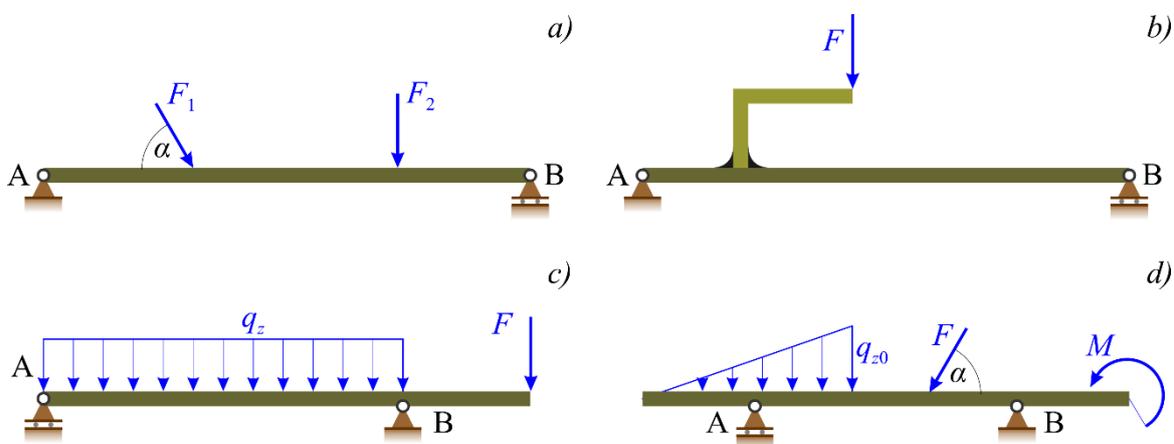
S obzirom na način nošenja opterećenja nosače dijelimo na *pune nosače – grede* i *rešetkaste nosače – rešetke*.

Rešetkasti nosači obrađeni su u poglavlju 6., a ovdje će biti govora o punim nosačima. Razmatrat ćemo linijske i okvirne pune nosače.

7.1. LINIJSKI NOSAČI

Linijski nosači prema složenosti i načinu oslanjanja mogu biti:

- *jednostavni nosači* (slike 7.1.a i 7.1.b) kod kojih je udaljenost između oslonaca ujedno i ukupna duljina nosača;
- *nosači s jednim ili dva prepusta* (slike 7.1.c i 7.1.d) kod kojih je udaljenost između oslonaca manja od duljine nosača;

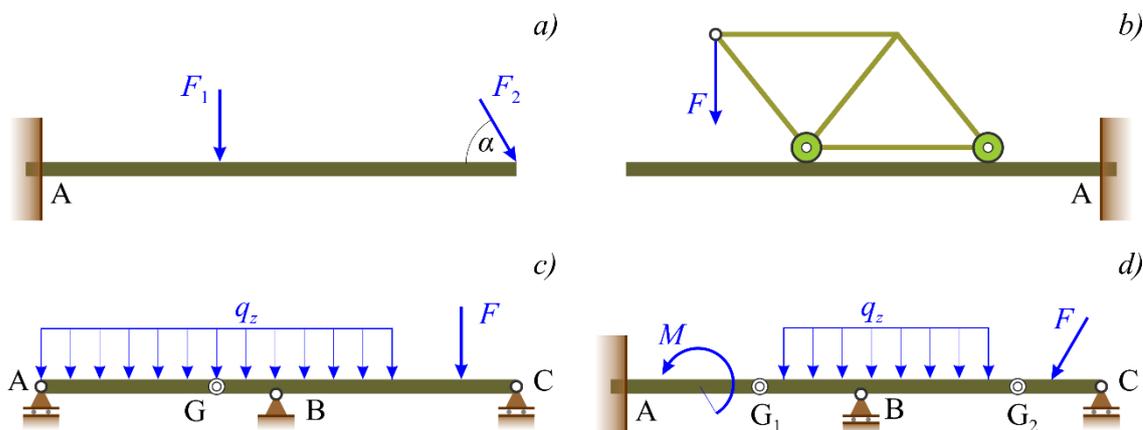


Slika 7.1.: a) jednostavni nosač opterećen neposredno, b) jednostavni nosač s posrednim opterećenjem, c) nosač s jednim prepustom opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem i koncentriranom silom, d) nosač s dva prepusta opterećen linearno promjenljivim kontinuiranim opterećenjem, koncentriranom silom i spregom.

- *konzolni nosači (konzole)* jesu nosači koji su jednim krajem ukliješteni (slike 7.2.a i 7.2.b);
- *nosači sa zglobom (Gerberovi nosači)* jesu složeni nosači koji su sastavljeni od jedne ili više greda međusobno povezanih zglobovima (slike 7.2.c i 7.2.d).

Sile koje djeluju na nosač mogu biti *koncentrirane* ili pak *kontinuirane* (raspoređene po jednom dijelu duljine nosača – slike 7.1.c i 7.1.d). Kontinuirano opterećenje može biti konstantnog ($q_z = konst.$) ili pak promjenljivog intenziteta $q_z = q_z(x)$.

Opterećenje, nadalje, može biti *neposredno* (slike 7.1.a; 7.1.c; 7.1.d), *posredno* (slike 7.1.b; 7.2.b) ili *kombinirano*.



Slika 7.2.: a) konzolni nosač opterećen neposredno, b) konzolni nosač opterećen posredno, c) Gerberov nosač sastavljen od dvije grede, d) Gerberov nosač sastavljen od tri grede.

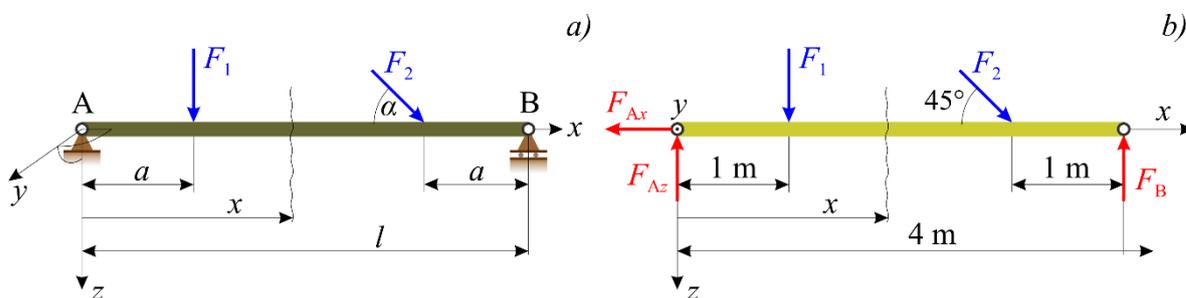
Prema vremenu trajanja opterećenja se dijele na *stalna* (npr. težina) i *promjenljiva* (npr. vjetar). Koordinatni sustav, koji se vezuje uz nosač, dogovorom je uzet tako da se os O_x poklapa s uzdužnom osi nosača, os O_y izlazi iz slike, a time je određena i os O_z jer se upotrebljava desni pravokutni koordinatni sustav (kod linijskih je nosača os O_z usmjerena prema dolje).

7.1.1. Unutarnje sile u presjeku nosača

Pod djelovanjem vanjskih aktivnih i vanjskih pasivnih sila (reakcija veza) pojavit će se u proizvoljnom presjeku nosača *unutarnje sile*. Te se sile javljaju uvijek u parovima i nalaze se u ravnoteži (*svojstvo unutarnjih sila*). Često je, međutim, u proračunima inženjerskih konstrukcija, neophodno izračunati veličine tih sila kako bi se odabrale odgovarajuće dimenzije konstrukcije (nosača).

Unutarnje sile definirat ćemo s pomoću primjera jednostavnog nosača opterećenoga dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 . Nosač je vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 7.3.a).

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $l = 4 \text{ m}$, $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 7 \text{ kN}$, $\alpha = 45^\circ$.



Slika 7.3.: a) razmatrani nosač, b) nosač kao slobodno tijelo.

Nakon što se nosač oslobodi od veza, za njega se kao slobodno tijelo pod djelovanjem općeg sustava sila u ravni (slika 7.3.b) mogu napisati uvjeti ravnoteže prema prvom obliku:

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{Ax} + F_2 \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_z = 0 \quad -F_{Az} + F_1 + F_2 \cdot \sin 45^\circ - F_B = 0,$$

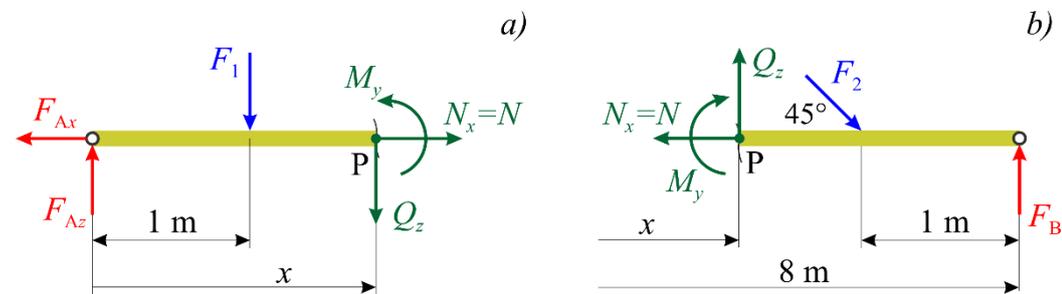
$$\sum M_A = 0: \quad F_B \cdot 4 - F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 = 0.$$

Rješavanjem navedenih jednačbi dobiju se tražene reakcije oslonaca:

$$F_{Ax} = 4,95 \text{ kN}, \quad F_{Az} = 8,74 \text{ kN}; \quad F_B = 6,21 \text{ kN}.$$

Unutarnje sile u označenom presjeku odredit će se s pomoću zamišljenog presjeka na proizvoljnoj udaljenosti x od lijevog oslonca.

Zamišljenim presjekom dobili smo dva dijela nosača: dio nosača lijevo od zamišljenog presjeka i dio nosača desno od tog presjeka. Budući da je čitav nosač u ravnoteži, to i svaki dio nosača mora biti u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila te unutarnjih sila kojima dijelovi nosača djeluju jedan na drugi (slika 7.4.a i 7.4.b).



Slika 7.4. Unutarnje sile u zamišljenom presjeku nosača: a) lijevo od presjeka, b) desno od presjeka.

Međusobno djelovanje lijevog i desnog dijela nosača izraženo je jednom silom i jednim momentom.

Silu možemo rastaviti na dvije komponente:

- jednu paralelnu s uzdužnom osi nosača, kojoj je naziv *uzdužna sila*, a označavamo je s N (što se najčešće upotrebljava u literaturi umjesto N_x) te
- drugu, okomitu na uzdužnu os nosača, kojoj je naziv *poprečna sila*, s oznakom Q_z .

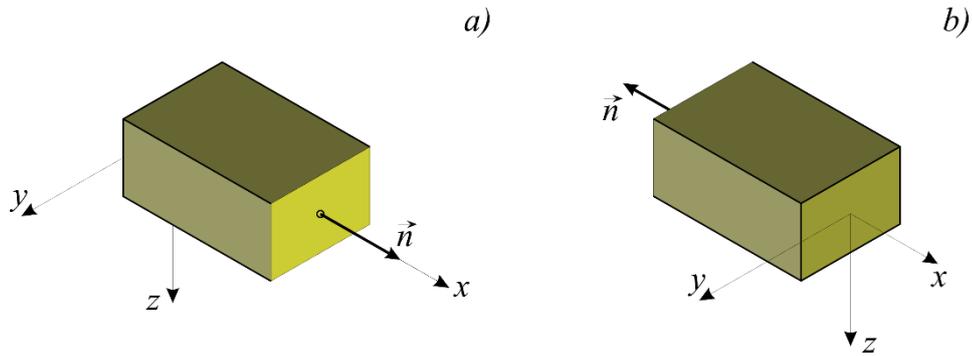
Moment ćemo nazvati *moment savijanja* i označavati s M_y .

Dakle, *uzdužna sila*, *poprečna sila* i *moment savijanja* čine *unutarnje sile u presjeku nosača*.

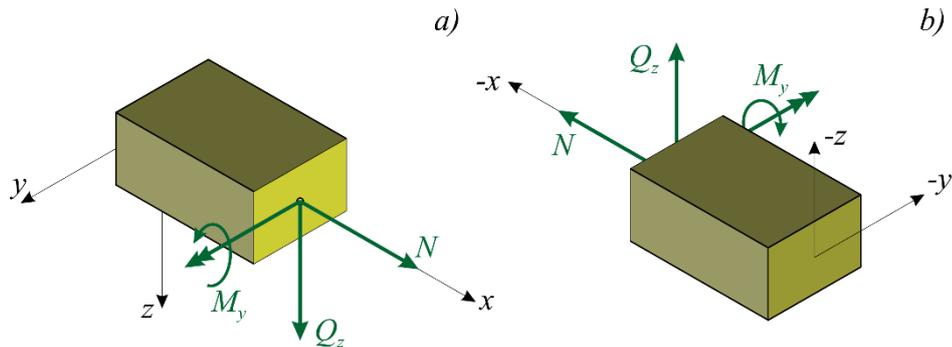
Prije razmatranja samog izračunavanja unutarnjih sila potrebno je navesti dogovor o predznaku poprečnog presjeka i predznaku unutarnjih sila.

Poprečni presjek je pozitivan ako se smjer vanjske normale na presjek poklapa s pozitivnim smjerom osi x (slika 7.5.a), a negativan ako vanjska normala ima suprotan smjer od pozitivnog dijela osi x (slika 7.5.b).

Na pozitivnom poprečnom presjeku unutarnje sile su pozitivne ako im se smjerovi poklapaju s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi (slika 7.6.a), a na negativnom poprečnom presjeku bit će pozitivne ako imaju smjerove suprotne smjerovima pozitivnih dijelova koordinatnih osi (slika 7.6.b).



Slika 7.5.: a) pozitivan poprečni presjek, b) negativan poprečni presjek.



Slika 7.6. Pozitivni smjerovi unutarnjih sila: a) na pozitivnom presjeku, b) na negativnom presjeku.

Unutarnje sile možemo odrediti razmatranjem ravnoteže dijela nosača, bilo lijevo ili desno od zamišljenog presjeka.

U razmatranom ćemo primjeru razmatrati dio nosača lijevo od zamišljenog presjeka (slika 7.4.a), za koji uvjeti ravnoteže glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad N - F_{Ax} &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad Q_z + F_1 - F_{Az} &= 0, \\ \sum M_P = 0: \quad M_y + F_1 \cdot (x-1) - F_{Az} \cdot x &= 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se izrazi za unutarnje sile u označenom presjeku nosača:

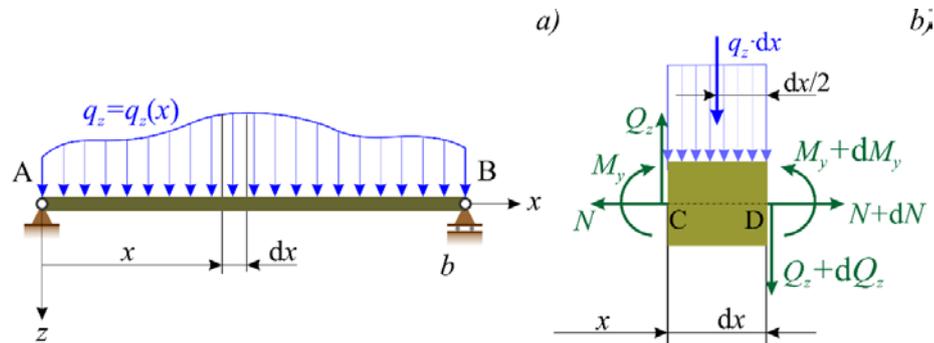
$$\begin{aligned} N &= F_{Ax} = 4,95 \text{ kN}; \\ Q_z &= F_{Az} - F_1 = 8,74 - 10 = -1,26 \text{ kN}; \\ M_y &= F_{Az} \cdot x - F_1 \cdot (x-1) = 8,74 \cdot x - 10 \cdot (x-1), \\ M_y &= -1,26 \cdot x + 10 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Funkcije unutarnjih sila u načelu određujemo za sva neovisna područja nosača.

Neovisnim područjima nosača nazivamo područja između mjesta poremećaja (promjena), a to su slobodan kraj nosača, mjesto djelovanja koncentrirane sile (vanjske aktivne sile ili vanjske pasivne sile – reakcije veza), mjesto djelovanja sprega sila te početak ili kraj područja u kojemu djeluje kontinuirano opterećenje.

7.1.2. Veza između kontinuiranog opterećenja, poprečne sile i momenta savijanja

Diferencijalnu zavisnost između kontinuiranog opterećenja q_z , poprečne sile Q_z i momenta savijanja M_y odredit ćemo promatranjem jednostavnog nosača AB opterećenog proizvoljno promjenljivim kontinuiranim opterećenjem q_z (slika 7.7.a).



Slika 7.7.: a) jednostavni nosač opterećen proizvoljno promjenljivim kontinuiranim opterećenjem, b) ravnoteža infinitezimalnog dijela nosača CD (širine dx).

Uvjeti ravnoteže djelića CD nosača (slika 7.7.b) jesu:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad (N + dN) - N = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad (Q_z + dQ_z) + q_z \cdot dx - Q_z = 0, \\ \sum M_D = 0: & \quad -M_y - Q_z \cdot dx + q_z \cdot dx \cdot dx / 2 + (M_y + dM_y) = 0. \end{aligned}$$

Iz prve od gornjih jednačbi slijedi da je uzdužna sila konstantna u jednom nezavisnom dijelu nosača:

$$dN = 0, \quad N = konst \quad (7.1)$$

Iz drugog uvjeta ravnoteže elementarnog dijela nosača slijedi:

$$dQ_z = -q_z \cdot dx, \quad \frac{dQ_z}{dx} = -q_z, \quad (7.2)$$

tj. *prva derivacija poprečne sile po nezavisnoj koordinati x jednaka je negativnom kontinuiranom opterećenju.*

Rješenjem treće od jednačbi ravnoteže, uz zanemarivanje člana $q_z \cdot dx \cdot dx / 2$ kao male veličine višeg reda, dobijemo:

$$dM_y = Q_z \cdot dx, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z, \quad (7.3)$$

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z. \quad (7.4)$$

Iz izraza (7.2) – (7.4.) može se zaključiti sljedeće:

- *prva derivacija momenta savijanja po nezavisnoj koordinati x jest poprečna sila,*

- druga derivacija momenta savijanja po nezavisnoj koordinati x jednaka je negativnom kontinuiranom opterećenju.

To znači da će u području gdje nema kontinuiranog opterećenja ($q_z = 0$) poprečna sila biti konstantna, a moment savijanja linearna funkcija (pravac); u području gdje je $q_z = konst.$ poprečna sila će biti linearna funkcija (pravac), dok će moment savijanja biti kvadratna funkcija (parabola 2. stupnja), itd.

Iz izraza (7.3) može se zaključiti da će funkcija momenta savijanja imati ekstrem na mjestu gdje je poprečna sila jednaka nuli ako je pritom kontinuirano opterećenje različito od nule.

U primjerima koji slijede kontinuirano opterećenje q_z zapisivat ćemo bez indeksa, kao q .

Na temelju definicije unutarnjih sila, dogovora o predznacima te diferencijalnih veza (7.1) – (7.4.) crtamo dijagrame unutarnjih sila kao funkcije koordinate x :

- dijagram uzdužnih sila $N = N(x)$,
- dijagram poprečnih sila $Q_z = Q_z(x)$,
- dijagram momenata savijanja $M_y = M_y(x)$.

Dijagrami unutarnjih sila u ovim su skriptama crtani tako da su pozitivne vrijednosti prikazane iznad, a negativne ispod osi x .

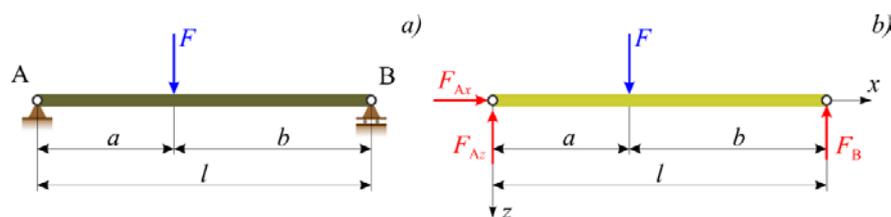
7.1.3. Postupak pri rješavanju ravninskih nosača

Postupak pri rješavanju punih ravninskih nosača je sljedeći:

- nosač oslobodimo od veza pa na temelju zadanog vanjskog opterećenja i geometrije nosača određujemo vanjske reakcije veza;
- uočavamo broj nezavisnih područja nosača pa za svako od tih područja određujemo analitičke izraze za unutarnje sile;
- određujemo položaj opasnog (opasnih) presjeka po područjima nosača i odgovarajuće vrijednosti momenta savijanja;
- crtamo i kotiramo dijagrame unutarnjih sila.

Primjer 7.1.

Na slici 7.8.a prikazan je **jednostavni puni nosač opterećen koncentriranom silom** intenziteta F koja djeluje na udaljenosti a od oslonca A.



Slika 7.8. Primjer 7.1.: a) zadani nosač, b) nosač kao slobodno tijelo.

Valja odrediti raspodjelu unutarnjih sila po područjima nosača te skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Reakcije oslonaca dobit ćemo iz uvjeta ravnoteže postavljenih za nosač kao slobodno tijelo (slika 7.8.b):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} - F_B + F = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad -F_{Az} \cdot l + F \cdot b = 0.\end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo:

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Az} = F \cdot \frac{b}{l}; \quad F_B = F \cdot \frac{a}{l}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Za određivanje unutarnjih sila uočavamo dva nezavisna područja nosača, jedno lijevo a drugo desno od mjesta djelovanja sile F , pa će se odrediti izrazi za unutarnje sile u oba područja.

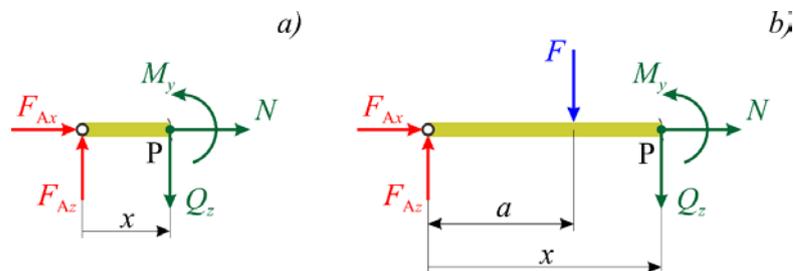
- I. područje: $0 \leq x \leq a$

Uvjeti ravnoteže za dio nosača lijevo od presjeka glase (slika 7.9.a):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad N + F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad Q_z - F_{Az} = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad M_y - F_{Az} \cdot x = 0.\end{aligned}$$

Iz gornjih jednažbi je

$$N = -F_{Ax} = 0; \quad Q_z = F_{Az} = F \cdot \frac{b}{l} = \text{konst.}; \quad M_y = F_{Az} \cdot x = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x.$$



Slika 7.9. *Primjer 7.1.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela a) lijevo od razmatranog presjeka u I. području, b) lijevo od razmatranog presjeka u II. području.

Budući da je poprečna sila u ovom dijelu konstantna, ne treba tražiti opasni presjek.

Kako je M_y linearna funkcija, za njezino crtanje dovoljno je poznavati vrijednost momenta u dvjema točkama:

$$M_y(0) = 0; \quad M_y(a) = F \cdot \frac{b}{l} \cdot a = F \cdot \frac{a \cdot b}{l}.$$

- II. područje: $a \leq x \leq l$

Jednadžbe ravnoteže dijela nosača lijevo od zamišljenog presjeka (slika 7.9.b) jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad N + F_{Ax} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad Q_z - F_{Az} + F = 0,$$

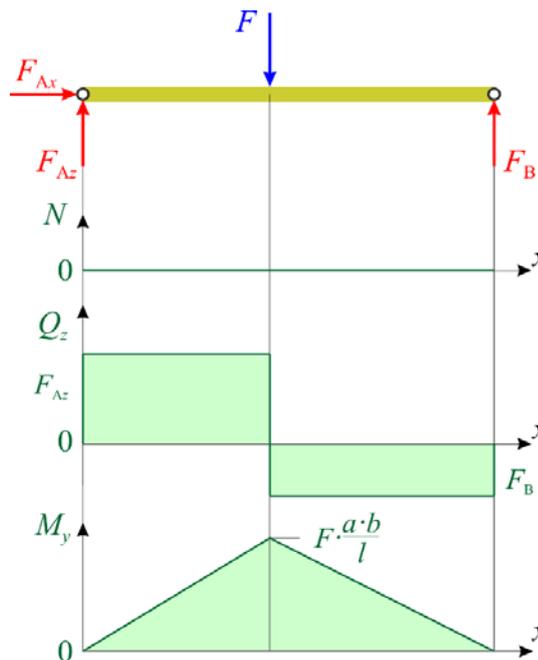
$$\sum M_B = 0: \quad M_y - F_{Az} \cdot x + F \cdot (x - a) = 0.$$

Njihovim rješavanjem dobije se:

$$N = 0; \quad Q_z = F_{Az} - F = -F_B = -F \cdot \frac{a}{l} = \text{konst.};$$

$$M_y = F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l - x), \quad M_y(a) = F \cdot \frac{a \cdot b}{l}, \quad M_y(l) = 0.$$

Prema gore dobivenim vrijednostima crtaju se dijagrami unutarnjih sila, koji su dani slikom 7.10.



Slika 7.10. *Primjer 7.1.: Dijagrami unutarnjih sila*

Iz dijagrama prikazanih na slici 7.10. možemo zaključiti:

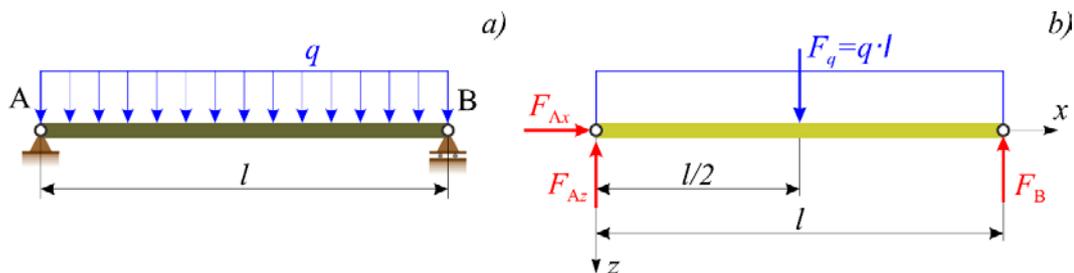
- funkcija poprečne sile ima skok na mjestima djelovanja koncentriranih sila F_{Az} , F i F_B ;
- u području u kojem je poprečna sila pozitivna funkcija momenta savijanja ona raste, dok u području u kojem je poprečna sila negativna funkcija momenta savijanja ona pada;
- na mjestu skoka u funkciji poprečne sile funkcija momenta ima lom (ima dvije

vrijednosti derivacije u jednoj točki); ta se točka u dijagramu $M_y = M_y(x)$ ne može odrediti kao ekstrem funkcije, ali se može uočiti iz dijagrama;

- moment savijanja je najveći na mjestu djelovanja sile F , a najnepovoljniji je položaj te sile kada djeluje u sredini nosača, pri čemu je $M_y = F \cdot \frac{l}{4}$.

Primjer 7.2.

Jednostavni puni nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem $q = konst.$ prikazan je na slici 7.11.a. Potrebno je odrediti raspodjelu unutarnjih sila te skicirati i kotirati odgovarajuće dijagrame: $N(x)$, $Q_z(x)$ i $M_y(x)$.



Slika 7.11. *Primjer 7.2.: a) zadani nosač, b) nosač kao slobodno tijelo.*

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Kontinuirano opterećenje možemo zamijeniti jednom koncentriranom silom $F_q = q \cdot l$ s hvatištem u težištu (slika 7.11.b), pri čemu se ovom zamjenom možemo koristiti samo pri izračunavanju vanjskih reakcija veza, a koje dobijemo postavljanjem uvjeta ravnoteže za nosač kao slobodno tijelo:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_{Ax} &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F_q - F_B &= 0, \\ \sum M_B = 0: \quad -F_{Az} \cdot l + F_q \cdot \frac{l}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo:

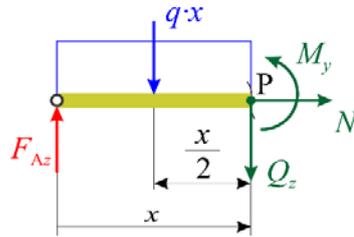
$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Az} = F_B = \frac{F_q}{2} = \frac{q \cdot l}{2}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Pri određivanju unutarnjih sila uočavamo samo jedno nezavisno područje, tj. svaku od unutarnjih sila možemo potpuno definirati samo jednom funkcijom. Promotrit ćemo ravnotežu dijela nosača lijevo od zamišljenog presjeka (slika 7.12.).

Uvjeti ravnoteže za ovaj dio nosača jesu:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad N &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad Q_z - F_{Az} + q \cdot x &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum M_P = 0: \quad M_y - F_{Az} \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0.$$



Slika 7.12. Dio nosača lijevo od razmatranog presjeka

Iz gornjih jednažbi dobije se:

$$N = 0; \quad Q_z = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right), \quad Q_z(0) = \frac{q \cdot l}{2}, \quad Q_z(l) = -\frac{q \cdot l}{2},$$

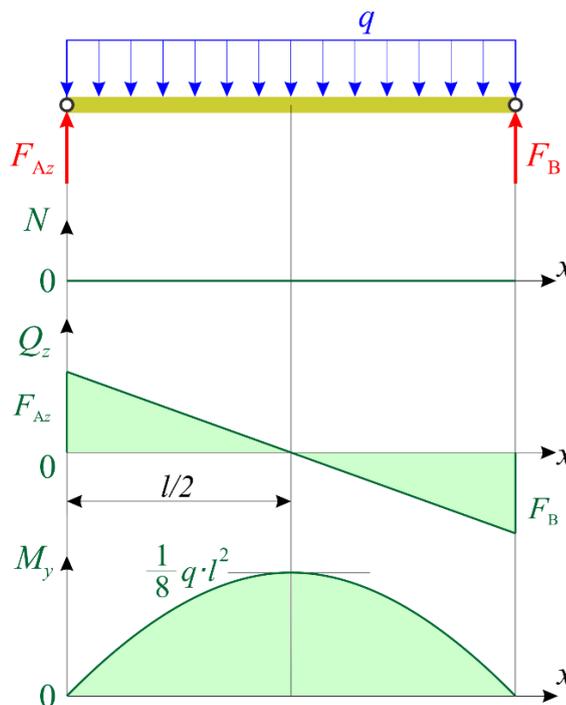
$$M_y = \frac{q}{2} \cdot (l \cdot x - x^2), \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(l) = 0.$$

Očito je da funkcija poprečne sile u promatranom području mijenja predznak (ima nultu točku), pa je potrebno izračunati apscisu te točke:

$$Q_z = q \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) = 0, \quad x = \frac{l}{2}.$$

Moment savijanja u toj točki ima ekstrem, i to maksimum jer je u toj točki druga derivacija momenta savijanja negativna ($d^2 M_y / dx^2 = -q < 0$), a iznos tog maksimuma je

$$M_y \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$

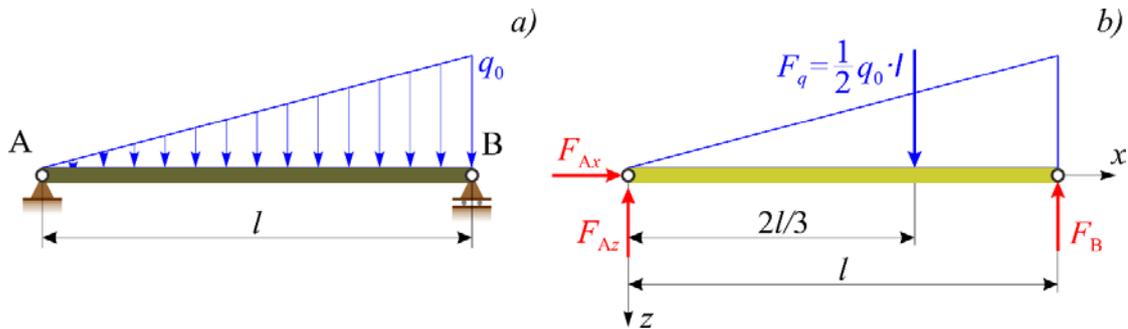


Slika 7.13. Primjer 7.2.: Dijagrami unutarnjih sila

Dakle, najveći moment savijanja kod jednoliko raspodijeljenoga kontinuiranog opterećenja dvostruko je manji nego u slučaju djelovanja koncentrirane sile $F_q = q \cdot l$ na sredini grede (vidi primjer 7.1.).

Primjer 7.3.

Jednostavni puni nosač opterećen trokutnim opterećenjem (jednoliko promjenjivim opterećenjem), kako je to prikazano na slici 7.14.a. Valja odrediti raspodjelu unutarnjih sila po područjima nosača te skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.



Slika 7.14. *Primjer 7.3.:* a) zadani nosač, b) nosač kao slobodno tijelo.

Rješenje:

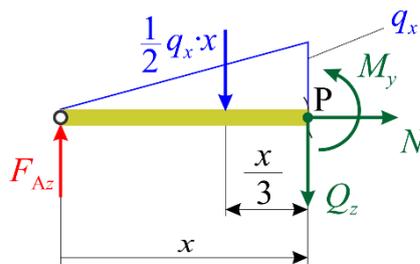
Izračunavanje reakcija veza. Kontinuirano opterećenje možemo zamijeniti jednom koncentriranom silom $F_q = q \cdot l/2$ s hvatištem u težištu trokuta (slika 7.14.b). Reakcije veza sada slijede iz uvjeta ravnoteže nosača kao slobodnog tijela:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F_q - F_B = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad -F_{Az} \cdot l + F_q \cdot \frac{l}{3} = 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo:

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Az} = \frac{q_0 \cdot l}{6}; \quad F_B = \frac{q_0 \cdot l}{3}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Pri određivanju unutarnjih sila uočavamo samo jedno nezavisno područje, a mi ćemo razmatrati dio nosača lijevo od zamišljenog presjeka (slika 7.15.).



Slika 7.15. *Primjer 7.3.:* Dio nosača lijevo od razmatranog presjeka

Uvjeti ravnoteže za ovaj dio glase:

$$\sum F_x = 0: \quad N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad Q_z - F_{Az} + \frac{q_x \cdot x}{2} = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad M_y - F_{Az} \cdot x + \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0.$$

Uz $q_x = q_0 \cdot x/l$, izrazi za unutarnje sile glase:

$$N = 0; \quad Q_z = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot l}, \quad Q_z(0) = F_{Az} = \frac{q_0 \cdot l}{6}, \quad Q_z(l) = -F_B = -\frac{q_0 \cdot l}{3};$$

$$M_y = \frac{q_0 \cdot l \cdot x}{6} - \frac{q_0 \cdot x^3}{6 \cdot l}, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(l) = 0.$$

Poprečna sila mijenja se po zakonu parabole drugog reda, a moment savijanja po zakonu parabole trećeg reda. Budući da su vrijednosti poprečnih sila na početku i na kraju područja suprotnih predznaka, parabola u razmatranom području ima nultu točku koju određujemo prema:

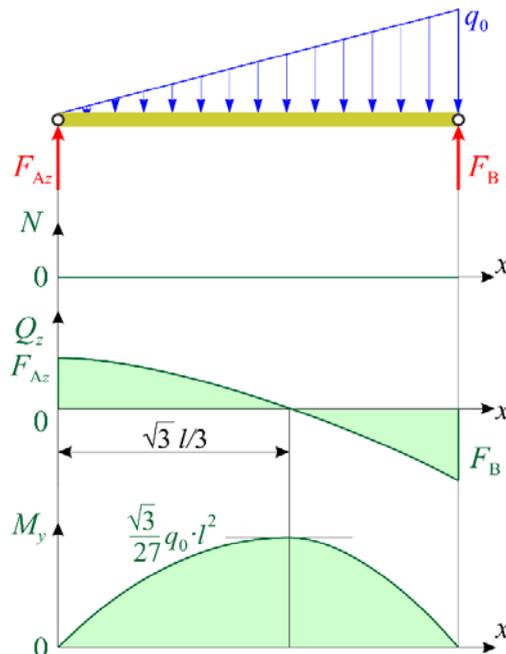
$$Q_z = 0: \quad \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0 \cdot x^2}{2 \cdot l} = 0, \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot l.$$

Maksimalni iznos momenta savijanja je

$$M_y \left(\frac{\sqrt{3} \cdot l}{3} \right) = \frac{\sqrt{3} \cdot q_0 \cdot l^2}{27}.$$

Možemo također zaključiti da poprečna sila ima ekstrem na mjestu $x = 0$ jer je nagib tangente na funkciju poprečne sile (iznos kontinuiranog opterećenja) na tom mjestu jednak nuli.

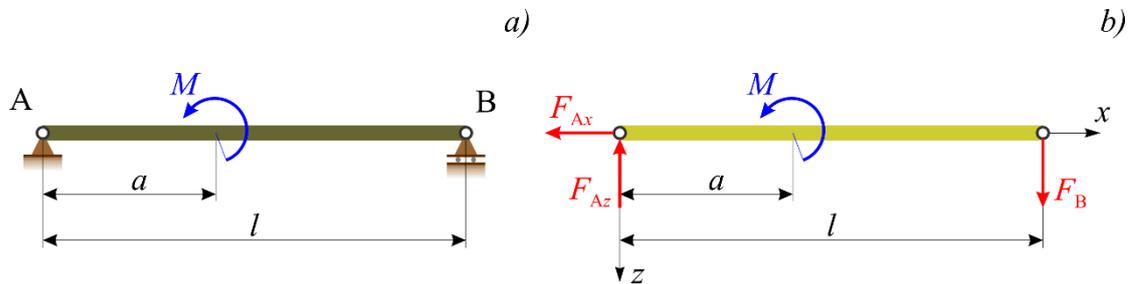
Prema gore izračunanim vrijednostima crtaju se dijagrami unutarnjih sila (slika 7.16.).



Slika 7.16. *Primjer 7.3.:* Dijagrami unutarnjih sila

Primjer 7.4.

Jednostavni puni nosač opterećen spregom zadanog momenta M zadan je prema slici 7.17.a. Odrediti reakcije veza te skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.



Slika 7.17. *Primjer 7.4.*: a) zadani nosač, b) nosač kao slobodno tijelo.

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Uvjeti ravnoteže nosača oslobođenog veza (slika 7.14.b) jesu:

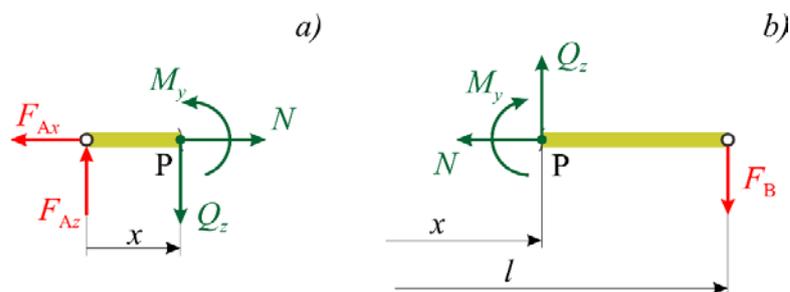
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F_B = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad -F_{Az} \cdot l + M = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Az} = \frac{M}{l}, \quad F_B = \frac{M}{l}.$$

Očito je da reakcije veza F_{Az} i F_B također čine spreg sila koji uravnotežuje zadani spreg.

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Sa slike 7.18.a može se zaključiti da postoje dva nezavisna područja za koja je potrebno odrediti raspored unutarnjih sila: lijevo i desno od mjesta djelovanja sprega sila momenta M .



Slika 7.18. *Primjer 7.4.*: Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od razmatranog presjeka u I. području, b) desno od razmatranog presjeka u II. području.

- I. područje: $0 \leq x \leq a$

Uvjeti ravnoteže za dio nosača lijevo od presjeka glase (slika 7.18.a):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad N - F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad Q_z - F_{Az} = 0, \end{aligned}$$

$$\sum M_P = 0: \quad M_y - F_{Az} \cdot x = 0.$$

Iz gornjih jednađbi je

$$N = 0; \quad Q_z = F_{Az} = \frac{M}{l};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x = \frac{M}{l} \cdot x, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(a) = M \cdot \frac{a}{l}.$$

- II. područje: $a \leq x \leq l$

Uvjeti ravnoteže za dio nosača desno od presjeka glase (slika 7.18.b):

$$\sum F_x = 0: \quad N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z + F_B = 0,$$

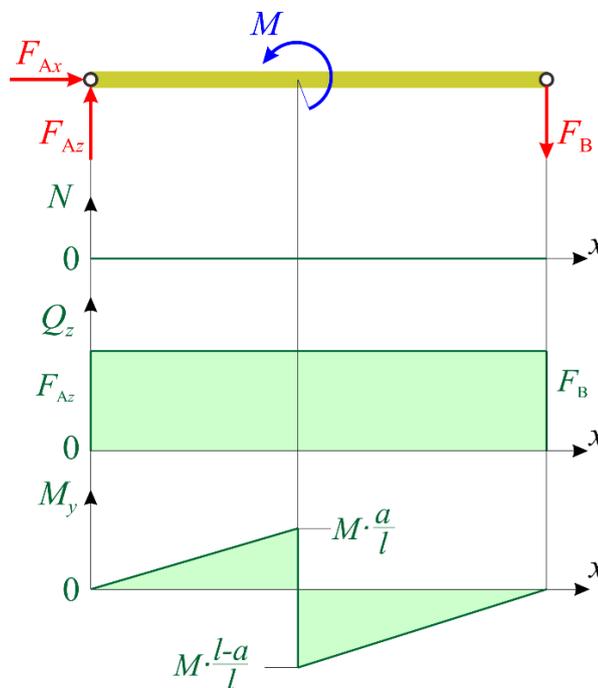
$$\sum M_P = 0: \quad -M_y - F_B \cdot (l - x) = 0.$$

Iz gornjih jednađbi je

$$N = 0; \quad Q_z = F_B = \frac{M}{l};$$

$$M_y = -F_B \cdot (l - x) = M \cdot \left(\frac{x}{l} - 1 \right), \quad M_y(a) = -M \cdot \frac{l - a}{l}, \quad M_y(l) = 0.$$

Na osnovi izračunanih vrijednosti crtaju se dijagrami unutarnjih sila (slika 7.19.).

