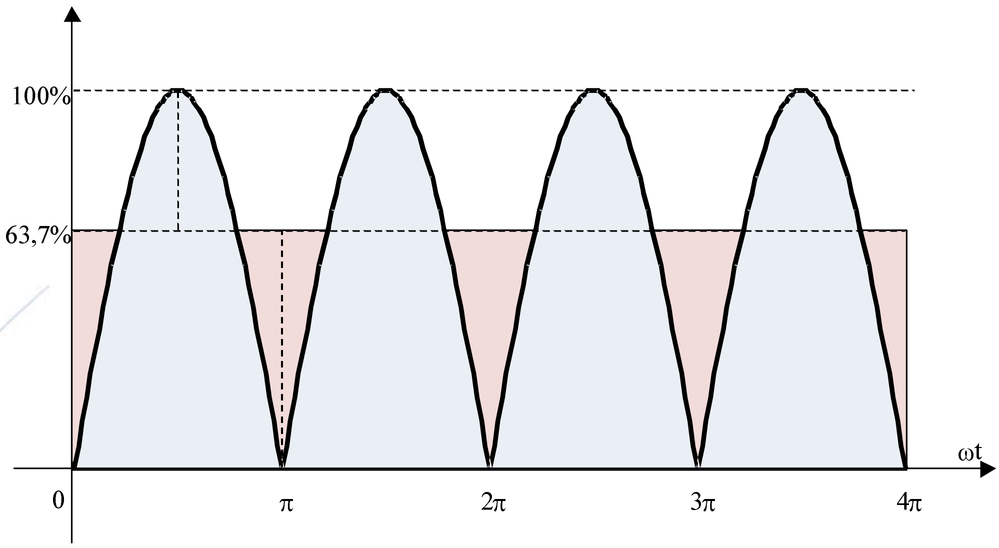
SVEUČILIŠTE U SPLITU
SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE

UNIVERSITY OF SPLIT
UNIVERSITY DEPARTMENT OF PROFESSIONAL STUDIES

Ljubomir Malešević

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE II



STUDIJI ELEKTRONIKE I ELEKTROENERGETIKE

SPLIT, 2018.

PREDGOVOR

Osnove elektrotehnike II nastavni je materijal za istoimeni kolegij koji pokriva područje izmjeničnih struja. Izrađen je za studente stručnog studija elektroenergetike i elektronike na Odsjeku za elektrotehniku Sveučilišnog odjela za stručne studije Sveučilišta u Splitu.

Svrha je predmeta razvitak elektrotehničkog načina mišljenja polazeći od usvojenih znanja iz fizike i izučavanje temeljnih teorijskih znanja iz elektrotehnike u području izmjeničnih struja. Glavni je cilj osposobljavanje studenata za olakšano praćenje i savladavanje ostalih stručnih i specijalističkih kolegija. Kako bi se zorno prikazao značaj primjene usvojenih znanja u praksi, dan je velik broj praktičnih primjera i navedena su područja primjene.

U prvim trima poglavljima detaljno su analizirane varijable i elementi linearnih izmjeničnih strujnih krugova. Opisane su karakteristike sinusne funkcije i određivanje relevantnih vrsta srednjih vrijednosti. Svi tipovi spojeva pasivnih R-L-C elemenata kruga proučeni su temeljem odgovarajućih fazorskih prikaza.

U četvrtom poglavlju provedena je analiza izmjeničnih krugova uz uporabu simboličke metode u frekvencijskoj domeni.

Četveropoli su obrađeni u petom poglavlju. Navedeni su karakteristični primjeri elemenata mreža i sklopova koji se prikazuju i proučavaju kao četveropoli.

Peto poglavlje obrađuje pojavu rezonancije, strujne i naponske. Za određivanje odziva rezonantnog kruga dani su primjeri uporabe modernih alata programske podrške kao što je MATLAB. Taj program studenti upoznaju u sklopu laboratorijskih vježba unutar kolegija Primijenjena i numerička matematika.

Sedmo poglavlje, u kojem se analizira svitak s feromagnetskom jezgrom, priprema je za osmo poglavlje o transformatorima. Dana je teoretska potka za kasnije izučavanje transformatora, što je posebno važno za studente smjera elektroenergetika.

Trofazni sustavi opisani su u devetom poglavlju. Definirane su sve vrste spojeva i odnosa generatora i trošila, proračun i mjerenja struja, napona i snaga te simetrične komponente nesimetričnih trofaznih sustava.

U posljednjem, desetom poglavlju obrađeno je obrtno magnetsko polje na kojem se temelji rad većine električnih motora.

Sastavni su dio ovih nastavnih materijala i slajdovi s PowerPoint prezentacijom gradiva koje se studentima iznosi na predavanjima.

Kao dopuna za pripremu usmenog ispita preporučuje se:

- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s usmenih ispita iz OE II, web*-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Za pripremu kolokvija i pismenog dijela ispita studenti se mogu koristiti zbirkama:

- Lj. Malešević: *Zbirka zadataka s pismenih ispita iz OE II, web*-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.
- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s kolokvija iz OE II, web*-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Propisanim laboratorijskim vježbama obuhvaćene su gotovo sve tematske cjeline predviđene nastavnim programom predmeta. Tijekom vježba u laboratoriju studenti se zorno upućuju u analizu i rješavanje praktičnih primjera potrebnih za adekvatno savladavanje gradiva. Na raspolaganju su im skripta:

- Malešević, Lj.: *Izmjenične struje – Repetitorij s laboratorijskim vježbama*, Split, Centar za stručne studije, 2009.

Molim čitatelje da me upozore na uočene propuste i pogreške te iznesu moguće primjedbe, na čemu ću im biti zahvalan.

Split, rujna 2018.

AUTOR

S A D R Ž A J

1. TEMELJNA RAZMATRANJA O PROMJENLJIVIM STRUJAMA

Promjenljiva struja je takav način kretanja električnih naboja pri kojemu se količina naboja što protječe kroz poprečni presjek vodiča mijenja s vremenom:

$$i = \frac{dq}{dt} = f(t)\ . \tag{1-1}$$

Može nastati ako se mijenja:

- EMS izvora
- otpor kruga.

Elektromotorna sila, napon i snaga su vremenske funkcije:

$$e = f(t) \quad , \quad u = f(t) \quad , \quad p = f(t)\ . \tag{1-2}$$

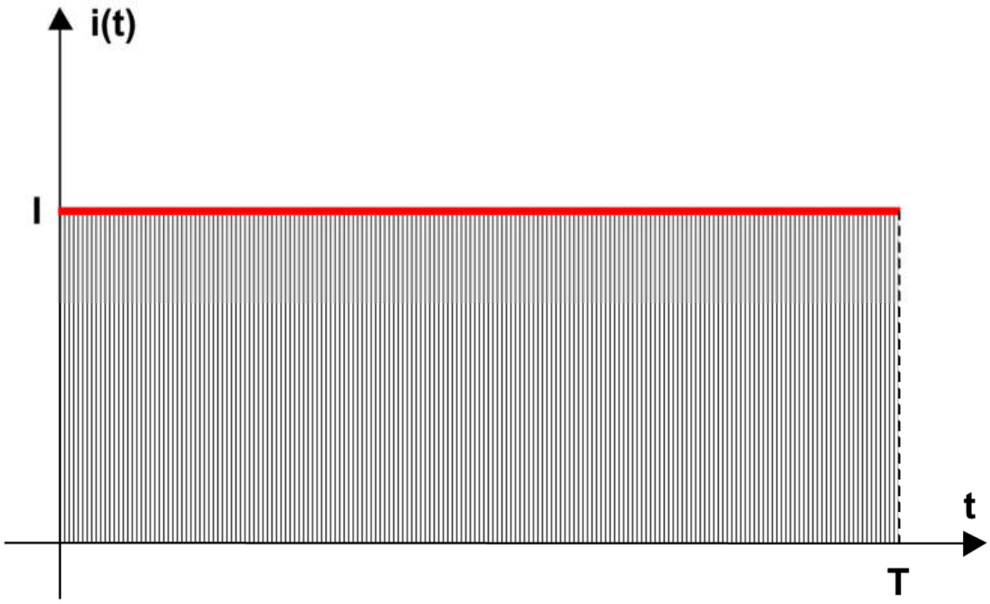
Trenutačne vrijednosti – opisuju vrijednosti veličina u svakom trenutku. Označuju se malim slovima *i*, *u*, *e*, *p*.

Vremenski promjenljive veličine mogu biti:

- **periodične**, kod kojih se promjene ponavljaju u jednakim vremenskim intervalima,
- **neperiodične**, čiji se proces promjene (valni oblik) ne ponavlja.

Primjeri:

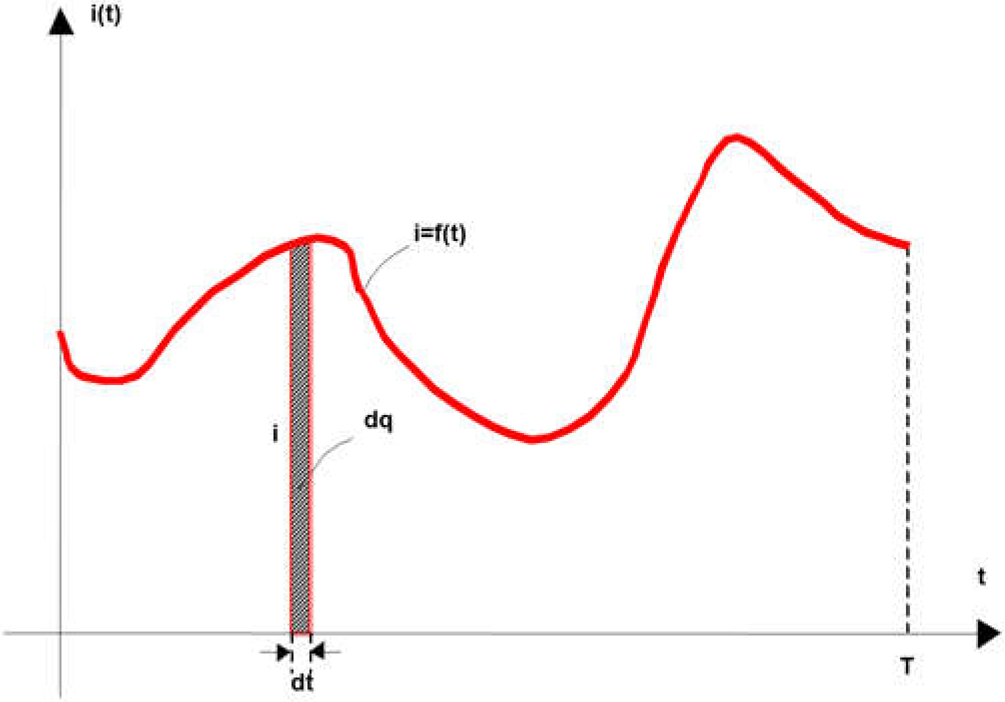
Istosmjerna struja – *Slika 1.1*



Slika 1.1 – Graf istosmjerne struje

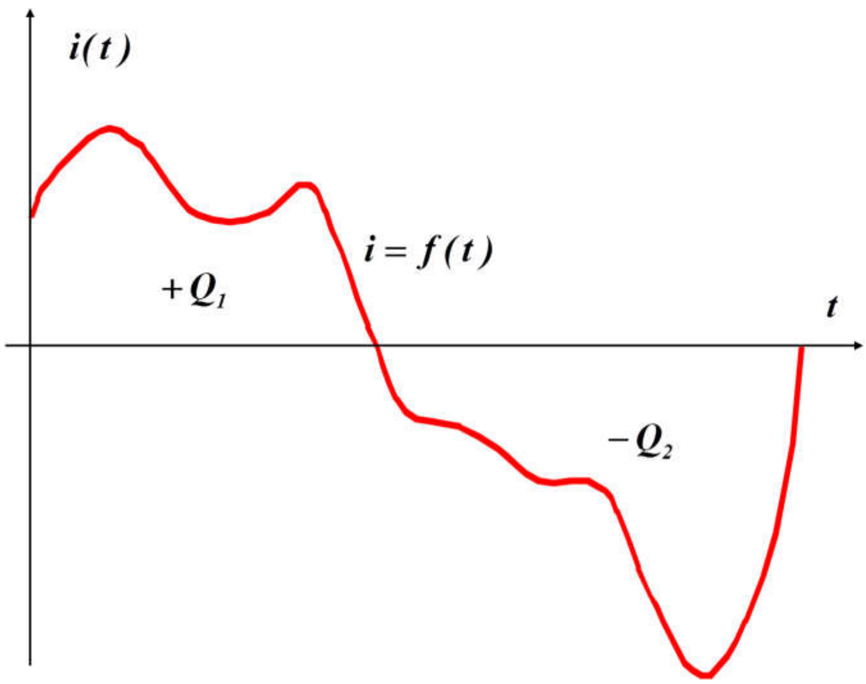
$$\int_0^T I dt = IT = Q \tag{1-3}$$

Neperiodične promjenljive struje *– Slike 1.2, 1.3*



Slika 1.2 – Neperiodična promjenljiva struja

$$dq = i(t)dt \quad \Rightarrow \quad Q = \int_0^T idt \tag{1-4}$$

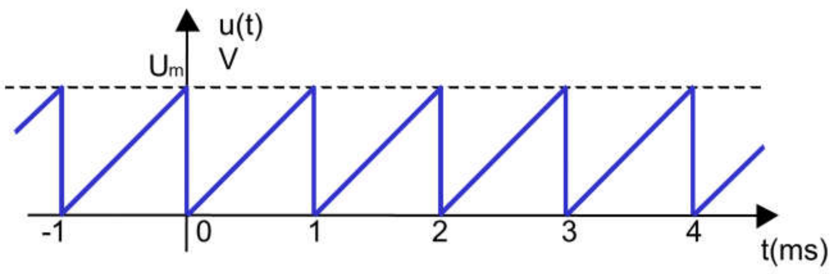


Slika 1.3 – Neperiodična struja promjenljiva smjera

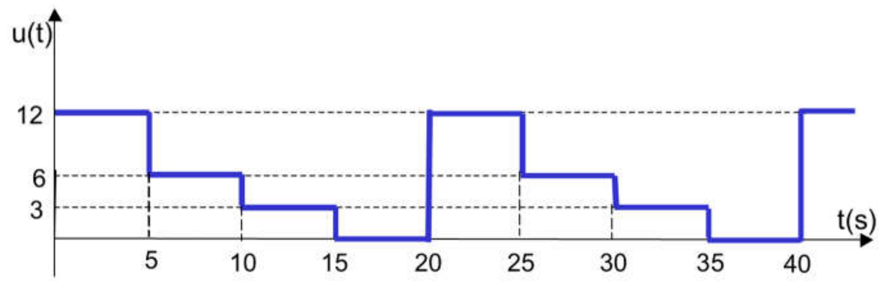
$$Q = +Q_1 - Q_2 \tag{1-5}$$

Referentni smjer: struja izlazi iz pozitivne stezaljke izvora, a ulazi u pozitivnu stezaljku trošila.

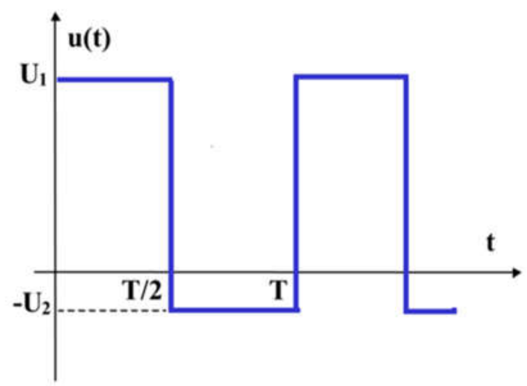
***Periodični promjenljivi naponi/struje** – Slike 1.4 – 1.9*



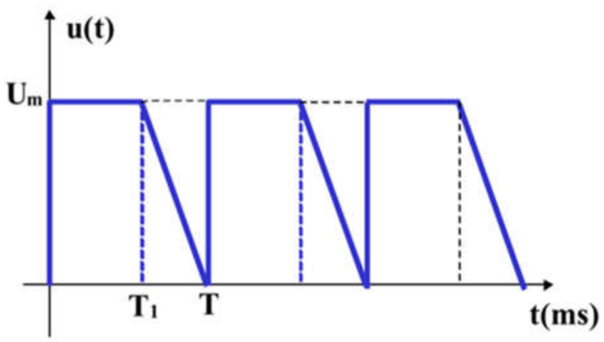
Slika 1.4 – Trokutasti napon

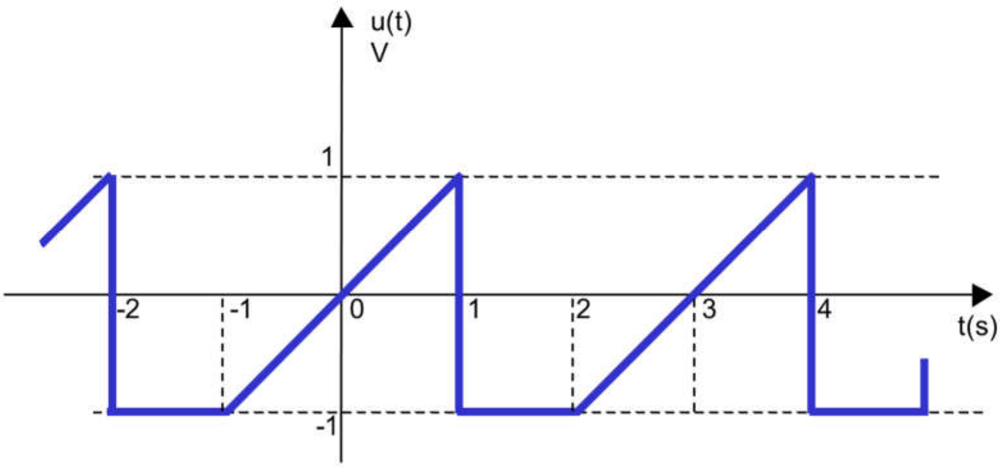


Slika 1.5 – Stepeničasti napon

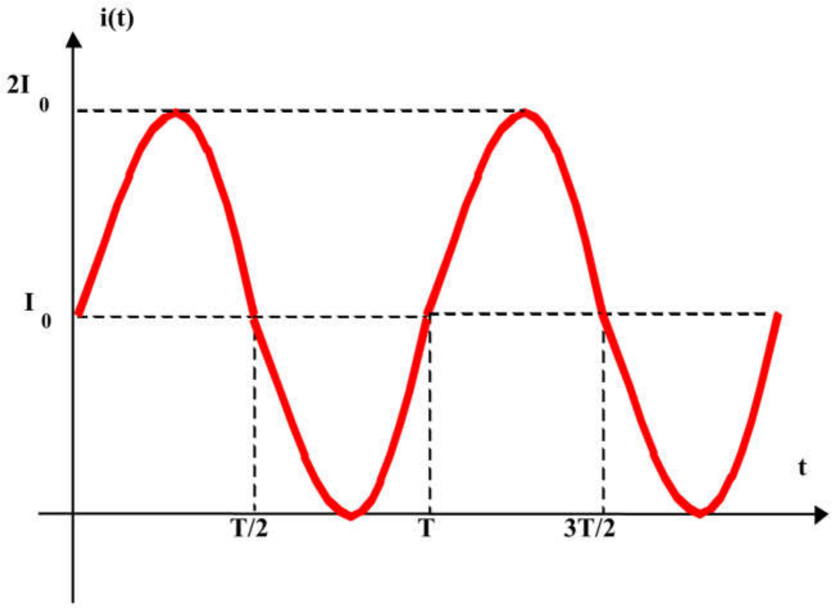


Slika 1.6 – Pravokutni napon

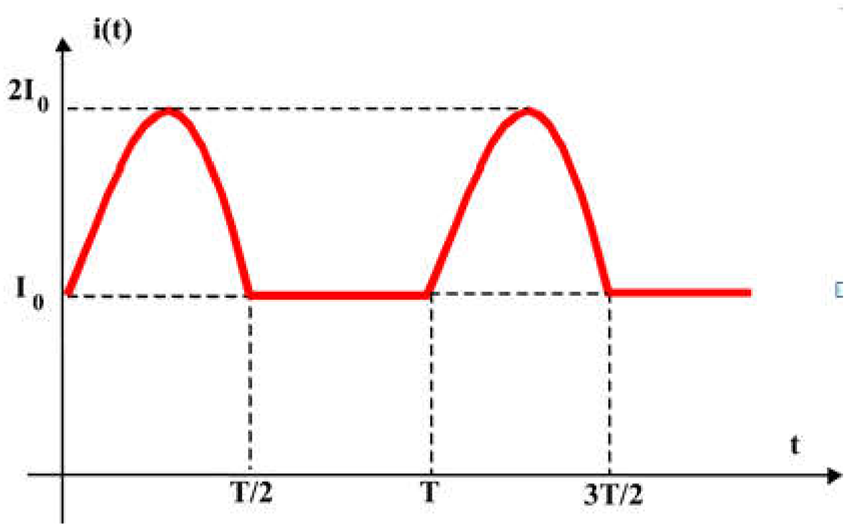




Slika 1.7 – Kombinirani valni oblici napona



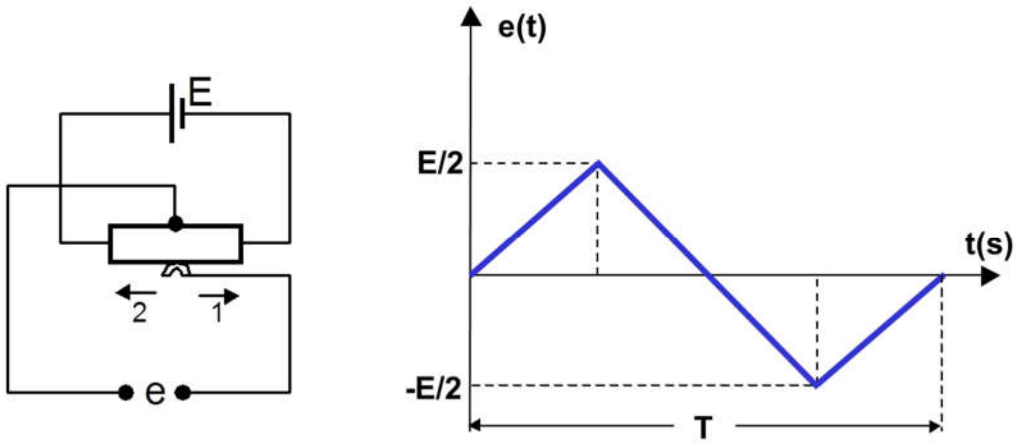
Slika 1.8 – Sinusoidna struja s istosmjernom komponentom



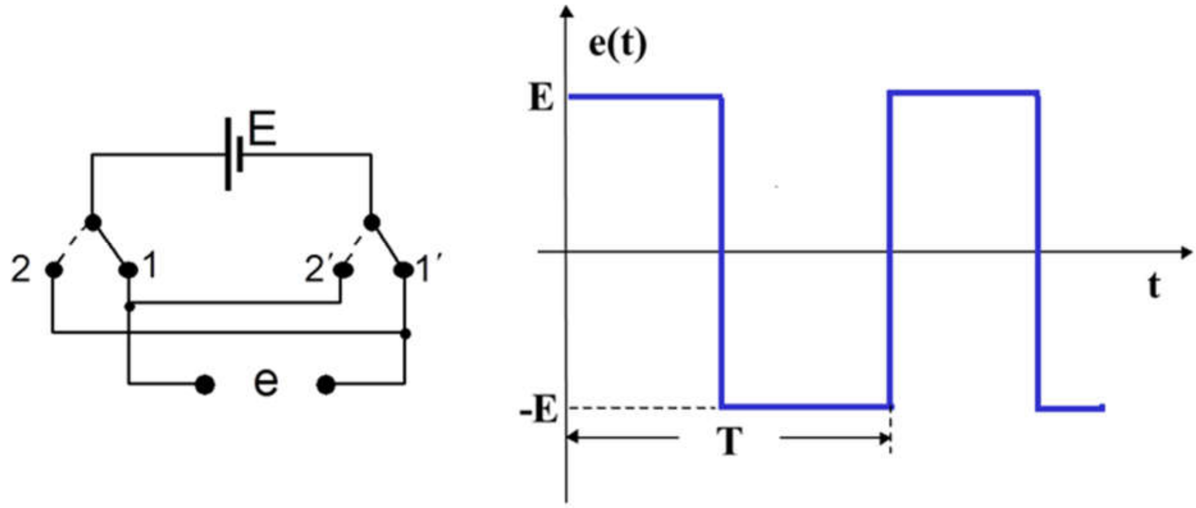
Slika 1.9 – Poluvalno ispravljena sinusoidna struja s istosmjernom komponentom

Matematički izražena periodičnost jest: $f(t) = f(t+T) = f(t+kT)$, gdje je k bilo koji cijeli broj $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

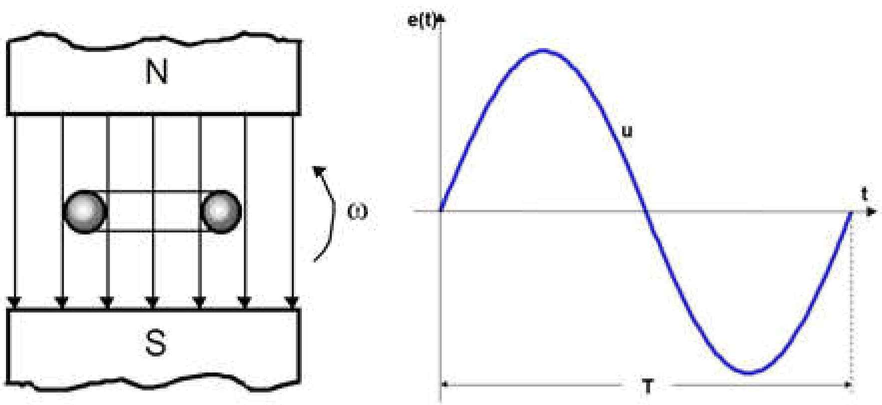
Načelni primjeri generiranja promjenljive elektromotorne sile (EMS) *– Slike 1.10 – 1.12*



Slika 1.10 – Primjer generiranja trokutastog napona



Slika 1.11 – Primjer generiranja pravokutnog napona



Slika 1.12 – Primjer generiranja sinusoidnog napona

Složena periodična veličina (struja) predstavlja općenito skup cijelog niza komponenata:

- istosmjerne komponente
- odgovarajućeg broja sinusoidnih harmoničnih komponenata, od kojih je svaka različite frekvencije.

Za analiziranje svojstava bilo koje složene struje potrebno je proučiti jednostavnu, odnosno čistu sinusoidnu struju, koju obično zovemo izmjeničnom strujom.

Većina suvremenih generatora izmjeničnih struja (hidrogeneratori, turbogeneratori) stvara izmjeničnu sinusnu elektromotornu silu – EMS. Općenito u području elektroenergetike uređaji za proizvodnju, prijenos i uporabu električne energije primjenjuju što pravilniju sinusoidnu struju. U Europi se u javnoj mreži uporabljuju frekvencije od 50 Hz, a u SAD-u od 60 Hz.

U telekomunikacijskim, elektroakustičkim i radijskim uređajima te raznim regulacijskim sustavima raspon frekvencija sinusnih valova vrlo je velik – od desetak Hz do reda veličine GHz.

Prijenos signala u radiokomunikacijama i telekomunikacijama:

- AM – **a**mplitudna **m**odulacija; mijenja se (modulira) amplituda u ritmu promjene signala (informacija sadržana u amplitudi);
- FM – **f**rekvencijska **m**odulacija; frekvencija signala je modulirana (informacija sadržana u frekvenciji ili fazi).

TV signal: AM za sliku (video), FM za zvuk (audio).

U analizi krugova i uređaja rabe se:

- skokomične (step) funkcije za iznenadne i nenormalne promjene na ulazu kruga
- sinusoidne funkcije za normalne ili ponovljive ulazne signale.

2. SINUSNA IZMJENIČNA ELEKTROMOTORNA SILA I STRUJA

Definicija: Izmjenične periodične struje mijenjaju predznak u tijeku jednog perioda (izmjenično), tako da je ukupna količina elektriciteta koja prođe kroz referentni presjek vodiča unutar jednoga perioda T jednaka nuli, $Q_{uk}(T) = 0$.

Zašto su važne sinusne veličine?

- Titrajni procesi u prirodi (idealni, odnosno idealizirani) odvijaju se po sinusoidnom zakonu (titranje opruge, njihanje ljuljačke bez trenja, …). Te se promjene nazivaju harmoničkim promjenama. U realnim slučajevima postoji određeno gušenje, pa je i titranje prigušeno (sinusoida s padajućom amplitudom).

- Sinusna vremenska funkcija najjednostavnija je od svih vremenski promjenljivih funkcija, tj. ne može se dalje razlagati.

- Sve ostale funkcije, kao primjerice linearna vremenski ovisna funkcija, mogu se razlagati temeljem Fourierove transformacije na sumu sinusnih komponenata i istosmjernu komponentu.

- Poznavanje sinusnih funkcija omogućuje detaljnu analizu bilo koje druge vremenske funkcije. Analiza se provodi pomoću računala uporabom brze (FFT) i diskretne (DFT) Fourierove transformacije. Mogućnost primjene zadire u različita područja ljudske djelatnosti: istraživanje signala iz svemira, medicinu, genetiku, kriminalistiku, tehničko održavanje uređaja i dr.

- Primijene li se operacije deriviranja i integriranja na sinusne funkcije, kao rezultat dobiju se kosinusne funkcije. One su u biti opet sinusne funkcije s pomakom od 90 º [$\cos\omega t = \sin\left(\omega t + 90^0\right)$].

- Sinusne funkcije primjenjuju se i u analizi niza fizikalnih pojava koje se mogu sresti u prirodi. Primjerice, sinusni zvučni val određene frekvencije je čisti ton, a elektromagnetski val je čista boja.

- Sva razmatranja, proračuni, analiza i sinteza vrše se na sinusoidnim veličinama, neovisno o njihovoj frekvenciji.

Eksplicitni izraz za trenutačnu vrijednost izmjenične struje slijedi iz usporedbe sa sinusnom funkcijom kao trigonometrijskom funkcijom – *Slika 2.1*.

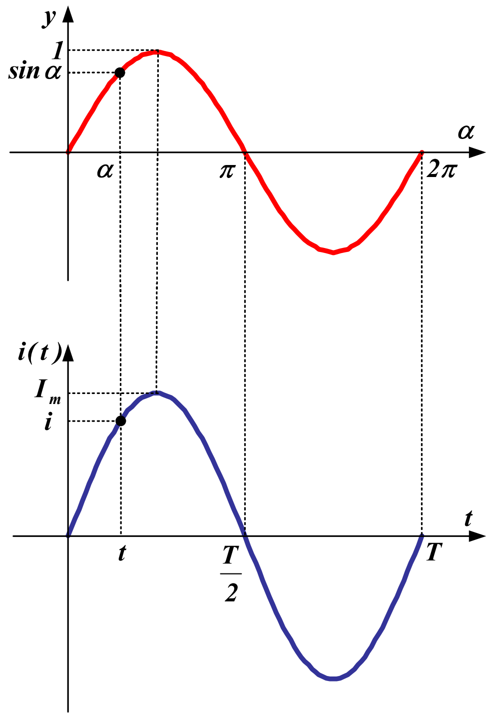
Vrijednosti na slici su:

i – trenutačna vrijednost izmjenične struje

I_m – maksimalna vrijednost izmjenične struje

1 – amplituda sinusne trigonometrijske funkcije

$\sin\alpha$ – ordinata sinusne trigonometrijske funkcije za proizvoljni kut α.



Slika 2.1 – Usporedba matematičkog oblika sinusoide i sinusoidne struje

Iz omjera:

$$i \div I_m = \sin \alpha \div 1 \tag{2-1}$$

$$t \div T = \alpha \div 2\pi \tag{2-2}$$

slijedi relacija za trenutačnu vrijednost izmjenične struje:

$$i = I_m \sin \frac{2\pi}{T} t = I_m \sin \omega t \;. \tag{2-3}$$

Na isti se način mogu prikazati i druge izmjenične električne veličine, EMS, napon i snaga.

2.1. Generiranje sinusoidne elektromotorne sile (princip rada izmjeničnog generatora)

Stvaranje sinusoidne elektromotorne sile (EMS) temelji se na rotaciji vodljine petlje u homogenom magnetskom polju, kao što je to prikazano na *Slici 2.2*. Za pozitivan smjer vrtnje uzima se smjer suprotan smjeru kazaljke sata.

Prema Faradayevu zakonu elektromagnetske indukcije jest:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \;. \tag{2-4}$$

Na slici su označene površine:

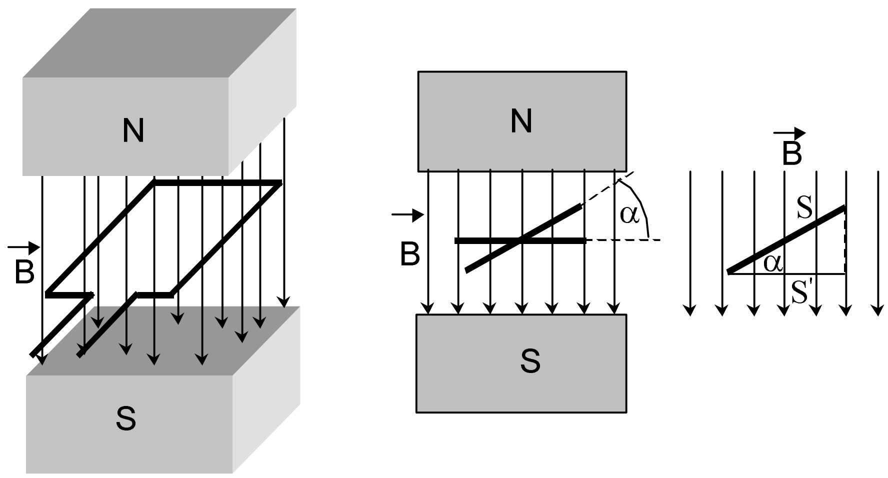
- S – površina poprečnog presjeka vodljive petlje
- S' – efektivna površina kroz koju prodiru magnetske silnice.

Površina S' je kosinusna projekcija površine S:

$$\cos\alpha = \frac{S'}{S} \quad \Rightarrow \quad S' = S\cos\alpha \,. \tag{2-5}$$

Nakon uvrštavanja u *(2-4)* dobije se:

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right) = -N\frac{d}{dt}\left(BS\cos\alpha\right) \ . \qquad (2\text{-}6)$$



Slika 2.2 – Princip generiranja sinusoidne elektromotorne sile (EMS)

Magnetski tok koji prožima petlju jest prema *(2-6)*:

$$\Phi = \Phi_m \cos\alpha \ . \qquad (2\text{-}7)$$

Ostvareni kut zakreta ovisi o vremenu.

Za translatorno kretanje vrijedi: prijeđena udaljenost = brzina x vrijeme ($s = vt$).

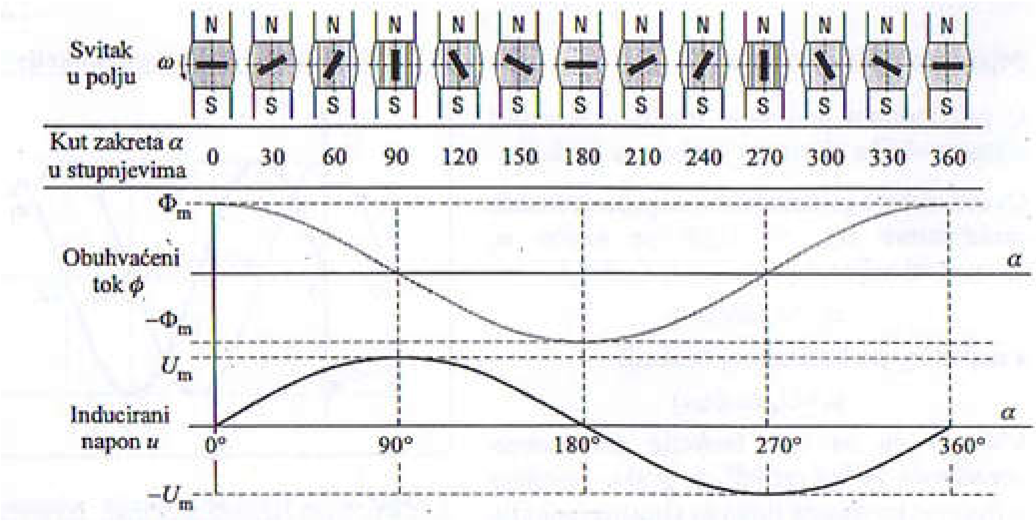
Za rotacijsko kretanje jest: prijeđeni kut = kutna brzina x vrijeme ($\alpha = \omega t$).