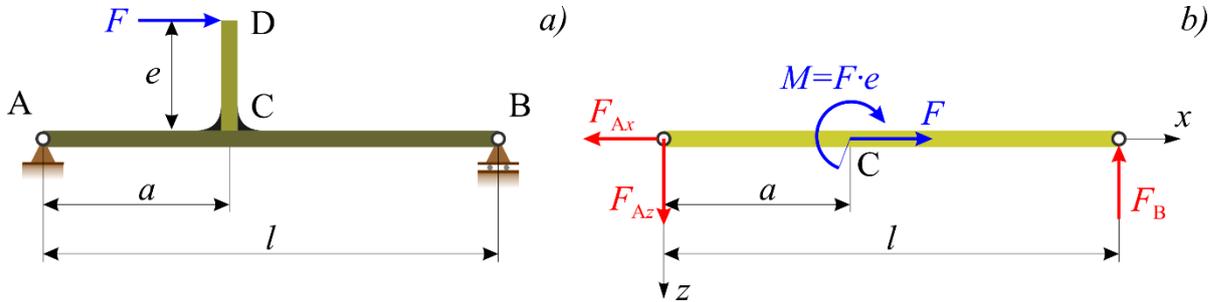


Slika 7.19. *Primjer 7.4.:* Dijagrami unutarnjih sila

Iz dijagrama momenta savijanja uočavamo da funkcija momenta savijanja na mjestu djelovanja sprega sila ima skok koji je upravo jednak momentu tog sprega sila.

Primjer 7.5.

Na slici 7.20.a prikazan je **jednostavni puni nosač opterećen posrednim opterećenjem** (u točki C zavarena je poluga CD sa silom F na kraju). Valja odrediti raspodjelu unutarnjih sila po područjima nosača te skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila. Zadano: F , l , a , e .



Slika 7.20. *Primjer 7.5.:* a) nosač opterećen posrednim opterećenjem, b) nosač kao slobodno tijelo.

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Redukcijom sile F na točku C dobijemo nosač AB opterećen silom F i odgovarajućim spregom sila čiji je moment $M = F \cdot e$ (slika 7.20.b).

Nakon što se nosač oslobodi od veza i utjecaj oslonaca zamijeni reakcijskim silama, možemo napisati sljedeće uvjete ravnoteže:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + F = 0,$$

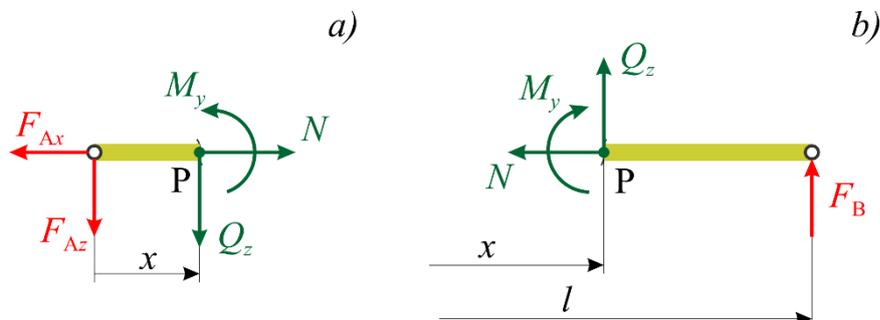
$$\sum F_z = 0: \quad \sum F_z = 0:,$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_{Az} \cdot l - M = 0.$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo:

$$F_{Ax} = F, \quad F_{Az} = F_B = \frac{M}{l} = \frac{F \cdot e}{l}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Dva su nezavisna područja za koja moramo odrediti funkcije unutarnjih sila: od A do C i od C do B (slika 7.21.).



Slika 7.21. *Primjer 7.5.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od razmatranog presjeka u I. području, b) desno od razmatranog presjeka u II. području.

- I. područje: $0 \leq x \leq a$

Uvjeti ravnoteže za dio nosača lijevo od presjeka glase (slika 7.21.a):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad N - F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad Q_z + F_{Az} = 0, \\ \sum M_p = 0: & \quad M_y + F_{Az} \cdot x = 0.\end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$\begin{aligned}N = F_{Ax} = F; \quad Q_z = -F_{Az} = -\frac{F \cdot e}{l}; \\ M_y = -F_{Az} \cdot x = -\frac{F \cdot e}{l} \cdot x, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(a) = -\frac{F \cdot e \cdot a}{l}.\end{aligned}$$

- II. područje: $a \leq x \leq l$

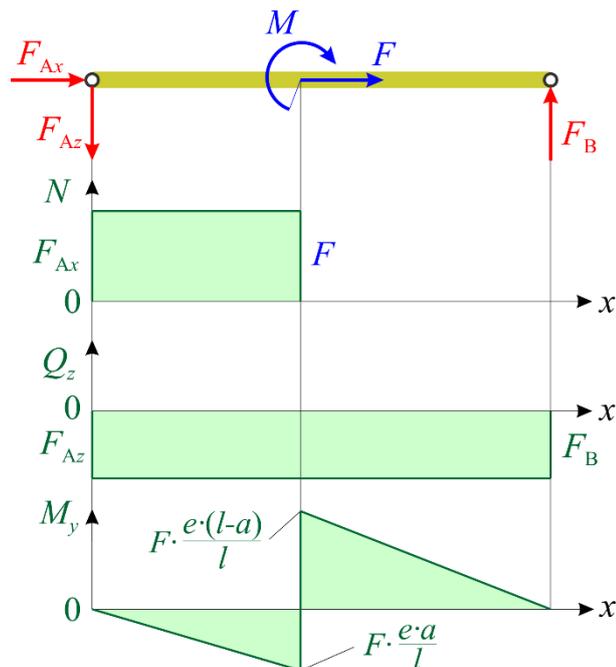
Uvjeti ravnoteže za dio nosača desno od presjeka (slika 7.21.b) glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad -N = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -Q_z - F_B = 0, \\ \sum M_p = 0: & \quad -M_y + F_B \cdot (l - x) = 0.\end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$\begin{aligned}N = 0; \quad Q_z = -F_B = -\frac{F \cdot e}{l}; \\ M_y = F_B \cdot (l - x) = \frac{F \cdot e}{l} \cdot (l - x), \quad M_y(a) = -\frac{F \cdot e \cdot (l - a)}{l}, \quad M_y(l) = 0.\end{aligned}$$

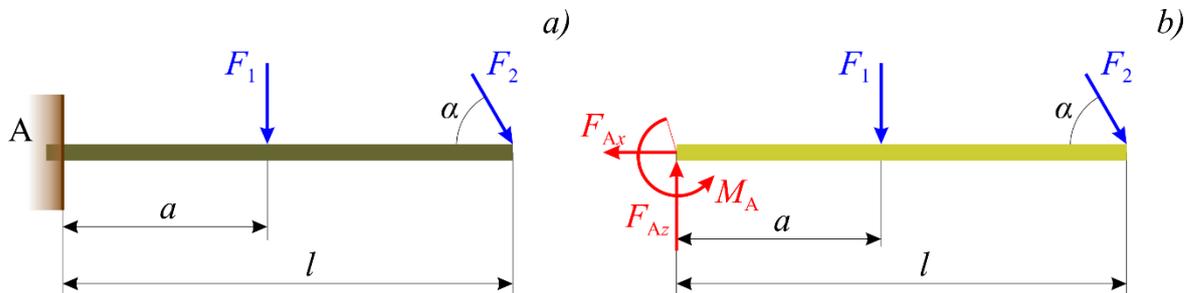
Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 7.22.



Slika 7.22. Primjer 7.5.: Dijagrami unutarnjih sila

Primjer 7.6.

Konzolni nosač (nosač koji je za podlogu vezan uklještenjem), opterećen dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 , prikazan je na slici 7.23.a.



Slika 7.23. Primjer 7.6.: a) konzolni nosač, b) konzola kao slobodno tijelo.

Valja odrediti reakcije veza te skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Pri oslobađanju konzolnog nosača od veze s podlogom utjecaj uklještenja zamjenjujemo reakcijskom silom kojoj su komponente F_{Ax} i F_{Az} te reakcijskim momentom M_A (slika 7.23.b). Smjerove tih reakcija pretpostavljamo.

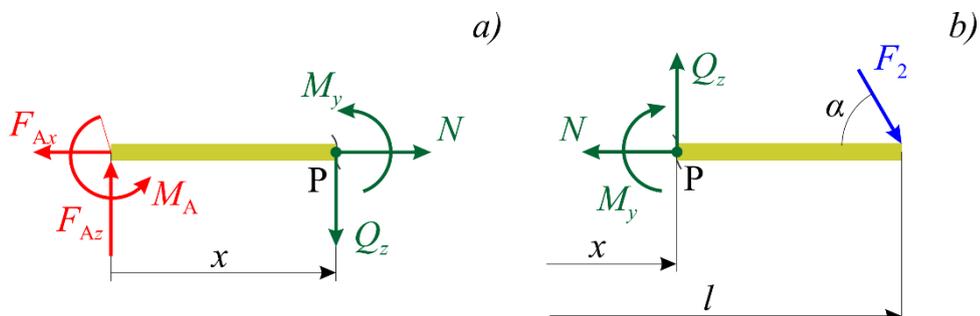
Nepoznate reakcije veza određujemo iz uvjeta ravnoteže nosača:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{Ax} + F_2 \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad M_A - F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot l = 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo:

$$F_{Ax} = F_2 \cdot \cos \alpha, \quad F_{Az} = F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha, \quad M_A = F_1 \cdot a + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot l.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Dva su nezavisna područja u kojima moramo odrediti funkcije unutarnjih sila (slika 7.24.).



Slika 7.24.: Primjer 7.6.: Dijelovi konzole kao slobodna tijela: a) lijevo od razmatranog presjeka u I. području, b) desno od razmatranog presjeka u II. području.

- I. područje: $0 \leq x \leq a$

Uvjeti ravnoteže za dio konzole lijevo od presjeka glase (slika 7.24.a):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad N - F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad Q_z - F_{Az} = 0, \\ \sum M_P = 0: & \quad M_y + M_A - F_{Az} \cdot x = 0,\end{aligned}$$

odakle je:

$$\begin{aligned}N = F_{Ax} = F_2 \cdot \cos \alpha; & \quad Q_z = F_{Az} = F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha; \\ M_y = F_{Az} \cdot x - M_A = -F_1 \cdot (a - x) - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l - x), \\ M_y(0) = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot l, & \quad M_y(a) = -F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l - a).\end{aligned}$$

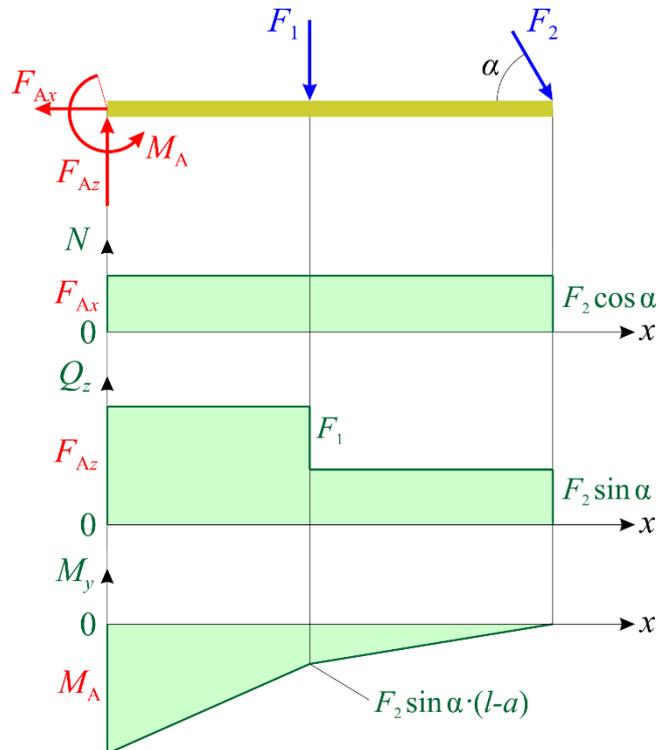
- II. područje: $a \leq x \leq l$

Uvjeti ravnoteže za dio konzole desno od presjeka (slika 7.24.b) glase:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad -N + F_2 \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -Q_z + F_2 \cdot \sin \alpha = 0, \\ \sum M_P = 0: & \quad -M_y - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l - x) = 0,\end{aligned}$$

odakle je:

$$\begin{aligned}N = F_2 \cdot \cos \alpha; & \quad Q_z = F_2 \cdot \sin \alpha; \\ M_y = -F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l - x), & \quad M_y(a) = -F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (l - a), \quad M_y(l) = 0.\end{aligned}$$



Slika 7.25. Primjer 7.6.: Dijagrami unutarnjih sila

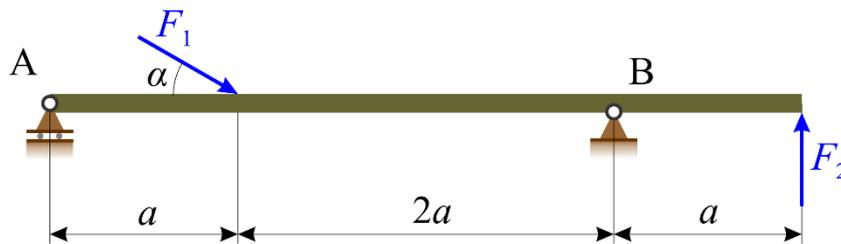
Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 7.25.

Primjer 7.7.

Linijski nosač s jednim prepustom opterećen je dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 te je vezan za podlogu pomičnim osloncem u A i nepomičnim osloncem u B (slika 7.26.).

Valja odrediti reakcije oslonaca i unutarnje sile po područjima nosača. Skicirati dijagrame unutarnjih sila.

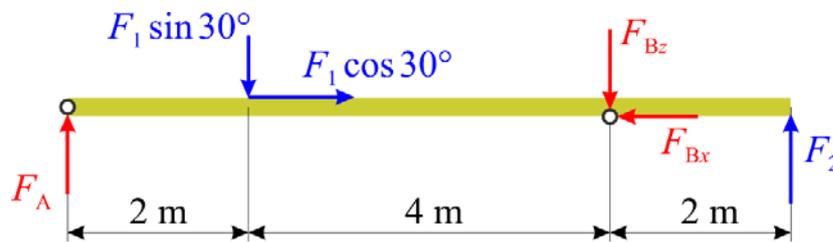
Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $F_1 = 6 \text{ kN}$, $F_2 = 6 \text{ kN}$, $\alpha = 30^\circ$.



Slika 7.26. *Primjer 7.7.*

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Nosač ćemo osloboditi od veza pa djelovanje pomičnog oslonca zamijeniti reakcijom F_A , a nepomičnoga dvjema komponentama F_{Bx} i F_{Bz} (slika 7.27.).



Slika 7.27. *Primjer 7.7.: Jednostavni nosač kao slobodno tijelo*

Primijenit ćemo drugi oblik uvjeta ravnoteže općeg sustava sila u ravnini:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Bx} + F_1 \cdot \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 - F_{Bz} \cdot 6 + F_2 \cdot 8 = 0,$$

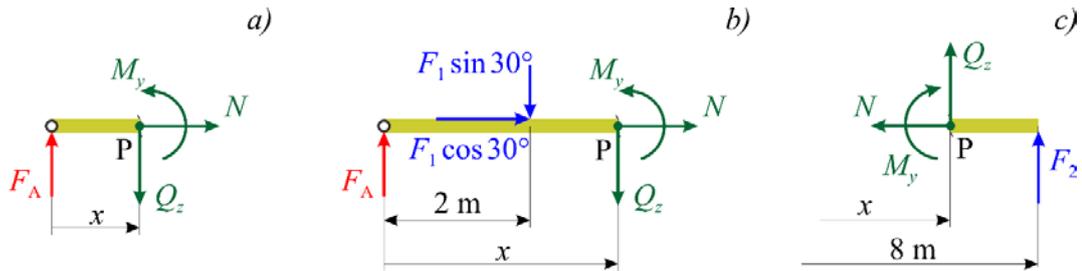
$$\sum M_B = 0: \quad -F_A \cdot 6 + F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot 4 + F_2 \cdot 2 = 0,$$

odakle se dobiju tražene reakcije oslonaca:

$$F_A = 4 \text{ kN};$$

$$F_{Bx} = 5,196 \text{ kN}; \quad F_{Bz} = 7 \text{ kN}.$$

Izračunavanje raspodjele unutarnjih sila po područjima nosača. Sa slike 7.27. vidljivo je da imamo tri nezavisna područja kojima moramo odrediti funkcije unutarnjih sila, područja između mjesta na kojima djeluju koncentrirane sile: vanjske aktivne i reakcije veza.



Slika 7.28. *Primjer 7.7.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od razmatranog presjeka u I. području, b) lijevo od razmatranog presjeka u II. području, c) desno od razmatranog presjeka u III. području

- I. područje: $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

Uvjeti ravnoteže za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.28.a) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad N &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad -F_A + Q_z &= 0, \\ \sum M_P = 0: \quad -F_A \cdot x + M_y &= 0. \end{aligned}$$

Sređivanjem tih jednadžbi dobiju se izrazi za unutarnje sile:

$$\begin{aligned} N &= 0; \quad Q_z = F_A = 4 \text{ kN}; \\ M_y &= F_A \cdot x = 4 \cdot x, \quad M_y(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(2) = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

- II. područje: $2 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$

Za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.28.b) uvjeti ravnoteže glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_1 \cdot \cos 30^\circ + N &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad -F_A + F_1 \cdot \sin 30^\circ + Q_z &= 0, \\ \sum M_P = 0: \quad -F_A \cdot x + F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot (x - 2) + M_y &= 0, \end{aligned}$$

odakle slijede izrazi za unutarnje sile:

$$\begin{aligned} N &= -F_1 \cdot \cos 30^\circ = -6 \cdot \cos 30^\circ = -5,196 \text{ kN}; \\ Q_z &= F_A - F_1 \cdot \sin 30^\circ = 4 - 6 \cdot \sin 30^\circ = 1 \text{ kN}; \\ M_y &= F_A \cdot x - F_1 \cdot \sin 30^\circ \cdot (x - 2) = 4 \cdot x - 6 \cdot \sin 30^\circ \cdot (x - 2), \\ M_y &= x + 6, \quad M_y(2) = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(6) = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

- III. područje: $6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m}$

Uvjeti ravnoteže za odsječeni dio nosača s desne strane presjeka (slika 7.28.c) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad -N &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad -F_2 - Q_z &= 0, \end{aligned}$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y + F_2 \cdot (8-x) = 0.$$

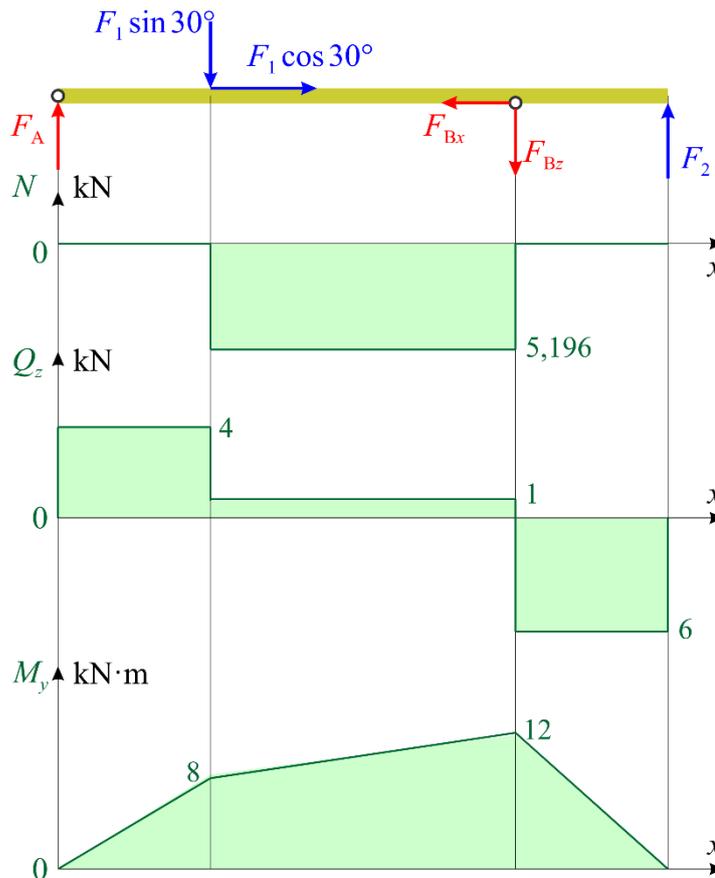
Izrazi za unutarnje sile prema gornjim jednažbama jesu:

$$N = 0; \quad Q_z = -F_2 = -6 \text{ kN},$$

$$M_y = F_2 \cdot (8-x) = 6 \cdot (8-x) = 48 - 6 \cdot x,$$

$$M_y(6) = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_y(8) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

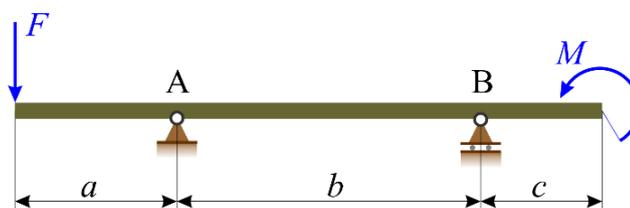
Na temelju izraza za unutarnje sile dobivenih za svako od triju područja mogu se nacrtati odgovarajući dijagrami (slika 7.29.).



Slika 7.29. *Primjer 7.7.:* Dijagrami unutarnjih sila

Primjer 7.8.

Linijski nosač s dva prepusta opterećen je koncentriranom silom iznosa F i spregom momenta M . Nosač je vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 7.30.).



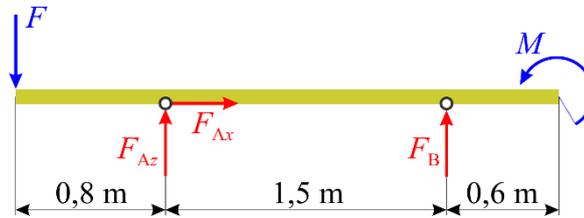
Slika 7.30. *Primjer 7.8.*

Valja odrediti reakcije oslonaca te dobiti izraze unutarnjih sila po područjima nosača. Potrebno je, također, skicirati dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $a = 0,8 \text{ m}$, $b = 1,5 \text{ m}$, $c = 0,6 \text{ m}$, $F = 8 \text{ kN}$, $M = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Nosač se oslobađa od veza te se djelovanje oslonaca zamjenjuje odgovarajućim reakcijama (slika 7.31.).



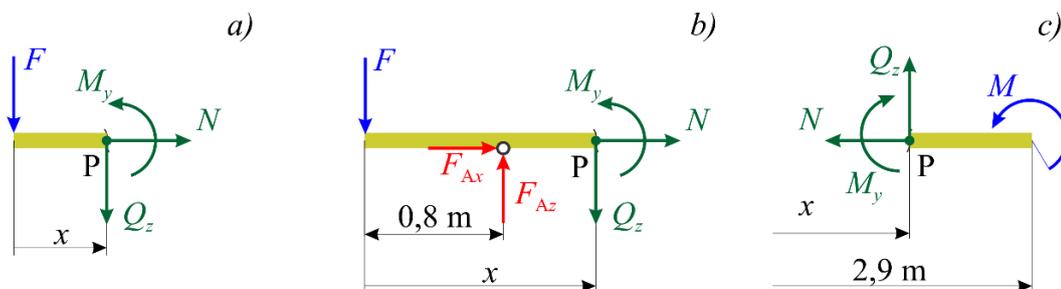
Slika 7.31. *Primjer 7.8.:* Nosač oslobođen od veza

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F - F_B = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad F \cdot 2,3 - F_{Az} \cdot 1,5 + M = 0, \end{aligned}$$

pa su iznosi reakcija oslonaca:

$$F_{Az} = 20,27 \text{ kN}; \quad F_B = -12,27 \text{ kN}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Tri su nezavisna područja za koja treba naći izraze za unutarnje sile (između mjesta djelovanja vanjskih aktivnih sila i reakcija veza).



Slika 7.32. *Primjer 7.8.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od presjeka u I. području, b) lijevo od presjeka u II. području, c) desno od presjeka u III. području

- I. područje: $0 \leq x \leq 0,8 \text{ m}$

Uvjeti ravnoteže za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.32.a) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad N = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad F + Q_z = 0, \\ \sum M_P = 0: & \quad F \cdot x + M_y = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se izrazi za unutarnje sile:

$$N = 0; \quad Q_z = -F = -8 \text{ kN};$$

$$M_y = -F \cdot x = -8 \cdot x, \quad M_y(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(0,8) = -6,4 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- II. područje: $0,8 \text{ m} \leq x \leq 2,3 \text{ m}$

Uvjeti ravnoteže odsječenog dijela nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.32.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad F - F_{Az} + Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad F \cdot x - F_{Az} \cdot (x - 0,8) + M_y = 0,$$

pa iz tih jednažbi slijede izrazi za unutarnje sile:

$$N = -F_{Ax} = 0 \text{ kN}; \quad Q_z = -F + F_{Az} = -8 + 20,267 = 12,267 \text{ kN};$$

$$M_y = -F \cdot x + F_{Az} \cdot (x - 0,8) = -8 \cdot x + 20,267 \cdot (x - 0,8) = 12,267 \cdot x - 16,214,$$

$$M_y(0,8) = -6,4 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(2,3) = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

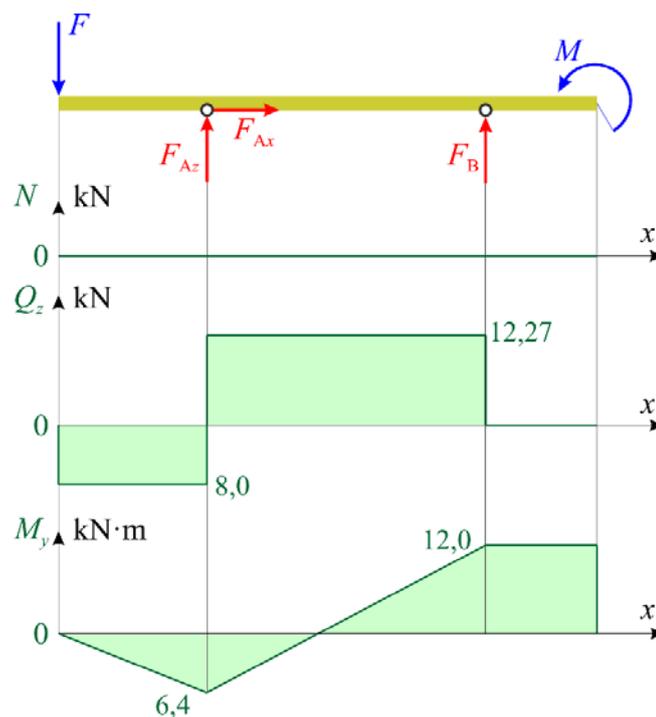
- III. područje: $2,3 \text{ m} \leq x \leq 2,9 \text{ m}$

Za odsječeni dio nosača s desne strane presjeka (slika 7.32.c) uvjeti ravnoteže jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad -N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad Q_z = 0 \text{ kN},$$

$$\sum M_P = 0: \quad M_y = M = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



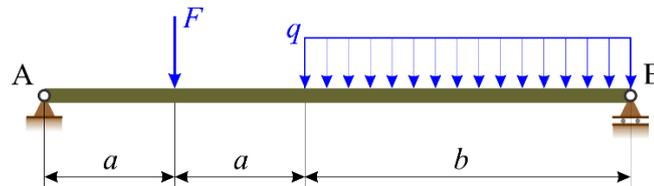
Slika 7.33. *Primjer 7.8.: Dijagrami unutarnjih sila*

Na slici 7.33. prikazani su dijagrami unutarnjih sila razmatranog nosača.

Primjer 7.9.

Jednostavni linijski nosač opterećen je koncentriranom silom iznosa F i jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q . Nosač je vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 7.34.).

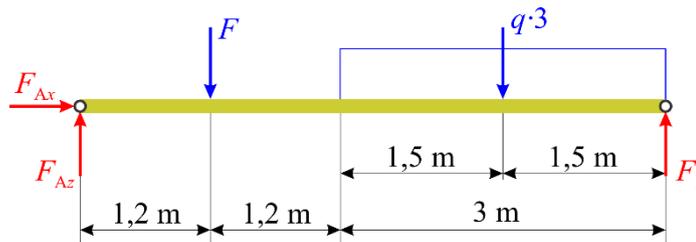
Potrebno je odrediti reakcije oslonaca i unutarnje sile po područjima nosača te skicirati dijagrame unutarnjih sila. Zadano je: $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $F = 10 \text{ kN}$, $q = 12 \text{ kN/m}$.



Slika 7.34. *Primjer 7.9.*

Rješenje:

Izračunavanje reakcija veza. Nosač se oslobađa od veza te se djelovanje nepomičnog oslonca zamjenjuje dvjema komponentama reakcije F_{Ax} i F_{Az} , a pomičnog oslonca reakcijom F_B (slika 7.35.).



Slika 7.35. *Primjer 7.9.: Jednostavni nosač kao slobodno tijelo s prikazom opterećenja*

Jednadžbe ravnoteže nosača glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F + q \cdot 3 - F_B = 0, \\ \sum M_B = 0: & \quad -F_{Az} \cdot 5,4 + F \cdot 4,2 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0. \end{aligned}$$

Rješavanjem tih jednadžbi dobije se:

$$F_{Az} = 17,78 \text{ kN}; \quad F_B = 28,22 \text{ kN}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Tri su nezavisna područja za koja treba naći izraze za unutarnje sile: od oslonca A do mjesta djelovanja sile F , od sile F do početka djelovanja kontinuiranog opterećenja te od tog mjesta do oslonca B.

- *I. područje:* $0 \leq x \leq 1,2 \text{ m}$

Za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.36.a) uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + N = 0,$$

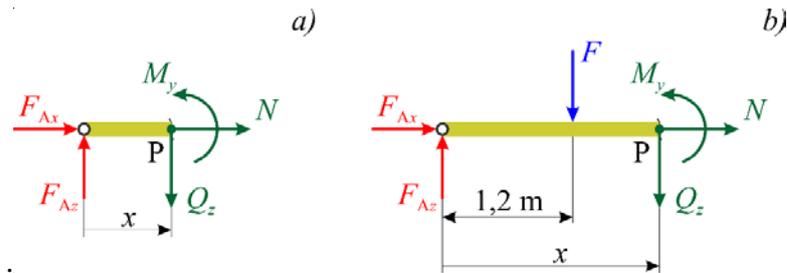
$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -F_{Az} \cdot x + M_y = 0,$$

a iz tih jednadžbi slijede izrazi za unutarnje sile:

$$N = -F_{Ax} = 0 \text{ kN}; \quad Q_z = F_{Az} = 17,778 \text{ kN};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x = 17,778 \cdot x, \quad M_y(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(1,2) = 21,33 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



Slika 7.36. *Primjer 7.9.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela lijevo od razmatranog presjeka: a) u I. području, b) u II. području.

- II. područje: $1,2 \text{ m} \leq x \leq 2,4 \text{ m}$

Jednadžbe ravnoteže za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.36.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F + Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -F_{Az} \cdot x + F \cdot (x - 1,2) + M_y = 0,$$

a izrazi za unutarnje sile jesu:

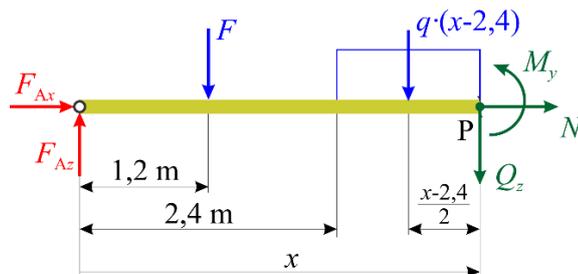
$$N = -F_{Ax} = 0 \text{ kN}; \quad Q_z = F_{Az} - F = 17,778 - 10 = 7,778 \text{ kN};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x - F \cdot (x - 1,2) = 17,778 \cdot x - 10 \cdot (x - 1,2) = 7,778 \cdot x + 12,$$

$$M_y(1,2) = 21,33 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(2,4) = 30,67 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- III. područje: $2,4 \text{ m} \leq x \leq 5,4 \text{ m}$

Za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.37.) jednadžbe ravnoteže glase:



Slika 7.37. *Primjer 7.9.:* Dio nosača kao slobodno tijelo lijevo od presjeka za III. područje

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F + q \cdot (x - 2,4) + Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -F_{Az} \cdot x + F \cdot (x - 1,2) + q \cdot (x - 2,4) \cdot \frac{x - 2,4}{2} + M_y = 0.$$

Sređivanjem gornjih jednažbi dobiju se izrazi za unutarnje sile:

$$N = -F_{Ax} = 0 \text{ kN};$$

$$Q_z = F_{Az} - F - q \cdot (x - 2,4) = 17,778 - 10 - 12 \cdot (x - 2,4) = 36,578 - 12 \cdot x,$$

$$Q_z(2,4) = 7,778 \text{ kN}, \quad Q_z(5,4) = -28,222 \text{ kN};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x - F \cdot (x - 1,2) - q \cdot \frac{(x - 2,4)^2}{2},$$

$$M_y = 17,778 \cdot x - 10 \cdot (x - 1,2) - 6 \cdot (x - 2,4)^2,$$

$$M_y = -6 \cdot x^2 + 36,578 \cdot x - 22,56,$$

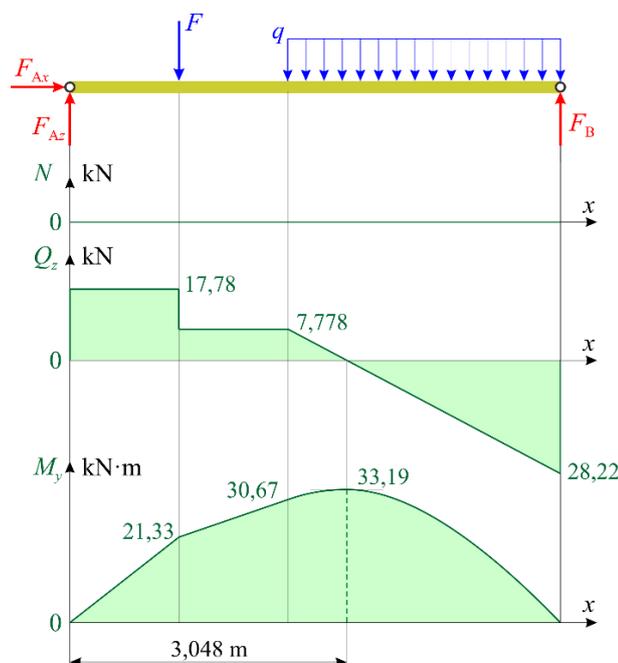
$$M_y(2,4) = 30,67 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(5,4) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Izraz za moment savijanja u trećem području je kvadratna funkcija koja ima tjeme na mjestu gdje je poprečna sila jednaka nuli:

$$Q_z = 0: \quad 36,578 - 12 \cdot x = 0, \quad x = 3,048 \text{ m}.$$

U tom presjeku moment savijanja ima ekstremnu vrijednost koja iznosi:

$$M_y(3,048) = 33,19 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



Slika 7.38. *Primjer 7.9.: Dijagrami unutarnjih sila*

Dijagrami dobivenih unutarnjih sila prikazani su na slici 7.38.

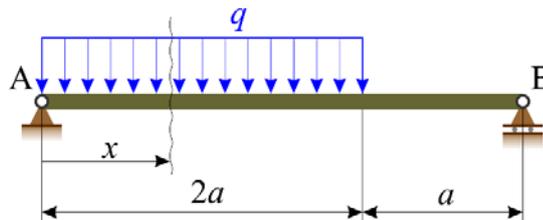
ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 7.1. Jednostavni linijski nosač opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q te vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika Z.7.1.). Valja odrediti reakcije oslonaca i analitičke izraze za unutarnje sile u označenom presjeku nosača.

Skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila, a rezultate kontrolirati koristeći se programskim paketom MDSolids.

Zadano je: $a = 1,5 \text{ m}$, $q = 6 \text{ kN/m}$.

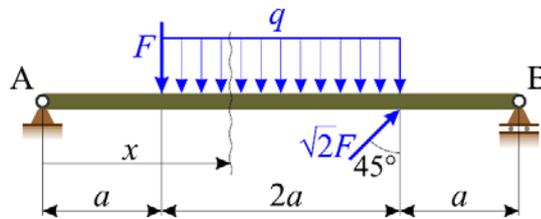


Slika Z.7.1. Zadatak 7.1.

Zadatak 7.2. Jednostavni linijski nosač opterećen je dvjema koncentriranim silama i jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem. Nosač je za podlogu vezan nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika Z.7.2.). Potrebno je odrediti reakcije oslonaca i analitičke izraze za unutarnje sile u označenom presjeku nosača.

Skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $F = 2 \text{ kN}$, $q = 3 \text{ kN/m}$.

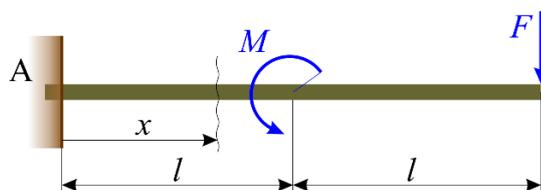


Slika Z.7.2. Zadatak 7.2.

Zadatak 7.3. Konzolni nosač opterećen je spregom momenta M i koncentriranom silom iznosa F . Konzola je vezana za podlogu uklještenjem u A (slika Z.7.3.). Potrebno je odrediti reakcijsku silu i moment na mjestu uklještenja te analitičke izraze za unutarnje sile u označenom presjeku nosača.

Skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $l = 1 \text{ m}$, $M = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F = 2 \text{ kN}$.



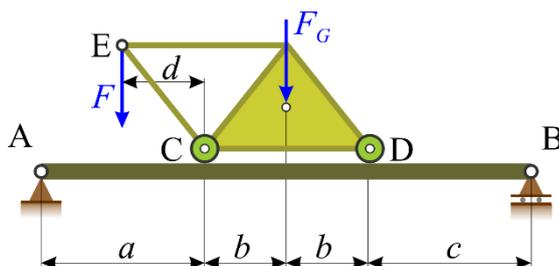
Slika Z.7.3. Zadatak 7.3.

Zadatak 7.4. Na jednostavnom nosaču nalazi se dizalica težine F_G opterećena silom F u E, u položaju prikazanome na slici Z.7.4.

Potrebno je odrediti sile pritiska dizalice na nosač u točkama C i D, reakcije veza u osloncima nosača te analitičke izraze za unutarnje sile u svim područjima nosača. Skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

Dobivene rezultate kontrolirati korištenjem programskog paketa MDSolids.

Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $d = 1 \text{ m}$, $F = 8 \text{ kN}$, $F_G = 20 \text{ kN}$.

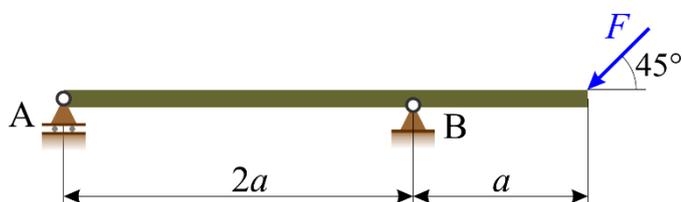


Slika Z.7.4. Zadatak 7.4.

Zadatak 7.5. Nosač s prepustom opterećen je silom $F = 4\sqrt{2} \text{ kN}$ na kraju prepusta (slika Z.7.5.).

Valja odrediti reakcije veza i analitičke izraze za unutarnje sile u neovisnim područjima nosača ako je $a = 2 \text{ m}$.

Skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

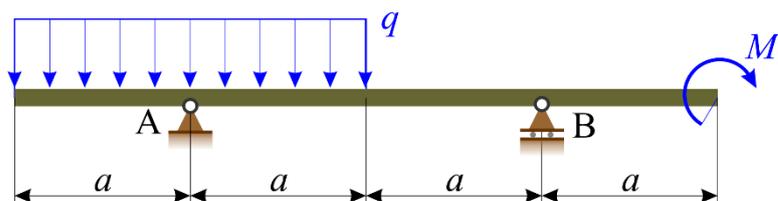


Slika Z.7.5. Zadatak 7.5.

Zadatak 7.6. Nosač s dva prepusta opterećen je jednolikim kontinuiranim opterećenjem q i spregom sila momenta M (slika Z.7.6.). Potrebno je odrediti reakcije oslonaca i analitičke izraze za unutarnje sile u neovisnim područjima nosača.

Skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $M = 4 \text{ kN}\cdot\text{m}$.



Slika Z.7.6. Zadatak 7.6.

7.2. NOSAČ S GERBEROVIM ZGLOBOM

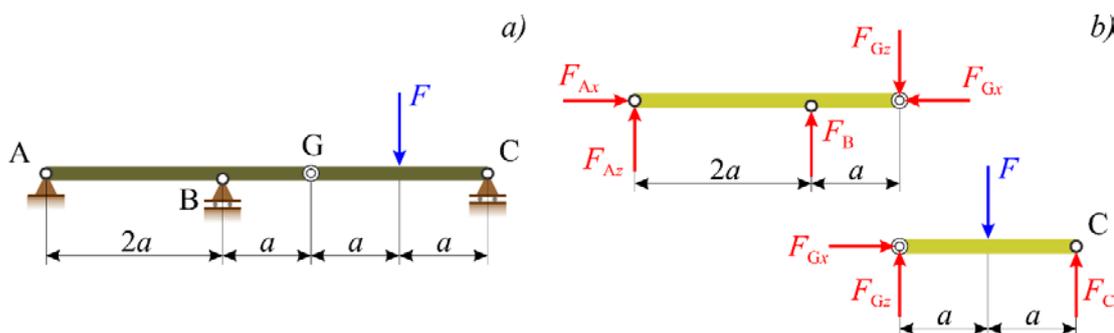
Nosači mogu biti sastavljeni od dvaju ili više dijelova koji su međusobno spojeni zglobom. Takav zglob, koji se nalazi unutar raspona nosača, naziva se Gerberovim zglobom (označavat ćemo ga velikim slovom G), a takav nosač naziva se nosačem s Gerberovim zglobom odnosno zglobovima.