Jednadžba *(2-6)* nakon deriviranja poprima oblik:

$$e = -N\frac{d}{dt}\left(BS\cos\omega t\right) = NBS\omega\sin\omega t = E_m\sin\omega t \ , \qquad (2\text{-}8)$$

gdje je amplituda sinusoide $E_m = NBS\omega$.

Položaji svitka u odnosu na magnetsko polje, kut zakreta te grafičke ovisnosti obuhvaćenog toka i induciranog napona u ovisnosti o kutu zakreta prikazani su na *Slici 2.3*.



Slika 2.3 – Promjena magnetskog toka i induciranog napona pri vrtnji svitka u polju

2.2. Parametri izmjeničnih veličina

Parametri izmjeničnih veličina su:

- **vršna (maksimalna vrijednost) ili amplituda**
- **period/frekvencija**
- **početni fazni kut.**

Vršna vrijednost je maksimalna trenutačna vrijednost sinusoidne funkcije. U tijeku jednog perioda izmjenične veličine dva puta postižu maksimalnu vrijednost (jedan put u pozitivnom i jedan put u negativnom smjeru). Amplitude se označuju velikim slovima i indeksom m: E_m, U_m, I_m, P_m.

Period je vrijeme za koje izmjenična veličina izvrši jednu punu oscilaciju, tj. jednu punu promjenu po veličini i po smjeru. Označuje se sa T i mjeri u sekundama. Za identifikaciju brzine promjene uzima se kao osnova broj promjena koji se događa u jedinici vremena (frekvencija).

Frekvencija f je broj perioda ostvarenih u jednoj sekundi:

$$f = \frac{1}{T} \ . \tag{2-9}$$

Frekvencija se mjeri u hercima (Hz). Jedan Hz je ona vrijednost izmjenične veličine čiji je period jednak $1\ s$:

$$1Hz = 1\frac{ciklus}{s} = s^{-1} \ . \tag{2-10}$$

Petlja rotira konstantnom brzinom i u periodu od T sekunda napravi jedan puni okretaj od 360 ^{0} ili 2 π radijana.

Kutna brzina ω je kut koji se ostvari rotacijom u jednoj sekundi. Naziva se još i *kutna frekvencija*, a mjeri se u rad/s:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \ . \tag{2-11}$$

Kut koji se ostvari u vremenu t jest $\alpha = \omega t$.

Opisani parametri mogu se uočiti na primjerima valnih oblika napona i struje – *Slika 2.4.*

Početni fazni kut (početna faza) φ je fazni kut koji odgovara početnom vremenskom trenutku. Početna faza određuje se kao fazna razlika između razmatranog sinusoidnog valnog oblika i referentnog sinusoidnog vala. Uobičajeno je za referentnu sinusoidnu funkciju uzimati onu koja u t = 0 ima vrijednost jednaku nuli, tj. funkcija počinje rasti iz nule:

$$i = I_m \sin \omega\, t \qquad ili \qquad u = U_m \sin \omega\, t \ . \tag{2-12}$$

Na *Slici 2.5* prikazane su sinusoide s različitim početnim fazama, gdje je:

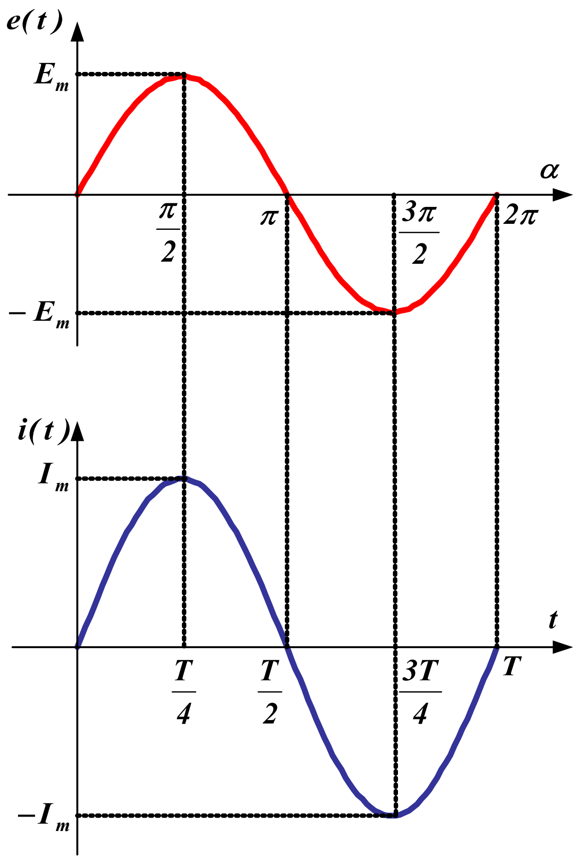
u – referentni naponski valni oblik

u_1 – valni oblik krivulje s maksimumom prije referentne krivulje

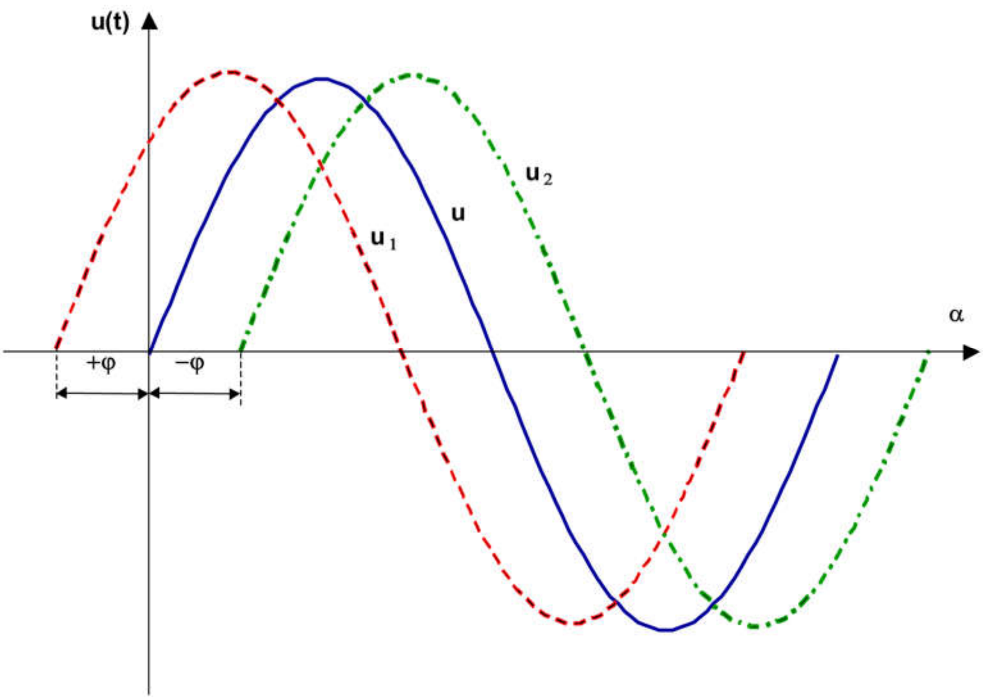
u_2 – valni oblik krivulje s maksimumom nakon referentne krivulje.

Za predznak početne faze vrijedi:

- pozitivan predznak početne faze $+\varphi$ – nulta točka krivulje pomaknuta po vremenskoj osi nalijevo
- negativan predznak početne faze $-\varphi$ – nulta točka pomaknuta je nadesno.



Slika 2.4 – Izmjenične veličine – apscisa: kut ili vrijeme



Slika 2.5 – Predznak početne faze sinusoide

Opći prikazi valnog oblika izmjeničnog napona i izmjenične struje su:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t \pm \varphi_u) \qquad (2\text{-}13)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t \pm \varphi_i), \qquad (2\text{-}14)$$

gdje su φ_u i φ_i početne faze napona, odnosno struje.

Fazni kut (fazna razlika) φ između naponskog i strujnog vala definira se kao razlika početnih faza napona i struje:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \ . \qquad (2\text{-}15)$$

Pri tomu vrijedi:

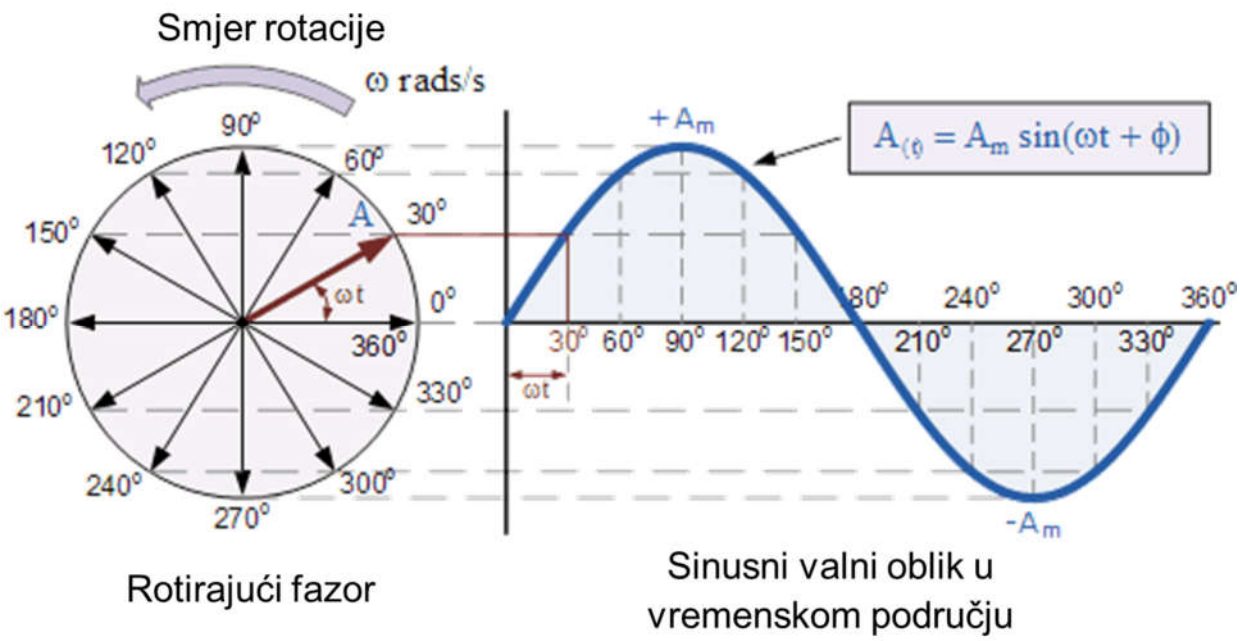
$\varphi = 0$ $(\varphi_u = \varphi_i)$ – naponski i strujni valni oblik su u fazi ili kraće: napon i struja su u fazi

$\varphi > 0$ $(\varphi_u > \varphi_i)$ – napon prethodi struji za kut φ

$\varphi < 0$ $(\varphi_u < \varphi_i)$ – napon zaostaje za strujom za kut φ.

2.3. Fazorski prikaz sinusoidnih veličina

Sinusna funkcija može se prikazati kao rotirajući fazor – *Slika 2.6.*



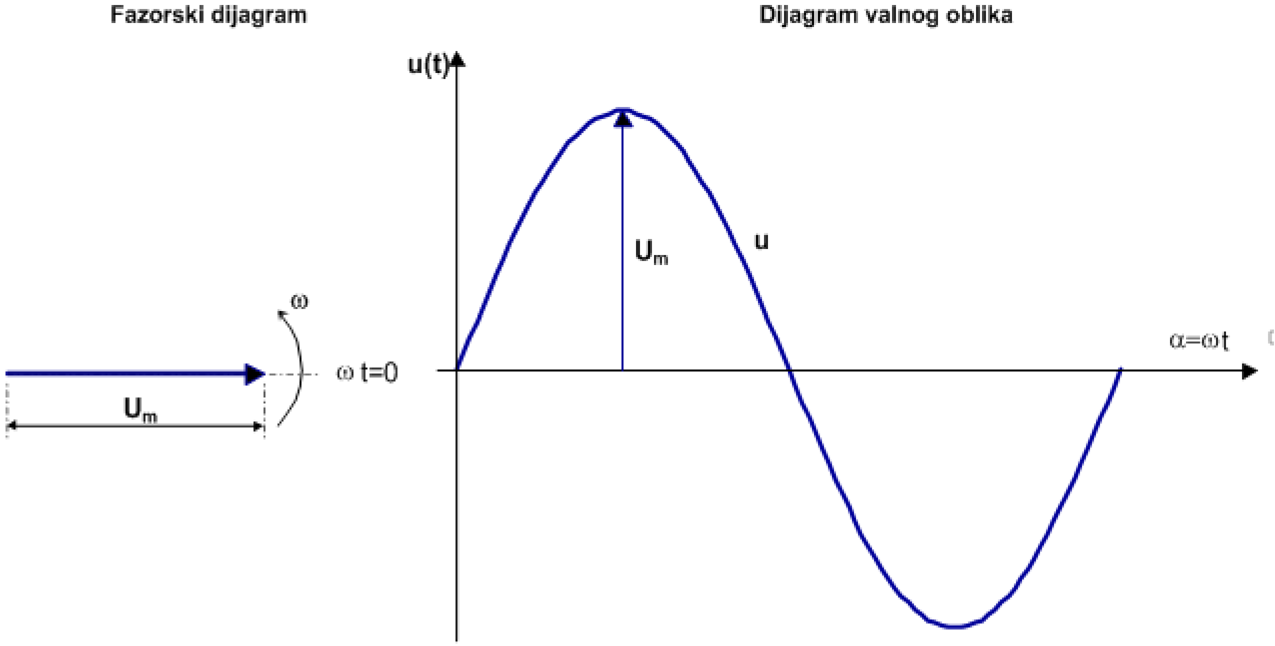
Slika 2.6 – Sinusoidna funkcija kao projekcija rotirajućeg fazora

Projekcija rotirajućeg fazora na ordinatu je *trenutačna vrijednost* izmjenične veličine. *Amplituda sinusoide je* iznos (duljina) fazora. *Fazni kut sinusoide* definiran je pravcem i smjerom fazora.