Pri izračunavanju reakcija oslonaca primjenjuje se postupak opisan u poglavlju 4.4. Ravnoteža sustava krutih tijela. Postavljaju se uvjeti ravnoteže za svaki dio nosača, kako je to pokazano na slici 4.22., te se rješavanjem sustava jednačbi dolazi do reakcija oslonaca. Za određivanje unutarnjih sila po područjima nosača primjenjuje se postupak koji je opisan za nosače načinjene iz jednog dijela. Gerberov zglob ne predstavlja pritom mjesto poremećaja.

Primjer 7.10.

Na slici 7.39.a prikazan je puni nosač sastavljen od dvaju krutih tijela koja su međusobno povezana zglobom u točki G (Gerberov zglob). Nosač je opterećen silom F .

Valja odrediti reakcije u osloncima i raspodjelu unutarnjih sila po područjima nosača te nacrtati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.



Slika 7.39. *Primjer 7.10.*: a) nosač s Gerberovim zglobom, b) dijelovi nosača kao slobodna tijela.

Rješenje:

Izračunavanje reakcija oslonaca. Oslobođanjem svakog dijela nosača od veza, zamjenom veza odgovarajućim reakcijama veza svaki dio se može razmatrati kao slobodno tijelo pod djelovanjem općeg sustava sila u ravnini (slika 7.39.b).

Gerberov zglob zamijenjen je pritom dvjema komponentama sile međusobnog djelovanja dijelova nosača.

Iz uvjeta ravnoteže napisanih za desni dio nosača (slika 7.39.b):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad & F_{Gx} = 0, \\ \sum M_G = 0: \quad & F_C \cdot 2 \cdot a - F \cdot a = 0, \\ \sum M_C = 0: \quad & F \cdot a - F_{Gz} \cdot 2 \cdot a = 0 \end{aligned}$$

dobije se

$$F_{Gx} = 0; \quad F_C = F_{Gz} = F_G = \frac{F}{2}.$$

Uvjeti ravnoteže lijevog dijela nosača glase (slika 7.39.b):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} - F_{Gx} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} - F_B + F_{Gz} = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad F_B \cdot 2 \cdot a - F_{Gz} \cdot 3 \cdot a = 0,\end{aligned}$$

odakle je

$$F_{Ax} = 0, \quad F_A = F_{Az} = -\frac{F}{4}, \quad F_B = \frac{3 \cdot F}{4}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Uočavamo tri nezavisna područja za koja je potrebno postaviti zakone promjene unutarnjih sila.

Možemo odmah ustvrditi da će uzdužna sila po svim područjima biti jednaka nuli.

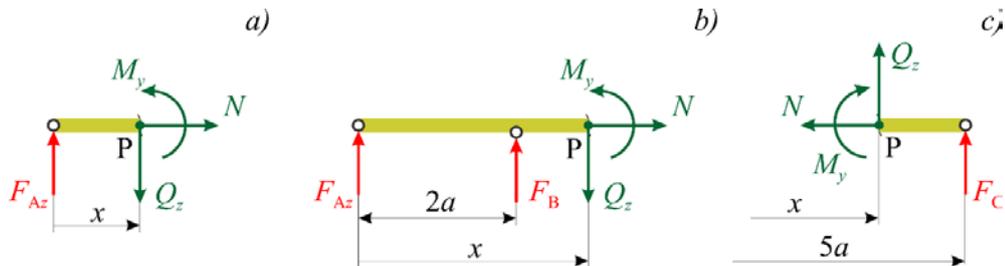
- *I. područje:* $0 \leq x \leq 2a$

Za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.40.a) uvjeti ravnoteže glase:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0: & \quad Q_z - F_{Az} = 0, \\ \sum M_P = 0: & \quad M_y - F_{Az} \cdot x = 0,\end{aligned}$$

a iz njih slijede izrazi za unutarnje sile:

$$\begin{aligned}Q_z = F_{Az} &= -\frac{F}{4}; \\ M_y = F_{Az} \cdot x &= -\frac{F}{4} \cdot x, \quad M_y(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(2a) = -\frac{F \cdot a}{2}.\end{aligned}$$



Slika 7.40. *Primjer 7.10.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od presjeka u I. području, b) lijevo od presjeka u II. području, c) desno od presjeka u III. području.

- *II. područje:* $2a \leq x \leq 4a$

Jednadžbe ravnoteže za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.40.b) jesu:

$$\begin{aligned}\sum F_z = 0: & \quad Q_z - F_{Az} - F_B = 0, \\ \sum M_P = 0: & \quad M_y - F_{Az} \cdot x - F_B \cdot (x - 2a) = 0,\end{aligned}$$

pa su izrazi za unutarnje sile:

$$Q_z = F_{Az} + F_B = \frac{F}{2};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x + F_B \cdot (x - 2a) = \frac{F \cdot (x - 3a)}{2},$$

$$M_y(2a) = -\frac{F \cdot a}{2}, \quad M_y(4a) = \frac{F \cdot a}{2}.$$

- II. područje: $4a \leq x \leq 5a$

Jednadžbe ravnoteže za odsječeni dio nosača s desne strane presjeka (slika 7.40.c) glase:

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z - F_C = 0,$$

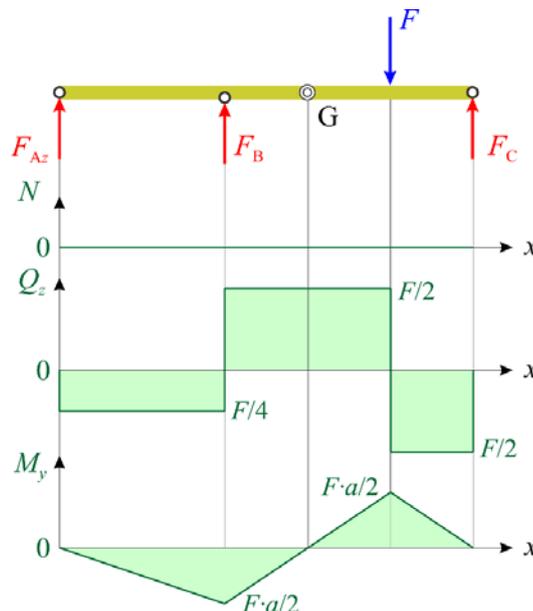
$$\sum M_P = 0: \quad -M_y + F_C \cdot (5a - x) = 0,$$

a njihovim sređivanjem dobiju se izrazi za unutarnje sile:

$$Q_z = -F_C = -\frac{F}{2};$$

$$M_y = F_C \cdot (5 \cdot a - x) = \frac{F \cdot (5 \cdot a - x)}{2}, \quad M_y(4a) = \frac{F \cdot a}{2}, \quad M_y(5a) = 0.$$

Na temelju izraza za unutarnje sile dobivenih za svako područje crtaju se odgovarajući dijagrami (slika 7.41.).



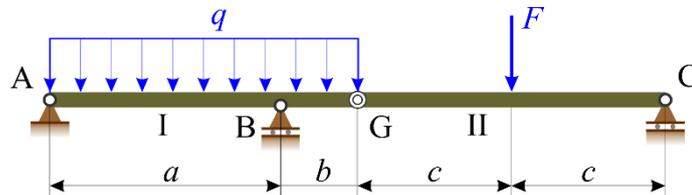
Slika 7. 41. *Primjer 7.10.:* Dijagrami unutarnjih sila

Primjer 7.11.

Nosač s Gerberovim zglobovima sastavljen od dvaju dijelova opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q i koncentriranom silom iznosa F . Nosač je vezan za podlogu nepomičnim osloncem u A, pomičnim osloncima u B i C, a dijelovi su međusobno spojeni zglobovima u G (slika 7.42.).

Valja odrediti reakcije oslonaca te dobiti izraze unutarnjih sila po područjima nosača. Potrebno je, također, skicirati dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $q = 8 \text{ kN/m}$, $F = 6 \text{ kN}$.

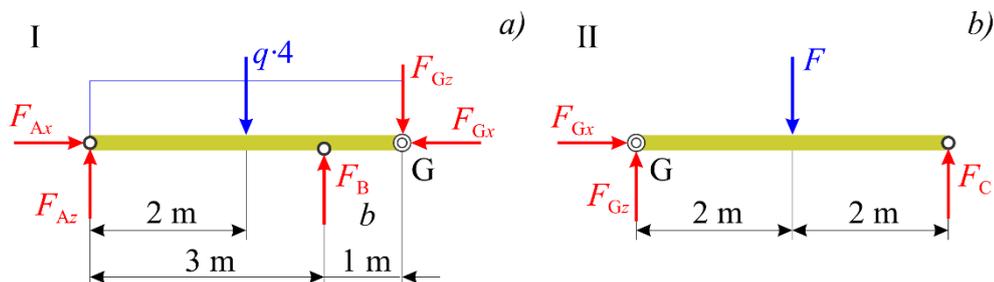


Slika 7.42. *Primjer 7.8.*

Rješenje:

Izračunavanje reakcija oslonaca. Nosač je sastavljen od dvaju dijelova, pa će se svaki dio prikazati kao slobodno tijelo oslobođeno od veza.

Djelovanje nepomičnog oslonca u A zamjenjuje se dvjema komponentama reakcije F_{Ax} i F_{Az} , a pomičnih oslonaca u B i C reakcijama F_B i F_C . U zglobu G potrebno je na svaki dio dodati dvije komponente, F_{Gx} i F_{Gz} , kojima dijelovi nosača po principu akcije i reakcije djeluju jedan na drugi (slika 7.43.).



Slika 7.43. *Primjer 7.11.: Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) dio I, b) dio II.*

Za desni dio nosača (dio II, slika 7.43.b) mogu se napisati sljedeće jednadžbe ravnoteže:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Gx} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Gz} + F - F_C = 0, \\ \sum M_G = 0: & \quad -F \cdot 2 + F_C \cdot 4 = 0, \end{aligned}$$

odakle se dobije:

$$F_C = 3 \text{ kN}; \quad F_{Gx} = 0, \quad F_{Gz} = 3 \text{ kN}.$$

Jednadžbe ravnoteže za lijevi dio nosača (dio I, slika 7.43.a) jesu:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} - F_{Gx} = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + q \cdot 4 - F_B + F_{Gz} = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad -q \cdot 4 \cdot 2 + F_B \cdot 3 - F_{Gz} \cdot 4 = 0, \end{aligned}$$

a iz ovih jednačbi je

$$F_{Ax} = 0, \quad F_{Az} = 9,667 \text{ kN}; \quad F_B = 25,33 \text{ kN}.$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Četiri su neovisna područja u kojima je potrebno odrediti raspodjelu unutarnjih sila.

- I. područje: $0 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$

Uvjeti ravnoteže za odsječeni dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.44.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + q \cdot x + Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -F_{Az} \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_y = 0,$$

odakle je:

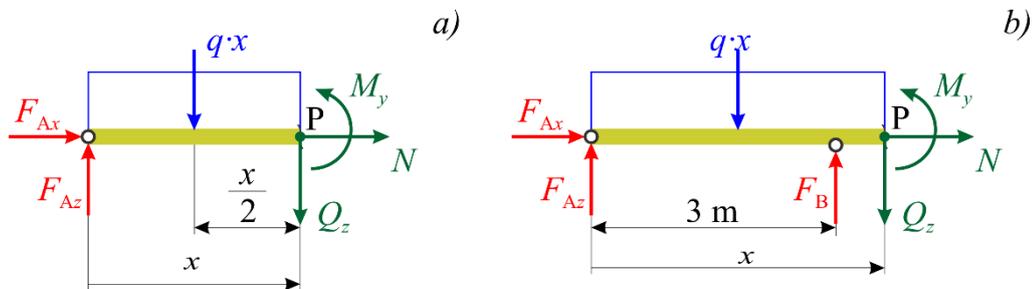
$$N = 0;$$

$$Q_z = F_{Az} - q \cdot x = 9,667 - 8 \cdot x,$$

$$Q_z(0) = 9,667 \text{ kN}, \quad Q_z(3) = -14,33 \text{ kN};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = 9,667 \cdot x - 4 \cdot x^2,$$

$$M_y(0) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(3) = -7 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



Slika 7.44. *Primjer 7.8.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od presjeka u I. području, b) lijevo od presjeka u II. području

Budući da poprečna sila u prvom području mijenja predznak, očito je da je negdje u tom području nulta točka te funkcije, što nadalje znači da moment savijanja ima ekstrem na tom mjestu.

Nultu točku određujemo kako slijedi:

$$Q_z = 0: \quad 9,667 - 8 \cdot x = 0, \quad x = 1,208 \text{ m}.$$

U tom presjeku moment savijanja ima maksimalnu vrijednost koja iznosi:

$$M_y(1,208) = 5,841 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- II. područje: $3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$

Za dio nosača s lijeve strane presjeka (slika 7.44.b) vrijede sljedeće jednačbe ravnoteže:

$$\sum F_x = 0: \quad N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + q \cdot x - F_B + Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -F_{Az} \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - F_B \cdot (x-3) + M_y = 0,$$

a iz njih slijede izrazi za unutarnje sile:

$$N = 0 \text{ kN};$$

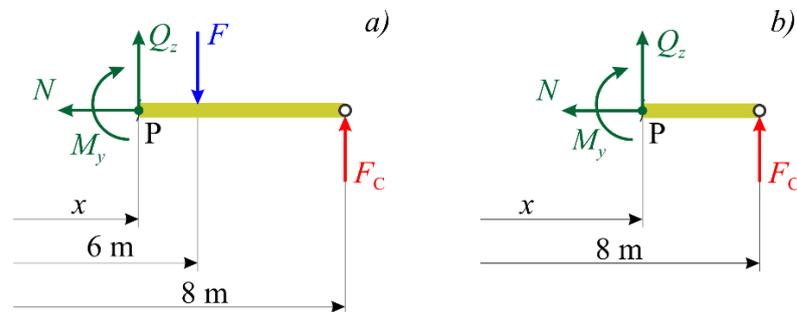
$$Q_z = F_{Az} - q \cdot x + F_B = 9,667 - 8 \cdot x + 25,333 = 35 - 8 \cdot x,$$

$$Q_z(3) = 11 \text{ kN}, \quad Q_z(4) = 3 \text{ kN};$$

$$M_y = F_{Az} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} + F_B \cdot (x-3) = 9,667 \cdot x - 4 \cdot x^2 + 25,333 \cdot (x-3),$$

$$M_y = -4 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 76, \quad M_y(3) = -7 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(4) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- III. područje: $4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$



Slika 7.45. *Primjer 7.11.*: Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) desno od presjeka u III. području, b) desno od presjeka u IV. području.

Jednačbe ravnoteže za dio nosača desno od presjeka (slika 7.45.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z + F - F_C = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y - F \cdot (6-x) + F_C \cdot (8-x) = 0,$$

pa su izrazi za unutarnje sile u III. području:

$$N = 0 \text{ kN};$$

$$Q_z = F - F_C = 6 - 3 = 3 \text{ kN};$$

$$M_y = -F \cdot (6-x) + F_C \cdot (8-x) = -6 \cdot (6-x) + 3 \cdot (8-x) = 3 \cdot x - 12,$$

$$M_y(4) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(6) = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

- IV. područje: $6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m}$

Razmatranjem jednadžbi ravnoteže za dio nosača desno od presjeka (slika 7.45.b):

$$\sum F_x = 0: \quad -N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z - F_C = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y + F_C \cdot (8-x) = 0$$

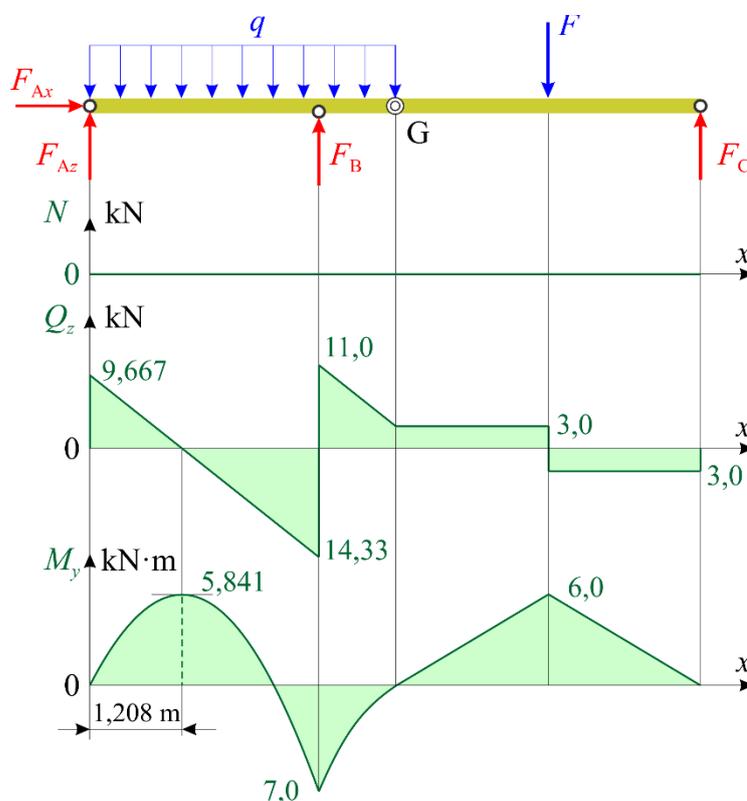
dobiju se izrazi za unutarnje sile:

$$N = 0 \text{ kN}; \quad Q_z = -F_C = -3 \text{ kN};$$

$$M_y = F_C \cdot (8-x) = 3 \cdot (8-x) = 24 - 3 \cdot x,$$

$$M_y(6) = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_y(8) = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Na temelju izraza za unutarnje sile dobivenih za svako područje crtaju se odgovarajući dijagrami (slika 7.46.).



Slika 7.46. *Primjer 7.11.: Dijagrami unutarnjih sila*

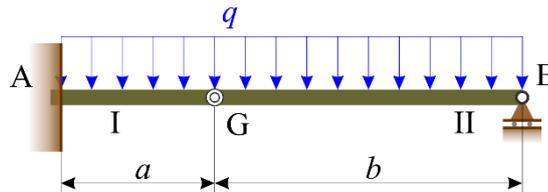
ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 7.7. Nosač s Gerberovim zglobom sastavljen od dvaju dijelova opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q . Nosač je vezan za podlogu uklještenjem u A i pomičnim osloncem u B, a dijelovi su međusobno spojeni zglobom u G (slika Z.7.7.).

Valja odrediti reakcije oslonaca te dobiti izraze unutarnjih sila po područjima nosača. Potrebno je, također, skicirati dijagrame unutarnjih sila.

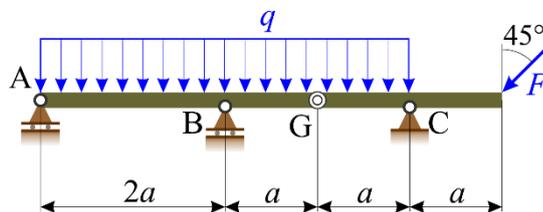
Zadano je: $a = 2 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $q = 12 \text{ kN/m}$.



Slika Z.7.7. Zadatak 7.7.

Zadatak 7.8. Nosač s Gerberovim zglobom sastavljen od dvaju dijelova opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q i koncentriranom silom iznosa F . Nosač je vezan za podlogu pomičnim osloncima u A i B, nepomičnim osloncem u C, a dijelovi su međusobno spojeni zglobom u G (slika Z.7.8.).

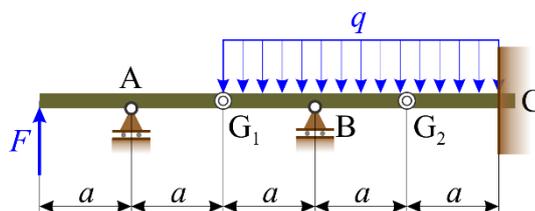
Valja odrediti reakcije oslonaca i skicirati dijagrame unutarnjih sila ako je zadano: $a = 1 \text{ m}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $F = 2\sqrt{2} \text{ kN}$.



Slika Z.7.8. Zadatak 7.8.

Zadatak 7.9.

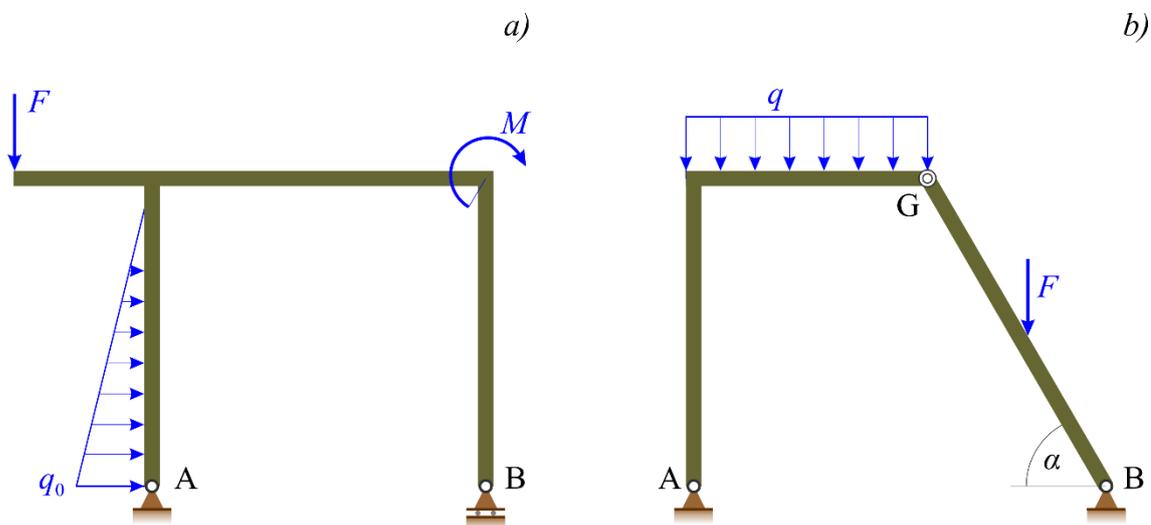
Nosač s Gerberovim zglobovima sastavljen od triju dijelova opterećen je koncentriranom silom iznosa F i jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q . Nosač je vezan za podlogu pomičnim osloncima u A i B, uklještenjem u C, a dijelovi su međusobno spojeni zglobovima u G_1 i G_2 (slika Z.7.9.). Potrebno je odrediti reakcije oslonaca i skicirati dijagrame unutarnjih sila. Zadano je: a , q , $F = 1,5 \cdot q \cdot a$.



Slika Z.7.9. Zadatak 7.9.

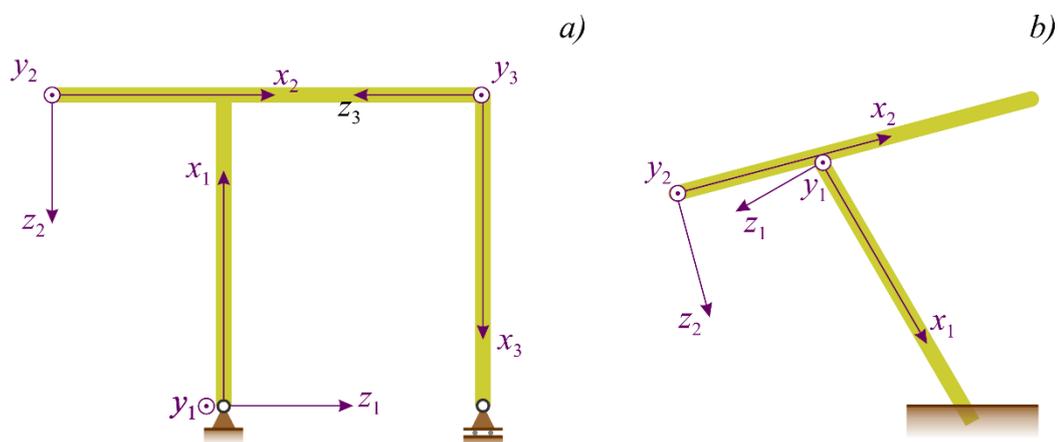
7.3. OKVIRNI NOSAČI

Ravninski okvirni nosači jesu puni nosači, sastavljeni od više jednostavnih nosača međusobno vezanih pod nekim kutom, bilo čvrstim bilo zglobnim vezama tako da osi svih tih dijelova leže u jednoj ravnini u kojoj leži i opterećenje okvira (slika 7.47.).



Slika 7.47. Okvirni nosač: a) s krutim vezama, b) sa zglobnom vezom (trozglob).

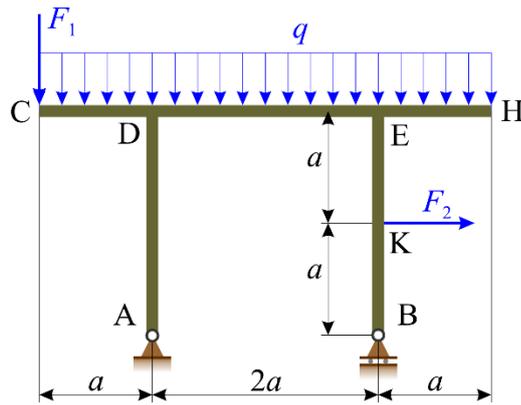
Kod okvira treba voditi računa o lokalnim koordinatnim sustavima koji se vezuju za svaki njegov pojedini dio i to na sljedeći način: promatrač pojedine dijelove okvira gleda s unutarnje strane okvira pri čemu os Oy uvijek izlazi iz slike, a os Ox pada u uzdužnu os promatranog dijela s pozitivnim smjerom slijeva nadesno; s obzirom na to da je riječ o desnom pravokutnom koordinatnom sustavu, na taj način definirana je i os Oz (slike 7.48.a i 7.48.b).



Slika 7.48. Lokalni koordinatni sustavi okvirnog nosača: a) dijelovi međusobno okomiti, b) dijelovi kruto vezani pod kutom.

Primjer 7.12.

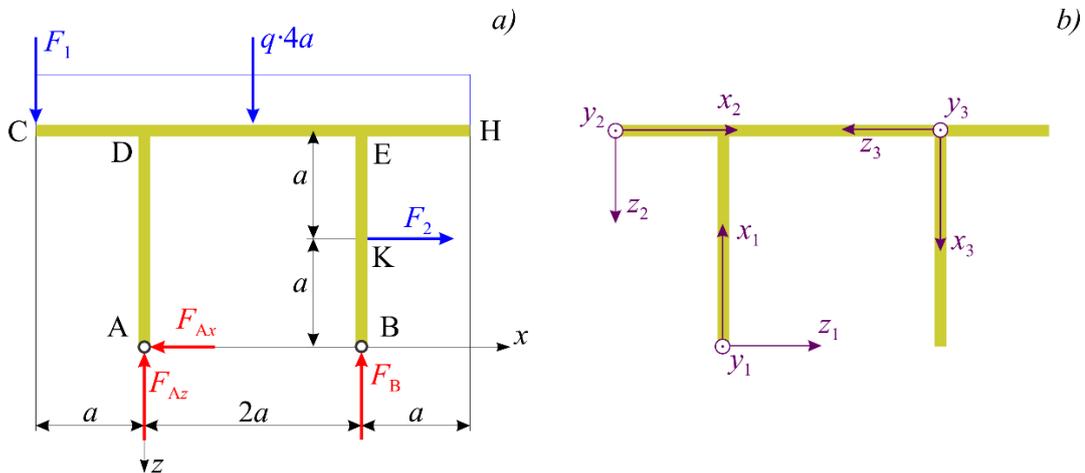
Na slici 7.49. prikazan je okvirni nosač opterećen dvjema koncentriranim silama kojima su iznosi F_1 i F_2 te jednolikim kontinuiranim opterećenjem iznosa q na dijelu CDEH, pri čemu je zadano: $F_1 = q \cdot a$, $F_2 = 2 \cdot q \cdot a$. Valja odrediti reakcije u osloncima i raspodjelu unutarnjih sila po neovisnim područjima nosača te skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.



Slika 7.49. *Primjer 7.12.*

Rješenje:

Izračunavanje reakcija oslonaca. Za određivanje reakcija oslonaca postavljat će se uvjeti ravnoteže u odnosu na *globalni koordinatni sustav* (slika 7.50.a), dok će se pri određivanju unutarnjih sila upotrijebiti *lokalni koordinatni sustavi* (slika 7.50.b).



Slika 7.50. *Primjer 7.12.:* a) *okvirni nosač kao slobodno tijelo*, b) *lokalni koordinatni sustavi*.

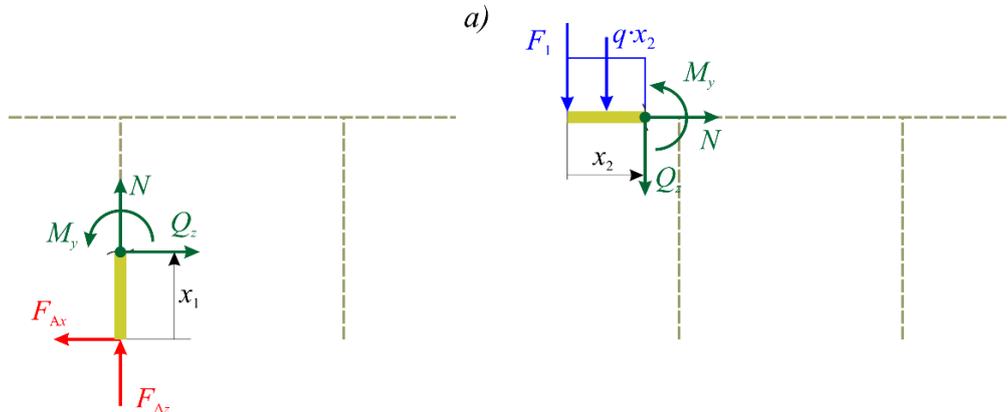
Uvjeti ravnoteže u odnosu na globalni koordinatni sustav (slika 7.49.a) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{Ax} + F_2 = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F_1 + q \cdot 4a - F_B = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad F_1 \cdot a - q \cdot 4 \cdot a \cdot a - F_2 \cdot a + F_B \cdot 2 \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= 2 \cdot q \cdot a; & F_{Az} &= \frac{5}{2} \cdot q \cdot a; \\ F_B &= \frac{5}{2} \cdot q \cdot a. \end{aligned}$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Unutarnje sile za svako područje nosača određuju se iz uvjeta ravnoteže postavljenih u odnosu na lokalne koordinatne sustave svakoga pojedinog dijela, a razmatrajući dio nosača ili s jedne ili s druge strane presjeka.



Slika 7.51. *Primjer 7.12.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) ispod presjeka u području AD, b) lijevo od presjeka u području CD.

- područje AD: $0 \leq x_1 \leq 2a$

Uvjeti ravnoteže za dio ispod presjeka (slika 7.51.a) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad N + F_{Az} &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad Q_z - F_{Ax} &= 0, \\ \sum M_P = 0: \quad M_y - F_{Ax} \cdot x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Iz tih jednadžbi ravnoteže slijedi:

$$\begin{aligned} N &= -\frac{5}{2} \cdot q \cdot a; \quad Q_z = 2 \cdot q \cdot a; \\ M_y &= 2 \cdot q \cdot a \cdot x_1, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(2a) = 4 \cdot q \cdot a^2. \end{aligned}$$

- područje CD: $0 \leq x_2 \leq a$

Jednadžbe ravnoteže za dio lijevo od presjeka (slika 7.51.b) glase:

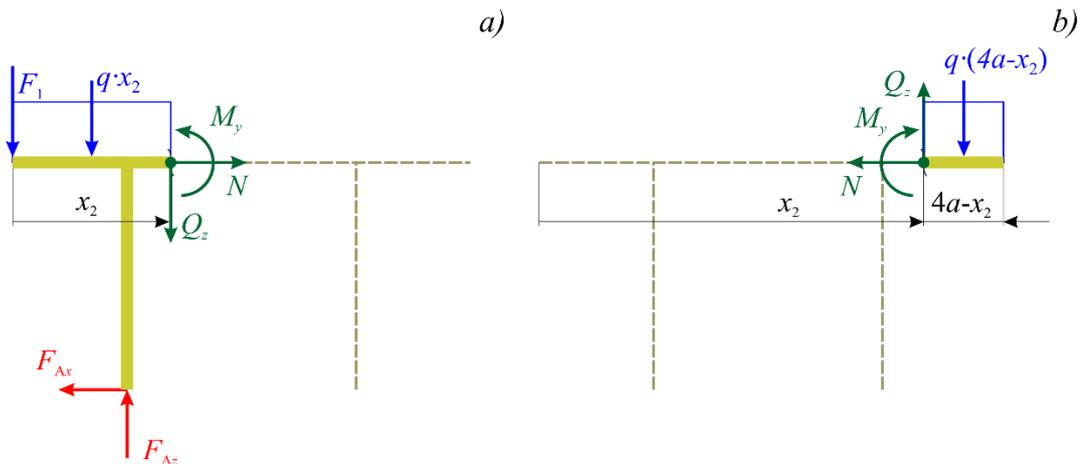
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad N &= 0, \\ \sum F_z = 0: \quad Q_z + F_1 + q \cdot x_2 &= 0, \\ \sum M_P = 0: \quad M_y + F_1 \cdot x_2 + q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} &= 0, \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned} N &= 0; \quad Q_z = -q \cdot (a + x_2), \quad Q_z(0) = -q \cdot a, \quad Q_z(a) = -2 \cdot q \cdot a; \\ M_y &= -q \cdot a \cdot x_2 - \frac{q \cdot x_2^2}{2}, \quad M_y(0) = 0, \quad M_y(a) = -\frac{3}{2} \cdot q \cdot a^2. \end{aligned}$$

- područje DE: $a \leq x_2 \leq 3a$

Za dio lijevo od presjeka (slika 7.52.a) uvjeti ravnoteže jesu:



Slika 7.52. *Primjer 7.12.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od presjeka u području DE, b) desno od presjeka u području EH.

$$\sum F_x = 0: \quad N - F_{Ax} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad Q_z - F_{Az} + F_1 + q \cdot x_2 = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad M_y + F_1 \cdot x_2 + q \cdot x_2 \cdot \frac{x_2}{2} - F_{Ax} \cdot 2 \cdot a - F_{Az} \cdot (x_2 - a) = 0,$$

odakle je

$$N = 2 \cdot q \cdot a;$$

$$Q_z = \frac{3}{2} \cdot q \cdot a - q \cdot x_2, \quad Q_z(a) = \frac{1}{2} \cdot q \cdot a, \quad Q_z(3a) = -\frac{3}{2} \cdot q \cdot a;$$

$$M_y = \frac{3}{2} \cdot q \cdot a^2 + \frac{3}{2} \cdot q \cdot a \cdot x_2 - \frac{q \cdot x_2^2}{2}, \quad M_y(a) = \frac{5}{2} \cdot q \cdot a^2, \quad M_y(3a) = \frac{3}{2} \cdot q \cdot a^2.$$

Možemo vidjeti da unutar ovog područja poprečna sila mijenja predznak, i to na mjestu:

$$Q_z = 0: \quad \frac{3}{2} \cdot q \cdot a - q \cdot x_2 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{2} \cdot a,$$

gdje moment savijanja ima ekstremnu vrijednost koja iznosi:

$$M_y = \frac{21}{8} \cdot q \cdot a^2.$$

- područje EH: $3a \leq x_2 \leq 4a$

Uvjeti ravnoteže za dio desno od presjeka (slika 7.52.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -N = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z + q \cdot (4 \cdot a - x_2) = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y - \frac{q \cdot (4 \cdot a - x_2)^2}{2} = 0.$$

Sređivanjem tih jednačbi dobiju se izrazi za unutarnje sile:

$$N = 0; \quad Q_z = q \cdot (4 \cdot a - x_2), \quad Q_z(3a) = q \cdot a, \quad Q_z(4a) = 0;$$

$$M_y = -\frac{q \cdot (4 \cdot a - x_2)^2}{2}, \quad M_y(3a) = -\frac{q \cdot a^2}{2}, \quad M_y(4a) = 0.$$

- područje EK: $0 \leq x_3 \leq a$

Jednačbe ravnoteže za dio ispod presjeka (slika 7.53.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -N - F_B = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z - F_2 = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y + F_2 \cdot (a - x_3) = 0,$$

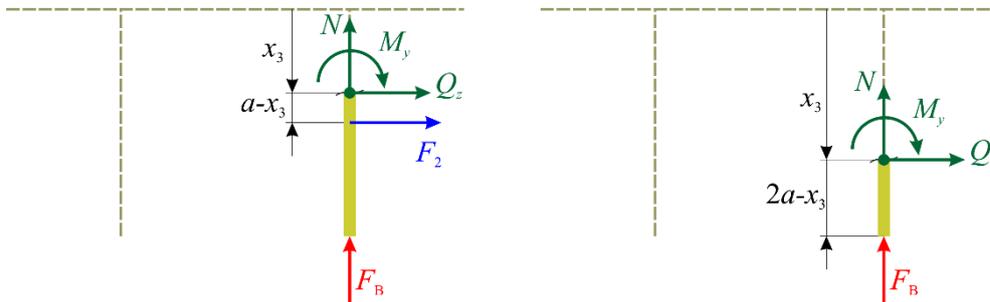
pa su unutarnje sile:

$$N = -\frac{5 \cdot q \cdot a}{2}; \quad Q_z = -2 \cdot q \cdot a$$

$$M_y = 2 \cdot q \cdot a \cdot (a - x_3), \quad M_y(0) = 2 \cdot q \cdot a^2, \quad M_y(a) = 0.$$

a)

b)



Slika 7.53. *Primjer 7.12.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) ispod presjeka u području DK, b) ispod presjeka u području KB.

- područje KB: $a \leq x_3 \leq 2a$

Uvjeti ravnoteže za dio ispod presjeka (slika 7.53.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -N - F_B = 0,$$

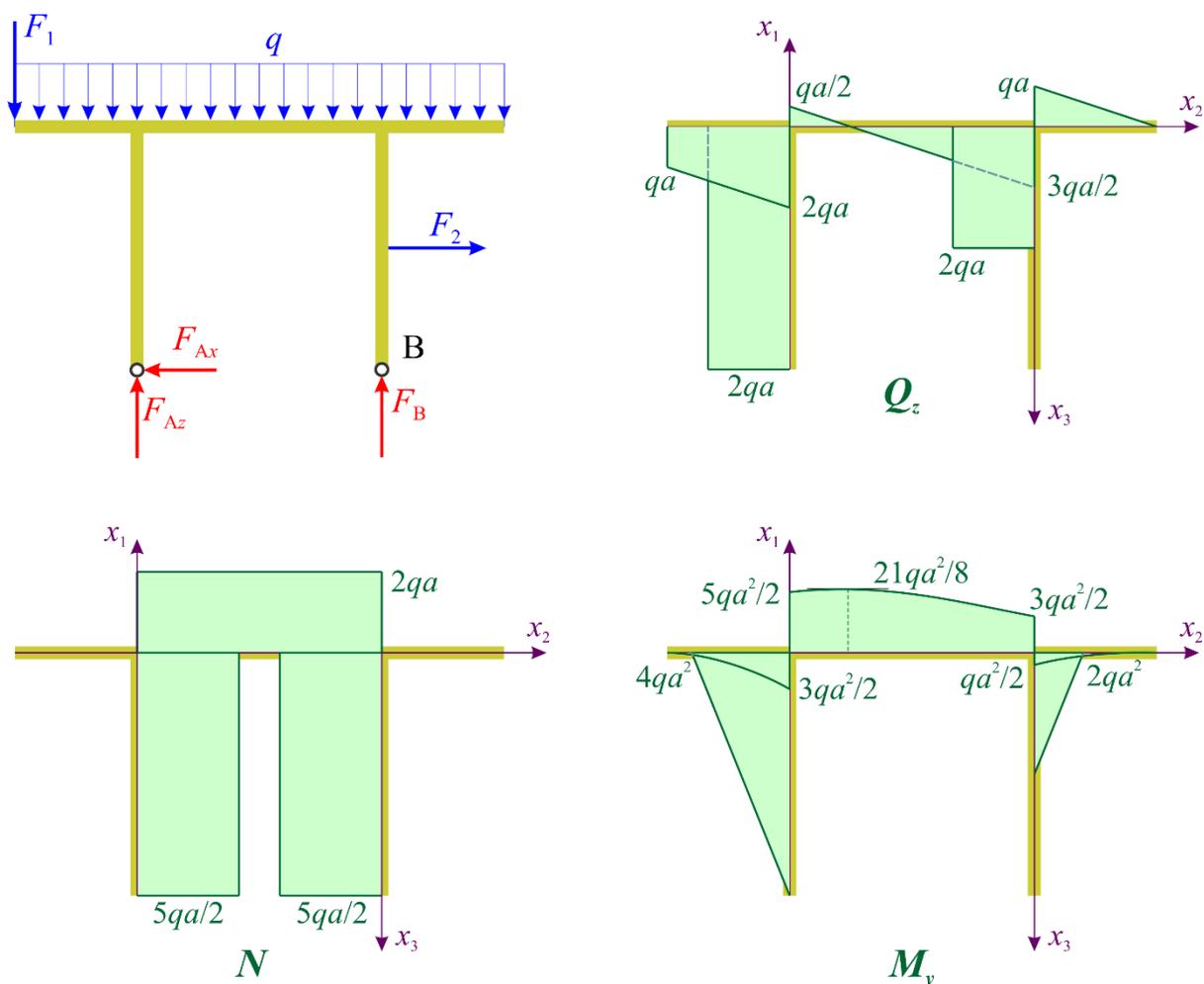
$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y = 0,$$

pa su unutarnje sile u razmatranom području:

$$N = -\frac{5 \cdot q \cdot a}{2}; \quad Q_z = 0; \quad M_y = 0.$$

Dijagrami unutarnjih sila prikazani su na slici 7.54.

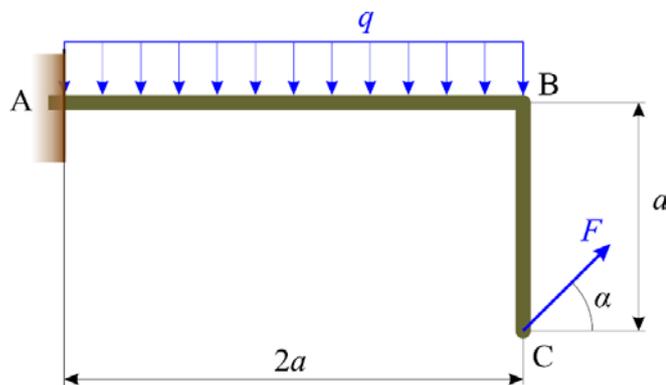


Slika 7.54. *Primjer 7.12.: Dijagrami unutarnjih sila*

Primjer 7.13.

Okvirni nosač sastavljen od dvaju kruto povezanih dijelova opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem q i koncentriranom silom iznosa F . Nosač je vezan za podlogu uklještenjem u A (slika 7.55.). Valja odrediti reakcijsku silu i reakcijski moment na mjestu uklještenja. Odrediti raspodjelu unutarnjih sila te skicirati i kotirati odgovarajuće dijagrame.

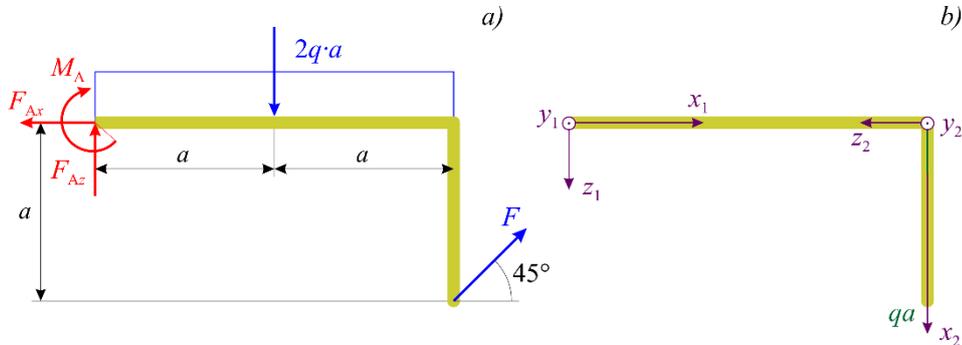
Zadano je: a , q , $F = \sqrt{2} \cdot q \cdot a$, $\alpha = 45^\circ$.



Slika 7.55.: *Primjer 7.13.*

Rješenje:

Izračunavanje reakcija uklještenja. Za određivanje reakcija oslonaca postavljat će se uvjeti ravnoteže u odnosu na globalni koordinatni sustav (slika 7.56.a), dok će se pri određivanju unutarnjih sila upotrijebiti lokalni koordinatni sustavi (slika 7.56.b).



Slika 7.56. *Primjer 7.13.:* a) okvirni nosač kao slobodno tijelo, b) lokalni koordinatni sustavi.

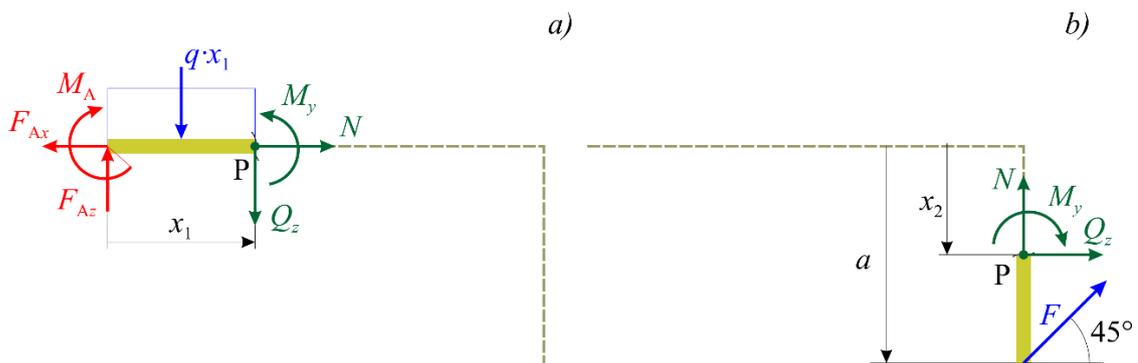
Uvjeti ravnoteže glase (slika 7.56.a):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{Ax} + F \cdot \cos 45^\circ = 0, \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + q \cdot 2a - F \cdot \sin 45^\circ = 0, \\ \sum M_A = 0: & \quad -M_A - 2 \cdot q \cdot a \cdot a + F \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 \cdot a + F \cdot \cos 45^\circ \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= F \cdot \cos 45^\circ = q \cdot a; & F_{Az} &= q \cdot 2 \cdot a - F \cdot \sin 45^\circ = q \cdot a; \\ M_A &= F \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 \cdot a + F \cdot \cos 45^\circ \cdot a - 2 \cdot q \cdot a^2 = q \cdot a^2. \end{aligned}$$

Izračunavanje unutarnjih sila po područjima nosača. Dva su neovisna područja za koja trebamo odrediti raspodjelu unutarnjih sila (slika 7.57.).



Slika 7.57. *Primjer 7.13.:* Dijelovi nosača kao slobodna tijela: a) lijevo od presjeka u području AB, b) ispod presjeka u području BC.

- područje AB: $0 \leq x_1 \leq 2a$

Jednadžbe ravnoteže za dio lijevo od presjeka (slika 7.57.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad N - F_{Ax} = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad Q_z - F_{Az} + q \cdot x_1 = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad M_y - M_A - F_{Az} \cdot x_1 + q \cdot \frac{x_1^2}{2} = 0,$$

pa su unutarnje sile u razmatranom području:

$$N = F_{Ax} = q \cdot a; \quad Q_z = F_{Az} - q \cdot x_1, \quad Q_z(0) = q \cdot a, \quad Q_z(2a) = -q \cdot a;$$

$$M_y = M_A + F_{Az} \cdot x_1 - 0,5 \cdot q \cdot x_1^2 = 0, \quad M_y(0) = q \cdot a^2, \quad M_y(2a) = q \cdot a^2.$$

Poprečna sila mijenja predznak na mjestu:

$$Q_z = 0: \quad q \cdot a - q \cdot x_1 = 0, \quad x_1 = a,$$

pa tu funkcija momenta savijanja ima maksimum:

$$M_{y,\max} = M_y(a) = 1,5 \cdot q \cdot a^2.$$

- područje BC: $0 \leq x_2 \leq a$

Uvjeti ravnoteže za dio ispod presjeka (slika 7.57.b) glase:

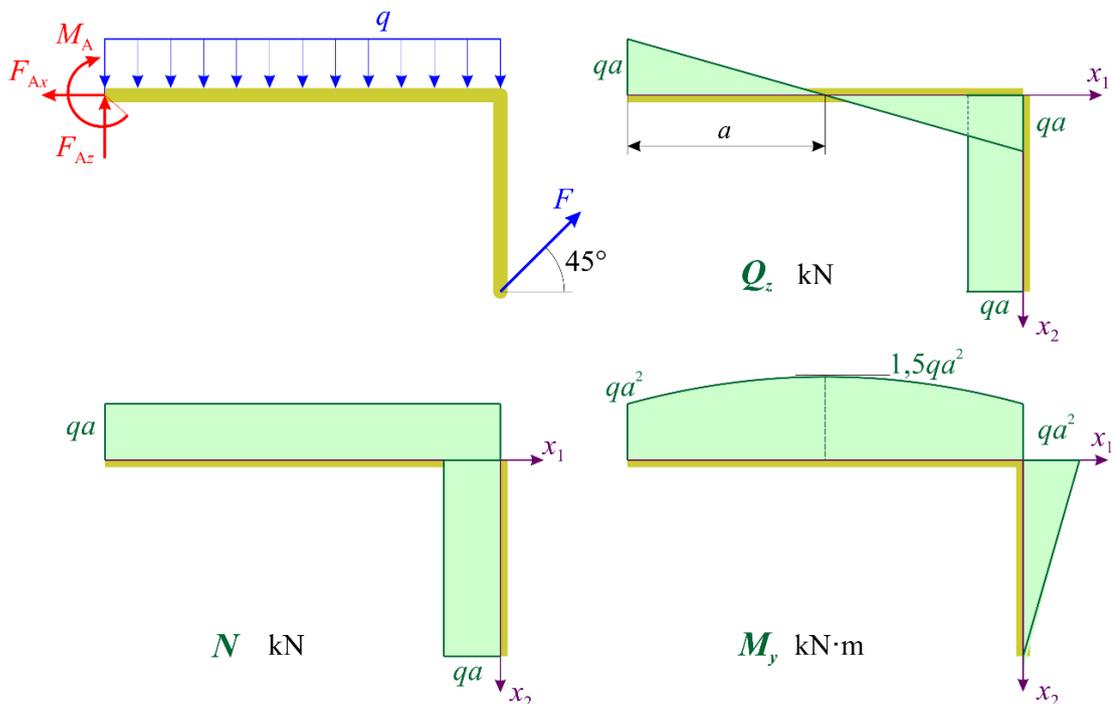
$$\sum F_x = 0: \quad -N - F \cdot \sin 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -Q_z - F \cdot \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum M_P = 0: \quad -M_y + F \cdot \cos 45^\circ \cdot (a - x_2) = 0,$$

a izrazi za unutarnje sile jesu:

$$N = -q \cdot a; \quad Q_z = -q \cdot a, \quad M_y = q \cdot a \cdot (a - x_2), \quad M_y(0) = q \cdot a^2, \quad M_y(a) = 0.$$

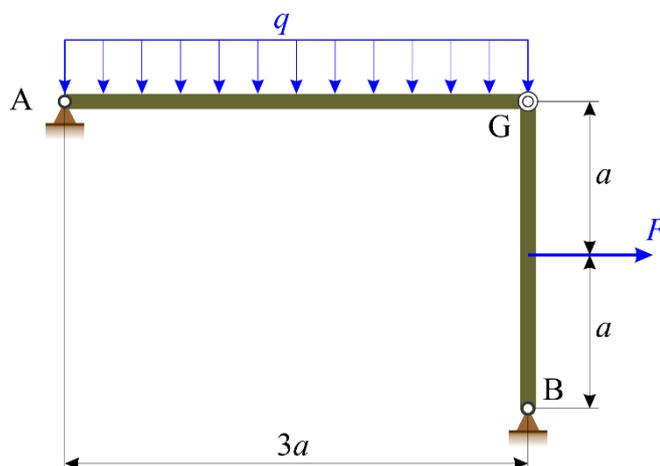


Slika 7.58. *Primjer 7.13.*: Dijagrami unutarnjih sila



Zadatak 7.10. Odrediti reakcije oslonaca trozglobnog okvirnog nosača prikazanoga na slici Z.7.10. Definirati lokalne koordinatne sustave, postaviti izraze za unutarnje sile po svim neovisnim područjima pa skicirati i kotirati dijagrame unutarnjih sila.

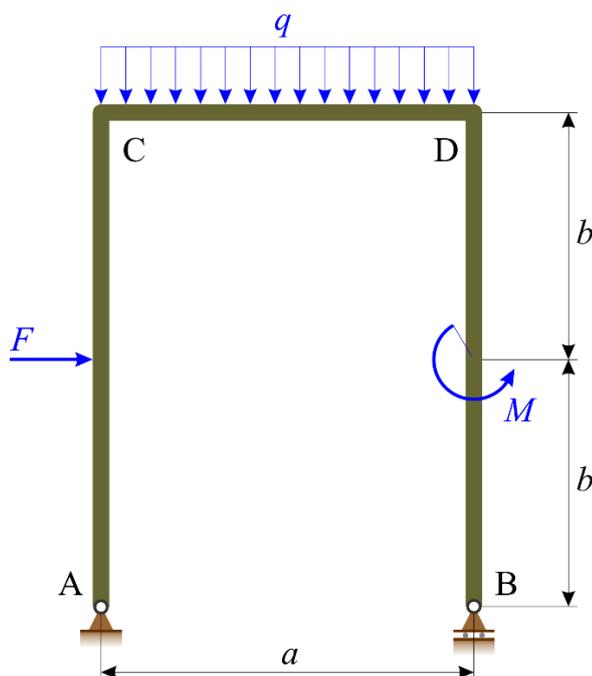
Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $F = 6 \text{ kN}$, $q = 4 \text{ kN/m}$.



Slika Z.7.10. *Zadatak 7.10.*

Zadatak 7.11. Okvirni nosač sastavljen od triju kruto povezanih dijelova opterećen je koncentriranom silom iznosa F , spregom momenta M i jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika Z.7.11.). Valja odrediti reakcije oslonaca, definirati lokalne koordinatne sustave te dobiti izraze unutarnjih sila po područjima nosača. Skicirati dijagrame unutarnjih sila.

Zadano je: $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $F = 6 \text{ kN}$, $q = 8 \text{ kN/m}$, $M = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$.



Slika Z.7.11. *Zadatak 7.11.*

8. TEŽIŠTA

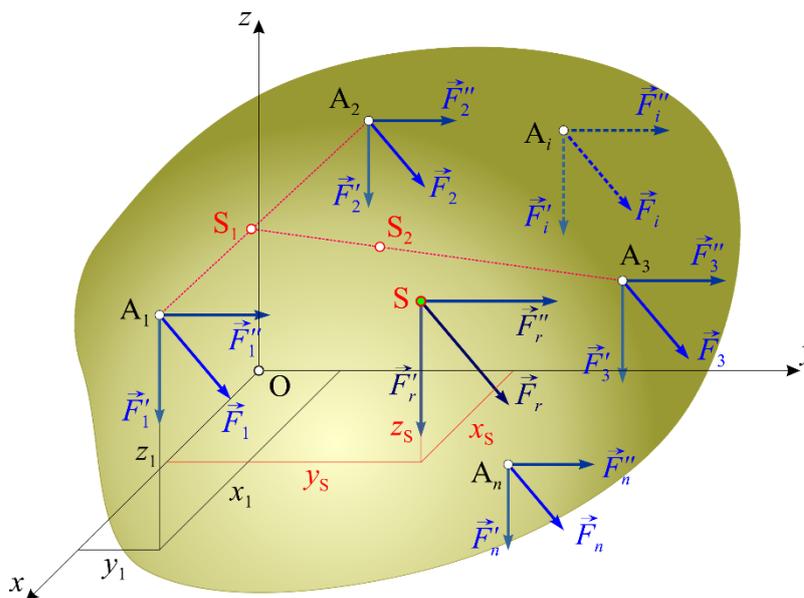
8.1. SREDIŠTE SUSTAVA PARALELNIH SILA

Središte sustava paralelnih sila pojavljuje se pri sastavljanju takva sustava paralelnih sila u kojem se pravci djelovanja sila mogu zakretati u odnosu na kruto tijelo. Taj problem susrećemo u mehanici pri određivanju položaja težišta tijela.

Razmotrit ćemo sustav paralelnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ usmjerenih u istu stranu i s hvatištima u točkama A_1, A_2, \dots, A_n . Očevidno je da promatrani sustav ima rezultantu \vec{F}_r usmjerenu u istu stranu kao i zadane sile, pri čemu je njezin intenzitet:

$$F_r = \sum F_i. \quad (8.1)$$

Ako nadalje svaku od sila sustava zakrenemo za isti kut i u istu stranu oko njezina hvatišta, onda će se i pravac rezultante zakrenuti u tu istu stranu za isti kut, a intenzitet rezultante ostat će nepromijenjen. Da bi se odredio pravac rezultante, dovoljno je svaki put odrediti po jednu točku kroz koju ona prolazi. Može se pokazati da pri svim tim zakretanjima pravac rezultante prolazi kroz jednu te istu točku S (slika 8.1.).



Slika 8.1. Središte sustava paralelnih sila

Naime, slaganjem sila \vec{F}_1 i \vec{F}_2 dobijemo rezultantu \vec{F}_{r1} koja, pri bilo kojem zakretanju tih sila, uvijek prolazi točkom S_1 , tako da vrijedi:

$$F_1 : \overline{A_2 S_1} = F_2 : \overline{A_1 S_1};$$

nadalje, zbrajanjem rezultante \vec{F}_{r1} sa silom \vec{F}_3 dobili bismo silu \vec{F}_{r2} pravac koje bi prolazio točkom S_2 ; i tako dalje, do zadnje sile. Konačno, došli bismo do zaključka da pravac rezultante \vec{F}_r uvijek prolazi točkom S.

Točka S, kroz koju prolazi pravac rezultante sustava paralelnih sila, pri bilo kakvu zakretanju tih sila oko njihova hvatišta u istu stranu i za isti kut, naziva se *središte (centar) sustava paralelnih sila*. Primjenom Varignonova teorema o momentu rezultante možemo dobiti koordinate točke S, kako slijedi:

$$M_x^{\vec{F}_r} = \sum M_x^{\vec{F}_i}; \quad M_y^{\vec{F}_r} = \sum M_y^{\vec{F}_i}; \quad M_z^{\vec{F}_r} = \sum M_z^{\vec{F}_i},$$

odakle se dobije:

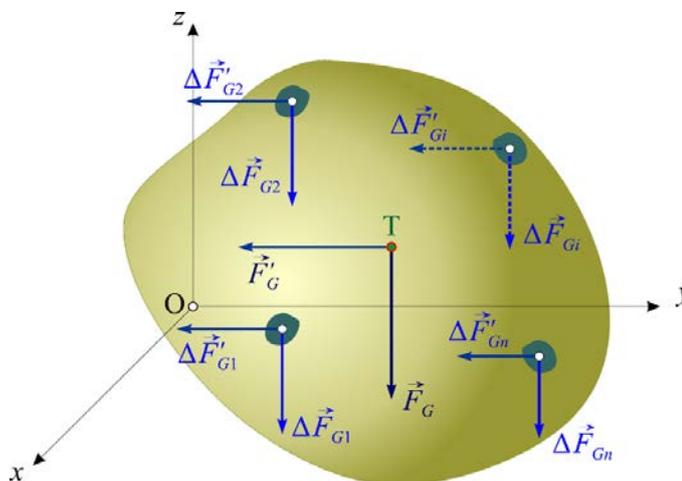
$$x_s = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{F_r}; \quad y_s = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{F_r}; \quad z_s = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{F_r}, \quad (8.2)$$

gdje su x_i, y_i, z_i koordinate hvatišta sila \vec{F}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) (slika 8.1).

8.2. TEŽIŠTE KRUTOG TIJELA

Na svaki djelić krutog tijela, koje se nalazi dovoljno blizu Zemljine površine, djeluje sila koja se naziva *sila teže*. Ova sila jest rezultanta dviju sila: sile privlačenja Zemlje i centrifugalne sile nastale zbog rotacije Zemlje.

Za tijela kojima su dimenzije zanemarive u odnosu na promjer Zemlje možemo uzeti da su sile teže, koje djeluju na pojedine djeliće tijela, međusobno paralelne te da se ne mijenjaju pri proizvoljnom zakretanju krutog tijela. Polje teže za koje je to ispunjeno naziva se *homogeno polje teže*.



Slika 8.2. Težište krutog tijela

Rezultanta sila teže $\Delta \vec{F}_{G1}, \Delta \vec{F}_{G2}, \Delta \vec{F}_{Gn}$ (slika 8.2.) jest:

$$\vec{F}_G = \sum \Delta \vec{F}_{Gi}. \quad (8.3)$$

Shodno izrečenom u izrazu (8.1), rezultanta \vec{F}_G , pri bilo kojem položaju tijela, prolazi uvijek istom točkom S – središtem sustava paralelnih sila $\Delta \vec{F}_{Gi}$.

Ta točka naziva se *težište tijela*, označava se slovom T, a njezine su koordinate:

$$x_T = \frac{\sum \Delta F_{Gi} \cdot x_i}{F_G}; \quad y_T = \frac{\sum \Delta F_{Gi} \cdot y_i}{F_G}; \quad z_T = \frac{\sum \Delta F_{Gi} \cdot z_i}{F_G}, \quad (8.4)$$

gdje su x_i, y_i, z_i koordinate hvatišta sila teže $\Delta \vec{F}_{Gi}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) djelića tijela.

8.3. TEŽIŠTE HOMOGENIH TIJELA

Kako je kod homogenih tijela težina bilo kojeg djelića ΔF_{Gi} proporcionalna volumenu V_i tog djelića: $\Delta F_{Gi} = \rho \cdot g \cdot V_i$, gdje je ρ - gustoća tijela, a g - gravitacijsko ubrzanje, te kako je $F_G = \rho \cdot g \cdot V$, zamjenom u jednakostima (8.4) i skraćivanjem s $\rho \cdot g$ dobijemo:

$$x_T = \frac{\sum V_i \cdot x_i}{V}; \quad y_T = \frac{\sum V_i \cdot y_i}{V}; \quad z_T = \frac{\sum V_i \cdot z_i}{V}. \quad (8.5)$$

Kako je vidljivo iz (8.5), položaj težišta homogenog tijela ovisi samo o njegovu geometrijskom obliku, pa se točka T, s koordinatama prema izrazima (8.5), naziva *težište volumena V*.

Ako se radi o tijelu konstantne debljine h , koja se pak može zanemariti u odnosu na preostale dimenzije, bit će volumen i -tog djelića $V_i = A_i \cdot h$, a ukupni volumen $V = A \cdot h$, pa slijede izrazi za koordinate *težišta površina A*:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A}; \quad y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A}; \quad z_T = \frac{\sum A_i \cdot z_i}{A}, \quad (8.6)$$

gdje je A_i - površina i -tog dijela plohe, a A - ukupna površina plohe.

Kod tijela konstantnog poprečnog presjeka s dimenzijama zanemarivima u odnosu na duljinu govorimo o koordinatama *težišta linija L*:

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L}; \quad y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L}; \quad z_T = \frac{\sum L_i \cdot z_i}{L}, \quad (8.7)$$

gdje je L_i - duljina i -tog dijela linije, a L - ukupna duljina linije.

Kada djeliće volumena, odnosno površina, odnosno linija učinimo diferencijalno malima, tada sume u izrazima (8.5) - (8.7) prelaze u integrale po volumenu, odnosno površini, odnosno liniji.

8.4. POLOŽAJ TEŽIŠTA NEKIH HOMOGENIH LINIJA I PLOHA

Pri određivanju težišta tijela treba uočiti eventualnu simetriju tijela s obzirom na neku ravninu, os ili pak točku simetrije, kada težište leži u ravnini simetrije, odnosno na osi simetrije, odnosno u točki simetrije. Iz svojstva simetrije slijedi da se težište homogenog kružnog prstena, kružne ploče, pravokutnog paralelopipeda ili pak kugle nalazi u točki koja predstavlja geometrijski centar simetrije tog tijela.

Ako tijelo možemo rastaviti na konačan broj takvih dijelova za koje su poznati položaji težišta, tada težište tijela izračunavamo neposredno pomoću izraza (8.5) – (8.7). Ako se pri tome pojavljuje neki dio tijela koji je oduzet („izrezan”), vrijedit će sve ranije rečeno ako volumenu, odnosno površini, odnosno duljini tog dijela damo negativan predznak.

8.4.1. Izračunavanje težišta

Izračunavanje težišta složenih volumena, ploha ili linija, osobito kada je riječ o većem broju osnovnih elemenata (dijelova za koje su poznati položaji težišta), može se preglednije raditi s pomoću tablice 8.1.

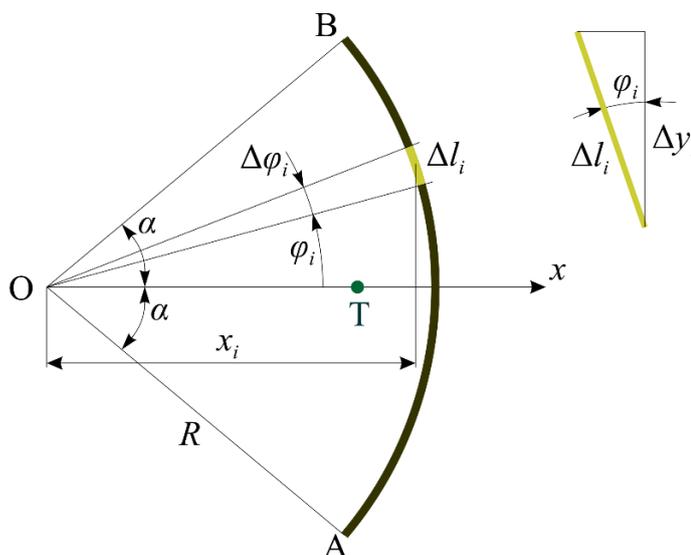
Tablica 8.1. Tablični izračun težišta za složenu materijalnu liniju

L_i	x_i	y_i	z_i	$L_i \cdot x_i$	$L_i \cdot y_i$	$L_i \cdot z_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
L_1	x_1	y_1	z_1	$L_1 \cdot x_1$	$L_1 \cdot y_1$	$L_1 \cdot z_1$
L_2	x_2	y_2	z_2	$L_2 \cdot x_2$	$L_2 \cdot y_2$	$L_2 \cdot z_2$
...
L_n	x_n	y_n	z_n	$L_n \cdot x_n$	$L_n \cdot y_n$	$L_n \cdot z_n$
$\sum L_i$				$\sum L_i \cdot x_i$	$\sum L_i \cdot y_i$	$\sum L_i \cdot z_i$

U stupac (1) unosimo duljine pojedinih linija, u stupce (2) do (4) koordinate težišta tih linija, dok u stupcima (5) do (7) izračunavamo umnoške duljina i odgovarajućih koordinata. Sumiramo zatim stupce (1) i (5) do (7) pa dijeljenjem sume stupca (5) sa sumom stupca (1) dobijemo koordinatu x težišta, a zatim na isti način određujemo i koordinate težišta y i z .

8.4.2. Težište kružnog luka

Neka je zadan kružni luk radijusa R sa središnjim kutom 2α (slika 8.3.). Zbog simetrije težište tog luka leži na osi Ox .



Slika 8.3. Težište kružnog luka

Koordinatu x_T odredit ćemo s pomoću elementarnih lukova duljine ΔL_i , kada je prema prvom od izraza (8.7):

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L} = \frac{\sum \Delta L_i \cdot x_i}{L}.$$

Budući da je (slika 8.3.):

$$x_i = R \cdot \cos \varphi_i; \quad \Delta y_i = \Delta L_i \cdot \cos \varphi_i; \quad \Delta L_i \cdot x_i = \Delta L_i \cdot R \cdot \cos \varphi_i = R \cdot \Delta y_i,$$

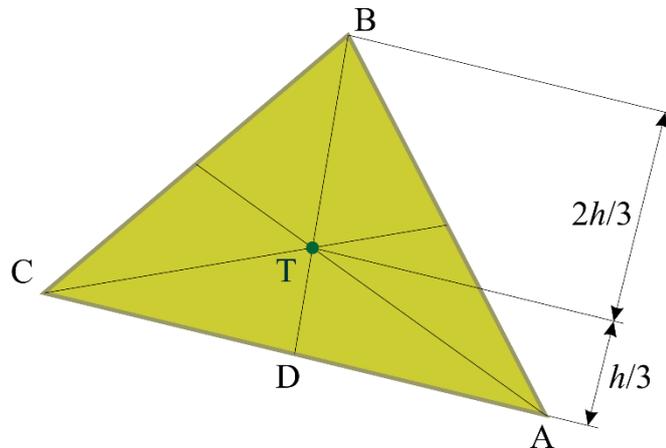
možemo pisati:

$$\sum \Delta L_i \cdot x_i = R \cdot \sum \Delta y_i = R \cdot \overline{AB} = R \cdot 2 \cdot R \cdot \sin \alpha = 2 \cdot R^2 \cdot \sin \alpha, \quad L = 2 \cdot R \cdot \widehat{\alpha}$$

$$x_T = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\widehat{\alpha}}. \quad (8.8)$$

8.4.3. Težište trokuta

Težište trokuta nalazi se u sjecištu težišnica (spojnica vrhova trokuta s polovištem nasuprotnih stranica – slika 8.4.). Točka T dijeli pri tom svaku težišnicu u omjeru 1:2 (npr. $\overline{TD} = \overline{BD}/3$). Stoga bez posebnog izvođenja zaključujemo da je težište trokuta na $1/3$ visine od baze, odnosno $2/3$ visine od vrha trokuta.



Slika 8.4. Težište trokuta

8.4.4. Težište kružnog isječka

Neka je zadan kružni isječak radijusa R sa središnjim kutom 2α (slika 8.5.). Zbog simetrije težište isječka leži na osi Ox . Koordinatu x_T odredit ćemo uz pomoć elementarnih istokračnih trokuta baze Δl_i i kraka R , a prema (8.6):

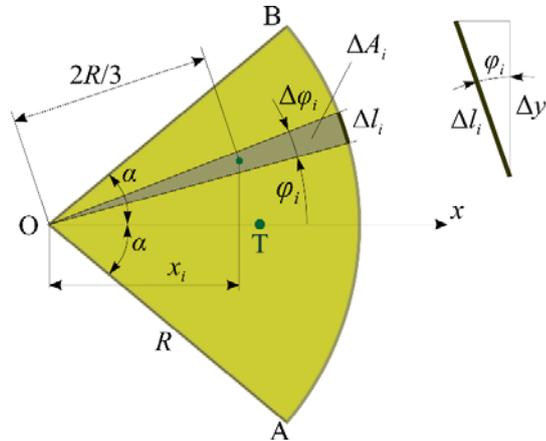
$$x_T = \frac{\sum \Delta A_i \cdot x_i}{A}.$$

Kada je kut $\Delta \varphi_i$ malen, može se površina ΔA_i kružnog isječka računati kao površina jednakokračnog trokuta visine R , s težištem na $2/3$ visine od O:

$$\Delta A_i = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \Delta l_i, \quad x_i = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos \varphi_i,$$

pa je

$$\Delta A_i \cdot x_i = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \Delta l_i \cdot \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos \varphi_i = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \Delta l_i \cdot \cos \varphi_i = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \Delta y_i.$$



Slika 8.5. Težište kružnog isječka

Brojnik i nazivnik izraza (8.6) sada su:

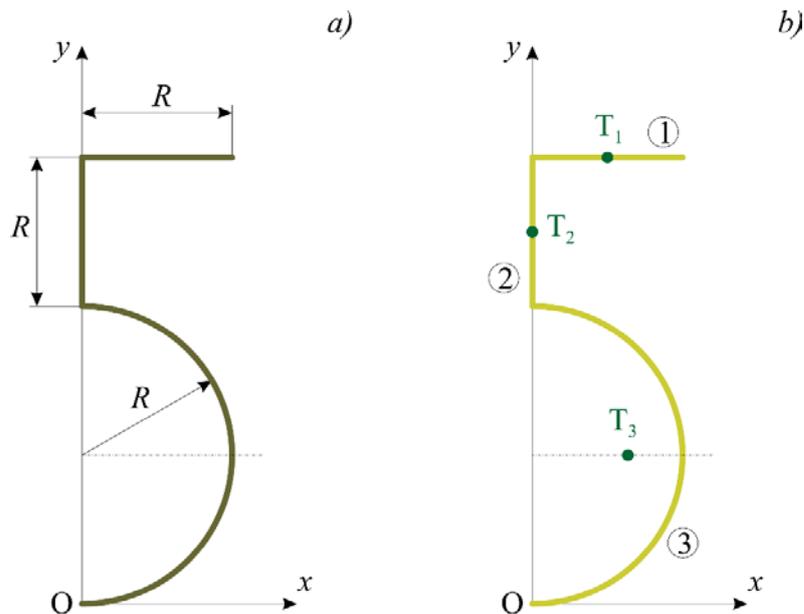
$$\sum \Delta A_i \cdot x_i = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \sum \Delta y_i = \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot \sin \alpha, \quad A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \hat{\alpha} = R^2 \cdot \hat{\alpha},$$

pa je položaj kružnog isječka

$$x_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \cdot \sin \alpha}{\hat{\alpha}}. \quad (8.9)$$

Primjer 8.1.

Složena materijalna linija prikazana je na slici 8.6.a.



Slika 8.6. Primjer 8.1.: a) zadana linija, b) zadana linija podijeljena na osnovne linije.

Valja odrediti koordinate težišta ako je zadano $R = 2 \text{ m}$.

Rješenje:

Složena linija može se podijeliti na tri jednostavne linije: dvije dužine i polukružnicu (slika 8.6.b), a koordinate težišta složene linije određuju se prema izrazima (8.7):

$$x_T = \frac{L_1 \cdot x_{T1} + L_2 \cdot x_{T2} + L_3 \cdot x_{T3}}{L_1 + L_2 + L_3}; \quad y_T = \frac{L_1 \cdot y_{T1} + L_2 \cdot y_{T2} + L_3 \cdot y_{T3}}{L_1 + L_2 + L_3};$$

gdje su L_1, L_2 i L_3 duljine osnovnih linija, a $x_{T1}, y_{T1}, x_{T2}, y_{T2}$, i x_{T3}, y_{T3} koordinate težišta svake od tih linija.

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih linija jesu:

$$x_{T1} = 0,5 \cdot R, \quad y_{T1} = 3 \cdot R; \quad x_{T2} = 0, \quad y_{T2} = 2,5 \cdot R;$$

$$x_{T3} = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin 90^\circ}{\pi/2} = \frac{2R}{\pi} = 0,6366 \cdot R, \quad y_{T3} = R,$$

a njihove duljine iznose:

$$L_1 = R; \quad L_2 = R; \quad L_3 = R \cdot \pi = 3,1416 \cdot R.$$

Koordinate težišta zadane složene linije su

$$x_T = \frac{R \cdot 0,5 \cdot R + R \cdot 0 + 3,1416 \cdot R \cdot 0,6366 \cdot R}{R + R + 3,1416 \cdot R} = 0,486 \cdot R = 0,486 \cdot 2 = 0,972 \text{ m},$$

$$y_T = \frac{R \cdot 3 \cdot R + R \cdot 2,5 \cdot R + 3,1416 \cdot R \cdot R}{R + R + 3,1416 \cdot R} = 1,681 \cdot R = 1,681 \cdot 2 = 3,362 \text{ m}.$$

Položaj težišta mogli smo izračunati s pomoću tablice prikazane u dijelu 8.4.1.:

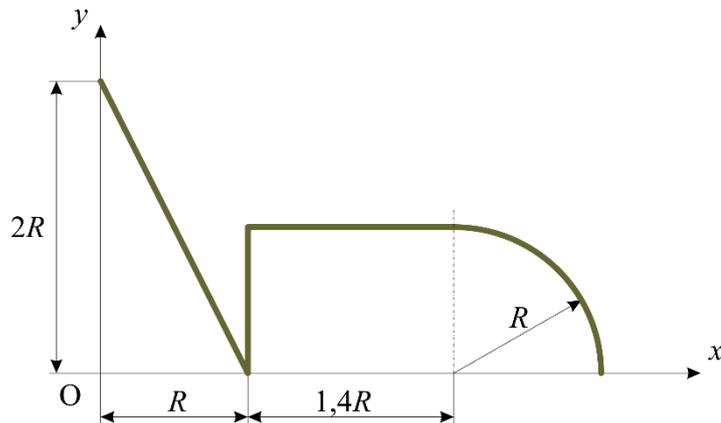
L_i	x_i	y_i	$L_i \cdot x_i$	$L_i \cdot y_i$
R	$0,5R$	$3R$	$0,5R^2$	$3R^2$
R	0	$2,5R$	0	$2,5R^2$
$3,1416R$	$0,6366R$	R	$2R^2$	$3,1416R^2$
$5,1416R$			$2,5R^2$	$8,6416R^2$

Sada bismo dijeljenjem sume četvrtog stupca sa sumom prvoga dobili koordinatu x_T , dok bismo dijeljenjem sume petog stupca sa sumom prvoga dobili koordinatu y_T :

$$x_T = \frac{2,5 \cdot R^2}{5,1416 \cdot R} = 0,486 \cdot R = 0,972 \text{ m}, \quad y_T = \frac{8,6416 \cdot R^2}{5,1416 \cdot R} = 1,681 \cdot R = 3,362 \text{ m}.$$

Primjer 8.2.

Potrebno je odrediti koordinate težišta za složenu materijalnu liniju sastavljenu od triju dužina i četvrtine kružnice radijusa R (slika 8.7.). Zadano je: $R = 1,5 \text{ m}$.



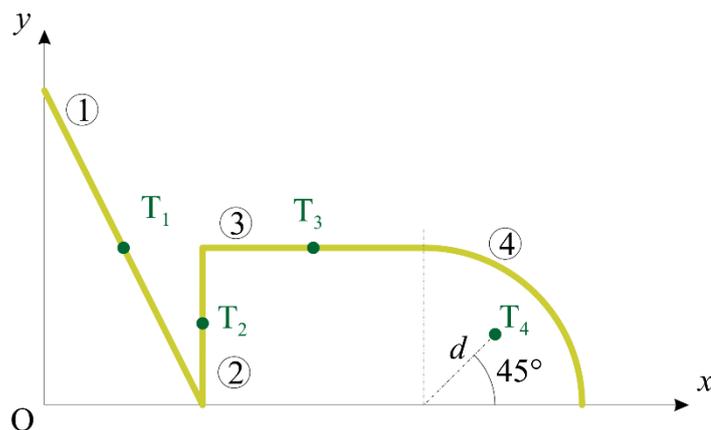
Slika 8.7. *Primjer 8.2.*

Rješenje:

Složena linija može se podijeliti na četiri jednostavne linije: tri dužine i četvrtinu kružnice.

Koordinate težišta složene linije određuju se prema izrazima:

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L}; \quad y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$



Slika 8.8. *Primjer 8.2.: Složena materijalna linija podijeljena na osnovne linije*

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih linija (slika 8.8.) jesu:

$$x_{T1} = 0,5 \cdot R, \quad y_{T1} = R, \quad x_{T2} = R, \quad y_{T2} = 0,5 \cdot R, \quad x_{T3} = 1,7 \cdot R, \quad y_{T3} = R;$$

$$x_{T4} = 2,4 \cdot R + d \cdot \cos 45^\circ, \quad y_{T4} = d \cdot \sin 45^\circ,$$

gdje je uz

$$d = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{4 \cdot R}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2},$$

$$x_{T4} = 2,4 \cdot R + \frac{2 \cdot R}{\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,4 \cdot R + \frac{2 \cdot R}{\pi} = 3,037 \cdot R$$

$$y_{T4} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,637 \cdot R.$$

Duljine pojedinih linija jesu:

$$L_1 = \sqrt{(2 \cdot R)^2 + R^2} = 2,236 \cdot R; \quad L_2 = R, \quad L_3 = 1,4 \cdot R; \quad L_4 = R \cdot \frac{\pi}{2} = 1,571 \cdot R,$$

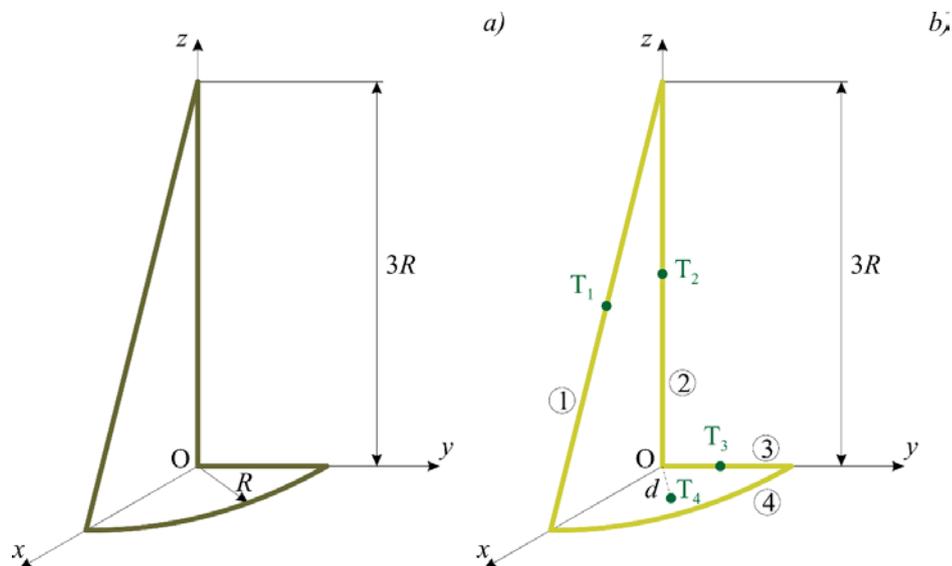
pa slijede koordinate težišta zadane složene linije:

$$x_T = \frac{2,236 \cdot R \cdot 0,5 \cdot R + R \cdot R + 1,4 \cdot R \cdot 1,7 \cdot R + 1,571 \cdot R \cdot 3,037 \cdot R}{2,236 \cdot R + R + 1,4 \cdot R + 1,571 \cdot R} = 1,493 \cdot R = 2,240 \text{ m};$$

$$y_T = \frac{2,236 \cdot R \cdot R + R \cdot 0,5 \cdot R + 1,4 \cdot R \cdot R + 1,571 \cdot R \cdot 0,637 \cdot R}{2,236 \cdot R + R + 1,4 \cdot R + 1,571 \cdot R} = 0,828 \cdot R = 1,242 \text{ m}.$$

Primjer 8.3.

Zatvorena prostorna složena materijalna linija sastavljena je od triju dužina i četvrtine kružnice (slika 8.9.a). Valja odrediti koordinate težišta. Zadano je: $R = 2 \text{ m}$.



Slika 8.9. *Primjer 8.3.*: a) zadana složena linija, b) složena linija podijeljena na osnovne linije.

Rješenje:

Složena linija može se podijeliti na četiri jednostavne linije: tri dužine i četvrtinu kružnice (slika 8.9.b).