Fazorski dijagram daje istu informaciju kao i dijagram valnog oblika, ali u jednostavnijoj formi kao na *Slici 2.7*. Pri interpretaciji dijagrama treba uočiti sljedeće:

- dijagram vrijedi samo za sinusoidno promjenljive veličine
- duljina fazora može biti vršna (amplituda) vrijednost ili češće efektivna vrijednost $U_m = \sqrt{2}U$
- položaj fazora na vodoravnoj referentnoj crti ($\omega t = 0$) pokazuje kako je $U = 0$ za $t = 0$
- fazor usmjeren u pozitivnom referentnom smjeru pokazuje da napon raste u pozitivnom smjeru

- trenutačna vrijednost napona je $u(t) = U_m \sin \omega t$.



Slika 2.7 – Fazorski dijagram i dijagram valnog oblika sinusoide

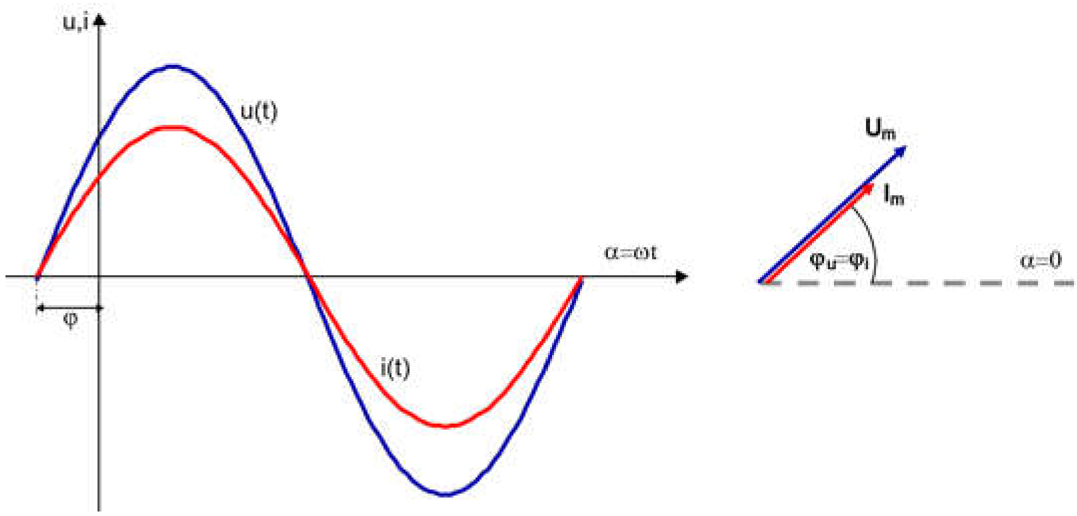
Opći trenutačni oblici napona i struje s pozitivnim početnim faznim kutom jesu:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \ . \qquad (2\text{-}16)$$

U nastavku su navedeni mogući odnosi naponskog i strujnog valnog oblika i pripadni fazorski dijagrami.

a) Napon i struja u fazi

Ako struja i napon jednake frekvencije istovremeno postižu nultu vrijednost *(φ_u = φ_i)*, kažemo da su u fazi. To je karakteristika izmjeničnih krugova s čistim djelatnim otporom *R – Slika 2.8*.



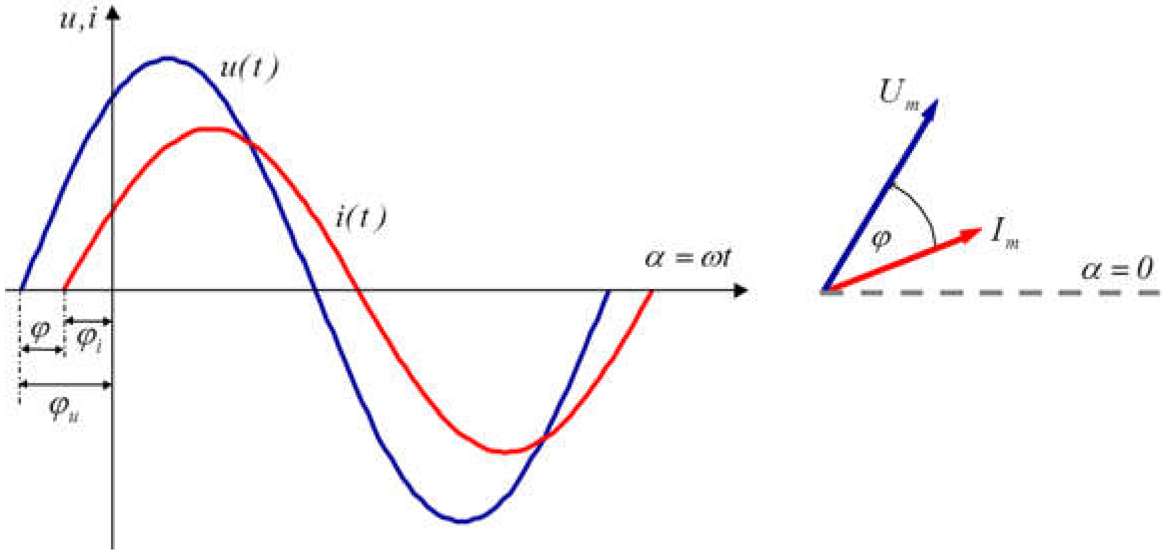
Slika 2.8 – Napon i struja u fazi – valni oblik i pripadni fazorski dijagram

Vrijedi: $\varphi_u - \varphi_i = \varphi = 0$.

b) Napon prethodi struji za kut φ

Ako je $\varphi_u > \varphi_i$, napon postiže nultu vrijednost prije struje, kao na *Slici 2.9*. To je karakteristika izmjeničnih krugova induktivnog karaktera. Vrijedi: $\varphi_u - \varphi_i = \varphi > 0$.

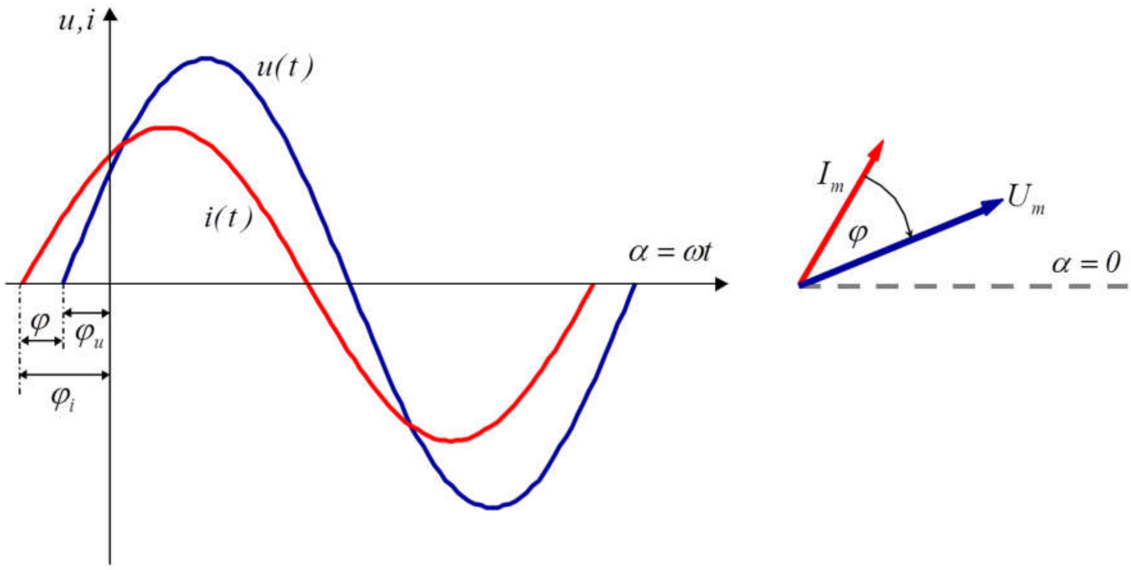
Fazna razlika ostaje sačuvana jer oba fazora rotiraju jednakom kružnom brzinom.



Slika 2.9 – Napon prethodi struji – valni oblik i pripadni fazorski dijagram

c) Napon zaostaje prema struji za kut φ

Ako je $\varphi_u < \varphi_i$, napon postiže nultu vrijednost za kut φ kasnije nego struja – *Slika 2.10*. To je karakteristika izmjeničnih krugova kapacitivnog karaktera. Vrijedi: $\varphi_u - \varphi_i = \varphi < 0$.



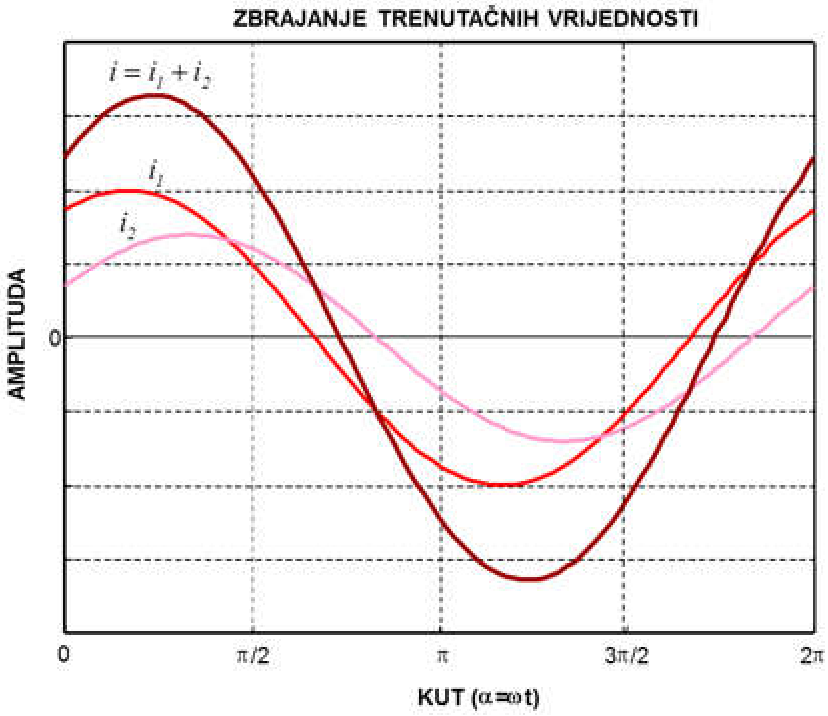
Slika 2.10 – Napon zaostaje za strujom – valni oblik i pripadni fazorski dijagram

Zbrajanje i oduzimanje sinusoidnih veličina (napona i struja)

U serijskim/paralelnim krugovima ukupni se napon/struja dobije kao zbroj padova napona na pojedinim otporima, odnosno kao zbroj parcijalnih struja u pojedinim granama. Zbroj/razlika dviju ili više izmjeničnih veličina jednake frekvencije opet je sinusoidna veličina, čija je vrijednost u svakom trenutku jednaka zbroju/razlici pojedinih trenutačnih vrijednosti.