Koordinate težišta složene linije određuju se prema izrazima:

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L}; \quad y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L}; \quad z_T = \frac{\sum L_i \cdot z_i}{L}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih linija jesu:

$$x_{T1} = 0,5 \cdot R, \quad y_{T1} = 0, \quad z_{T1} = 1,5 \cdot R; \quad x_{T2} = 0, \quad y_{T2} = 0, \quad z_{T2} = 1,5 \cdot R;$$

$$x_{T3} = 0, \quad y_{T3} = 0,5 \cdot R, \quad z_{T3} = 0; \quad x_{T4} = d \cdot \cos 45^\circ, \quad y_{T4} = d \cdot \sin 45^\circ, \quad z_{T4} = 0,$$

gdje je

$$d = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{4 \cdot R}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2};$$

$$x_{T_4} = d \cdot \cos 45^\circ = \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,637 \cdot R, \quad y_{T_4} = d \cdot \sin 45^\circ = \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,637 \cdot R.$$

Duljine pojedinih linija su:

$$L_1 = \sqrt{(3 \cdot R)^2 + R^2} = 3,162 \cdot R, \quad L_2 = 3 \cdot R, \quad L_3 = R, \quad L_4 = R \cdot \frac{\pi}{2} = 1,571 \cdot R,$$

pa je ukupna duljina složene linije:

$$L = \sum L_i = 3,162 \cdot R + 3 \cdot R + R + 1,571 \cdot R = 8,733 \cdot R.$$

Koordinate težišta zadane složene linije sada su:

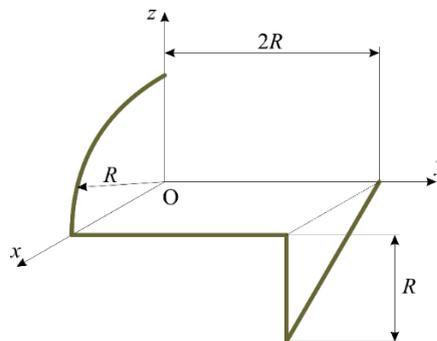
$$x_T = \frac{3,162 \cdot R \cdot 0,5 \cdot R + 3 \cdot R \cdot 0 + R \cdot 0 + 1,571 \cdot R \cdot 0,637 \cdot R}{8,733 \cdot R} = 0,296 \cdot R = 0,592 \text{ m};$$

$$y_T = \frac{3,162 \cdot R \cdot 0 + 3 \cdot R \cdot 0 + R \cdot 0,5 \cdot R + 1,571 \cdot R \cdot 0,637 \cdot R}{8,733 \cdot R} = 0,172 \cdot R = 0,344 \text{ m};$$

$$z_T = \frac{3,162 \cdot R \cdot 1,5 \cdot R + 3 \cdot R \cdot 1,5 \cdot R + R \cdot 0 + 1,571 \cdot R \cdot 0}{8,733 \cdot R} = 1,058 \cdot R = 2,116 \text{ m}.$$

Primjer 8.4.

Prostorna složena materijalna linija sastavljena je od triju dužina i četvrtine kružnice (slika 8.10.). Valja odrediti koordinate težišta. Zadano je: $R = 2,4 \text{ m}$.



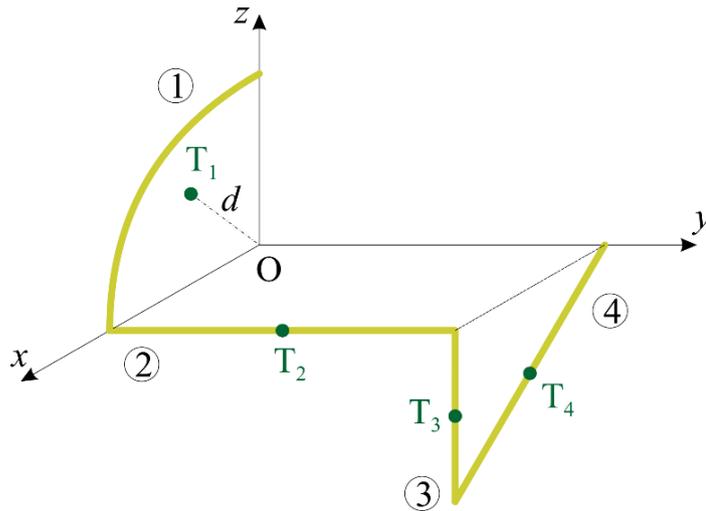
Slika 8.10. *Primjer 8.4.*

Rješenje:

Složena linija može se podijeliti na četiri jednostavne linije: četvrtinu kružnice i tri dužine (slika 8.11.).

Koordinate težišta složene linije određuju se prema izrazima:

$$x_T = \frac{\sum L_i \cdot x_i}{L}; \quad y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L}; \quad z_T = \frac{\sum L_i \cdot z_i}{L}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$



Slika 8.11. *Primjer 8.4.: Složena materijalna linija podijeljena na osnovne linije*

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih linija jesu:

$$x_{T1} = d \cdot \cos 45^\circ, \quad y_{T1} = 0, \quad z_{T1} = d \cdot \sin 45^\circ, \quad x_{T2} = R, \quad y_{T2} = R, \quad z_{T2} = 0;$$

$$x_{T3} = R, \quad y_{T3} = 2 \cdot R, \quad z_{T3} = -0,5 \cdot R; \quad x_{T4} = 0,5 \cdot R, \quad y_{T4} = 2 \cdot R, \quad z_{T4} = -0,5 \cdot R,$$

gdje je

$$d = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{4 \cdot R}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2},$$

pa je

$$x_{T1} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,637 \cdot R, \quad z_{T1} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,637 \cdot R.$$

Duljine pojedinih linija su:

$$L_1 = R \cdot \frac{\pi}{2} = 1,571 \cdot R, \quad L_2 = 2 \cdot R, \quad L_3 = R, \quad L_4 = \sqrt{R^2 + R^2} = 1,414 \cdot R,$$

pa je ukupna duljina složene linije:

$$L = \sum L_i = 1,571R + 2R + R + 1,414R = 5,985R.$$

Iz ranije danih izraza sada dobijemo koordinate težišta zadane složene linije:

$$x_T = \frac{1,571 \cdot R \cdot 0,637 \cdot R + 2 \cdot R \cdot R + R \cdot R + 1,414 \cdot R \cdot 0,5 \cdot R}{5,985 \cdot R} = 0,787 \cdot R = 1,889 \text{ m};$$

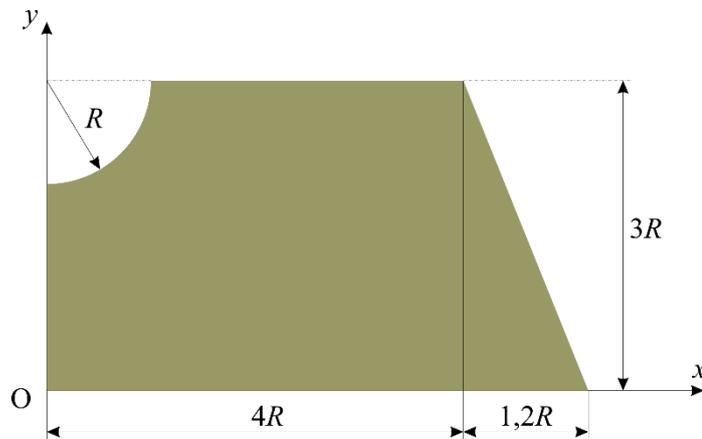
$$y_T = \frac{1,571 \cdot R \cdot 0 + 2 \cdot R \cdot R + R \cdot 2 \cdot R + 1,414 \cdot R \cdot 2 \cdot R}{5,985 \cdot R} = 1,141 \cdot R = 2,738 \text{ m};$$

$$z_T = \frac{1,571 \cdot R \cdot 0,637 \cdot R + 2 \cdot R \cdot 0 + R \cdot (-0,5 \cdot R) + 1,414 \cdot R \cdot (-0,5 \cdot R)}{5,985 \cdot R}$$

$$z_T = -0,034 \cdot R = -0,082 \text{ m}.$$

Primjer 8.5.

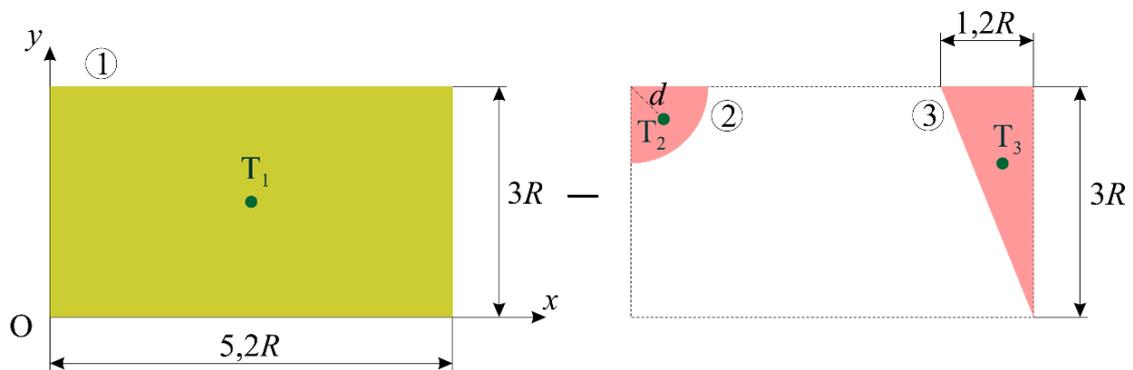
Valja odrediti koordinate težišta zadane složene materijalne plohe (slika 8.12.). Zadano je: $R = 0,6 \text{ m}$.



Slika 8.12. *Primjer 8.5.*

Rješenje:

Zadana složena ploha može se dobiti ako se od plohe 1 – pravokutnik dimenzija $5,2 \cdot R \times 3 \cdot R$, oduzmu ploha 2 – četvrtina kruga radijusa R i ploha 3 – pravokutni trokut kateta $1,2 \cdot R \times 3 \cdot R$ (slika 8.13.). Površine ploha koje se oduzimaju pri tom su negativne.



Slika 8.13. *Primjer 8.5.: Složena materijalna ploha podijeljena na osnovne plohe*

Koordinate težišta složene plohe određuju se prema izrazima:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A}; \quad y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A}; \quad i = 1, 2, 3,$$

gdje su A_1 , A_2 i A_3 površine jednostavnih (osnovnih) ploha, a x_{T1} , y_{T1} , x_{T2} , y_{T2} , x_{T3} i y_{T3} koordinate težišta svake od jednostavnih ploha.

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih ploha jesu:

$$x_{T1} = 2,6 \cdot R, \quad y_{T1} = 1,5 \cdot R; \quad x_{T2} = d \cdot \cos 45^\circ, \quad y_{T2} = 3 \cdot R - d \cdot \sin 45^\circ,$$

$$x_{T3} = 5,2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot 1,2 \cdot R = 4,8 \cdot R, \quad y_{T3} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot R = 2 \cdot R,$$

gdje je

$$d = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{8 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2},$$

odnosno

$$x_{T_2} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 0,424 \cdot R, \quad y_{T_2} = 3 \cdot R - \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot R - \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 2,576 \cdot R,$$

a površine razmatranih ploha iznose:

$$A_1 = 5,2 \cdot R \cdot 3 \cdot R = 15,6 \cdot R^2, \quad A_2 = -\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot R^2 = -0,785 \cdot R^2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot R \cdot 3R = -1,8 \cdot R^2.$$

Površina zadane složene plohe je:

$$A = \sum A_i = 15,6 \cdot R^2 - 0,785 \cdot R^2 - 1,8 \cdot R^2 = 13,015 \cdot R^2,$$

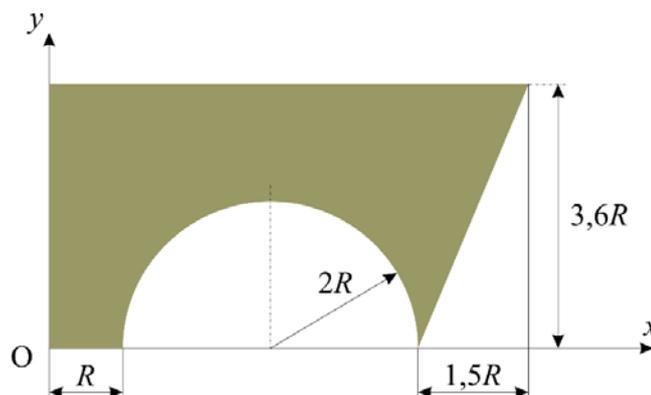
pa su tražene koordinate težišta te plohe:

$$x_T = \frac{15,6 \cdot R^2 \cdot 2,6 \cdot R - 0,785 \cdot R^2 \cdot 0,424 \cdot R - 1,8 \cdot R^2 \cdot 4,8 \cdot R}{13,015 \cdot R^2} = 2,427 \cdot R = 1,456 \text{ m};$$

$$y_T = \frac{15,6 \cdot R^2 \cdot 1,5 \cdot R - 0,785 \cdot R^2 \cdot 2,576 \cdot R - 1,8 \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R}{13,015 \cdot R^2} = 1,366 \cdot R = 0,820 \text{ m}.$$

Primjer 8.6.

Potrebno je odrediti koordinate težišta zadane složene materijalne plohe (slika 8.14.). Zadano je: $R = 0,4 \text{ m}$.



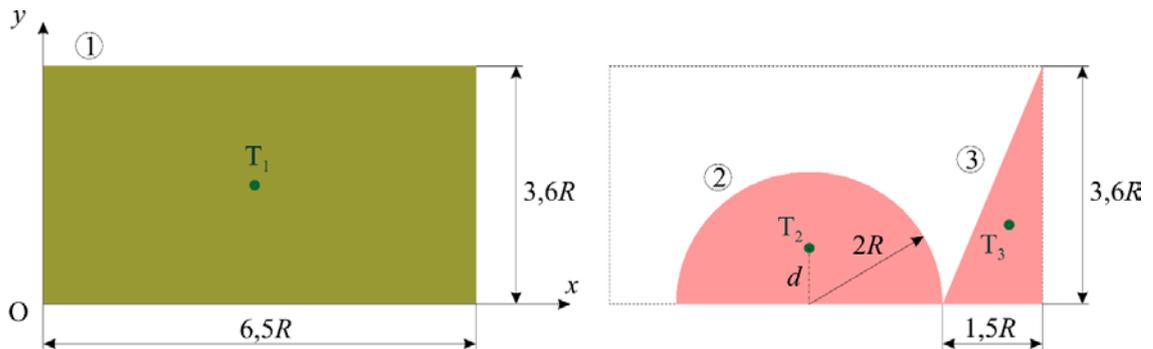
Slika 8.14. *Primjer 8.6.*

Rješenje:

Zadana složena ploha može se dobiti ako se od pravokutnika (1) dimenzija $6,5 \cdot R \times 3,6 \cdot R$ oduzmu polovina kruga radijusa $2R$ (2) i pravokutni trokut (3) kateta $1,5 \cdot R \times 3,6 \cdot R$ (slika 8.15.), pri čemu su površine ploha (2) i (3) negativne.

Koordinate težišta složene plohe određuju se prema izrazima:

$$x_T = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{A}; \quad y_T = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A}; \quad i=1, 2, 3.$$



Slika 8.15. *Primjer 8.6.: Složena materijalna ploha podijeljena na osnovne plohe*

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih ploha jesu:

$$x_{T1} = 3,25 \cdot R, \quad y_{T1} = 1,8 \cdot R; \quad x_{T2} = 3 \cdot R, \quad y_{T2} = d,$$

$$x_{T3} = 6,5 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot R = 6 \cdot R, \quad y_{T3} = \frac{1}{3} \cdot 3,6 \cdot R = 1,2 \cdot R;$$

gdje je

$$d = \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot R) \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot R) \cdot \frac{\sin 90^\circ}{\pi/2} = \frac{4 \cdot (2 \cdot R)}{3 \cdot \pi} = 0,849 \cdot R,$$

$$y_{T2} = d = 0,849 \cdot R.$$

Površine razmatranih ploha su

$$A_1 = 6,5 \cdot R \cdot 3,6 \cdot R = 23,4 \cdot R^2, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2 \cdot R)^2 = -2 \cdot \pi \cdot R^2 = -6,283 \cdot R^2,$$

$$A_3 = -\frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot R \cdot 3,6 \cdot R = -2,7 \cdot R^2.$$

Slijedi površina zadane složene plohe:

$$A = \sum A_i = 23,4 \cdot R^2 - 6,283 \cdot R^2 - 2,7 \cdot R^2 = 14,417 \cdot R^2,$$

pa su tražene koordinate težišta te plohe:

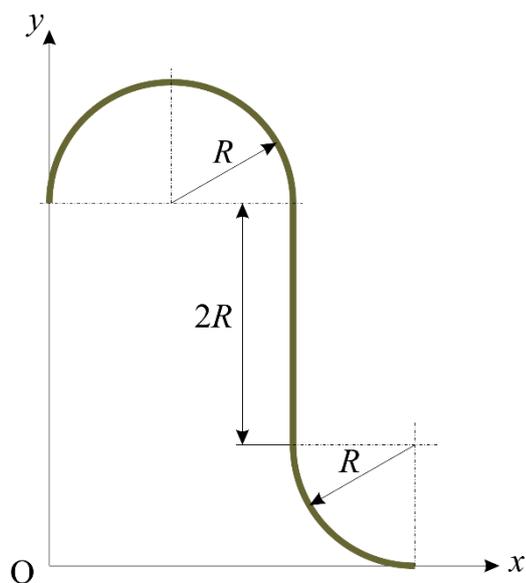
$$x_T = \frac{23,4 \cdot R^2 \cdot 3,25 \cdot R - 6,283 \cdot R^2 \cdot 3 \cdot R - 2,7 \cdot R^2 \cdot 6 \cdot R}{14,417 \cdot R^2} = 2,844 \cdot R = 1,138 \text{ m};$$

$$y_T = \frac{23,4 \cdot R^2 \cdot 1,8 \cdot R - 6,283 \cdot R^2 \cdot 0,849 \cdot R - 2,7 \cdot R^2 \cdot 1,2 \cdot R}{14,417 \cdot R^2} = 2,327 \cdot R = 0,931 \text{ m}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

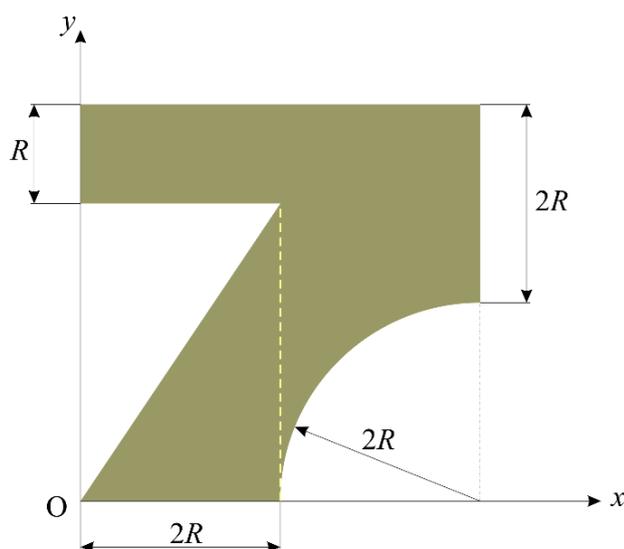


Zadatak 8.1. Valja odrediti koordinate težišta za složenu materijalnu liniju sastavljenu od polukružnice, dužine i četvrtine kružnice (slika Z.8.1.). Zadano je: R .



Slika Z.8.1. *Zadatak 8.1.*

Zadatak 8.2. Valja odrediti koordinate težišta za složenu materijalnu plohu (slika Z.8.2.).
Zadano je: R .



Slika Z.8.2. *Zadatak 8.2.*

8.5. PAPPUS-GULDINOVA PRAVILA

1. PRAVILO: *Površina plohe koja nastaje rotacijom homogene linije oko osi koja leži u ravnini te linije i koja ju ne siječe, jednaka je umnošku duljine te linije i duljine luka koji opiše njezino težište pri toj rotaciji.*

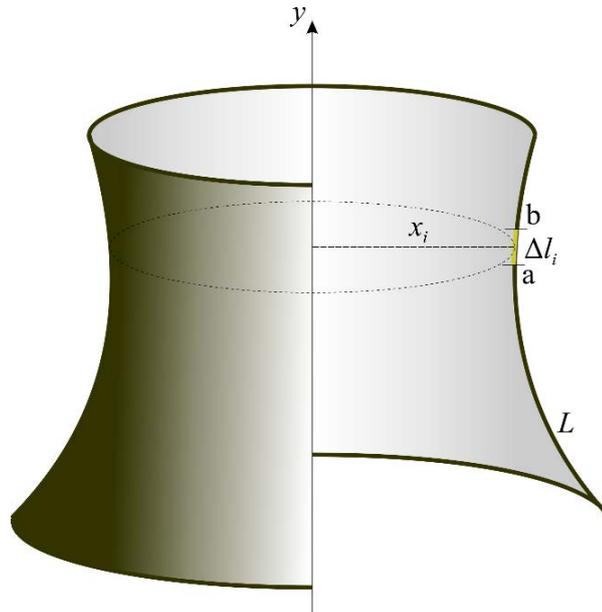
Dokaz ovog pravila može se izvesti prema slici 8.16.

Ako se s Δl_i označi elementarni djelić krivulje ab , tada je površina koja se dobiva zakretanjem tog djelića:

$$\Delta A_i = 2 \cdot \pi \cdot x_i \cdot \Delta l_i,$$

a ukupna površina bit će suma tih, elementarnih površina:

$$A = \sum \Delta A_i = 2 \cdot \pi \cdot \sum \Delta l_i \cdot x_i .$$



Slika 8.16. Prvo Pappus-Guldinovo pravilo

Budući da je:

$$\sum \Delta l_i \cdot x_i = L \cdot x_T ,$$

slijedi:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot x_T \cdot L . \tag{8.10}$$

2. PRAVILO: *Volumen tijela koje nastaje rotacijom zatvorene ravne plohe oko osi koja leži u ravnini te plohe, ali ju ne siječe, jednak je umnošku površine te plohe i duljine luka koji opiše njezino težište pri toj rotaciji.*

Promotrimo elementarnu površinu ΔA_i stranica Δx odnosno Δy , udaljenu za x_i od promatrane osi (slika 8.17.).

Volumen koji nastaje rotacijom površine ΔA_i oko osi y jednak je volumenu šupljeg valjka.

Radijusi baze tog valjka su:

$$R_1 = x_i - \frac{\Delta x}{2} \quad \text{i} \quad R_2 = x_i + \frac{\Delta x}{2} ,$$

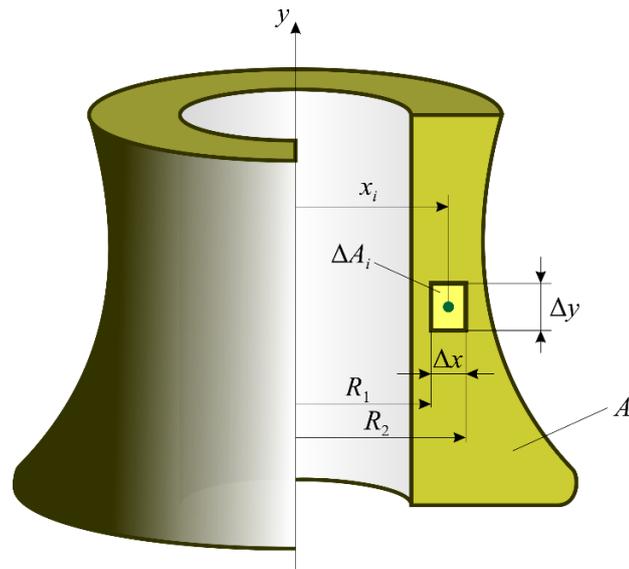
pa je elementarni volumen:

$$\Delta V_i = \pi \cdot R_2^2 \cdot \Delta y - \pi \cdot R_1^2 \cdot \Delta y ,$$

$$\Delta V_i = \pi \cdot \left(x_i + \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \cdot \Delta y - \pi \cdot \left(x_i - \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \cdot \Delta y = 2 \cdot \pi \cdot x_i \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

ili

$$\Delta V_i = 2 \cdot \pi \cdot x_i \cdot \Delta A_i.$$



Slika 8.17. Drugo Pappus-Guldinovo pravilo

Dalje je:

$$V = \sum \Delta V_i = 2 \cdot \pi \cdot \sum \Delta A_i \cdot x_i,$$

a budući da vrijedi jednakost:

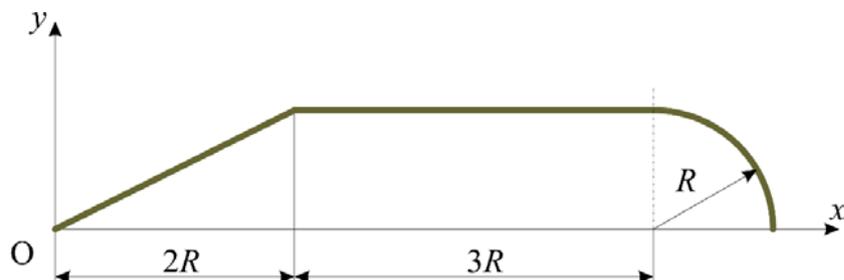
$$\sum \Delta A_i \cdot x_i = A \cdot x_T,$$

konačno dobijemo:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_T \cdot A. \quad (8.11)$$

Primjer 8.7.

Potrebno je odrediti uz pomoć prvog Pappus-Guldinova pravila površinu rotacijske plohe nastale rotacijom zadane linije oko osi x (slika 8.18.). Zadano je: $R = 1,8 \text{ m}$.



Slika 8.18. Primjer 8.7.

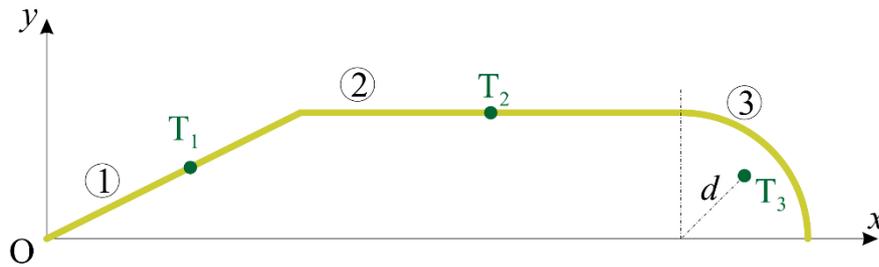
Rješenje:

Zadana materijalna linija pri rotaciji oko osi x opisuje rotacijsku plohu površinu koje određujemo s pomoću prvog Pappus-Guldinova pravila:

$$A_x = 2\pi \cdot L \cdot y_T,$$

gdje je L ukupna duljina složene linije, a y_T koordinata težišta zadane složene linije.

U svrhu određivanja potrebne koordinate težišta y_T zadanu složenu liniju dijelimo na dvije dužine i četvrtinu kružnice (slika 8.19.).



Slika 8.19. *Primjer 8.7.*: Zadana složena linija podijeljena na osnovne linije

Traženu koordinatu težišta određujemo prema izrazu:

$$y_T = \frac{\sum L_i \cdot y_i}{L}; \quad i = 1, 2, 3.$$

U odnosu na zadani koordinatni sustav y koordinate težišta pojedinih jednostavnih linija jesu:

$$y_{T1} = 0,5 \cdot R, \quad y_{T2} = R, \quad y_{T3} = d \cdot \sin 45^\circ,$$

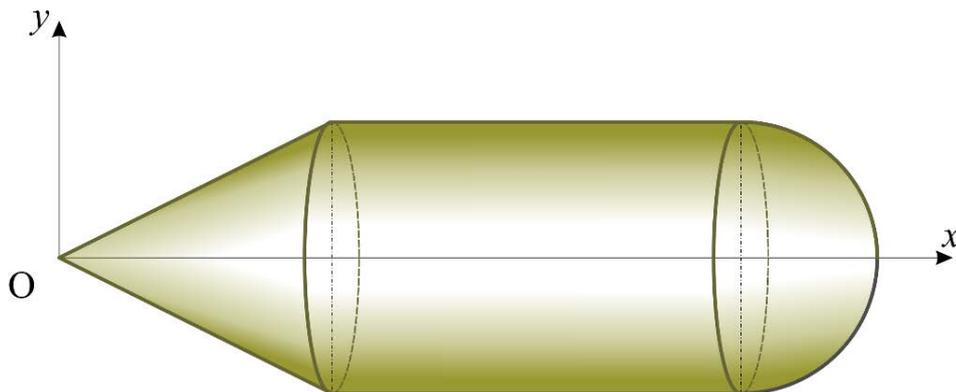
$$d = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2} \cdot R}{\pi}, \quad y_{T3} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,637 \cdot R,$$

a njihove duljine iznose:

$$L_1 = \sqrt{(2 \cdot R)^2 + R^2} = 2,236 \cdot R; \quad L_2 = 3 \cdot R; \quad L_3 = \frac{R \cdot \pi}{2} = 1,571 \cdot R.$$

Ukupna duljina složene linije je

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 2,236 \cdot R + 3 \cdot R + 1,571 \cdot R = 6,807 \cdot R.$$



Slika 8.20. *Primjer 8.7.* Rotacijska ploha nastala rotacijom složene linije oko osi x

Koordinata težišta je

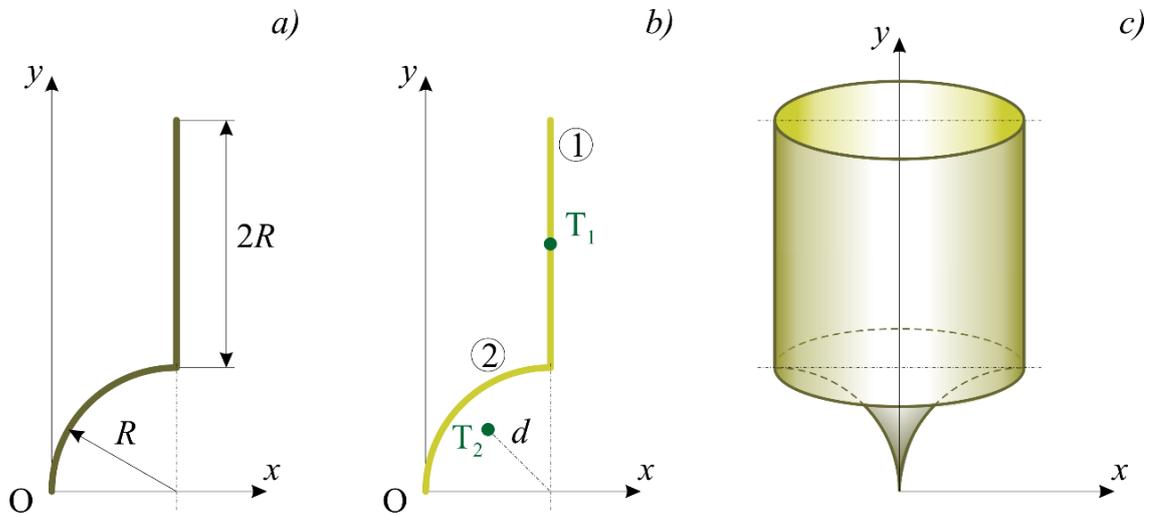
$$y_T = \frac{2,236 \cdot R \cdot 0,5 \cdot R + 3 \cdot R \cdot R + 1,571 \cdot R \cdot 0,637 \cdot R}{6,807 \cdot R} = 0,752 \cdot R = 1,354 \text{ m}.$$

Oplošje nastale rotacijske plohe (slika 8.20.) je

$$A_x = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot y_T = 2 \cdot \pi \cdot 6,807 \cdot R \cdot 0,752 \cdot R = 32,163 \cdot R^2 = 104,208 \text{ m}^2.$$

Primjer 8.8.

Složena materijalna linija prikazana je na slici 8.21.a. Valja odrediti površinu rotacijske plohe nastale rotacijom zadane linije oko osi y . Zadano je: $R = 0,3 \text{ m}$.



Slika 8.21. *Primjer 8.7.:* a) zadana složena linija, b) složena linija podijeljena na osnovne linije, c) rotacijska ploha nastala rotacijom zadane linije oko osi y .

Rješenje:

Zadana materijalna linija pri rotaciji oko osi y opisuje rotacijsku plohu površinu koje određujemo s pomoću prvog Pappus-Guldinova pravila:

$$A_y = 2\pi \cdot L \cdot x_T,$$

gdje je L ukupna duljina složene linije, a x_T koordinata težišta zadane složene linije.

U svrhu određivanja potrebne koordinate težišta x_T zadanu složenu liniju podijelit ćemo na dvije jednostavne: jednu dužinu i četvrtinu kružnice (slika 8.21.b).

Koordinatu težišta x_T određujemo prema izrazu:

$$x_T = \frac{L_1 \cdot x_{T1} + L_2 \cdot x_{T2}}{L_1 + L_2},$$

gdje su L_1 i L_2 duljine jednostavnih linija, a x_{T1} i x_{T2} koordinate težišta svake od linija.

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta pojedinih jednostavnih linija jesu:

$$x_{T1} = R; \quad x_{T2} = R - d \cdot \cos 45^\circ = R - \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R - \frac{2 \cdot R}{\pi} = 0,363 \cdot R,$$

jer je

$$d = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{4 \cdot R}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot R}{\pi} \cdot \sqrt{2}.$$

Ukupna duljina složene linije je

$$L = L_1 + L_2 = 2 \cdot R + \frac{\pi \cdot R}{2} = 3,571 \cdot R,$$

jer je

$$L_1 = 2 \cdot R, \quad L_2 = \frac{R \cdot \pi}{2} = 1,571 \cdot R.$$

Tražena koordinata težišta je

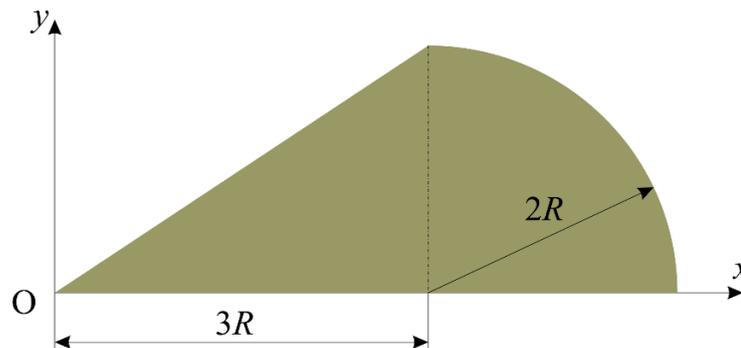
$$x_T = \frac{2 \cdot R \cdot R + 1,571 \cdot R \cdot 0,363 \cdot R}{2 \cdot R + 1,571 \cdot R} = 0,720 \cdot R = 0,720 \cdot 0,3 = 0,216 \text{ m},$$

pa je površina rotacijske plohe:

$$A_y = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot x_T = 2 \cdot \pi \cdot 3,571 \cdot R \cdot 0,720 \cdot R = 16,155 \cdot 0,3^2 = 1,454 \text{ m}^2.$$

Primjer 8.9.

Valja odrediti s pomoću drugog Pappus-Guldinova pravila volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom zadane plohe oko osi x (slika 8.22.). Zadano je: $R = 0,9 \text{ m}$.



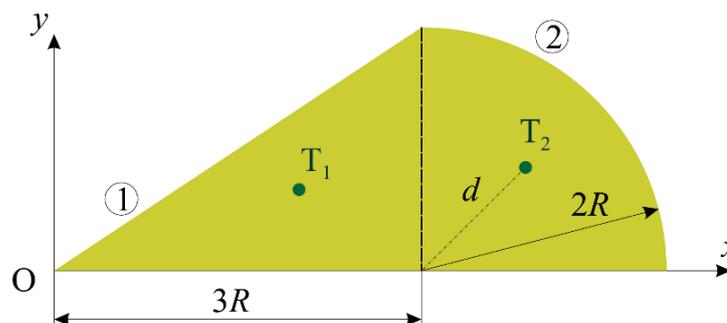
Slika 8.22. *Primjer 8.9.*

Rješenje:

Pri rotaciji zadane plohe oko osi x nastaje rotacijsko tijelo obujam (volumen) kojega možemo dobiti s pomoću drugog Pappus-Guldinova pravila:

$$V_x = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot y_T,$$

gdje je A ukupna površina, a y_T koordinata težišta zadane plohe, odnosno udaljenost težišta od osi oko koje se vrši rotacija.



Slika 8.23. *Primjer 8.9.:* Zadana složena ploha podijeljena na osnovne plohe

U svrhu određivanja potrebne koordinate težišta y_T zadana složena ploha dijeli se na dvije osnovne plohe: trokut i četvrtinu kruga (slika 8.23.), pa je

$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_{T1} + A_2 \cdot y_{T2}}{A_1 + A_2},$$

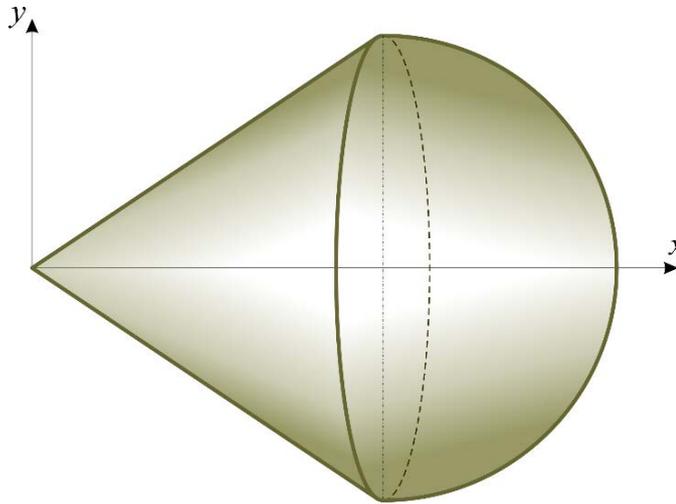
gdje su A_1 i A_2 površine jednostavnih ploha, a y_{T1} i y_{T2} koordinate težišta svake od ploha.

U odnosu na zadani koordinatni sustav koordinate težišta osnovnih ploha jesu:

$$y_{T1} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot R = 0,667 \cdot R, \quad y_{T2} = d \cdot \sin 45^\circ = \frac{8 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 0,849 \cdot R,$$

jer je

$$d = \frac{2}{3} \cdot (2 \cdot R) \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{4}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{16 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2}.$$



Slika 8.24. *Primjer 8.9.*: Rotacijsko tijelo nastalo rotacijom složene plohe oko osi x

Površine osnovnih ploha iznose:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot R \cdot 2 \cdot R = 3 \cdot R^2 \quad \text{i} \quad A_2 = \frac{(2 \cdot R)^2 \pi}{4} = \pi \cdot R^2 = 3,142 \cdot R^2,$$

pa je ukupna površina složene plohe:

$$A = A_1 + A_2 = 3 \cdot R^2 + 3,142 \cdot R^2 = 6,142 \cdot R^2,$$

nakon čega izračunavamo koordinatu y_T težišta:

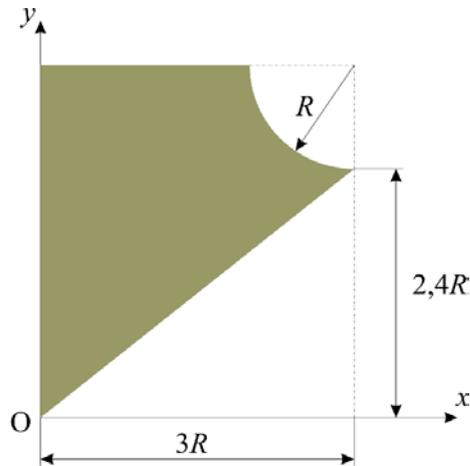
$$y_T = \frac{3 \cdot R^2 \cdot 0,667 \cdot R + 3,142 \cdot R^2 \cdot 0,849 \cdot R}{3 \cdot R^2 + 3,142 \cdot R^2} = 0,760 \cdot R = 0,684 \text{ m}.$$

Obujam nastalog rotacijskog tijela (slika 8.24.) jest:

$$V_x = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot y_T = 2 \cdot \pi \cdot 6,142 \cdot R^2 \cdot 0,760 \cdot R = 29,329 \cdot R^3 = 29,329 \cdot 0,9^3 = 21,381 \text{ m}^3.$$

Primjer 8.10.

Valja odrediti volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom zadane plohe oko osi y (slika 8.25.) korištenjem drugog Pappus-Guldinova pravila. Zadano je: $R = 1,2 \text{ m}$.



Slika 8.25. *Primjer 8.10.*

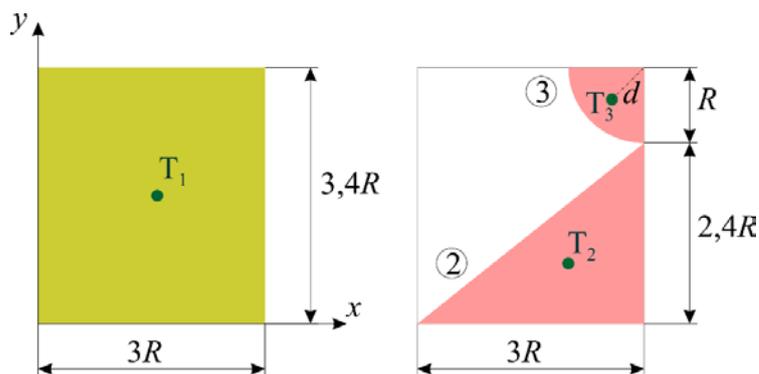
Rješenje:

Pri rotaciji zadane plohe oko osi y nastaje rotacijsko tijelo. Obujam (volumen) tako nastalog tijela može se dobiti s pomoću drugog Pappus-Guldinova pravila prema:

$$V_y = 2\pi \cdot A \cdot x_T,$$

gdje je A ukupna površina složene plohe, a x_T koordinata težišta zadane složene plohe.

Koordinatu težišta x_T određujemo prikazom zadane složene plohe s pomoću triju jednostavnih ploha na način da od pravokutnika dimenzija $3 \cdot R \times 3,4 \cdot R$ oduzmemo trokut dimenzija $3 \cdot R \times 2,4 \cdot R$ i četvrtinu kruga polumjera R (slika 8.26.).



Slika 8.26. *Primjer 8.10.: Zadana složena ploha podijeljena na osnovne plohe*

Tražena koordinata težišta sada je:

$$x_T = \frac{A_1 \cdot x_{T1} - A_2 \cdot x_{T2} - A_3 \cdot x_{T3}}{A_1 - A_2 - A_3};$$

pri čemu su koordinate težišta svake od osnovnih ploha:

$$x_{T1} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot R = 1,5 \cdot R; \quad x_{T2} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot R = 2 \cdot R;$$

$$x_{T3} = 3 \cdot R - d \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot R - \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \cdot R - \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = 2,576 \cdot R,$$

jer je

$$d = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\pi/4} = \frac{8 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} \cdot \sqrt{2}.$$

Površine osnovnih ploha iznose:

$$A_1 = 3 \cdot R \cdot 3,4 \cdot R = 10,2 \cdot R^2; \quad A_2 = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot R \cdot 2,4 \cdot R = -3,6 \cdot R^2; \quad A_3 = -\frac{R^2 \cdot \pi}{4} = -0,785 \cdot R^2,$$

tako da je ukupna površina složene plohe:

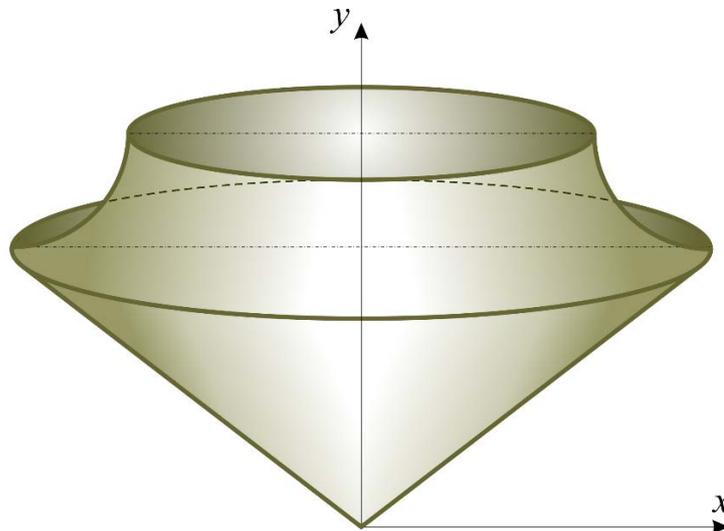
$$A = A_1 - A_2 - A_3 = 10,2 \cdot R^2 - 3,6 \cdot R^2 - 0,785 \cdot R^2 = 5,815 \cdot R^2.$$

Tražena koordinata težišta iznosi:

$$x_T = \frac{10,2 \cdot R^2 \cdot 1,5 \cdot R - 3,6 \cdot R^2 \cdot 2 \cdot R - 0,785 \cdot R^2 \cdot 2,576 \cdot R}{5,815 \cdot R^2} = 1,045 \cdot R = 1,254 \text{ m}.$$

Obujam nastalog rotacijskog tijela (slika 8.27.) jest:

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot x_T = 2 \cdot \pi \cdot 5,815 \cdot R^2 \cdot 1,045 \cdot R = 38,181 \cdot R^3 = 38,181 \cdot 1,2^3 = 65,98 \text{ m}^3.$$

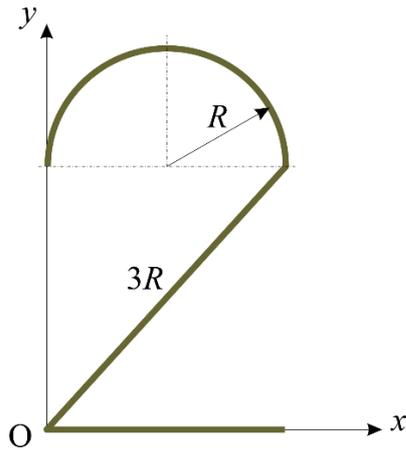


Slika 8.27. *Primjer 8.10.*: Rotacijsko tijelo nastalo rotacijom složene plohe oko osi y

ZADATCI ZA VJEŽBU:



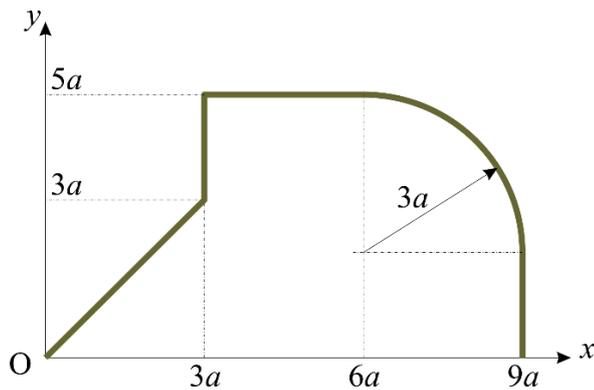
Zadatak 8.3. Valja odrediti koordinate težišta za složenu materijalnu liniju sastavljenu od polukružnice i dvije dužine. Potrebno je, također, izračunati površinu plohe nastale rotacijom zadane linije oko osi x odnosno y (slika Z.8.3.). Zadano je: R .



Slika Z.8.3.: *Zadatak 8.3.*

Zadatak 8.4.

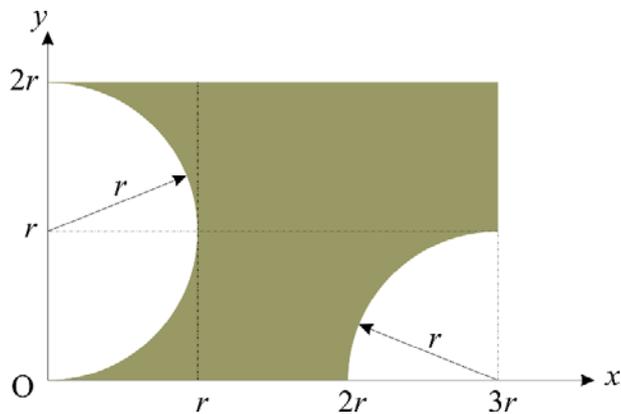
Za složenu materijalnu liniju sastavljenu od polukružnice i četiri dužine potrebno je odrediti koordinate težišta te izračunati površinu plohe nastale rotacijom zadane linije oko osi x odnosno y (slika Z.8.4.). Zadano je: a .



Slika Z.8.4.: *Zadatak 8.4.*

Zadatak 8.5. Za složenu materijalnu plohu potrebno je odrediti koordinate težišta te izračunati volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom zadane plohe oko osi x odnosno y (slika Z.8.5.).

Zadano je: r .

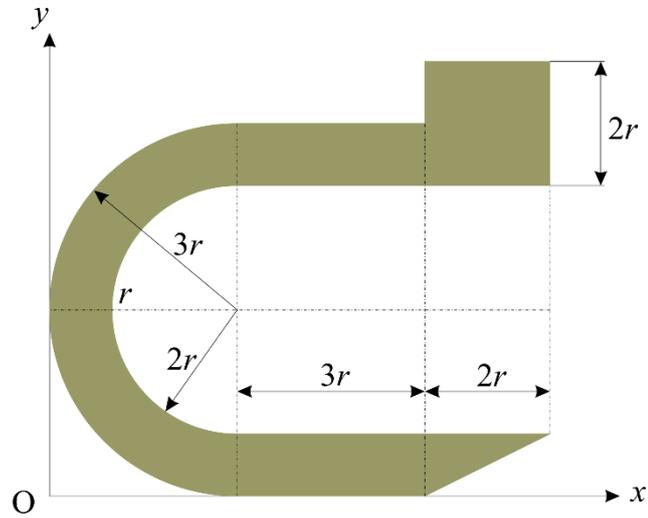


Slika Z.8.5.: *Zadatak 8.5.*

Zadatak 8.6.

Za složenu materijalnu plohu potrebno je odrediti koordinate težišta te izračunati volumen rotacijskog tijela nastalog rotacijom zadane plohe oko osi x odnosno y (slika Z.8.6.).

Zadano je: r .



Slika Z.8.6.: *Zadatak 8.6.*

9. TRENJE

9.1. VRSTE TRENJA

U dosadašnjim razmatranjima susretali smo idealizirane veze, tj. pretpostavljali smo da su dodirne površine idealno glatke, te da se reakcije poklapaju s pravcem normale. Iskustvo pokazuje da se na neko tijelo, koje se nalazi na drugom tijelu, mora djelovati određenom silom (vučnom) da bi ono kliznulo po površini drugog tijela. Toj aktivnoj sili suprotstavlja se sila u ravnini međusobnog dodira tijela koja se naziva *sila trenja*. Sila trenja jest vanjska pasivna sila.

Sila trenja posljedica je hrapavosti dodirnih površina, materijala od kojih su izrađena tijela; ovisi o načinu podmazivanja, površinskom pritisku i slično, tako da predstavlja vrlo složen matematičko-fizikalni problem.

Ovisno o stanju površina u dodiru razlikuje se suho trenje (bez podmazivanja) i polusuho trenje (s podmazivanjem). U ovim će se skriptama razmatrati suho (Coulombovo) trenje.

Trenje nadalje dijelimo na trenje mirovanja ili statičko trenje i na trenje klizanja ili kinematičko trenje.

Međutim, u inženjerskim proračunima i uz zadovoljavajuću točnost, dovoljno je poznavati nekoliko osnovnih pretpostavki nastalih na temelju niza pokusa, a nazivaju se *zakoni trenja* (Coulombovi zakoni):

1. Pri nastojanju da se jedno tijelo pomakne po površini drugog tijela, u dodirnoj površini nastaje sila trenja F_T . Intenzitet sile trenja može poprimiti vrijednosti od 0 do F_{Tgr} , koja se naziva *granična sila trenja* i uvijek je usmjerena u suprotnu stranu od one u koju vanjske aktivne sile nastoje pomaknuti tijelo.
2. Veličina granične sile trenja jednaka je produktu *statičkog koeficijenta trenja* i normalnog pritiska (odnosno normalne reakcije):

$$F_{Tgr} = \mu_0 \cdot F_N, \quad (9.1)$$

gdje je μ_0 – statički koeficijent trenja koji je bezdimenzionalna veličina; određuje se eksperimentalno i ovisi o materijalu tijela u dodiru te o stanju dodirnih površina (obrada, temperatura, podmazivanje i slično). Veličina granične sile trenja, u dovoljno širokoj oblasti, ne ovisi o veličini dodirnih površina.

Iz prvoga i drugog zakona slijedi da je, pri ravnoteži tijela, sila trenja u mirovanju manja ili jednaka graničnoj sili trenja:

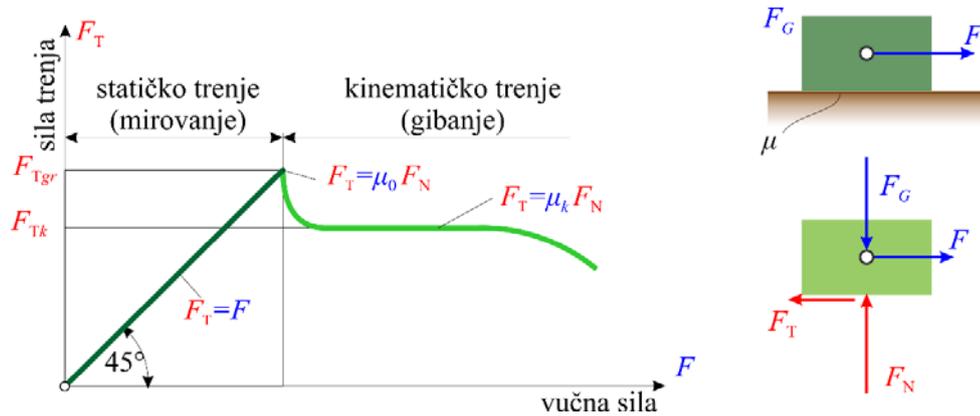
$$F_T \leq \mu_0 \cdot F_N, \quad (9.2)$$

tj. sila trenja u mirovanju dostiže vrijednost granične sile trenja samo u graničnom slučaju ravnoteže, veličina joj ovisi o djelovanju vanjskih aktivnih sila i ne može prijeći vrijednost F_{Tgr} .

Kada pod djelovanjem vanjskih aktivnih sila nastupi gibanje tijela, sila trenja se smanjuje, pa je njezina veza s normalnom reakcijom podloge dana izrazom:

$$F_{Tk} = \mu_k \cdot F_N, \quad (9.3)$$

gdje je F_{Tk} sila trenja klizanja (kinematička sila trenja), a μ_k je kinematički koeficijent trenja ili koeficijent trenja klizanja. Kinematički koeficijent trenja uvijek je manji od statičkog koeficijenta trenja ($\mu_k < \mu_0$) i to za 20 % do 30 %, kako je to prikazano dijagramom na slici 9.1.

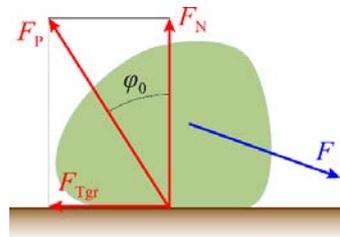


Slika 9.1. Statički i kinematički koeficijent trenja

Iz dijagrama je vidljivo da će u slučajevima kada je vučna sila F višestruko veća od sile trenja F_{Tk} , odnosno pri velikim brzinama tijela, doći do daljeg smanjivanja kinematičkog koeficijenta trenja μ_k .

9.2. REAKCIJA HRAPAVE VEZE. KUT TRENJA

Za razliku od ranije proučavanih veza bez trenja (idealne veze), kod kojih su reakcije usmjerene duž zajedničke normale na mjestu dodira, kod realnih (hrapavih) veza reakcija podloge sastoji se od dviju komponentata: normalne reakcije F_N i sile trenja F_T koja je na nju okomita. Prema tome, ukupna reakcija hrapave podloge zatvara neki kut φ s normalom (slika 9.2.).

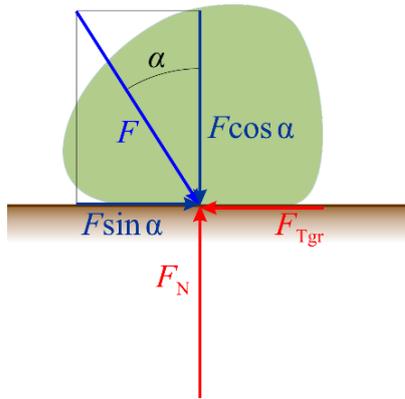


Slika 9.2. Reakcija hrapave veze i kut trenja

Ovisno o veličini sile trenja taj se kut mijenja od nule do neke granične vrijednosti φ_0 . Ta najveća vrijednost kuta φ naziva se *kut trenja*. Sa slike 9.2. slijedi:

$$\tan \varphi_0 = \frac{F_{Tgr}}{F_N} = \mu_0. \quad (9.4)$$

Ako na tijelo koje se nalazi na hrapavoj površini (slika 9.3.) djeluje sila F , koja s normalom zatvara kut α , tijelo će se pomaknuti samo tada kada je:



Slika 9.3. Uvjet za mirovanje tijela

$$F \cdot \sin \alpha > F_{\text{Tgr}} = \mu_0 \cdot F \cdot \cos \alpha,$$

tj. ako je:

$$\tan \alpha > \mu_0 = \tan \varphi_0,$$

odnosno:

$$\alpha > \varphi_0.$$

Dakle, ako je kut α manji od kuta trenja φ_0 , neće doći do pomicanja tijela bez obzira na veličinu sile F . Ovim se objašnjava pojava *samokočnosti tijela*.

9.3. EKSPERIMENTALNO ODREĐIVANJE KOEFICIJENTA TRENJA

Statički koeficijent trenja možemo odrediti jednostavnim pokusima uz pomoć uređaja shematski prikazanih na slikama 9.4.a i 9.4.b. Svrha pokusa jest da se „snimi” granični položaj ravnoteže, tj. položaj neposredno prije nego što nastupi gibanje razmatranog tijela.

Kod uređaja na slici 9.4.a postupno povećavamo težinu tereta F_{G2} , dok kod uređaja na slici 9.4.b postupno povećavamo kut nagiba grede α .

Iz uvjeta ravnoteže tereta na nepomičnoj hrapavoj podlozi (slika 9.4.a) slijedi:

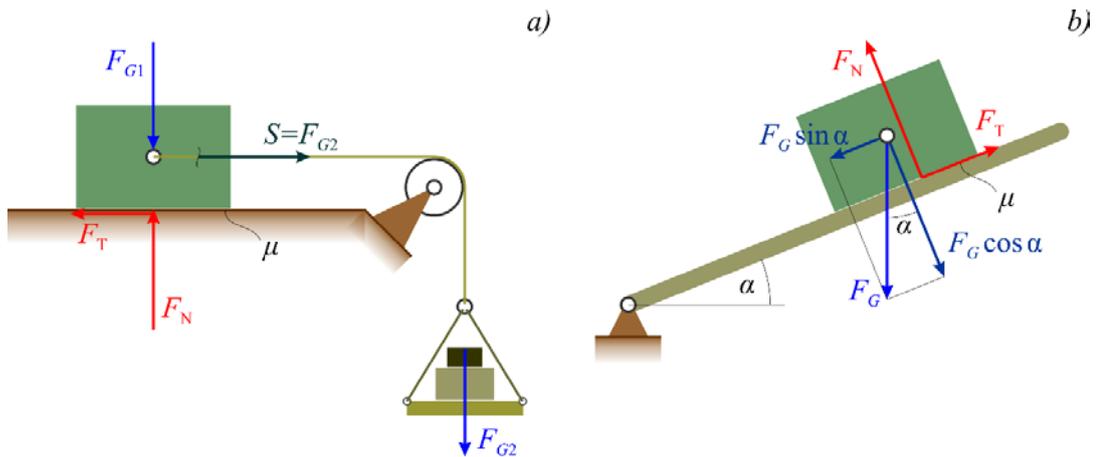
$$\sum F_x = 0: \quad F_{G2} - F_{\text{Tgr}} = 0, \quad F_{\text{Tgr}} = F_{G2};$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_N - F_{G1} = 0, \quad F_N = F_{G1};$$

gdje je F_{G2} ukupna težina tereta u graničnom položaju ravnoteže.

Koeficijent trenja je

$$\mu_0 = \frac{F_{\text{Tgr}}}{F_N} = \frac{F_{G2}}{F_{G1}}.$$



Slika 9.4. Eksperimentalno određivanje koeficijenta trenja: a) tijelo na nepomičnoj hrapavoj, ravnoj podlozi, b) tijelo na hrapavoj, pomičnoj kosini.

Iz uvjeta ravnoteže tereta na pomičnoj hrapavoj kosini (slika 9.4.b) slijedi:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_G \cdot \sin \alpha + F_{Tgr} = 0, \quad F_{Tgr} = F_G \cdot \sin \alpha;$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_N - F_G \cdot \cos \alpha = 0, \quad F_N = F_G \cdot \cos \alpha;$$

gdje je α kut nagiba kosine u graničnom položaju ravnoteže.

Koeficijent trenja sada je:

$$\mu_0 = \frac{F_{Tgr}}{F_N} = \tan \alpha.$$

Neke vrijednosti statičkog koeficijenta trenja μ_0 dane su u tablici 9.1.

Tablica 9.1. Neke vrijednosti statičkog koeficijenta trenja μ_0

Materijal površina u dodiru	μ_0
Drvo na drvu	0,30 – 0,70
Čelik na čeliku	0,10 – 0,20
Aluminij na čeliku	0,40 – 0,60
Čelik na ledu	0,03 – 0,05
Koža na metalu	0,30 – 0,60
Guma na asfaltu	0,90
Skije na snijegu	0,05 – 0,08

9.4. RAVNOTEŽA PRI TRENJU

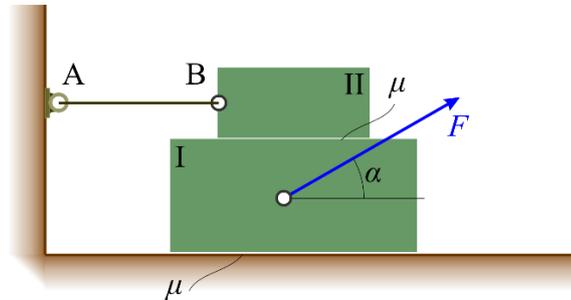
Proučavanje ravnoteže krutih tijela kada se uzima u obzir i trenje, svodi se najčešće na promatranje graničnog položaja ravnoteže, kada sila trenja dostiže svoju najveću vrijednost.

Ako promatrani ravnotežni položaj nije graničan, silu trenja određujemo iz uvjeta ravnoteže kao i ostale nepoznate sile i ona je manja od svoje granične vrijednosti.

Primjer 9.1.

Tijelo I težine F_{G1} leži na hrapavoj horizontalnoj podlozi, a na njemu se nalazi tijelo II težine F_{G2} , koje je užetom AB vezano za vertikalni zid (slika 9.5.). Odrediti najveću silu F kojom se smije djelovati na tijelo I pa da sustav ostane u stanju mirovanja.

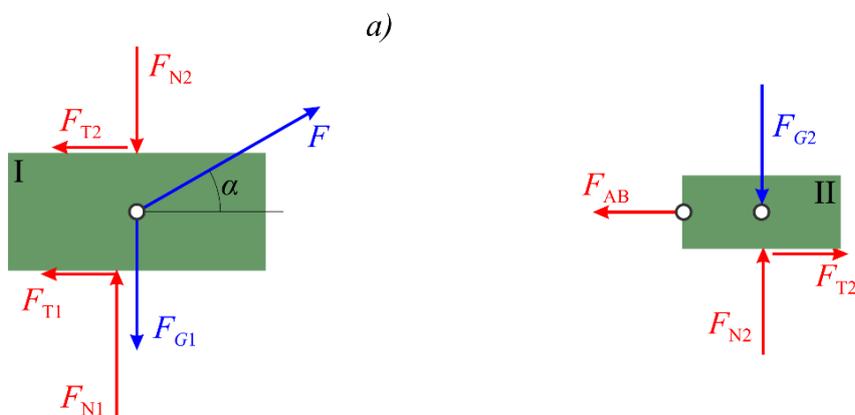
Zadano je: $F_{G1} = 300 \text{ N}$, $F_{G2} = 150 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0,2$.



Slika 9.5. Primjer 9.1.

Rješenje:

Promotrit ćemo granični položaj ravnoteže u kojem će sile trenja na svim dodirnim površinama dosegnuti graničnu vrijednost. Oslobođanjem tijela I i II od veza i dodavanjem odgovarajućih reakcija veza dobit ćemo slobodna tijela (slike 9.6.a i 9.6.b), za koja možemo postaviti odgovarajuće jednadžbe ravnoteže:



Slika 9.6. Primjer 9.1.: Tijela sustava oslobođena od veza: a) tijelo I, b) tijelo II.

Uvjeti ravnoteže za tijelo I (slika 9.6.a) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{T1} - F_{T2} + F \cdot \cos 30^\circ = 0; \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{N1} - F_{N2} - F_{G1} + F \cdot \sin 30^\circ = 0. \end{aligned}$$

Uvjeti ravnoteže za tijelo II (slika 9.6.b) glase:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{AB} + F_{T2} = 0; \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{N2} - F_{G2} = 0. \end{aligned}$$

Dobili smo četiri jednadžbe u kojima ima šest nepoznanica: F , F_{N1} , F_{T1} , F_{N2} , F_{T2} i F_{AB} .

Trebaju nam, dakle, još dvije jednađbe koje slijede iz uvjeta graničnog slučaja ravnoteže, pri čemu je

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}; \quad F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}.$$

Rješenje gornjih jednađbi je

$$F_{N2} = 150 \text{ N}; \quad F_{AB} = 30 \text{ N}; \quad F = 124 \text{ N}.$$

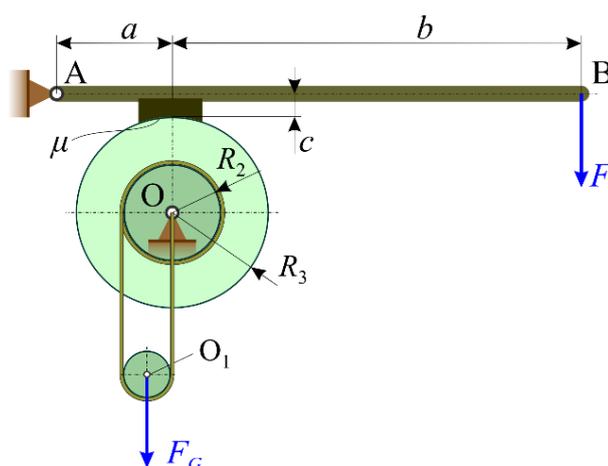
Očevidno je da će promatrani sustav biti u ravnoteži za sve veličine sile F koje zadovoljavaju nejednađbu:

$$0 \leq F \leq 124 \text{ N}.$$

Primjer 9.2.

Potrebno je odrediti silu kočenja F na poluzi AB papučne kočnice koja će osigurati jednoliko spuštanje tereta težine F_G (slika 9.7.). Teret je ovješten o koloturnik O_1 oko kojega je namotano uže koje se namata na bubanj radijusa R_2 . Bubanj je kruto spojen s kočionim diskom radijusa R_3 koji je u dodiru s papučom kočnice.

Zadano je: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 80 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$, $R_3 = 40 \text{ cm}$, $F_G = 5 \text{ kN}$, $\mu = 0,4$.



Slika 9.7. *Primjer 9.2.*

Rješenje:

Iz uvjeta ravnoteže koloturnika O_1 (slika 9.8.a):

$$\sum F_y = 0: \quad 2 \cdot F_s - F_G = 0$$

dobije se:

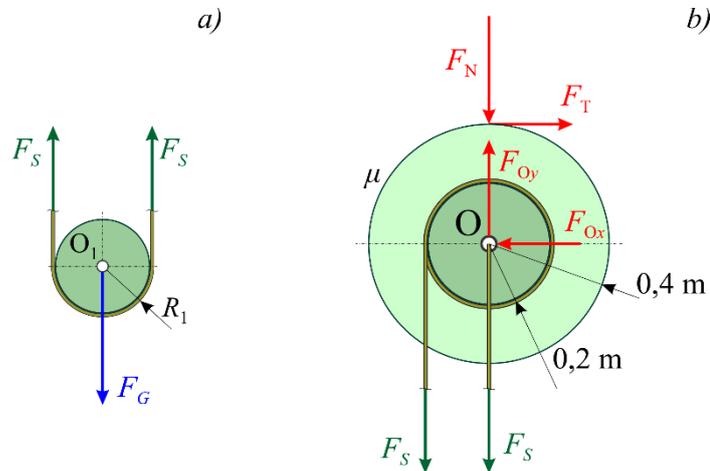
$$F_s = \frac{F_G}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ kN}.$$

Bubanj s kočionim diskom, oslobođen od veza, prikazan je na slici 9.8.b. Kako se promatra granični slučaj ravnoteže, bit će $F_T = \mu \cdot F_N$. Također, s obzirom na to da se zadatkom ne traže komponente reakcije u O, dovoljno je postaviti samo jedan od uvjeta ravnoteže:

$$\sum M_O = 0: \quad -F_T \cdot R_3 + F_S \cdot R_2 = 0,$$

odakle je sila trenja:

$$F_T = \frac{F_S \cdot R_2}{R_3} = \frac{2,5 \cdot 0,2}{0,4} = 1,25 \text{ kN}.$$

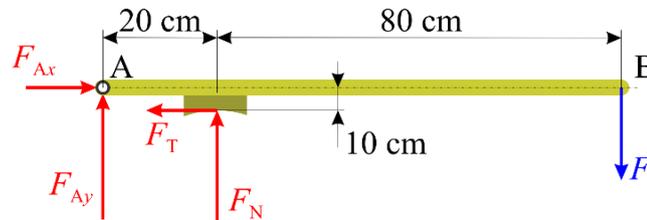


Slika 9.8. *Primjer 9.2.*: Dijelovi kočnice kao slobodna tijela: a) koloturnik O_1 , b) bubanj s diskom.

Normalna komponenta sile kojom poluga djeluje na bubanj je

$$F_N = \frac{F_T}{\mu} = \frac{1,25}{0,4} = 3,13 \text{ kN}.$$

Traženi iznos sile F odredit ćemo iz uvjeta ravnoteže poluge AB (slika 9.9.). Kako se ne traži veličina reakcije u A, i ovdje je dostatno postaviti samo jednu od jednadžbi ravnoteže:



Slika 9.9. *Primjer 9.2.*: Kočiona poluga kao slobodno tijelo

$$\sum M_A = 0: \quad -F \cdot 100 + F_N \cdot 20 - F_T \cdot 10 = 0,$$

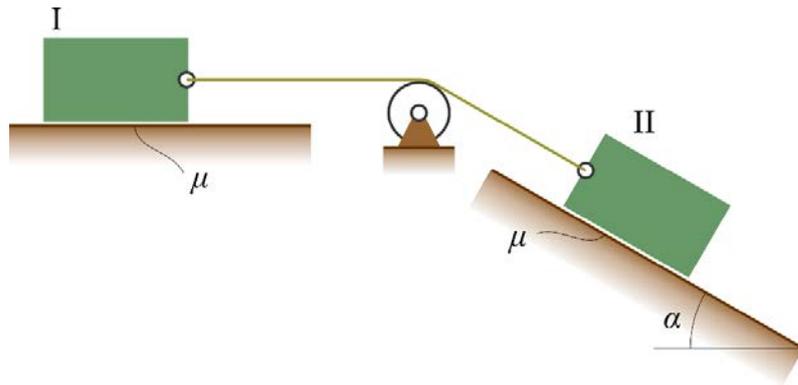
odakle je tražena sila:

$$F = 0,5 \text{ kN}.$$

Primjer 9.3.

Tijelo I težine F_{G1} leži na hrapavoj horizontalnoj podlozi, a tijelo II težine F_{G2} na hrapavoj kosini. Tijela su međusobno povezana užetom koje ide preko koloture (slika 9.10.). Potrebno je odrediti iznos težine F_{G1} tijela I da bi sustav tijela bio u ravnoteži.

Zadano je: $F_{G2} = 5 \text{ kN}$, $\mu = 0,2$, $\alpha = 30^\circ$.



Slika 9.10. *Primjer 9.3.*

Rješenje:

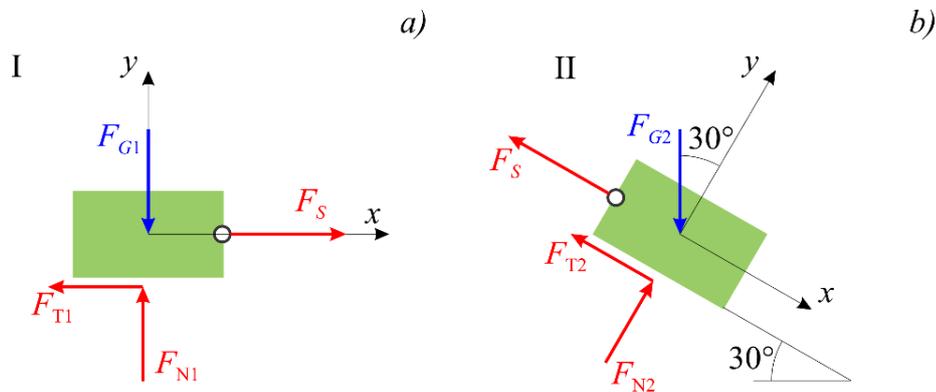
Oba tijela oslobađaju se od veza na koja pored težina F_{G1} odnosno F_{G2} djeluju i reakcije veza: sila F_S kojom uže djeluje na tijela i koja ima pravac užeta te sile kojima hrapave podloge djeluju na tijela: normalne sile i sile trenja. Sile trenja imaju pritom smjer suprotan od smjera mogućeg pomaka tijela (slika 9.11.). Dimenzije tijela su zanemarive, pa na svako tijelo djeluje konkurentni sustav sila u ravnini.

Uvjeti ravnoteže za drugo tijelo (slika 9.11.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{G2} \cdot \sin \alpha - F_S - F_{T2} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} - F_{G2} \cdot \cos \alpha = 0,$$

pri čemu je zbog graničnog slučaja ravnoteže: $F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}$.



Slika 9.11. *Primjer 9.3.:* Tijela oslobođena od veza: a) tijelo I, b) tijelo II.

Iz gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N2} = F_{G2} \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \cos 30^\circ = 4,330 \text{ kN};$$

$$F_{T2} = \mu \cdot F_{N2} = 0,2 \cdot 4,330 = 0,866 \text{ kN};$$

$$F_S = F_{G2} \cdot \sin \alpha - F_{T2} = 5 \cdot \sin 30^\circ - 0,866 = 1,634 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za prvo tijelo (slika 9.11.a) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_S - F_{T1} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N1} - F_{G1} = 0,$$

pri čemu je $F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}$.

Rješavanjem gornjih jednačbi dobije se:

$$F_{T1} = F_S = 1,634 \text{ kN}; \quad F_{N1} = \frac{F_{T1}}{\mu} = \frac{1,634}{0,2} = 8,17 \text{ kN},$$

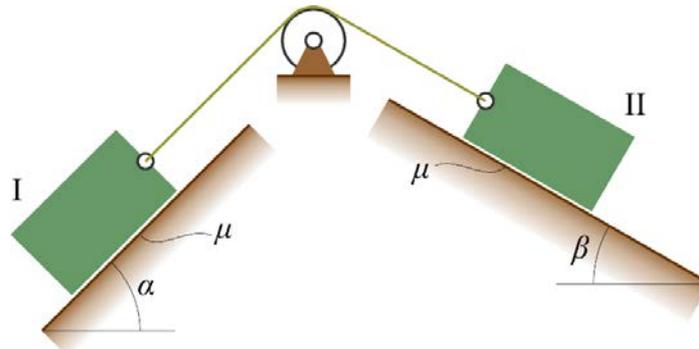
pa je potrebna težina prvog tijela:

$$F_{G1} = F_{N1} = 8,17 \text{ kN}.$$

Primjer 9.4.

Tijela I i II, težine F_{G1} i F_{G2} , leže na hrapavim kosinama. Tijela su međusobno povezana užetom koje ide preko koloture (slika 9.12.). Potrebno je odrediti interval vrijednosti težine F_{G2} tereta II da bi sustav tijela bio u ravnoteži.

Zadano je: $F_{G1} = 3 \text{ kN}$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Slika 9.12. *Primjer 9.4.*

Rješenje:

Najprije trebamo osloboditi tijela od veza, dodati vanjske aktivne sile F_{G1} i F_{G2} te reakcije veza: silu u užetu F_S i reakcije hrapavih podloga: normalne sile i sile trenja. Dimenzije tijela mogu se pritom zanemariti.

Kako je potrebno odrediti interval vrijednosti težine F_{G2} , promotrit će se dva granična slučaja ravnoteže: prvi kada je težina F_{G2} toliko velika da teži krenuti niz kosinu povlačeći tijelo I uz kosinu, i drugi kada je ta težina taman dovoljna da ne dopusti gibanje tijela I niz kosinu.

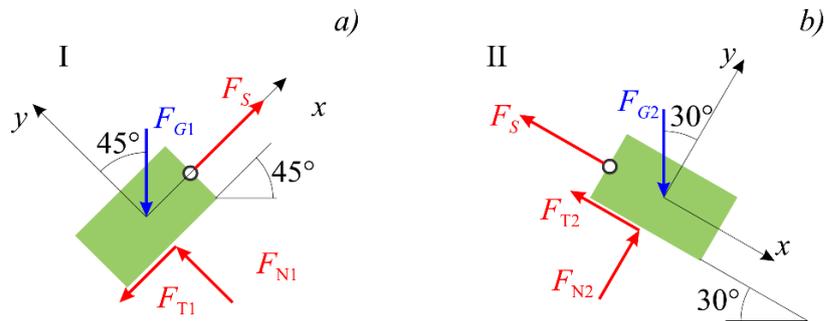
1. slučaj – određivanje najveće vrijednosti težine F_{G2}

Uvjeti ravnoteže za prvo tijelo glase (slika 9.13.a):

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{G1} \cdot \sin \alpha + F_S - F_{T1} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N1} - F_{G1} \cdot \cos \alpha = 0,$$

pri čemu je $F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}$.



Slika 9.13. *Primjer 9.3.:* Tijela oslobođena od veza za slučaj $F_{G2,max}$: a) tijelo I, b) tijelo II.

Iz gornjih jednađbi dobije se:

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1} \quad F_{N1} = F_{G1} \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \cos 45^\circ = 2,121 \text{ kN},$$

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1} = 0,1 \cdot 2,121 = 0,212 \text{ kN},$$

$$F_S = F_{G1} \cdot \sin \alpha + F_{T1} = 3 \cdot \sin 45^\circ + 0,212 = 2,333 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za drugo tijelo glase (slika 9.13.b):

$$\sum F_x = 0: \quad F_{G2} \cdot \sin \beta - F_S - F_{T2} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} - F_{G2} \cdot \cos \beta = 0,$$

uz $F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}$.

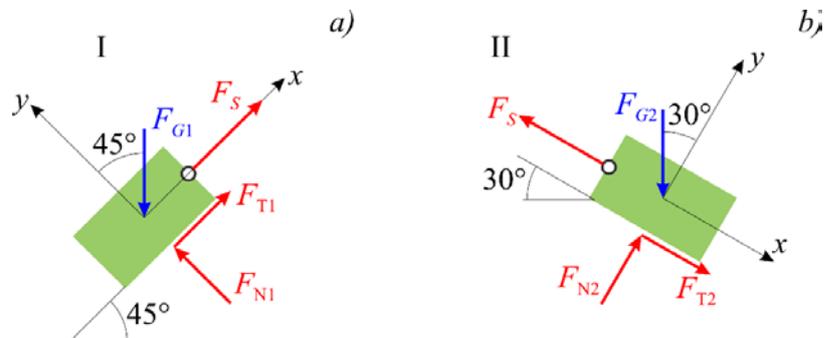
Rješavanjem gornjih jednađbi dobije se:

$$F_{N2} = F_{G2} \cdot \cos \beta, \quad F_{T2} = \mu \cdot F_{G2} \cdot \cos \beta,$$

$$F_{G2} \cdot \sin \beta - F_S - \mu \cdot F_{G2} \cdot \cos \beta = 0,$$

$$F_{G2} = \frac{F_S}{\sin \beta - \mu \cdot \cos \beta} = \frac{2,333}{\sin 30^\circ - 0,1 \cdot \cos 30^\circ} = 5,643 \text{ kN}.$$

2. slučaj – određivanje najmanje vrijednosti težine F_{G2}



Slika 9.14. *Primjer 9.3.:* Tijela oslobođena od veza za slučaj $F_{G2,min}$: a) tijelo I, b) tijelo II.

Uvjeti ravnoteže za prvo tijelo glase (slika 9.14.a):

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{G1} \cdot \sin \alpha + F_S + F_{T1} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N1} - F_{G1} \cdot \cos \alpha = 0,$$

s tim da je $F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}$.

Iz gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N1} = F_{G1} \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \cos 45^\circ = 2,121 \text{ kN}, \quad F_{T1} = \mu \cdot F_{N1} = 0,1 \cdot 2,121 = 0,212 \text{ kN},$$

$$F_S = F_{G1} \cdot \sin \alpha - F_{T1} = 3 \cdot \sin 45^\circ - 0,212 = 1,909 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za drugo tijelo glase (slika 9.14.b):

$$\sum F_x = 0: \quad F_{G2} \cdot \sin \beta - F_S + F_{T2} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} - F_{G2} \cdot \cos \beta = 0,$$

pri čemu je $F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}$.

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N2} = F_{G2} \cdot \cos \beta, \quad F_{T2} = \mu F_{G2} \cos \beta,$$

$$F_{G2} \cdot \sin \beta - F_S + \mu \cdot F_{G2} \cdot \cos \beta = 0,$$

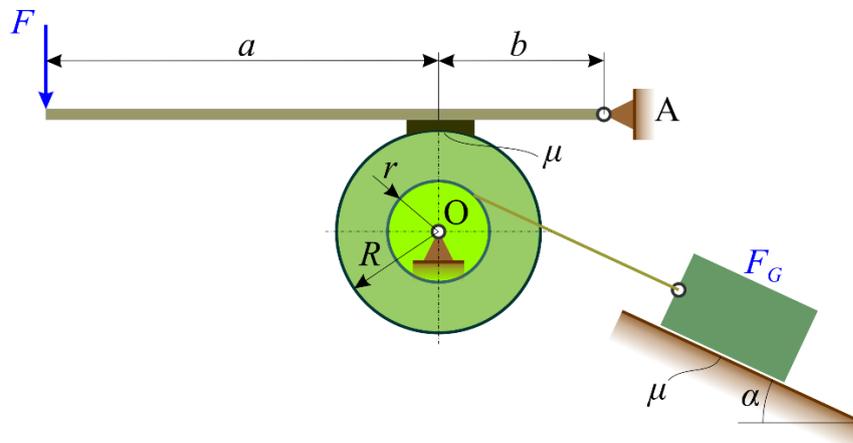
$$F_{G2} = \frac{F_S}{\sin \beta + \mu \cdot \cos \beta} = \frac{1,909}{\sin 30^\circ + 0,1 \cdot \cos 30^\circ} = 3,254 \text{ kN}.$$

Dakle, da bi zadani sustav tijela bio u ravnoteži, težina tijela II mora biti u intervalu:

$$3,254 \text{ kN} \leq F_{G2} \leq 5,643 \text{ kN}.$$

Primjer 9.5.

Potrebno je odrediti silu kočenja F na poluzi AB papučne kočnice koja će osigurati jednoliko spuštanje tereta težine F_G (slika 9.15.).

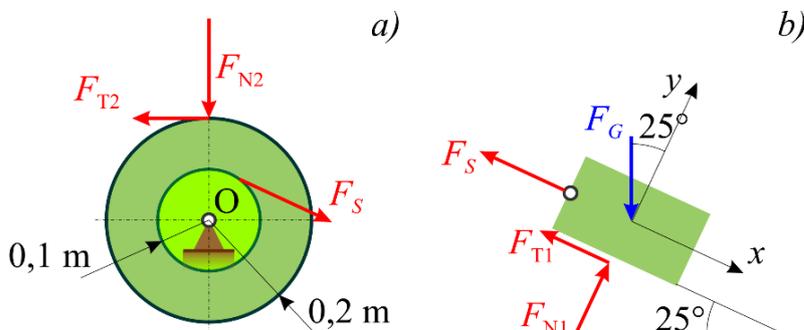


Slika 9.15. *Primjer 9.5.*

Zadano je: $a = 1,2 \text{ m}$, $b = 0,3 \text{ m}$, $R = 0,2 \text{ m}$, $r = 0,1 \text{ m}$, $F_G = 6 \text{ kN}$, $\mu = 0,3$, $\alpha = 25^\circ$.

Rješenje:

Moramo sva tijela u sustavu osloboditi od veza, dodati vanjske aktivne sile i reakcije veza te postaviti odgovarajuće uvjete ravnoteže.



Slika 9.16. *Primjer 9.5.: Dijelovi sustava oslobođeni od veza: a) bubanj s kočionim diskom, b) teret.*

Uvjeti ravnoteže tereta na kosini (slika 9.16.b) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_G \cdot \sin \alpha - F_S - F_{T1} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N1} - F_G \cdot \cos \alpha = 0,$$

pri čemu je zbog graničnog slučaja ravnoteže: $F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}$.