- Zbrajanje trenutačnih vrijednosti – grafički

Grafičko zbrajanje trenutačnih vrijednosti prikazano je na *Slici 2.11*.



Slika 2.11 – Grafičko zbrajanje trenutačnih vrijednosti struje

- Zbrajanje trenutačnih vrijednosti – analitički

Trenutačne vrijednosti struja na gornjoj slici su:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2)\,, \tag{2-17}$$

pa je njihov zbroj:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = \\ &= I_{1m} \sin\omega t \cdot \cos\varphi_1 + I_{1m} \sin\varphi_1 \cdot \cos\omega t + I_{2m} \sin\omega t \cdot \cos\varphi_2 + I_{2m} \sin\varphi_2 \cdot \cos\omega t = \\ &= (I_{1m} \cos\varphi_1 + I_{2m} \cos\varphi_2) \sin\omega t + (I_{1m} \sin\varphi_1 + I_{2m} \sin\varphi_2) \cos\omega t = A \sin\omega t + B \cos\omega t\ , \end{aligned} \tag{2-18}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} A &= I_{1m} \cos\varphi_1 + I_{2m} \cos\varphi_2 \\ B &= I_{1m} \sin\varphi_1 + I_{2m} \sin\varphi_2\ . \end{aligned} \tag{2-19}$$

Ukupnu struju potrebno je prikazati u obliku:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = I_m \cos\varphi \cdot \sin\omega t + I_m \sin\varphi \cdot \cos\omega\, t\ . \tag{2-20}$$

Izjednačavanjem odgovarajućih faktora u obje relacije slijedi:

$$\left.\begin{array}{l} I_m cos\varphi = A \\ \\ I_m sin\varphi = B \end{array}\right|^2 + \tag{2-21}$$

Ako se gornje relacije kvadriraju pa zbroje, slijedi:

$$I_m = \sqrt{A^2 + B^2}\ . \tag{2-22}$$

Dijeljenjem se dobije:

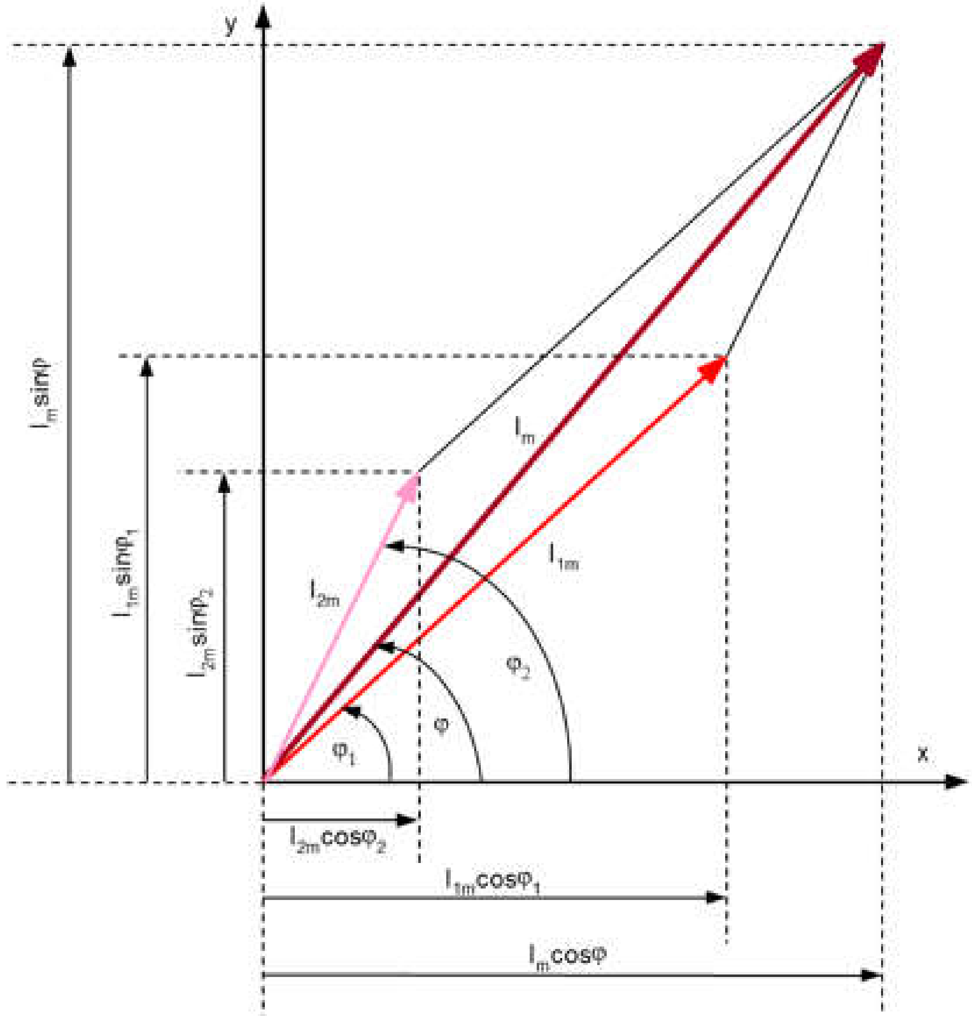
$$tg\,\varphi = \frac{B}{A} \quad \Rightarrow \quad \varphi = arctg\,\frac{B}{A}\ . \tag{2-23}$$

Ukupna struja je:

$$i = I_m\,sin\left(\omega t + \varphi\right) = \sqrt{A^2 + B^2}\,sin\left(\omega t + arctg\,\frac{B}{A}\right). \tag{2-24}$$

Zbrajanje fazora – grafički

Grafičko zbrajanje dvaju fazora struje prikazano je na *Slici 2.12*.



Slika 2.12 – Grafičko zbrajanje fazora struje

- Zbrajanje fazora – analitički

Projekcije fazora na x i y osi su:

$$I_{mx} = I_m \cos\varphi = I_{m1} \cos\varphi_1 + I_{m2} \cos\varphi_2 = A \tag{2-25}$$

$$I_{my} = I_m \sin\varphi = I_{m1} \sin\varphi_1 + I_{m2} \sin\varphi_2 = B\ , \tag{2-26}$$

pa se maksimalna vrijednost fazora ukupne struje i fazni kut mogu odrediti temeljem jednadžbi:

$$I_m = \sqrt{I_{mx}^2 + I_{my}^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{2-27}$$

$$tg\varphi = \frac{I_{my}}{I_{mx}} = \frac{B}{A}. \tag{2-28}$$

Ukupna struja dana je već poznatom jednadžbom *(2-24):*

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin\left(\omega t + arctg\frac{B}{A}\right).$$

Zaključak: Grafički i analitički postupak zbrajanja/oduzimanja trenutačnih vrijednosti dugotrajan je i složen. Zbrajanje/oduzimanje izmjeničnih veličina kao fazora jednostavnije je i preglednije.

2.4. Srednja vrijednost izmjeničnih veličina

Stvarne promjene izmjeničnih veličina prikazuju se vremenskim (valnim) dijagramima koji obuhvaćaju trenutačne vrijednosti promatrane veličine u određenom vremenskom intervalu. Ovakvi dijagrami mogu biti korisni za razmatranje određenih stanja u krugovima izmjenične struje. Međutim, oni su u biti skup od neizmjerno mnogo različitih trenutačnih vrijednosti. Poželjno bi bilo da se za iznos izmjenične veličine dobije jedna brojčana vrijednost, kao kod istosmjernih struja. Najjednostavniji način jedinstvenog prikaza skupa trenutačnih vrijednosti temelji se na definiranju određenog tipa srednje vrijednosti.

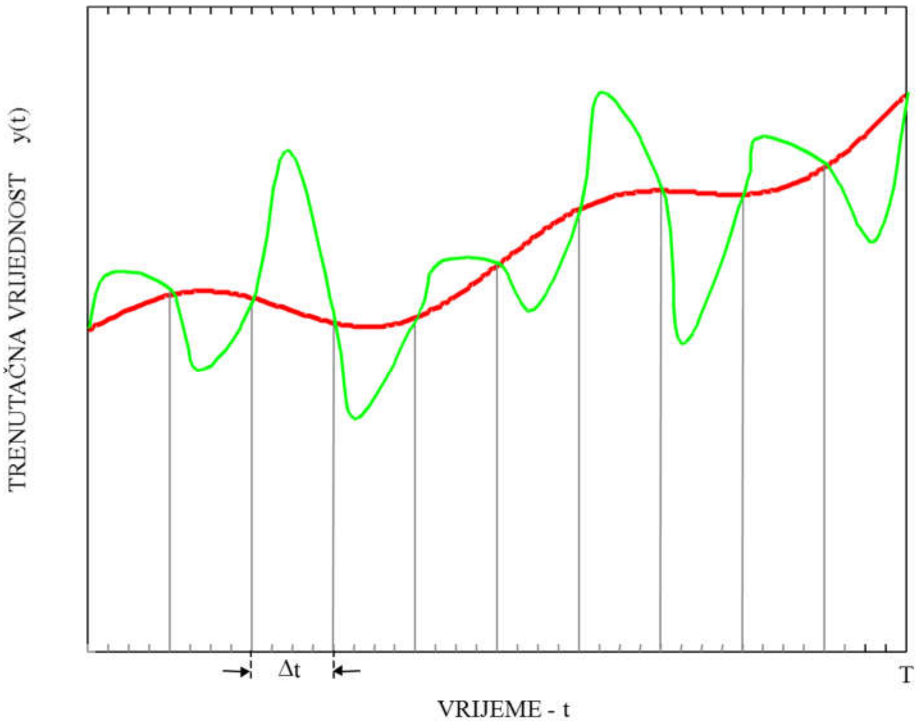
2.4.1. Aritmetička srednja vrijednost

Poznata matematička definicija kaže kako se od više različitih vrijednosti y_1, y_2, y_3, ..., y_n aritmetička srednja vrijednost (ASR) dobije tako da se suma tih vrijednosti podijeli s njihovim ukupnim brojem n (broj uzoraka):

$$Y_{sr} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i\ . \tag{2-29}$$

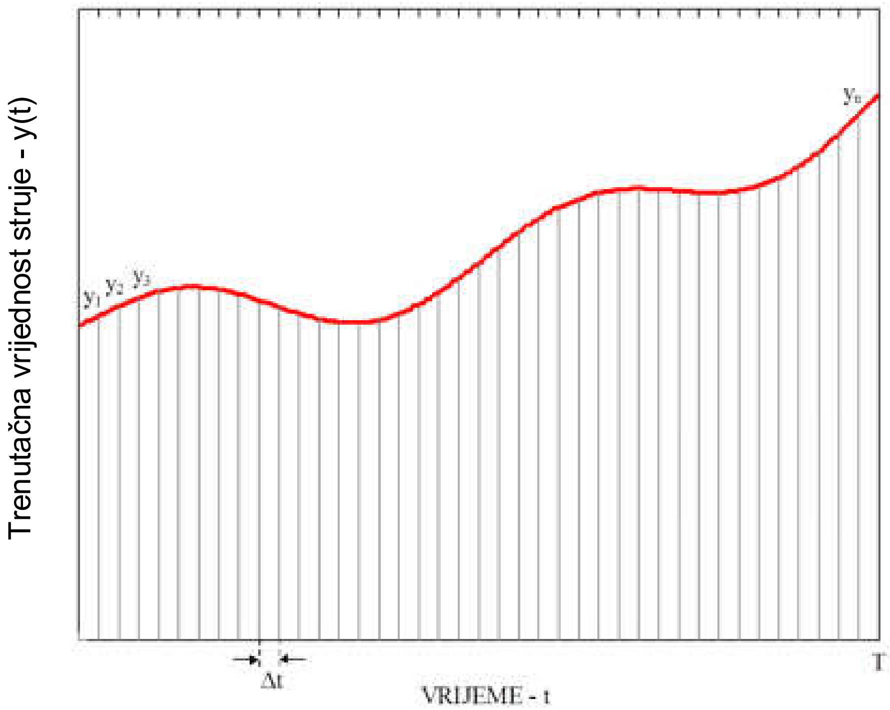
Gornja relacija daje točnu vrijednost ako se sumira n zadanih ili izmjerenih diskretnih vrijednosti. Međutim, za neku kontinuirano promjenljivu veličinu, predočenu odgovarajućim valnim oblikom, rezultat može znatno odstupati od prave vrijednosti.