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N1} = F_G \cdot \cos \alpha = 6 \cdot \cos 25^\circ = 5,438 \text{ kN}, \quad F_{T1} = \mu \cdot F_{N1} = 0,3 \cdot 5,438 = 1,631 \text{ kN},$$

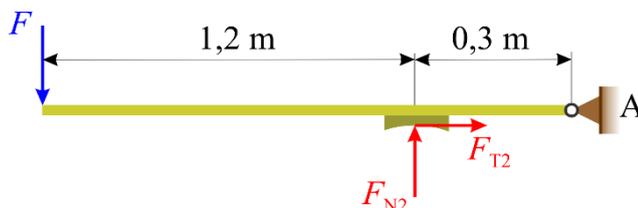
$$F_S = F_G \cdot \sin \alpha - F_{T1} = 6 \cdot \sin 25^\circ - 1,631 = 0,905 \text{ kN}.$$

Za rješenje zadatka dovoljno je za bubanj (slika 9.16.a) postaviti samo jedan od triju uvjeta ravnoteže:

$$\sum M_0 = 0: \quad -F_S \cdot r + F_{T2} \cdot R = 0,$$

odakle je

$$F_{T2} = \frac{F_S \cdot r}{R} = \frac{0,905 \cdot 0,1}{0,2} = 0,453 \text{ kN}, \quad F_{N2} = \frac{F_{T2}}{\mu} = \frac{0,453}{0,3} = 1,51 \text{ kN}.$$



Slika 9.17. *Primjer 9.5.: Kočiona poluga kao slobodno tijelo*

Za polugu je također dovoljno napisati jedan uvjet ravnoteže (slika 9.17.):

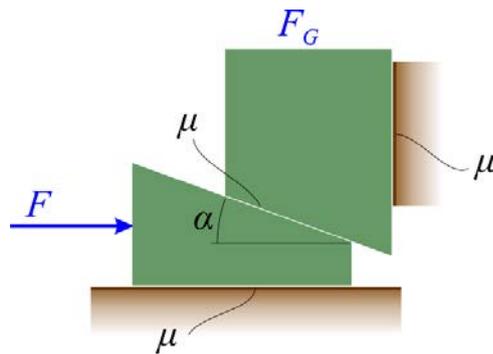
$$\sum M_A = 0: \quad F \cdot (a + b) - F_{N2} \cdot b = 0,$$

odakle se dobije tražena sila:

$$F = \frac{F_{N2} \cdot b}{a+b} = \frac{1,51 \cdot 0,3}{1,2+0,3} = 0,302 \text{ kN}.$$

Primjer 9.6.

Sustav na slici sastoji se od klina i tereta težine F_G (slika 9.18.). Potrebno je odrediti interval vrijednosti sile F da bi sustav tijela ostao u ravnoteži ako je: $F_G = 2 \text{ kN}$, $\mu = 0,15$, $\alpha = 20^\circ$.



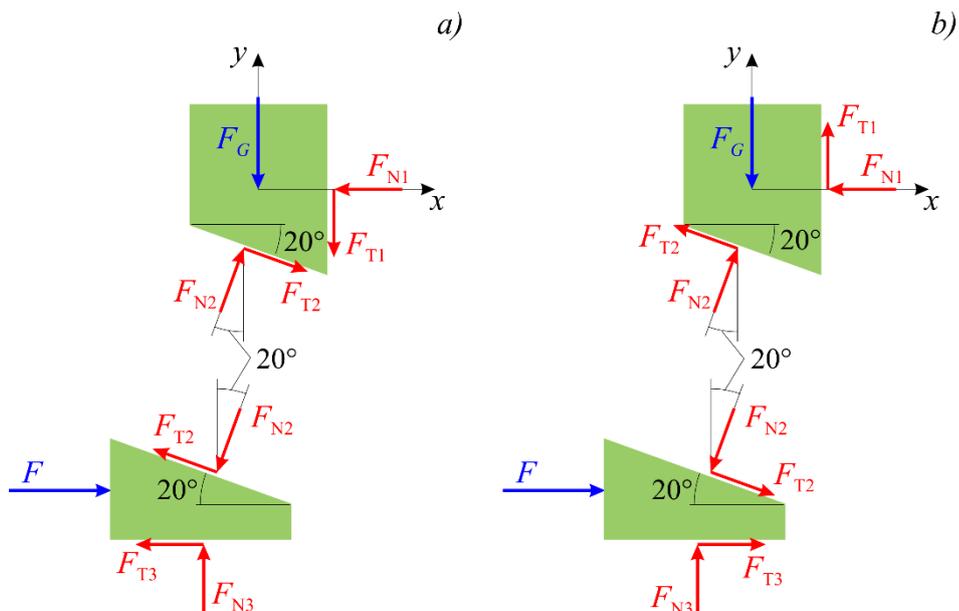
Slika 9.18. *Primjer 9.6.*

Rješenje:

Oslobađanjem klina i tereta od veza dobit ćemo dva konkurentna sustava sila iz čijih će se uvjeta ravnoteže, uz veze između normalnih sila i sila trenja u graničnom slučaju ravnoteže, odrediti nepoznate veličine.

Budući da je potrebno odrediti interval vrijednosti sile F , razmotrit ćemo dva granična slučaja ravnoteže.

1. slučaj – određivanje najveće vrijednosti sile F



Slika 9.19. *Primjer 9.6.:* Klin i teret kao slobodna tijela: a) slučaj najveće sile F , b) slučaj najmanje sile F .

Kada bi sila F imala vrijednost veću od najveće dopuštene za slučaj ravnoteže klinom, koji bi se pomicao udesno, teret bi se podizao. U skladu s time sile trenja u dodirnim plohama imaju smjerove suprotne od mogućih pomaka tijela (slika 9.19.a).

Uvjeti ravnoteže tereta glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{N2} \cdot \sin \alpha + F_{T2} \cdot \cos \alpha - F_{N1} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} \cdot \cos \alpha - F_{T2} \cdot \sin \alpha - F_{T1} - F_G = 0,$$

pri čemu su

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}, \quad F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}.$$

Iz gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N1} = F_{N2} \cdot \sin \alpha + F_{T2} \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1} = \mu \cdot (F_{N2} \cdot \sin \alpha + \mu \cdot F_{N2} \cdot \cos \alpha) = \mu \cdot F_{N2} \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha),$$

$$F_{N2} \cdot \cos \alpha - \mu \cdot F_{N2} \cdot \sin \alpha - \mu \cdot F_{N2} \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) - F_G = 0,$$

$$F_{N2} = \frac{F_G}{\cos \alpha - 2 \cdot \mu \cdot \sin \alpha - \mu^2 \cdot \cos \alpha},$$

$$F_{N2} = \frac{2}{\cos 20^\circ - 2 \cdot 0,15 \cdot \sin 20^\circ - 0,15^2 \cdot \cos 20^\circ} = 2,451 \text{ kN},$$

$$F_{T2} = \mu \cdot F_{N2} = 0,15 \cdot 2,451 = 0,368 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže klina glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F - F_{N2} \cdot \sin \alpha - F_{T2} \cdot \cos \alpha - F_{T3} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N3} - F_{N2} \cdot \cos \alpha + F_{T2} \cdot \sin \alpha = 0,$$

uz

$$F_{T3} = \mu \cdot F_{N3}.$$

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N3} = F_{N2} \cdot \cos \alpha - F_{T2} \cdot \sin \alpha = 2,451 \cdot \cos 20^\circ - 0,368 \cdot \sin 20^\circ = 2,177 \text{ kN},$$

$$F_{T3} = \mu \cdot F_{N3} = 0,15 \cdot 2,177 = 0,327 \text{ kN},$$

$$F = F_{N2} \cdot \sin \alpha + F_{T2} \cdot \cos \alpha + F_{T3},$$

$$F = 2,451 \cdot \sin 20^\circ + 0,368 \cdot \cos 20^\circ + 0,327 = 1,511 \text{ kN}$$

2. slučaj – određivanje najmanje vrijednosti sile F

Kada bi sila F imala vrijednost manju od najmanje potrebne za slučaj ravnoteže, teret bi se spuštao, a klin bi se gibao ulijevo.

U skladu s time sile trenja u dodirnim plohama imaju smjerove suprotne od mogućih pomaka tijela (slika 9.19.b).

Uvjeti ravnoteže tereta glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{N2} \cdot \sin \alpha - F_{T2} \cdot \cos \alpha - F_{N1} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} \cdot \cos \alpha + F_{T2} \cdot \sin \alpha + F_{T1} - F_G = 0,$$

pri čemu su

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1}, \quad F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}.$$

Iz gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N1} = F_{N2} \cdot \sin \alpha - F_{T2} \cdot \cos \alpha,$$

$$F_{T1} = \mu \cdot F_{N1} = \mu \cdot (F_{N2} \cdot \sin \alpha - \mu \cdot F_{N2} \cdot \cos \alpha) = \mu \cdot F_{N2} \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha),$$

$$F_{N2} \cdot \cos \alpha + \mu \cdot F_{N2} \cdot \sin \alpha + \mu \cdot F_{N2} \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) - F_G = 0,$$

$$F_{N2} = \frac{F_G}{\cos \alpha + 2 \cdot \mu \cdot \sin \alpha - \mu^2 \cdot \cos \alpha},$$

$$F_{N2} = \frac{2}{\cos 20^\circ + 2 \cdot 0,15 \cdot \sin 20^\circ - 0,15^2 \cdot \cos 20^\circ} = 1,959 \text{ kN},$$

$$F_{T2} = \mu \cdot F_{N2} = 0,15 \cdot 1,959 = 0,294 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže klina su:

$$\sum F_x = 0: \quad F - F_{N2} \cdot \sin \alpha + F_{T2} \cdot \cos \alpha + F_{T3} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N3} - F_{N2} \cdot \cos \alpha - F_{T2} \cdot \sin \alpha = 0,$$

uz

$$F_{T3} = \mu \cdot F_{N3}.$$

Rješavanjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$F_{N3} = F_{N2} \cdot \cos \alpha + F_{T2} \cdot \sin \alpha = 1,959 \cdot \cos 20^\circ + 0,294 \cdot \sin 20^\circ = 1,941 \text{ kN},$$

$$F_{T3} = \mu \cdot F_{N3} = 0,15 \cdot 1,941 = 0,291 \text{ kN},$$

$$F = F_{N2} \cdot \sin \alpha - F_{T2} \cdot \cos \alpha - F_{T3},$$

$$F = 1,959 \cdot \sin 20^\circ - 0,294 \cdot \cos 20^\circ - 0,291 = 0,103 \text{ kN}.$$

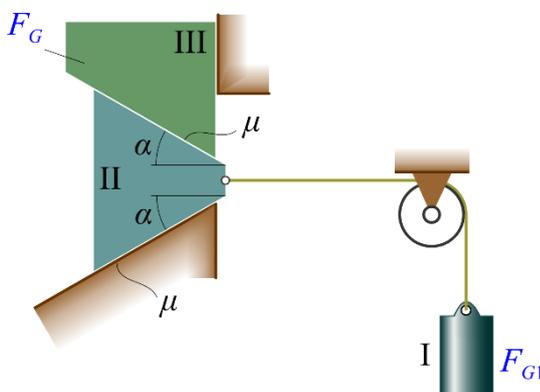
Dakle, sustav tijela bit će u ravnoteži za vrijednosti sile F u intervalu:

$$0,103 \text{ kN} \leq F \leq 1,511 \text{ kN}.$$

Primjer 9.7.

Za sustav tijela prema slici 9.20. valja odrediti najveću težinu utega I (F_{G1}) za koju će zadani sustav biti u stanju ravnoteže.

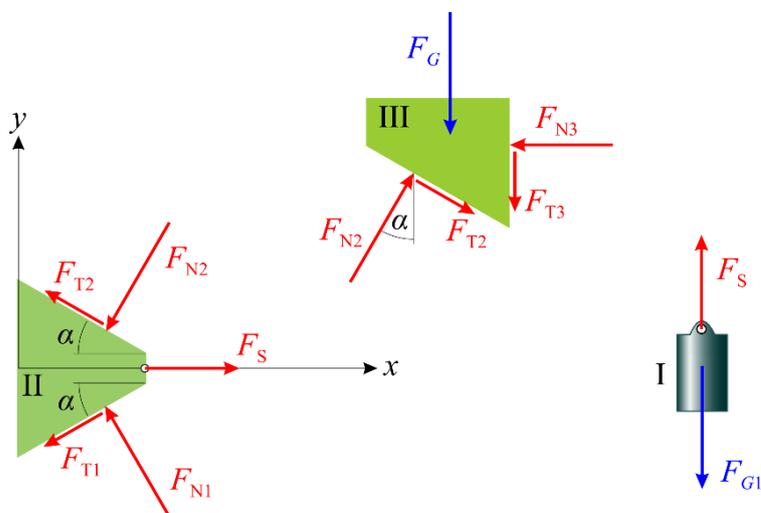
Zadano je: $F_G = 5 \text{ kN}$, $\mu = 0,2$, $\alpha = 30^\circ$.



Slika 9.20. *Primjer 9.7.*

Rješenje:

Sva tijela: klin II, teret III i uteg I potrebno je osloboditi od veza kako je to prikazano na slici 9.21. Najveća težina utega I ona je težina koja nastoji pomaknuti klin udesno, odnosno podići teret III prema gore.



Slika 9.21. *Primjer 9.7.:* Tijela zadanog sustava oslobođena od veza

Uvjeti ravnoteže za teret III glase:

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{N3} + F_{T2} \cdot \cos \alpha + F_{N2} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} \cdot \cos \alpha - F_{T2} \cdot \sin \alpha - F_{T3} - F_G = 0,$$

pri čemu su za granični slučaj ravnoteže:

$$F_{T2} = \mu \cdot F_{N2}, \quad F_{T3} = \mu \cdot F_{N3}.$$

Iz gornjih jednažbi dobije se:

$$F_{N3} = F_{N2} \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha),$$

$$F_{N2} \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) - \mu \cdot F_{N2} \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = F_G,$$

te konačno:

$$F_{N2} = \frac{F_G}{\cos \alpha - 2 \cdot \mu \cdot \sin \alpha - \mu^2 \cdot \cos \alpha}.$$

Uvjeti ravnoteže klina II glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_S - F_{T2} \cdot \cos \alpha - F_{N2} \cdot \sin \alpha - F_{T1} \cdot \cos \alpha - F_{N1} \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{N2} \cdot \cos \alpha + F_{T2} \cdot \sin \alpha - F_{T1} \cdot \sin \alpha + F_{N1} \cdot \cos \alpha = 0.$$

Iz druge jednadžbe je

$$F_{N2} \cdot (\mu \cdot \sin \alpha - \cos \alpha) = F_{N1} \cdot (\mu \cdot \sin \alpha - \cos \alpha),$$

pa slijedi:

$$F_{N2} = F_{N1}; \quad F_{T2} = F_{T1},$$

što smo mogli zaključiti iz simetrije tijela II i njegova simetričnog opterećenja.

Sila u užetu je

$$F_S = 2 \cdot F_{N2} \cdot (\mu \cdot \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$F_S = \frac{2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot F_G}{\cos \alpha - 2 \cdot \mu \cdot \sin \alpha - \mu^2 \cdot \cos \alpha}.$$

Iz uvjeta ravnoteže tijela I:

$$\sum F_y = 0: \quad F_S - F_{G1} = 0,$$

dobije se najveća dopuštena vrijednost težine utega I F_{G1} za slučaj ravnoteže:

$$F_{G1} = F_S = \frac{2 \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot F_G}{\cos \alpha - 2 \cdot \mu \cdot \sin \alpha - \mu^2 \cdot \cos \alpha}$$

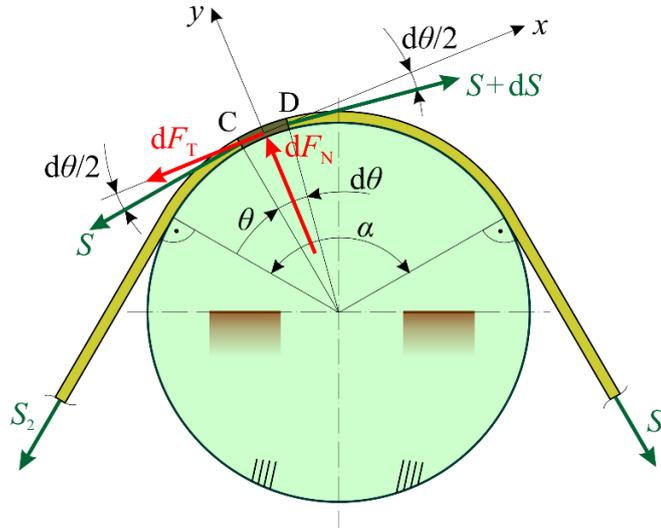
$$F_{G1} = \frac{2 \cdot (0,5 + 0,2 \cdot \cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 0,2^2 \cdot \cos 30^\circ} \cdot 5 = 10,7 \text{ kN}.$$

9.5. TRENJE UŽETA O CILINDRIČNU POVRŠINU

Poseban slučaj trenja jest trenje užeta o cilindričnu površinu. Promotrit ćemo nepomični valjak preko kojega je prebačeno tanko nerastezljivo uže (slika 9.22.).

Neka na jednom kraju užeta djeluje sila S_1 , a na drugom sila S_2 . Kada ne bi bilo trenja, sile bi u slučaju ravnoteže trebale biti jednake.

Iskustvo kazuje da baš zahvaljujući trenju sila S_2 može biti višestruko manja od sile S_1 (uz pretpostavku $S_1 > S_2$).



Slika 9.22. Uže prebačeno preko hrapave cilindrične površine

S tim u svezi promotrit ćemo ravnotežu djelića CD užeta.

Uvjeti ravnoteže za taj dio jesu:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad (S + dS) \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - S \cdot \cos \frac{d\theta}{2} - dF_T = 0,$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -(S + dS) \cdot \sin \frac{d\theta}{2} - S \cdot \sin \frac{d\theta}{2} + dF_N = 0.$$

Uzimajući u obzir da je kut $d\theta/2$ mala veličina, možemo u prvom približenju uzeti da je

$$\cos \frac{d\theta}{2} \cong 1; \quad \sin \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2}.$$

Zanemari li se pritom član $dS \cdot \frac{d\theta}{2}$ kao mala veličina višeg reda, dobijemo iz gornjih jednažbi:

$$dF_T = dS \quad dF_N = S \cdot d\theta.$$

Budući da je za granični slučaj ravnoteže $dF_T = \mu_0 \cdot dF_N$, bit će:

$$dS = \mu_0 \cdot S \cdot d\theta,$$

odnosno nakon separacije varijabli:

$$\frac{dS}{S} = \mu_0 \cdot d\theta.$$

Integriranjem lijeve strane ove jednažbe od S_2 do S_1 , a desne od 0 do α slijedi:

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = \mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\theta, \quad \ln \frac{S_1}{S_2} = \mu_0 \cdot \alpha,$$

pa je konačno:

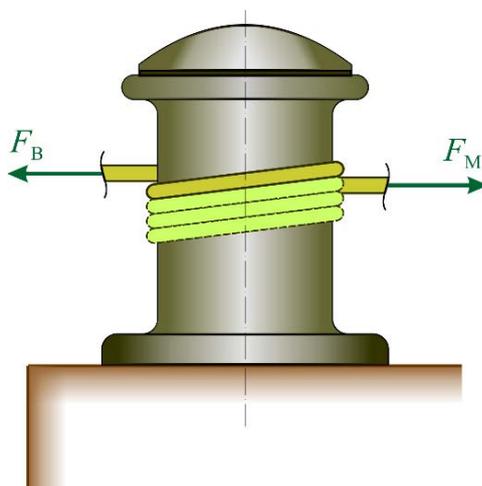
$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu_0 \cdot \bar{\alpha}} . \quad (9.5)$$

Iz jednađbe (9.5) zaključujemo da odnos između sila S_1 i S_2 ovisi samo o koeficijentu trenja μ_0 i kutu α , koji se naziva *obuhvatni kut*. Povećavanjem obuhvatnog kuta eksponencijalno se povećava omjer između sila S_1 i S_2 , što je prikazano u primjeru koji slijedi.

Primjer 9.8.

S broda je bačeno uže koje je namotano na bitvu (slika 9.23.).

Ako je sila kojom brod nateže uže F_B , a sila kojom ga mornar poteže na drugom kraju F_M , odrediti odnos između tih dviju sila ako je uže namotano jedan, dva, tri odnosno četiri puta. Zadano je: $\mu = 0,3$.



Slika 9.23. *Primjer 9.8.*

Rješenje:

Korištenjem izraza (9.5), te imajući u vidu da je $F_B > F_M$, dobijemo:

$$\frac{F_B}{F_M} = e^{\mu \cdot \bar{\alpha}} ,$$

a rezultati za dane brojeve namota i $\mu = 0,3$ dani su u tablici 9.2.

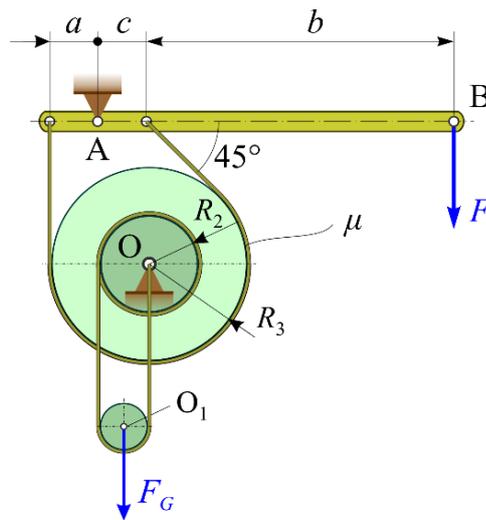
Tablica 9.2. Ovisnost omjera sila F_B / F_M o broju namotaja užeta oko bitve

$\bar{\alpha}$	$2 \cdot \pi$	$4 \cdot \pi$	$6 \cdot \pi$	$8 \cdot \pi$
F_B / F_M	6,586	43,38	285,7	1881,5

Primjer 9.9.

Potrebno je odrediti silu kočenja F na poluzi AB pojasne kočnice koja će osigurati jednoliko spuštanje tereta težine F_G (slika 9.24.). Teret je ovješeno o koloturnik O_1 oko kojega je namotano uže koje se namata na bubanj radijusa R_2 . Bubanj je kruto spojen s diskom radijusa R_3 preko kojega je prebačen kočioni pojas.

Zadano je: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 80 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$, $R_3 = 40 \text{ cm}$, $F_G = 5 \text{ kN}$, $\mu = 0,4$.



Slika 9.24. *Primjer 9.9.*

Rješenje:

Uvjeti ravnoteže koloturnika I (slika 9.25.a) jesu:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{S1} + F_{S2} - F_G = 0,$$

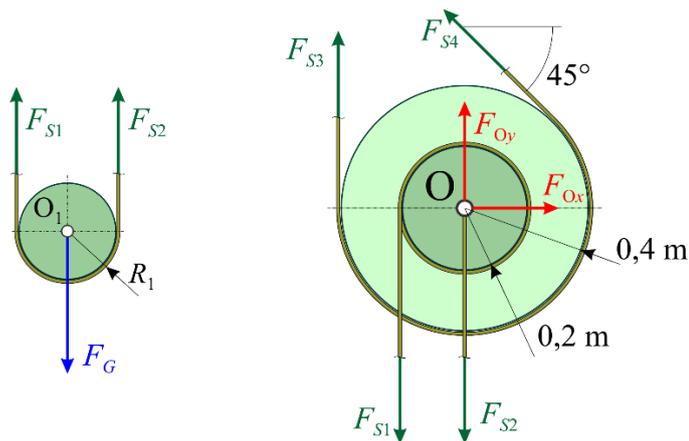
$$\sum M_{O1} = 0: \quad -F_{S1} \cdot R_1 + F_{S2} \cdot R_1 = 0,$$

odakle je

$$F_{S1} = F_{S2} = \frac{F_G}{2} = 2,5 \text{ kN}.$$

a)

b)



Slika 9.25. *Primjer 9.9.: Dijelovi kočnice oslobođeni veza: a) koloturnik O_1 , b) bubanj s diskom.*

Bubanj s kočionim diskom, oslobođen od veza, prikazan je na slici 9.25.b. Budući da se zadatkom ne traži reakcija u O, dovoljno je postaviti samo jedan od uvjeta ravnoteže:

$$\sum M_O = 0: \quad -F_{S3} \cdot R_3 + F_{S1} \cdot R_2 + F_{S4} \cdot R_3 = 0.$$

Obuhvatni kut pojasa preko kočionog diska jest:

$$\hat{\alpha} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5 \cdot \pi}{4},$$

pa, kako je $F_{S3} > F_{S4}$, možemo pisati:

$$F_{S3} = F_{S4} \cdot e^{\mu \hat{\alpha}},$$

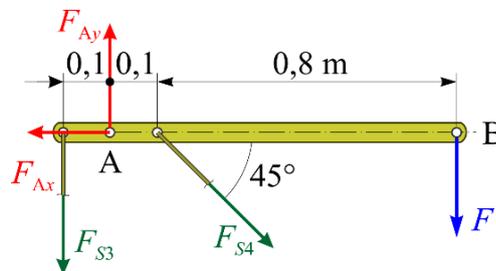
odakle slijedi:

$$F_{S4} = \frac{F_{S1} \cdot R_2}{R_3 \cdot (e^{\mu \hat{\alpha}} - 1)} = 0,328 \text{ kN},$$

ili, konačno:

$$F_{S3} = 1,58 \text{ kN}.$$

Traženu silu F odredit ćemo iz uvjeta ravnoteže poluge AB (slika 9.26.). Kako se ne traži veličina reakcije u A, i ovdje je dostatno postaviti jednu od jednadžbi ravnoteže:



Slika 9.26. *Primjer 9.9.: Kočiona poluga kao slobodno tijelo*

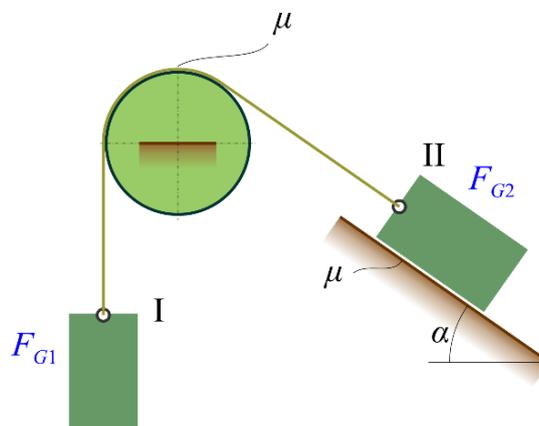
$$\sum M_A = 0: \quad -F \cdot 0,9 + F_{S3} \cdot 0,1 - F_{S4} \cdot \sin 45^\circ \cdot 0,1 = 0,$$

odakle je potreban iznos sile:

$$F = 0,15 \text{ kN}.$$

Primjer 9.10.

Tijelo I težine F_{G1} vezano je užetom s tijelom II težine F_{G2} koje leži na hrapavoj kosini. Tijela su međusobno povezana užetom koje ide preko hrapave nepomične cilindrične plohe (slika 9.27.).

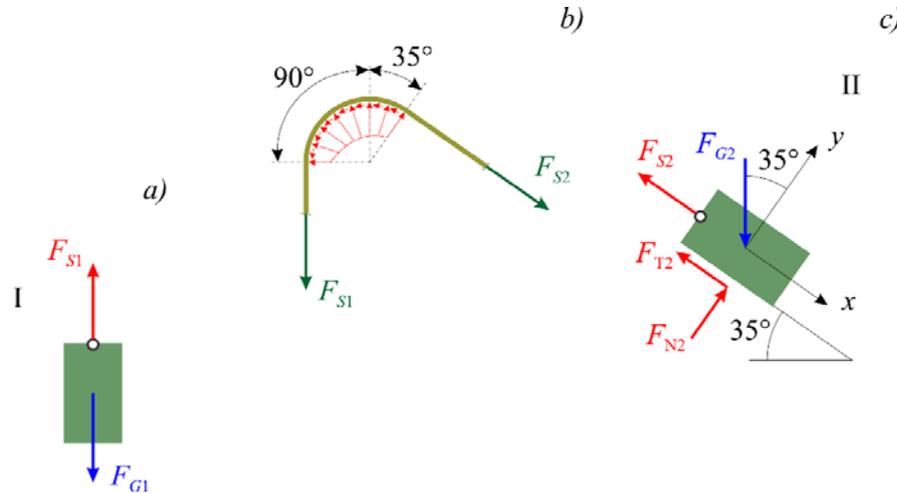


Slika 9.27. *Primjer 9.10.*

Potrebno je odrediti najveći iznos težine F_{G_2} tijela II da bi sustav tijela bio u ravnoteži ako je zadano: $F_{G_1} = 7 \text{ kN}$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 35^\circ$.

Rješenje:

Dijelovi sustava oslobođeni veza prikazani su na slici 9.28.



Slika 9.28. *Primjer 9.10.: Dijelovi sustava oslobođeni od veza: a) tijelo I, b) uže u zahvatu s nepomičnim cilindrom, c) tijelo II.*

Uvjet ravnoteže tijela I (slika 9.28.a) glasi:

$$\sum F_y = 0: \quad F_{S1} - F_{G1} = 0,$$

odakle je

$$F_{S1} = F_{G1} = 7 \text{ kN}.$$

Sile F_{S1} i F_{S2} povezane su Eulerovom formulom $F_{S2} = F_{S1} \cdot e^{\mu \cdot \hat{\alpha}_1}$ (slika 9.28.b), gdje je $\hat{\alpha}_1$ obuhvatni kut užeta i nepomične cilindrične plohe u lučnoj mjeri koji za razmatrani primjer iznosi:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\pi}{2} + \hat{\alpha} = \frac{\pi}{2} + 35^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,694 \cdot \pi = 2,18 \text{ rad}.$$

Sila F_{S2} iznosi:

$$F_{S2} = F_{S1} \cdot e^{\mu \cdot \hat{\alpha}_1} = 7 \cdot e^{0,1 \cdot 2,18} = 8,705 \text{ kN}.$$

Uvjeti ravnoteže za tijelo II na kosini (slika 9.28.c) glase:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{G2} \cdot \sin \alpha - F_{S2} - F_{T2} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{N2} - F_{G2} \cdot \cos \alpha = 0,$$

gdje je iz druge od jednadžbi:

$$F_{N2} = F_{G2} \cdot \cos \alpha, \text{ pa je}$$

$$F_{T2} = \mu \cdot F_{N2} = \mu \cdot F_{G2} \cdot \cos \alpha.$$

Uvrštavanjem u prvu od tih jednačbi dobijemo:

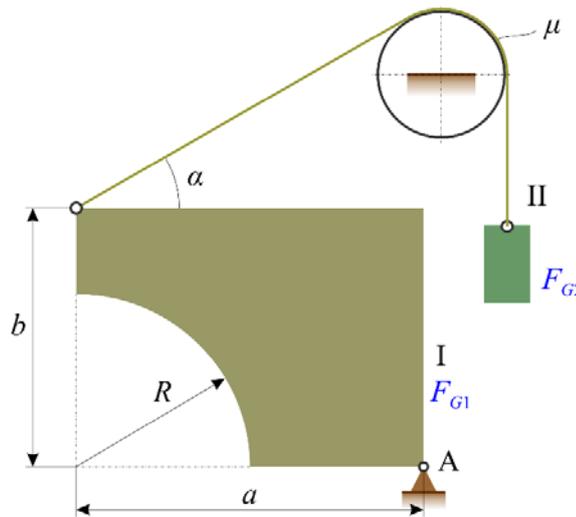
$$F_{G2} \cdot \sin \alpha - F_{S2} - \mu \cdot F_{G2} \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$F_{G2} = \frac{F_{S2}}{\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha} = \frac{8,705}{\sin 35^\circ - 0,1 \cdot \cos 35^\circ} = 17,705 \text{ kN}.$$

Primjer 9.11.

Odrediti najmanju vrijednost težine tereta II F_{G2} da bi sustav tijela prema slici 9.29. još uvijek bio u ravnoteži.

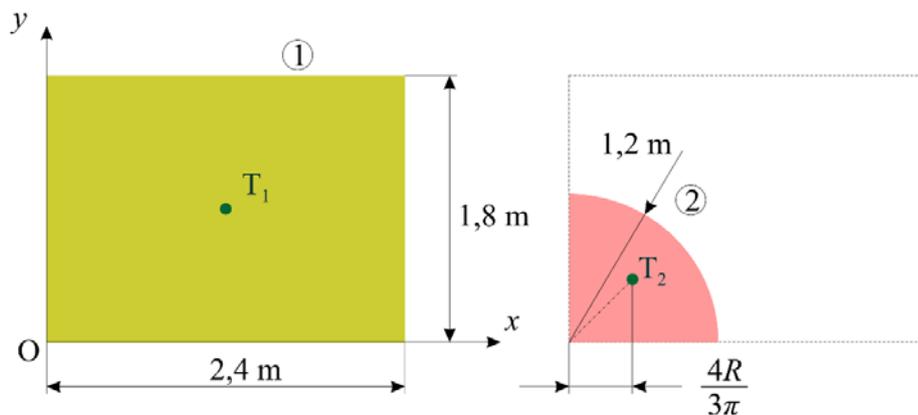
Zadano je: $a = 2,4 \text{ m}$, $b = 1,8 \text{ m}$, $R = 1,2 \text{ m}$, $F_{G1} = 800 \text{ N}$, $\mu = 0,15$, $\alpha = 30^\circ$.



Slika 9.29. *Primjer 9.11.*

Rješenje:

Težina ploče I F_{G1} djeluje u težištu ploče, pa najprije trebamo odrediti x koordinatu tog težišta. Ploču ćemo razmatrati kao složenu plohu tako da od pravokutnika dimenzija $2,4 \times 1,8 \text{ m}$ oduzmemo četvrtinu kruga polumjera $R = 1,2 \text{ m}$ (slika 9.30.).



Slika 9.30. *Primjer 9.11.:* Tijelo I podijeljeno na osnovne plohe u svrhu određivanja težišta

Položaj težišta dan je izrazom:

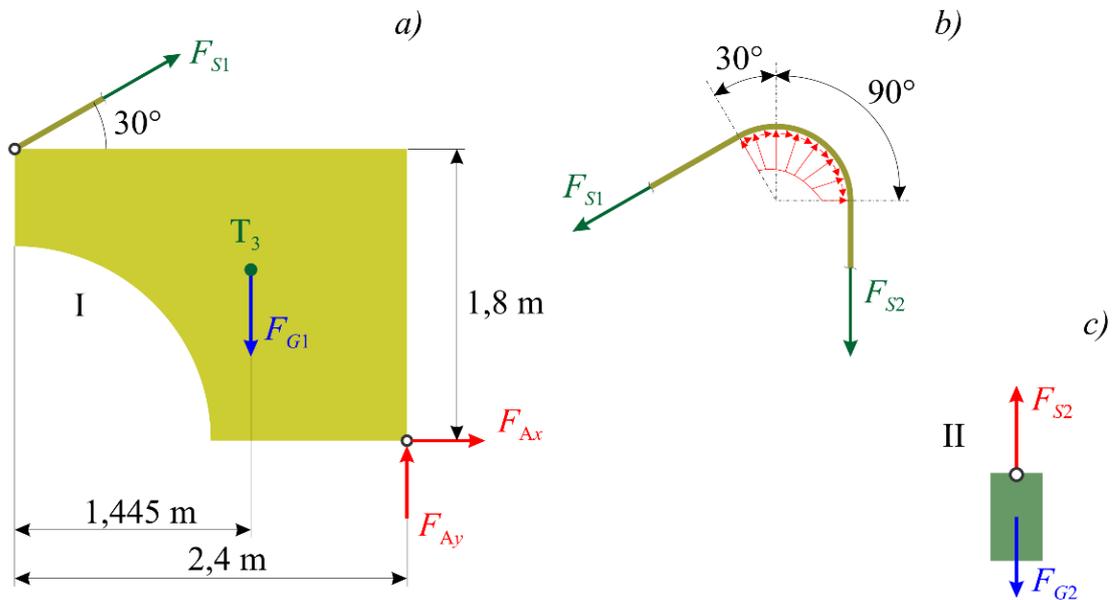
$$x_T = \frac{A_1 \cdot x_{T1} + A_2 \cdot x_{T2}}{A_1 + A_2},$$

gdje su

$$A_1 = a \cdot b = 2,4 \cdot 1,8 = 4,32 \text{ m}^2, \quad x_{T1} = \frac{a}{2} = \frac{2,4}{2} = 1,2 \text{ m},$$

$$A_2 = -\frac{R^2 \cdot \pi}{4} = -\frac{1,2^2 \cdot \pi}{4} = -1,131 \text{ m}^2, \quad x_{T2} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot 1,2}{3 \cdot \pi} = 0,509 \text{ m},$$

$$x_T = \frac{4,32 \cdot 1,2 - 1,131 \cdot 0,509}{4,32 - 1,131} = 1,445 \text{ m}.$$



Slika 9.31. *Primjer 9.11.: Dijelovi sustava oslobođeni od veza: a) ploča I, b) uže u zahvatu s nepomičnom cilindričnom podlogom, c) teret II.*

Iz uvjeta ravnoteže postavljenoga za ploču kao slobodno tijelo (slika 9.31.a) dobijemo:

$$\sum M_A = 0: \quad F_{G1} \cdot (a - x_T) - F_{S1} \cdot \cos \alpha \cdot b - F_{S1} \cdot \sin \alpha \cdot a = 0,$$

pa je

$$F_{S1} = \frac{F_{G1} \cdot (a - x_T)}{\cos \alpha \cdot b + \sin \alpha \cdot a} = \frac{800 \cdot (2,4 - 1,445)}{\cos 30^\circ \cdot 1,8 + \sin 30^\circ \cdot 2,4} = 276,9 \text{ N}.$$

Iz Eulerove formule $F_{S1} = F_{S2} \cdot e^{\mu \cdot \hat{\alpha}_1}$, gdje je $\hat{\alpha}_1$ obuhvatni kut dodira užeta i nepomične cilindrične plohe u lučnoj mjeri, koji za zadani primjer (slika 9.31.b) iznosi:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\pi}{2} + \hat{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2 \cdot \pi}{3} = 2,094 \text{ rad},$$

dobije se sila F_{S2} :

$$F_{S2} = \frac{F_{S1}}{e^{\mu \cdot \hat{\alpha}_1}} = \frac{276,9}{e^{0,15 \cdot 2,094}} = 202,3 \text{ N}.$$

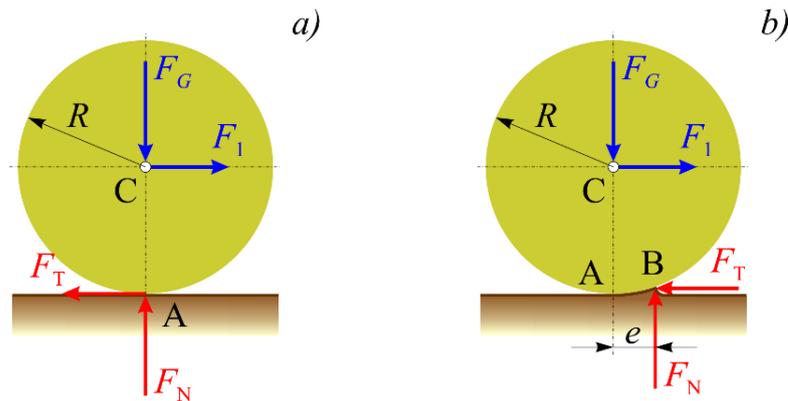
Tražena najmanja vrijednost težine tereta II dobije se iz uvjeta ravnoteže postavljenoga za tijelo II (slika 9.31.c):

$$\sum F_y = 0: \quad F_{S2} - F_{G2} = 0,$$

$$F_{G2} = F_{S2} = 202,3 \text{ N}.$$

9.6. TRENJE KOTRLJANJA

Trenjem kotrljanja naziva se otpor koji nastaje pri kotrljanju oblog tijela po površini drugog tijela.



Slika 9.32.: a) sila trenja s hvatištem u A, b) sila trenja s hvatištem u B.

Neka se kružni disk polumjera R i težine F_G nalazi na hrapavoj horizontalnoj podlozi. Ako na centar C diska djeluje sila koja je po intenzitetu manja od sile F_{Tgr} , pojavit će se na mjestu dodira sila trenja $F_T = F$. Kada bi sila F_N djelovala u točki A , ona bi uravnotežila silu F_G , a sile F_T i F činile bi spreg sila čiji je moment $M = F \cdot R$ (slika 2.32.a).

Očevidno je da bi, već pri maloj sili F , nastupilo kotrljanje diska.

Pokusi, međutim, pokazuju da kotrljanje neće nastupiti pri jako malim silama F . To se objašnjava činjenicom da zbog deformacije podloge dolazi do pomicanja hvatišta sile F_N (slika 9.32.b).

U graničnom slučaju ravnoteže spreg sila (F_{gr}, F_T) uravnoteživat će spreg sila (F_G, F_N) .

Jednadžbe ravnoteže diska jesu:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{gr} - F_T = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_N - F_G = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F_{gr} \cdot R + F_N \cdot e = 0.$$

Iz gornjih jednadžbi je

$$F_{gr} = F_T; \quad F_N = F_G;$$

$$F_{\text{gr}} = \frac{e}{R} \cdot F_N.$$

Kotrljanje će nastupiti samo ako je $F > F_{\text{gr}}$. Veličina e naziva se *koeficijent trenja kotrljanja* i ima dimenziju duljine. Neke, pokusima dobivene vrijednosti koeficijenta trenja kotrljanja dane su u tablici 9.3.:

Tablica 9.3. Neke vrijednosti koeficijenta trenja kotrljanja e

Materijal	e u mm
Drvo po čeliku	0,3 – 0,4
Meki čelik po mekom čeliku	0,05
Kaljani čelik po kaljenom čeliku	0,01

Ako se sila F poveća iznad veličine F_{gr} , nastupit će kotrljanje, a ako se poveća toliko da je veća i od granične sile trenja, nastupit će i klizanje i kotrljanje.

Uvjet da kotrljanje nastupi prije klizanja glasi:

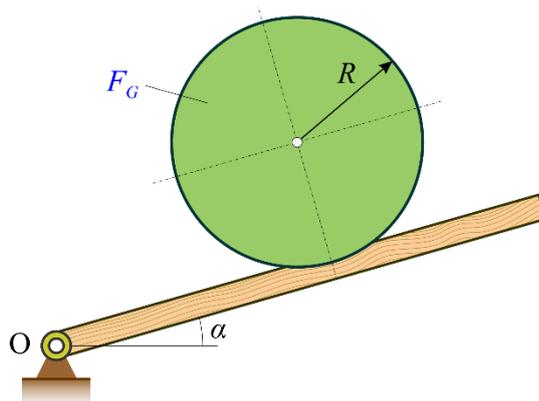
$$F_{\text{gr}} < F_{\text{Tgr}},$$

odnosno:

$$\frac{e}{R} < \mu_0.$$

Primjer 9.12.