Razmatrajmo određivanje ASR-a u vremenskom intervalu T neke promjenjive funkcije – *Slika 2.13.*



Slika 2.13 – Određivanje ASR-a vremenski promjenljive funkcije

Od svih trenutačnih vrijednosti, kojih ima beskonačan broj, uzimamo samo neki konačan broj *n*. ASR će biti prikazan sumom niza uzoraka kojima se uzorkuje (engl. *sampling*) zadana funkcija ili mjerni signal. Cijeli interval *T* podijeljen je na *n* uzoraka jednake širine Δ*t*. Očito je kako bi se istim uzorcima mogle opisati i neke druge funkcije koje imaju različite aritmetičke srednje vrijednosti od zadane. Pogreška u određivanju ASR-a smanjit će se ako se uzme veći broj uzoraka *n*, tj. smanji podinterval Δ*t*, kao na *Slici 2.14*.



Slika 2.14 – Vremenska funkcija struje sa skraćenim vremenom uzorkovanja

Ukupni interval T je zbroj od n podintervala Δt:

$$T = n \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad n = \frac{T}{\Delta t}. \tag{2-30}$$

Slijedi:

$$Y_{sr} = \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n) \cdot \Delta t}{T}. \tag{2-31}$$

Za što točniji proračun ASR-a, treba uzeti što više uzoraka trenutačnih vrijednosti *y(t)*, tj. potrebno je podijeliti interval T na što je moguće više dijelova. ASR će biti ispravno određen ako vrijedi $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta t \to dt \to 0$,

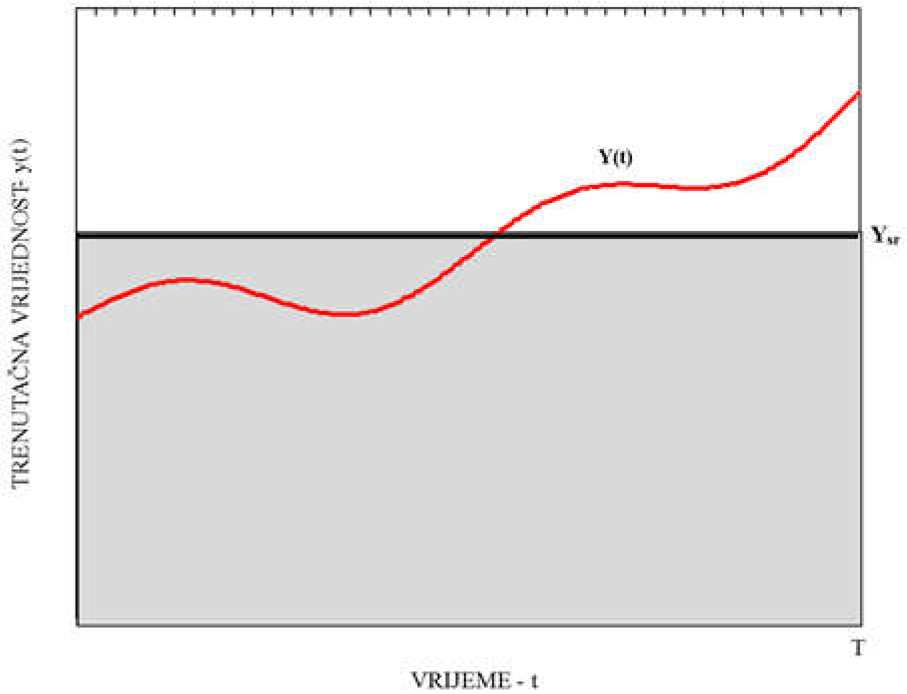
odnosno:

$$Y_{sr} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta t \to dt \to 0}} \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n) \cdot \Delta t}{T}. \tag{2-32}$$

Limes gornje sume prelazi u integral, pa je aritmetička srednja vrijednost dana izrazom:

$$Y_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\,dt. \tag{2-33}$$

<u>Geometrijska interpretacija</u>: aritmetička srednja vrijednost promjenljive funkcije Y_{sr} u vremenskom intervalu (periodu) T jednaka je visini pravokutnika koji nad osnovicom T ima površinu jednaku površini što je nad osnovicom T zatvara krivulja *y(t)* – *Slika 2.15*.



Slika 2.15 – Grafička interpretacija ASR-a

Za sinusoidnu struju površina ispod sinusoide predstavlja ukupno proteklu količinu naboja, koja je u periodu *T* jednaka nuli:

$$Q = \int_0^T i(t)dt = 0\,, \tag{2-34}$$

pa će i aritmetička srednja vrijednost sinusoidne struje biti jednaka nuli:

$$I_{sr} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_m \sin(\omega t)dt = \cdots\cdots = 0\,. \tag{2-35}$$

Aritmetička srednja vrijednost sinusoidne struje nije prikladna za analizu učinaka izmjenične struje.

2.4.2. Elektrolitska srednja vrijednost

Elektrolitska srednja vrijednost je aritmetička srednja vrijednost „ispravljene" struje. Upotrebljava se za računanje količine elektriciteta (u Ah – *ampersatima*) i za sve elektrolitske procese, pa otuda i njezin naziv.

Ako se izmjenična struja dovede na poluvalni (dioda) – *Slika 2.16* ili punovalni ispravljač (Graetzov spoj) – *Slika 2.17*, isti će uzrokovati reverziju negativnih dijelova sinusoidne oscilacije u pozitivan smjer.

Punovalno ispravljena izmjenična struja sastoji se od pozitivnih poluperioda sinusoidnog vala, a njezina srednja vrijednost je elektrolitska srednja vrijednost.

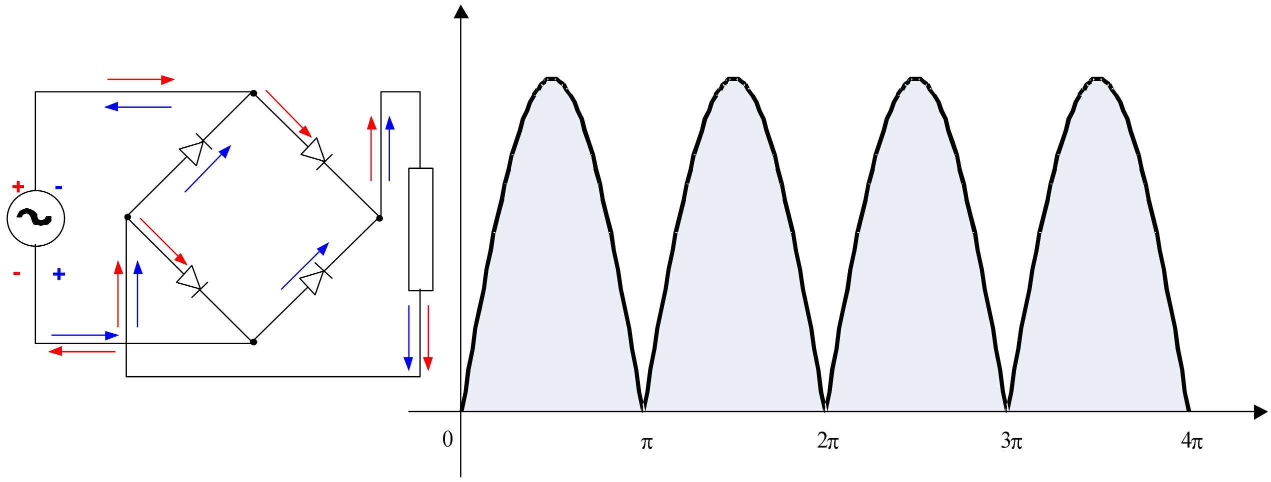
Elektrolitska srednja vrijednost izračunava se prema općem izrazu za ASR, ali se u relaciji uzima apsolutna trenutačna vrijednost:

$$Y_{sr_{el}} = \frac{|y_1| + |y_2| + |y_3| + \cdots\cdots + |y_n|}{n}\,. \tag{2-36}$$

Za vremenski promjenljivu veličinu to je:

$$Y_{sr_{el}} = \frac{1}{T}\int_0^T |y(t)|dt\,. \tag{2-37}$$

Slika 2.16 – Poluvalno ispravljena izmjenična struja



Slika 2.17 – Punovalno ispravljena izmjenična struja

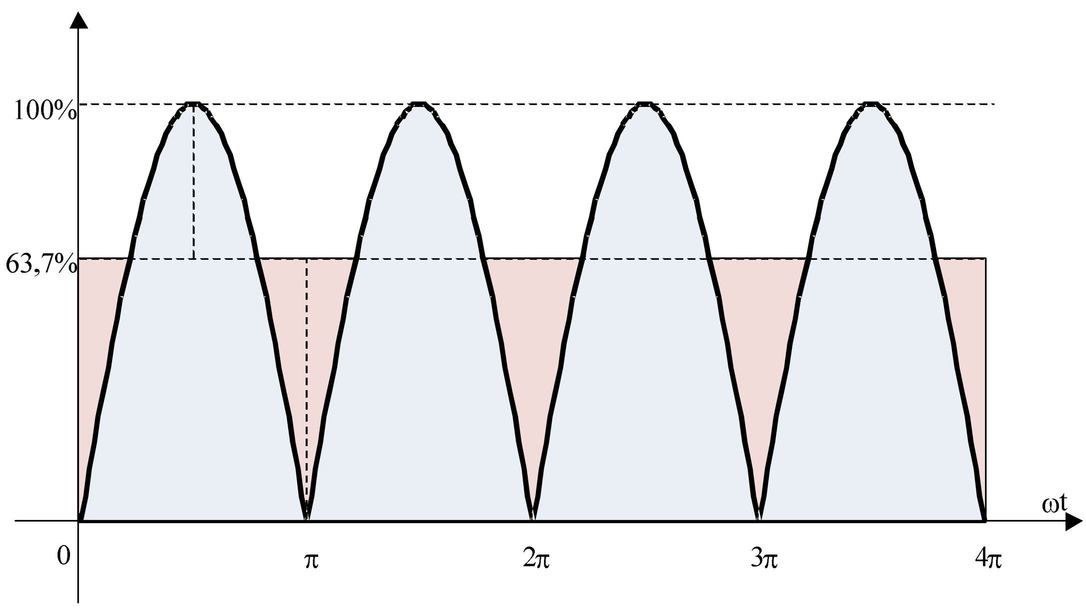
Za ispravljenu sinusoidnu struju dovoljno je uzeti u razmatranje samo jednu polovicu perioda T, jer je stvarni period polovica prijašnjega, pa je elektrolitska srednja vrijednost:

$$I_{sr_{el}} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} i(t)dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t)dt = -\frac{2I_m}{\omega T} \cos\omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \cdots\cdots = \frac{2I_m}{\pi} = 0{,}637 I_m \,. \qquad (2\text{-}38)$$

Isto vrijedi i za izmjenični napon:

$$U_{sr_{el}} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} u(t)dt = 0{,}637 U_m \,. \qquad (2\text{-}39)$$

Grafička interpretacija elektrolitske srednje vrijednosti prikazana je na *Slici 2.18*.

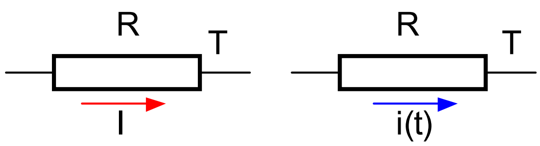


Slika 2.18 – Elektrolitska srednja vrijednost

2.4.3.Efektivna srednja vrijednost

Prethodno izneseni tipovi srednjih vrijednosti nisu pogodni za iskazivanje stvarnih fizikalnih procesa u krugovima izmjenične struje, a ne mogu se uzeti ni kao princip za mjerenje izmjeničnih veličina. Neki instrumenti, kao primjerice vršni voltmetri, mogu mjeriti amplitudu, ali se ona javlja samo dva puta u tijeku perioda. Stoga se instrumenti baždare tako da pokazuju kvadratni korijen prosjeka kvadrata (engl. *root mean square* – RMS), koji se naziva efektivna vrijednost. Ona omogućuje usporedbu s ekvivalentnim istosmjernim vrijednostima. U praksi je pogodno uspoređivati struje po njihovu toplinskom efektu. Toplinsko djelovanje ne ovisi o frekvenciji, a karakterizirano je onom energijom koja se troši na savladavanje otpora trošila.

Ako izmjenična struja prolazeći kroz otpornik otpora R razvija u vremenskom periodu T neku količinu topline $W_{\sim}$, onda se uvijek može odabrati takva istosmjerna struja koja će na tom istom otporniku u jednakom vremenu T razviti jednaku količinu toplinske energije $W_{=}$. Tada se može reći da su te dvije struje po svom toplinskom djelovanju jednake – *Slika 2.19*.