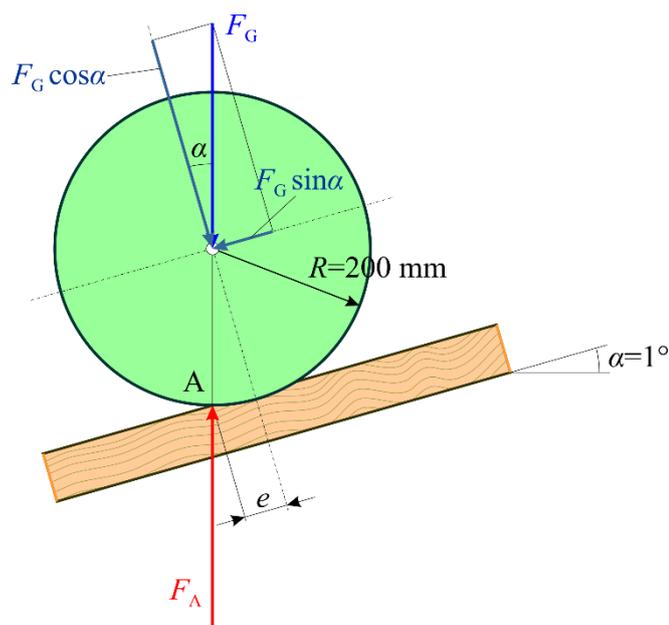
Uređaj prikazan na slici 9.33. služi za eksperimentalno određivanje koeficijenta trenja kotrljanja, a sastoji se od zakretne poluge od mekog drveta zglobovno vezane za podlogu i čeličnog kola radijusa $R = 200$ mm i težine F_G . Valja odrediti koeficijent trenja kotrljanja ako je poznato da je kotrljanje nastupilo u trenutku kada se drvena podloga zakrenula za kut $\alpha = 1^\circ$.



Slika 9.33. *Primjer 9.12.*

Rješenje:

Na čelično kolo u zadanom položaju djeluju dvije sile: vlastita težina kola F_G s hvatištem u težištu kola i ukupna reakcija drvene poluge s hvatištem u točki A (slika 9.34.). Da bi te dvije sile bile u ravnoteži, moraju imati jednake intenzitete i suprotne smjerove na istom pravcu djelovanja.



Slika 9.34. *Primjer 9.12.*: Čelično kolo oslobođeno od veza

Koeficijent trenja kotrljanja slijedi iz jednadžbe:

$$\sum M_A = 0: \quad F_G \cdot \sin \alpha \cdot R - F_G \cdot \cos \alpha \cdot e = 0,$$

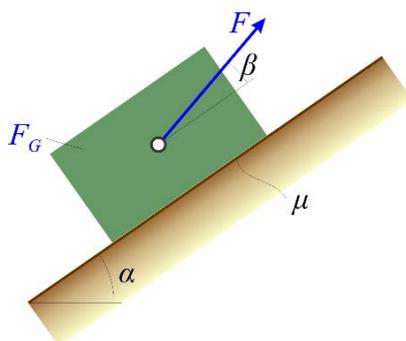
odakle je nakon dijeljenja s F_G :

$$e = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = R \cdot \tan \alpha = 200 \cdot \tan 1^\circ = 200 \cdot 0,01746 = 3,491 \text{ mm}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:



Zadatak 9.1. Tijelo težine F_G nalazi se na kosini nagnutoj prema horizontali pod kutom α . Koeficijent trenja između tijela i kosine je μ (slika Z.9.1.).

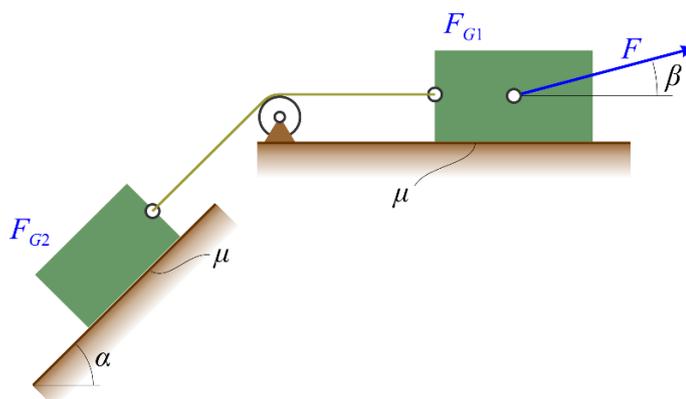


Slika Z.9.1. *Zadatak 9.1.*

Valja odrediti najmanji iznos sile F koja će prouzročiti gibanje tijela uz kosinu ako je $F_G = 1500 \text{ N}$, $\mu = 0,15$, $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 15^\circ$.

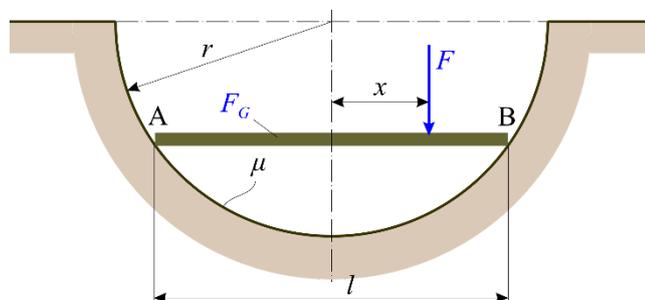
Zadatak 9.2. Teret težine F_{G1} nalazi se na horizontalnoj podlozi i užetom je vezan za teret težine F_{G2} koji se nalazi na kosini (slika Z.9.2.). Odrediti najveću veličinu sile F za koju će sustav još uvijek biti u ravnoteži.

Zadano je: $F_{G1} = 1 \text{ kN}$, $F_{G2} = 2 \text{ kN}$, $\mu = 0,1$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$.



Slika Z.9.2. *Zadatak 9.2.*

Zadatak 9.3. Homogena greda, duljine l i težine F_G , oslanja se u A i B na hrapave unutarnje strane horizontalnog lijevka polukružnog presjeka (slika Z.9.3.).

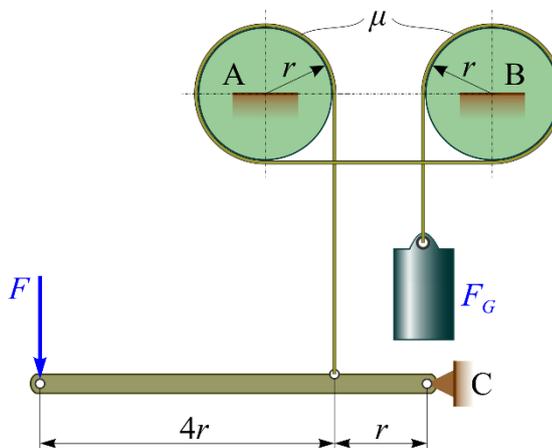


Slika Z.9.3. *Zadatak 9.3.*

Za koliko se smije pomicati hvatište sile F ($x = ?$), lijevo i desno od središta grede, a da pri tom ne nastupi klizanje grede, ako je koeficijent statičkog trenja u točkama A i B μ .

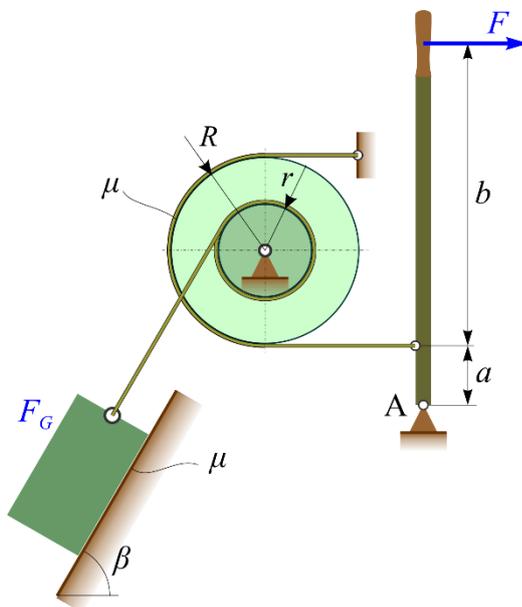
Zadano je: $l = 80 \text{ cm}$, $r = 50 \text{ cm}$, $F_G = 1 \text{ kN}$, $F = 4 \text{ kN}$, $\mu = 0,25$.

Zadatak 9.4. Sustav na slici sastoji se od poluge, užeta, tereta i dvaju nepomičnih cilindara A i B (slika Z.9.4.). Odrediti interval vrijednosti težine tereta F_G za koje će sustav biti u ravnoteži ako je zadano: $F = 300 \text{ N}$, $\mu = 0,1$.



Slika Z.9.4. *Zadatak 9.4.*

Zadatak 9.5. Potrebno je odrediti silu F kojom je potrebno djelovati na ručicu pojasne kočnice prikazane na slici pa da se osigura jednoliko spuštanje tereta težine F_G niz kosinu (slika Z.9.5.).
 Zadano je: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 80 \text{ cm}$, $R = 120 \text{ cm}$, $r = 15 \text{ cm}$, $F_G = 5 \text{ kN}$, $\mu = 0,2$, $\beta = 60^\circ$.

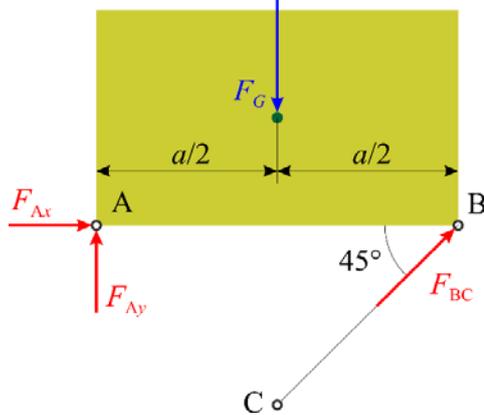


Slika Z.9.5. *Zadatak 9.5.*

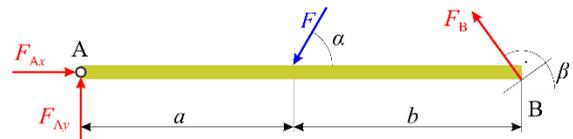
10. RJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU

1. Uvod

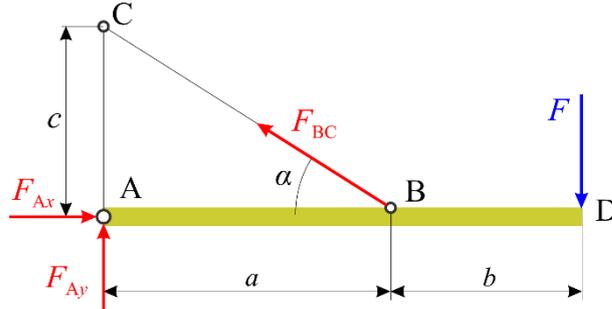
Zadatak 1.1.



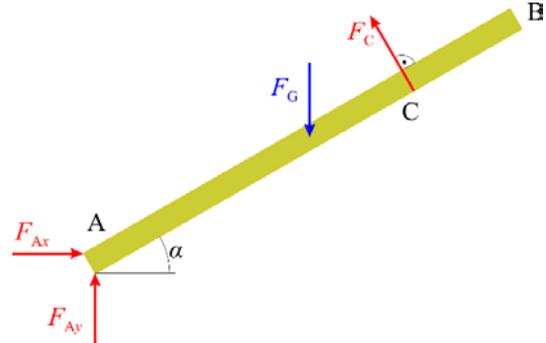
Zadatak 1.2.



Zadatak 1.3.

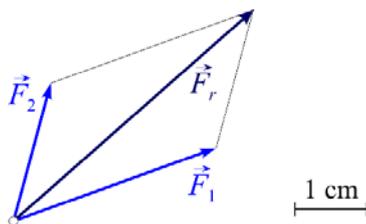


Zadatak 1.4.



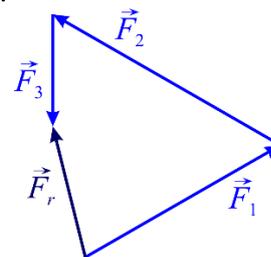
2. Sučeljeni sustav sila

Zadatak 2.1.



$$F_r = 223 \text{ N}$$

Zadatak 2.2.



$$\vec{F}_r = -43,3 \cdot \vec{i} + 175,0 \cdot \vec{j} \text{ N}; \quad F_r = 180,3 \text{ N}$$

Zadatak 2.3.

$$\vec{F}_r = -2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}; \quad F_r = 3,606 \text{ kN}$$

Zadatak 2.4.

$$\vec{F}_r = -282,5 \cdot \vec{i} - 422,8 \cdot \vec{j} + 565,4 \cdot \vec{k}$$

$$F_r = 760 \text{ N}$$

Zadatak 2.5.

$$F_4 = 2,740 \text{ kN}, \quad \text{smjer od čvora};$$

$$F_5 = 3,437 \text{ kN}, \quad \text{smjer ka čvoru}.$$

Zadatak 2.6.

$$F_{CB} = 283,2 \text{ N}; \quad F_{CD} = 141,6 \text{ N}$$

Zadatak 2.7.

$$F_{BC} = 71,3 \text{ N}, \quad F_{BD} = 90,9 \text{ N}$$

Zadatak 2.9.

$$F_{AB} = -11,5 \text{ kN}; \quad F_{AD} = -7,72 \text{ kN};$$

$$F_{AC} = 16,4 \text{ kN}$$

Zadatak 2.11.

$$F_{AB} = F_{AC} = F_{AD} = -3,85 \text{ kN}$$

Zadatak 2.13.

$$\vec{F}_A = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = -\vec{i} + \vec{j} \text{ kN},$$

$$F_C = 1,41 \text{ kN}$$

Zadatak 2.8.

$$F_{G_2} = 51,8 \text{ N}, \quad F_p = 73,2 \text{ N}$$

Zadatak 2.10.

$$F_{CA} = 8 \text{ kN}; \quad F_{BA} = -6,25 \text{ kN};$$

$$F_{CD} = -12,8 \text{ kN}, \quad F_{CB} = 0 \text{ kN},$$

$$F_{BE} = 10,2 \text{ kN}, \quad F_{BH} = -6,25 \text{ kN}$$

Zadatak 2.12.

$$F_A = 790 \text{ N}, \quad F_{CD} = 1060 \text{ N}$$

3. Paralelni sustav sila

Zadatak 3.1.

a) $F_r = 14 \text{ kN}; \vec{F}_r = -14 \cdot \vec{j}; x_r = 2,214 \text{ m}$

b) $\vec{F}_r = -14 \cdot \vec{j}, \quad \vec{M}_A = -31 \cdot \vec{k}$

Zadatak 3.2.

$$\vec{F}_A = -1,43 \cdot \vec{j}, \quad F_A = 1,43 \text{ kN};$$

$$\vec{F}_B = 5,23 \cdot \vec{j}, \quad F_B = 5,23 \text{ kN}$$

Zadatak 3.3.

$$\vec{F}_C = 4 \cdot \vec{j}; \quad \vec{F}_D = 3 \cdot \vec{j} \text{ kN}$$

4. Opći sustav sila u ravnini

Zadatak 4.1.

$$\vec{F}_r = -90 \cdot \vec{i} - 60 \cdot \vec{j}, \quad F_r = 108 \text{ kN}; \quad y = \frac{2}{3} \cdot (x+1)$$

Zadatak 4.2.

$$F_A = F_B = 2,68 \text{ kN}, \quad F_{CD} = 7 \text{ kN}$$

Zadatak 4.3.

$$\vec{F}_A = -2,5 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} \text{ kN}, \quad \vec{M}_A = 5 \cdot \vec{k} \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$F_B = 3,20 \text{ kN}; \quad \vec{F}_C = 2,50 \cdot \vec{i} \text{ kN}$$

Zadatak 4.4.

$$\vec{F}_A = -7,07 \cdot \vec{i} - 7,07 \cdot \vec{j} \text{ kN};$$

$$F_B = F_D = 10 \text{ kN}; \quad \vec{F}_C = 14,1 \cdot \vec{j} \text{ kN};$$

$$F_1 = -F_2 = 7,07 \text{ kN}$$

Zadatak 4.5.

$$F = 0,5 \text{ kN}$$

Zadatak 4.6.

$$\vec{F}_A = -1 \cdot \vec{j} \text{ kN}; \quad \vec{F}_B = 31 \cdot \vec{j} \text{ kN};$$

$$F_C = 32 \text{ kN}; \quad F_D^{\text{BH}} = 62 \text{ kN};$$

$$F_D^{\text{CE}} = 53 \text{ kN}; \quad F_E = 22,4 \text{ kN};$$

$$F_H = 31 \text{ kN}$$

5. Opći sustav sila u prostoru

Zadatak 5.1.

$$\vec{F}_R = 2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} \text{ kN},$$
$$\vec{M}_O = 4 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 18 \cdot \vec{k} \text{ kN};$$

Zadatak 5.3.

$$F_{Ax} = 364 \text{ N}, \quad F_{Ay} = 230 \text{ N}, \quad F_{Az} = 354 \text{ N};$$
$$F_{Bx} = -306 \text{ N}, \quad F_{By} = -130 \text{ N},$$
$$F_{CE} = 278 \text{ N}$$

Zadatak 5.5.

$$\vec{F}_A = -1,5F_G \cdot \vec{i} + 1,6F_G \cdot \vec{j};$$
$$\vec{F}_B = 1,2F_G \cdot \vec{i} + 0,5F_G \cdot \vec{k};$$
$$F_{ED} = -0,707F_G.$$

Zadatak 5.2.

$$\vec{F}_B = -55,7 \cdot \vec{i} - 74,3 \cdot \vec{j} + 37,1 \cdot \vec{k} \text{ kN},$$
$$\vec{M}_B = 149 \cdot \vec{i} + 223 \cdot \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadatak 5.4.

$$\vec{F}_A = -200 \cdot \vec{j} + 700 \cdot \vec{k} \text{ N};$$
$$\vec{M}_A = 600 \cdot \vec{i} - 300 \cdot \vec{j} - 200 \cdot \vec{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadatak 5.6.

$$\vec{F}_A = 9,24 \cdot \vec{i} + 7,5 \cdot \vec{j} + 17,02 \cdot \vec{k} \text{ kN};$$
$$\vec{F}_B = 3,26 \cdot \vec{i} + 12,0 \cdot \vec{k} \text{ kN};$$
$$F_O = 12,5 \text{ kN}$$

6. Rešetkasti nosači

Zadatak 6.1.

$$\vec{F}_A = -10 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = 25 \cdot \vec{j} \text{ kN},$$
$$S_1 = 5,0 \text{ kN}; \quad S_2 = -5,0 \text{ kN};$$
$$S_3 = -7,07 \text{ kN}; \quad S_4 = 10,0 \text{ kN};$$
$$S_5 = 5,0 \text{ kN}; \quad S_6 = 10,0 \text{ kN};$$
$$S_7 = -21,2 \text{ kN}; \quad S_8 = 5,0 \text{ kN};$$
$$S_9 = -10,0 \text{ kN}; \quad S_{10} = 14,1 \text{ kN};$$
$$S_{11} = -10,0 \text{ kN}$$

Zadatak 6.2.

$$\vec{F}_A = 20 \cdot \vec{j} \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = 30 \cdot \vec{j} \text{ kN};$$
$$S_1 = -26,7 \text{ kN}; \quad S_2 = 33,3 \text{ kN};$$
$$S_3 = -20,0 \text{ kN}; \quad S_4 = -40,0 \text{ kN};$$
$$S_5 = 16,7 \text{ kN}; \quad S_6 = 26,67 \text{ kN};$$
$$S_7 = -40,0 \text{ kN}; \quad S_8 = -40,0 \text{ kN};$$
$$S_9 = 50,0 \text{ kN}$$

7. Puni ravninski nosači

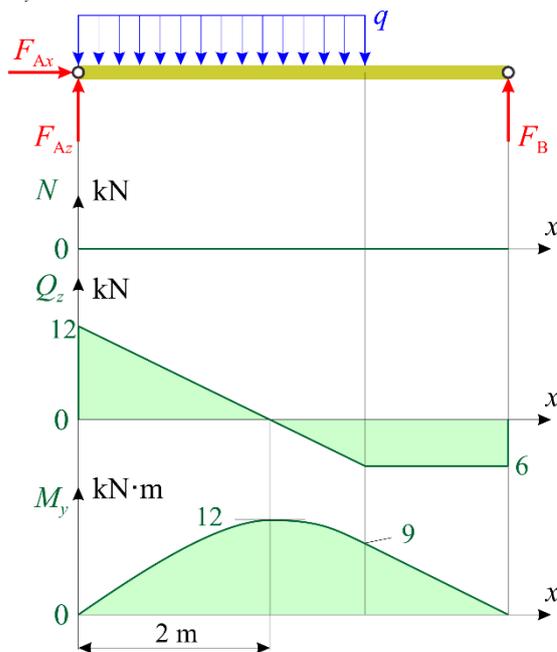
7.1. Linijski nosači

Zadatak 7.1.

$$F_A = 12 \text{ kN}, F_B = 6 \text{ kN};$$

$$N = 0 \text{ kN}; Q_z = 12 - 6 \cdot x \text{ kN};$$

$$M_y = 12 \cdot x - 3 \cdot x^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

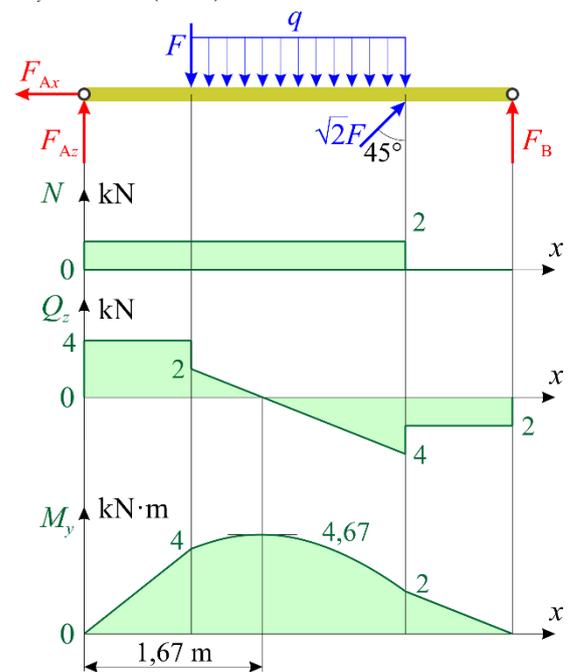


Zadatak 7.2.

$$F_A = 4 \text{ kN}, F_B = 2 \text{ kN};$$

$$N = 2 \text{ kN}; Q_z = 5 - 3 \cdot x \text{ kN};$$

$$M_y = -1,5 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot x + 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

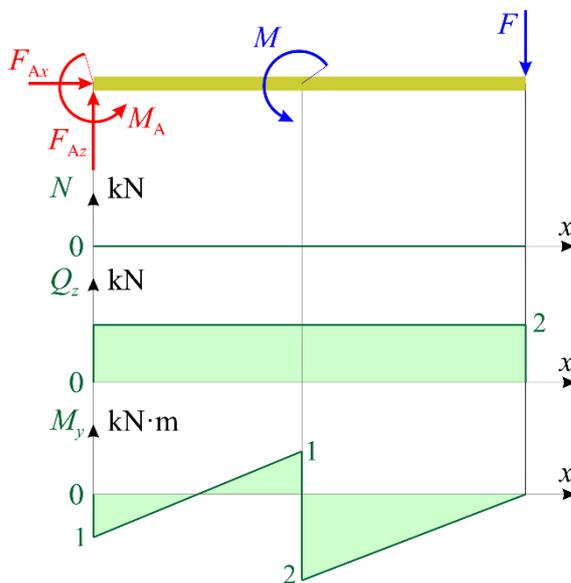


Zadatak 7.3.

$$F_A = 2 \text{ kN}; M_A = 5 \text{ kN} \cdot \text{m};$$

$$N = 0 \text{ kN}; Q_z = 2 \text{ kN};$$

$$M_y = 2 \cdot x - 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

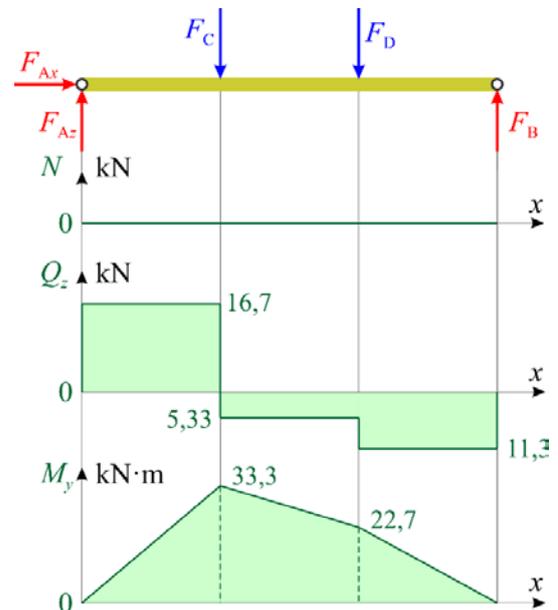


Zadatak 7.4.

$$F_C = 22 \text{ kN}; F_D = 6 \text{ kN};$$

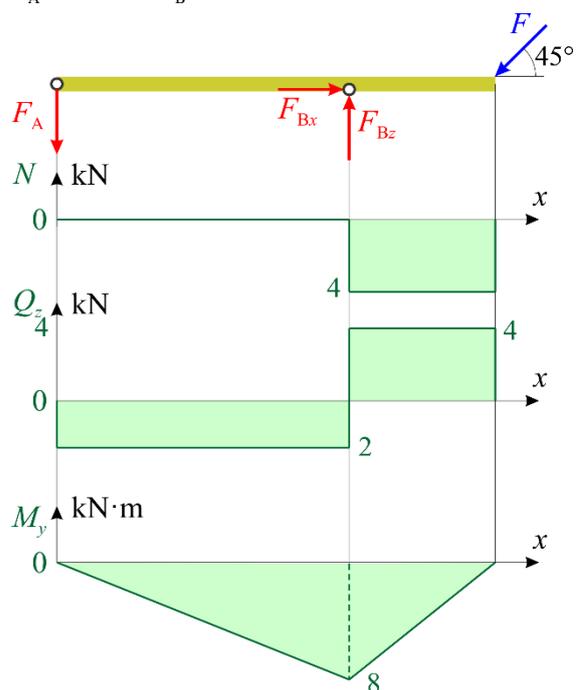
$$F_{Ax} = 0 \text{ kN}; F_{Az} = 16,7 \text{ kN};$$

$$F_B = 11,3 \text{ kN}$$



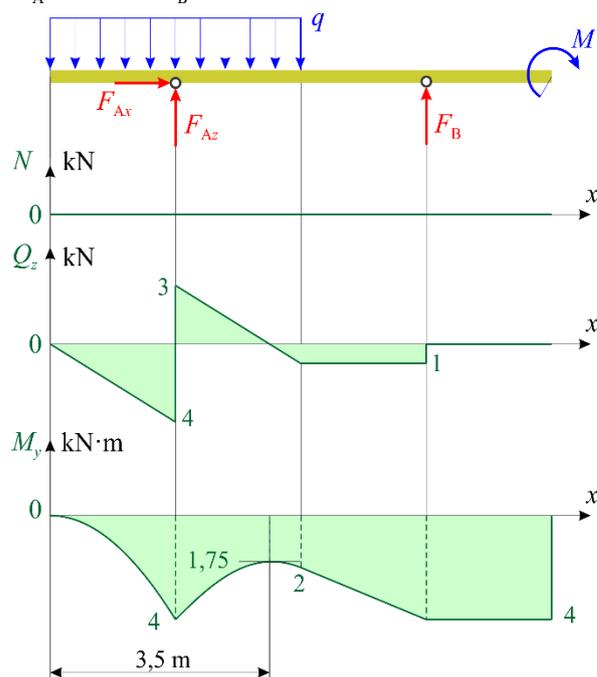
Zadatak 7.5.

$$F_A = 2 \text{ kN}, F_B = 6 \text{ kN}$$



Zadatak 7.6.

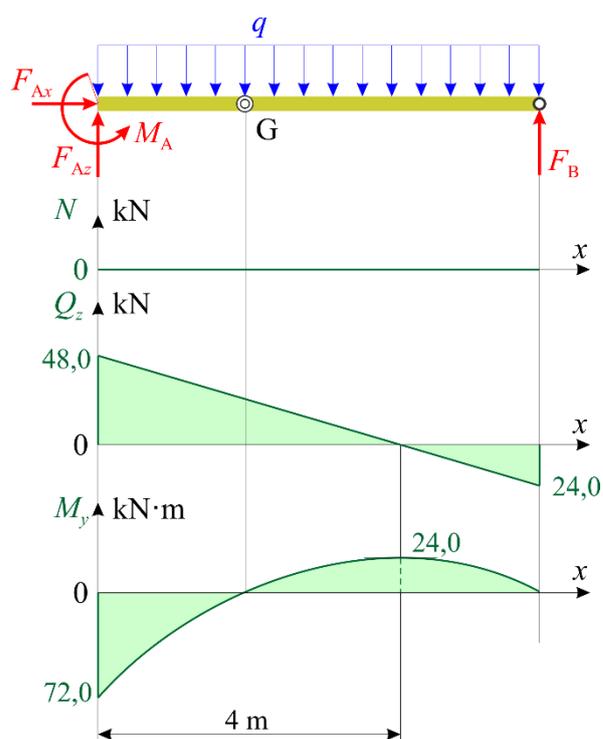
$$F_A = 7 \text{ kN}, F_B = 1 \text{ kN}$$



7.2. Nosači s Gerberovim zglobom

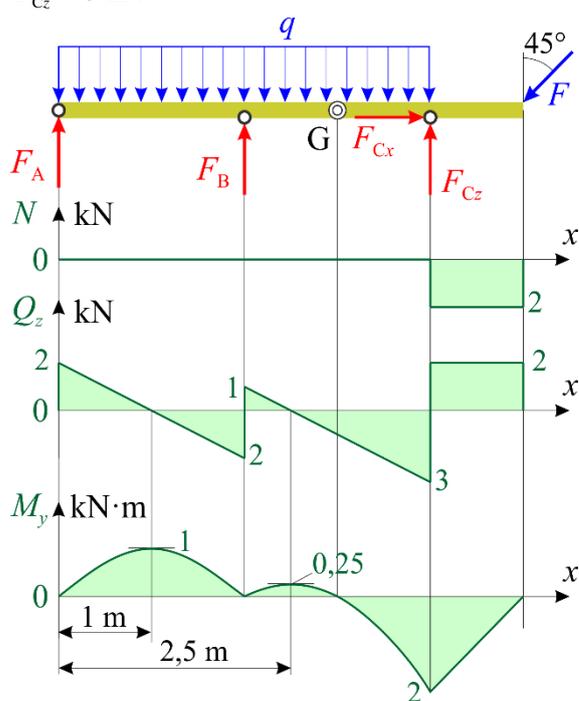
Zadatak 7.7.

$$F_A = 48 \text{ kN}, F_B = 24 \text{ kN}, M_A = 72 \text{ kN}\cdot\text{m}$$



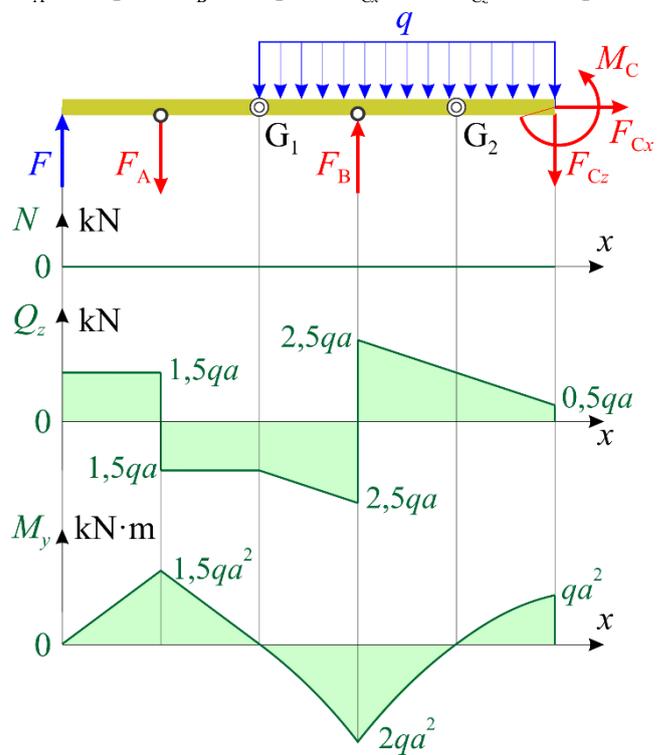
Zadatak 7.8.

$$F_A = 2 \text{ kN}, F_B = 3 \text{ kN}, F_{Cx} = 2 \text{ kN}, F_{Cz} = 5 \text{ kN}$$



Zadatak 7.9.

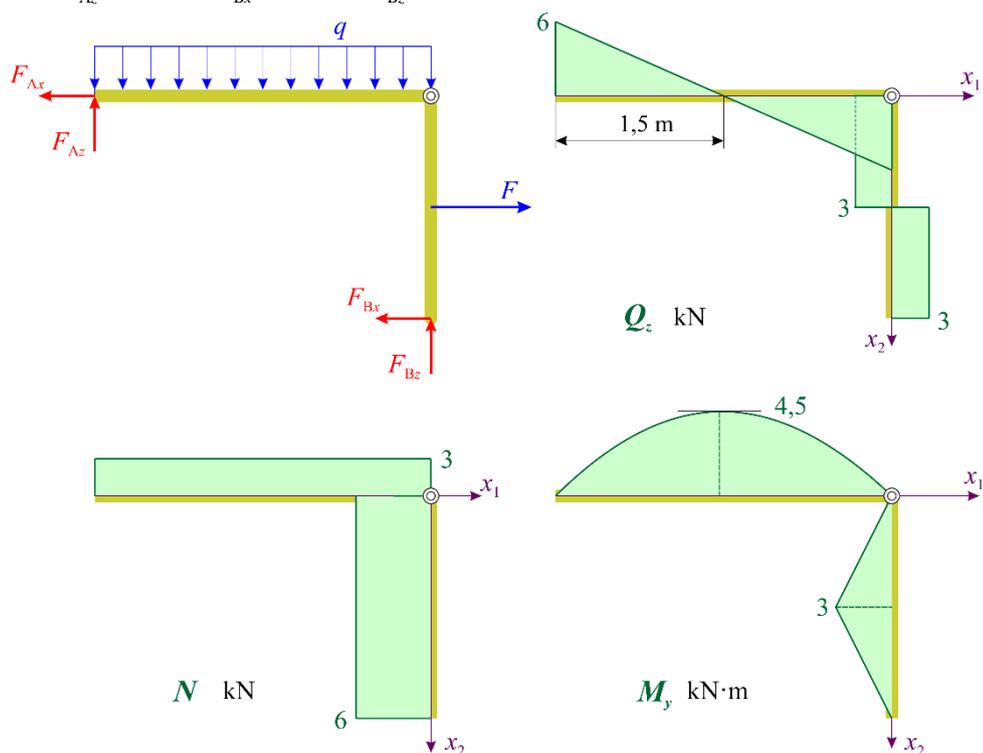
$$F_A = 3 \cdot q \cdot a, F_B = 5 \cdot q \cdot a, F_{Cx} = 0, F_{Cz} = 0,5 \cdot q \cdot a \quad M_C = q \cdot a^2$$



7.3. Okvirni nosači

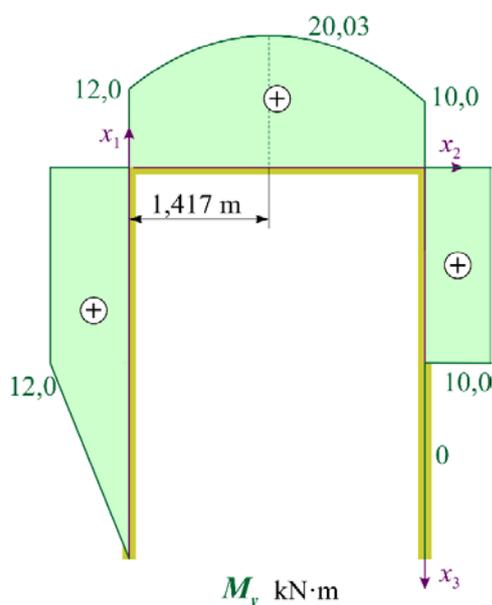
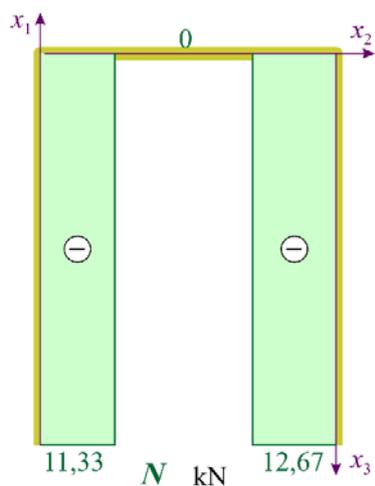
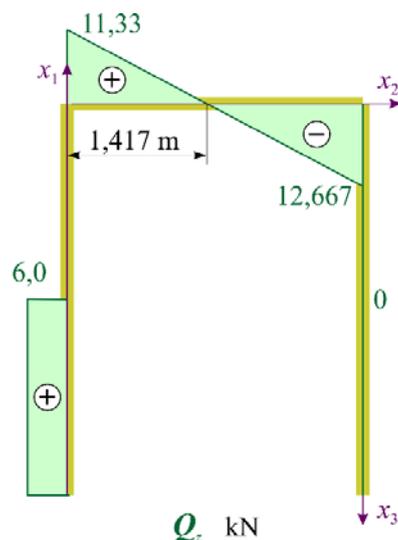
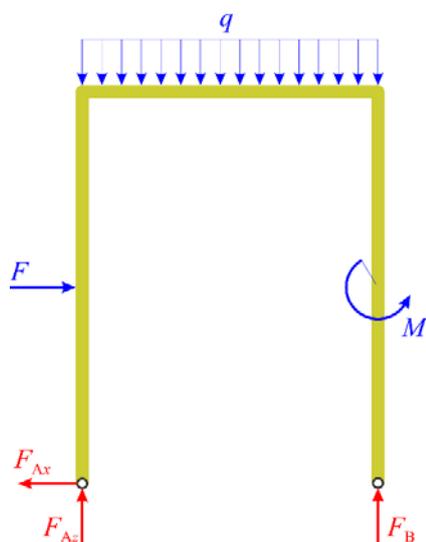
Zadatak 7.10.

$$F_{Ax} = 3 \text{ kN}, F_{Az} = 6 \text{ kN}, F_{Bx} = 3 \text{ kN}, F_{Bz} = 6 \text{ kN}$$



Zadatak 7.11.

$$F_{Ax} = 6 \text{ kN}, F_{Az} = 11,33 \text{ kN}, F_B = 12,67 \text{ kN}$$



8. Težišta

Zadatak 8.1.

$$x_T = 1,62 \cdot R; \quad y_T = 2,38 \cdot R$$

Zadatak 8.3.

$$x_T = R; \quad y_T = 1,521 \cdot R;$$

$$A_x = 77,81 \cdot R^2; \quad A_y = 51,16 \cdot R^2$$

Zadatak 8.5.

$$x_T = 1,732 \cdot r; \quad y_T = 1,124 \cdot r;$$

$$V_x = 25,73 \cdot r^3; \quad V_y = 39,65 \cdot r^3$$

Zadatak 8.2.

$$x_T = 2,04 \cdot R; \quad y_T = 2,37 \cdot R$$

Zadatak 8.4.

$$x_T = 5,09 \cdot a; \quad y_T = 3,12 \cdot a;$$

$$A_x = 312,8 \cdot a^2; \quad A_y = 510,3 \cdot a^2$$

Zadatak 8.6.

$$x_T = 3,849 \cdot r; \quad y_T = 3,513 \cdot r;$$

$$V_x = 416,2 \cdot r^3; \quad V_y = 456,0 \cdot r^3$$

9. Trenje

Zadatak 9.1.

$$F_{\min} = 1040 \text{ N}$$

Zadatak 9.3.

$$x = 24,5 \text{ cm}$$

Zadatak 9.5.

$$F = 60,8 \text{ N}$$

Zadatak 9.2.

$$F_{\max} = 1,67 \text{ kN}$$

Zadatak 9.4.

$$585 \text{ N} \leq F_G \leq 3850 \text{ N}$$

LITERATURA

- [1] Alfirević, I. *POVIJEST MEHANIKE U OKVIRU PRIRODNE FILOZOFIJE*. Sveučilište u Zagrebu, FSB, Zagreb, 2016.
- [2] Alfirević, I., Saucha, J., Tonković, Z., Kodvanj, J. *UVOD U MEHANIKU I – Statika krutih tijela*. Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2010.
- [3] Alfirević, I., Saucha, J., Tonković, Z., Kodvanj, J. *UVOD U MEHANIKU II – Primijenjena statika*. Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2010.
- [4] Bedford, A., Fowler, W. L. *Engineering Mechanics: STATICS*, Second Edition, Addison-Wesley, USA, 1999.
- [5] Damić, V. *STATIKA*, Veleučilište Dubrovnik, Hrvatska sveučilišna naklada, Zagreb, 2000.
- [6] Hibbeler, R. C., Yap, K. B. *Mechanics for Engineers STATICS, Thirteen edition*. Pearson, 2013.
- [7] Jong, C. I., Rogers, B. G. *ENGINEERING MECHANICS, Statics and Dynamics*, Sounders College Publishing, 1991.
- [8] Matejiček, F., Semenski, D., Vnučec, Z. *Uvod u statiku sa zbirkom zadataka*. Golden marketing, Zagreb, 1999.
- [9] Meriam, J. L., Kraige, L. G. *Engineering Mechanics: STATICS, Seventh edition*, John Wiley & Sons, USA, 2006.
- [10] Meščerski, V. I. *ZBIRKA ZADATAKA IZ TEORIJSKE MEHANKE*. Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
- [11] Pavazza, R. *MEHANIKA – STATIKA*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.
- [12] Plazibat, B., Matoković, A. *MEHANIKA I – STATIKA*, Veleučilište u Splitu, Split, 2000.
- [13] Ruina, A., Pratap, R. *Introduction to STATICS and DYNAMICS*. Oxford University Press, UK, 2010.
- [14] Targ, S. M. *TEORIJSKA MEHANIKA*. Građevinska knjiga, Beograd, 1979.