Slika 2.19 – Usporedba učinaka istosmjerne i izmjenične struje

<u>Definicija</u>: *Efektivnom srednjom vrijednosti izmjenične struje naziva se ona veličina istosmjerne struje koja je po svom toplinskom djelovanju jednaka razmatranoj izmjeničnoj struji.*

Efektivne se vrijednosti označuju velikim slovima *(U, I, E)* kao i odgovarajuće istosmjerne veličine. Opći izraz za efektivnu vrijednost dobije se, temeljem prethodne definicije, iz relacija za istosmjernu i izmjeničnu energiju:

$$W_{=} = I^2RT \quad , \quad W_{\approx} = \int_0^T i^2(t)Rdt \,. \tag{2-40}$$

Nakon izjednačavanja slijedi:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \,. \tag{2-41}$$

Za sinusoidnu struju $i = I_m sin\,\omega t$ efektivna vrijednost temeljem gornje relacije je:

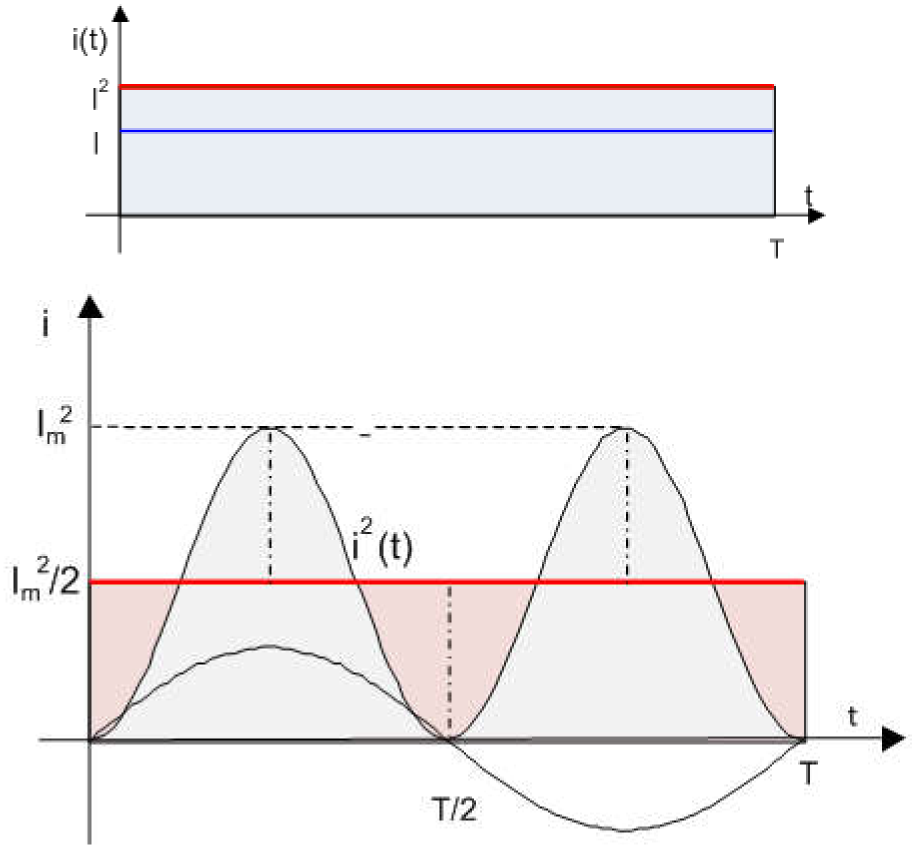
$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m{}^2 \, sin^2 \omega t dt} \,. \tag{2-42}$$

Uporabom poznate trigonometrijske transformacije: $sin^2\alpha = \frac{1-cos\,2\alpha}{2}$,

dobije se:

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}\int_0^T (1-cos2\omega t)dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T}\int_0^T dt - \frac{I_m^2}{2T}\int_0^T cos2\omega t dt} \,. \tag{2-43}$$

Budući da je aritmetička srednja vrijednost sinusne ili kosinusne funkcije unutar perioda T uvijek jednaka nuli, vrijednost drugog integrala u gornjem izrazu je nula, pa se konačno za efektivnu vrijednost struje (isto vrijedi i za efektivnu vrijednost napona) dobije: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.



Slika 2.20 – Određivanje efektivne srednje vrijednosti – grafički prikaz

Grafička interpretacija efektivne vrijednosti sinusoidne struje dana je na *Slici 2.20*.

Površina pravokutnika je I^2T, a vrijednost funkcije $i^2(t) = I_m^2 \sin^2 \omega t$ je $\frac{1}{2}I_m^2$. U vremenskom periodu T prosječna se vrijednost površine ispod kvadrata sinusoide može prikazati pravokutnikom ekvivalentne površine $\frac{1}{2} I_m^2 T$.

Izjednačavanjem pravokutnika dobije se:

$$I^2 \cdot T = \frac{1}{2} I_m^2 \cdot T \quad \Rightarrow \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \ . \tag{2-44}$$

U praksi se uvijek rabe efektivne vrijednosti izmjeničnih struja i napona. Instrumenti za mjerenje izmjeničnih veličina mjere upravo efektivne vrijednosti, a i električne karakteristike električnih uređaja izražene su u efektivnim vrijednostima.

Općenito, u svim slučajevima kada se navode vrijednosti struje i/ili napona, bez posebne napomene, radi se o efektivnim vrijednostima.

2.4.4. Tjemeni faktor, faktor oblika i srednji faktor

Maksimalna, aritmetička i efektivna srednja vrijednost nemaju nikakav definirani međuodnos. Odnos ovisi o vrsti razmatrane funkcije. Instrumenti koji su kalibrirani za strogo određeni oblik krivulje pokazuju lažne podatke kada se od tog oblika odstupi. Odstupanja se kvantificiraju faktorima:

Tjemeni faktor (sigma) $$\sigma = \frac{Tjemena\ vrij.}{Efektivna\ vrij.} = \frac{I_m}{I} = \frac{U_m}{U} \qquad (2\text{-}45)$$

Faktor oblika (ksi) $$\xi = \frac{Efektivna\ vrij.}{Srednja\ el.\ vrij.} = \frac{I}{I_{sr_{el}}} = \frac{U}{U_{sr_{el}}} \qquad (2\text{-}46)$$

Srednji faktor (zeta) $$\zeta = \frac{Srednja\ el.\ vrij.}{Tjemena\ vrij.} = \frac{I_{sr_{el}}}{I_m} = \frac{U_{sr_{el}}}{U_m}\ . \qquad (2\text{-}47)$$

Za sinusoidne struje je:

$$\sigma = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1,414 \qquad \xi = \frac{I}{I_{sr_{el}}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\pi}I_m} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \qquad \zeta = \frac{I_{sr_{el}}}{I_m} = \frac{\frac{2}{\pi}I_m}{I_m} = \frac{2}{\pi} = 0,637\ . \qquad (2\text{-}48)$$

Samo posebni instrumenti (engl. *True* RMS) pokazuju pravu efektivnu vrijednost različitih valnih oblika.

3. TROŠILO U KRUGU IZMJENIČNE STRUJE

Istosmjerne mreže su električni krugovi sastavljeni kao složene mreže izvora EMS-a i/ili strujnih izvora i različitih kombinacija otpornika. Kondenzatori kapacitivnosti C u takvim mrežama, po završetku prijelazne pojave, predstavljaju prekid strujnog kruga. Svitci induktivnosti L zanemariva otpora R predstavljaju kratki spoj, ako kroz njih teče istosmjerna struja. Izmjenične struje i naponi su vremenski promjenljive veličine koje uzrokuju sasvim drukčije ponašanje kondenzatora, svitka pa i otpornika pod određenim uvjetima. Stoga izmjenične mreže osim izvora sadrže i pasivne elemente koji predstavljaju otpor protjecanju izmjenične struje, a to su *djelatni*, *induktivni i kapacitivni* otpori.

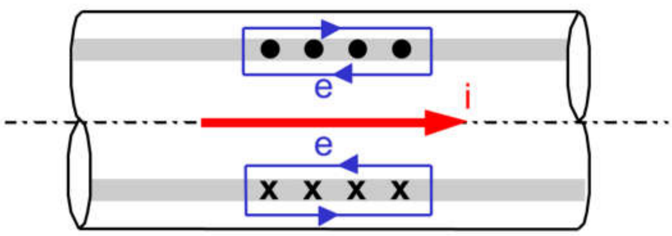
3.1. Djelatni otpor

Protjecanje struje kroz vodič izaziva gubitke energije zbog zagrijavanja vodiča. Otpor jednog te istog vodiča za izmjeničnu struju veći je nego za istosmjernu. *Omski otpor* je otpor kod protjecanja istosmjerne struje, a *djelatni (aktivni) otpor* je otpor kod protjecanja izmjenične struje.

Povišenje djelatnog otpora u odnosu na omski objašnjava se time što izmjenično elektromagnetsko polje izaziva u vodičima i oko njih niz fizikalnih pojava vezanih s dopunskim gubitcima energije.

- Istosmjerna struja je ravnomjerno raspoređena po poprečnom presjeku vodiča, tj. gustoća joj je konstantna. Izmjenična struja se neravnomjerno raspoređuje po poprečnom presjeku. Gustoća struje u središnjim dijelovima vodiča manja je nego u području uz površinu vodiča. Magnetsko polje proizvedeno izmjeničnom strujom generira elektromotornu silu koja stvara vrtložne struje, a one djeluju protiv uzroka koji ih je izazvao. Posljedica stvaranja vrtložnih struja je otiskivanje izmjenične struje prema površini vodiča. Ova efektivna redukcija površine kroz koju teče struja uzrokuje povećanje otpora. Fenomen se zove *površinski* ili *skin (koža) efekt*. Tendencija porasta otpora postaje jako izražena na višim frekvencijama *(*$f > 10^4$ Hz*)*, a kod ultravisokih frekvencija i otpor postaje ekstremno velik. Primjerice bakrena žica s promjerom od 1 mm za frekvenciju izmjenične struje od 1 MHz ima otpor četiri puta veći od otpora za istosmjernu struju.

  Prikaz skin efekta na segmentu vodiča dan je na *Slici 3.1*.



Slika 3.1 – Skin efekt na segmentu vodiča

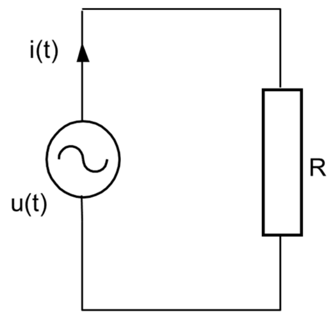
- Izmjenično magnetsko polje stvara vrtložne struje u kompaktnim vodljivim masama, kao što su svitci s feromagnetskim jezgrama, jezgre transformatora, elektromagneta i dr., što zbog zagrijavanja stvara energetske gubitke. U ekvivalentnim shemama ti se gubitci prikazuju kao dodatni gubitci na odgovarajućem djelatnom otporu.

- U feromagnetskim materijalima nastaju dopunski gubitci energije izazvani predmagnetiziranjem. To su gubitci zbog magnetske histereze, a tretiraju se kao povećanje djelatnog otpora materijala.
- Izmjenično električno polje uzrokuje preorijentaciju električnih dipola u dielektricima, tzv. električnu histerezu. Ona dovodi do zagrijavanja dielektrika i dopunskih gubitaka prikazanih preko pripadnog djelatnog otpora.

U općem slučaju smatra se da su djelatnim otporom uzeti u obzir svi nepovratni (ireverzibilni) procesi pretvaranja električne energije u toplinsku ili neki drugi oblik energije.

Pod djelatnim otporom ili rezistencijom razumijevamo onaj otpor koji ne stvara ni magnetsko ni elektrostatičko polje kada kroz njega teče struja. Takva otpora nema u praksi, ali mu se može dosta približiti, ako se ne radi s visokim frekvencijama izmjeničnih struja (do 300 Hz). Trošila koja se mogu smatrati čistim djelatnim otporima zanemarivih induktivnosti i kapacitivnosti jesu žarulje, uređaji za zagrijavanje, bifilarno motani žičani otpornici i dr.

Analizirat ćemo strujno/naponske odnose u krugu s djelatnim otporom R priključenim na izmjenični napon $u(t) = U_m \sin \omega t$, kao na *Slici 3.2*.

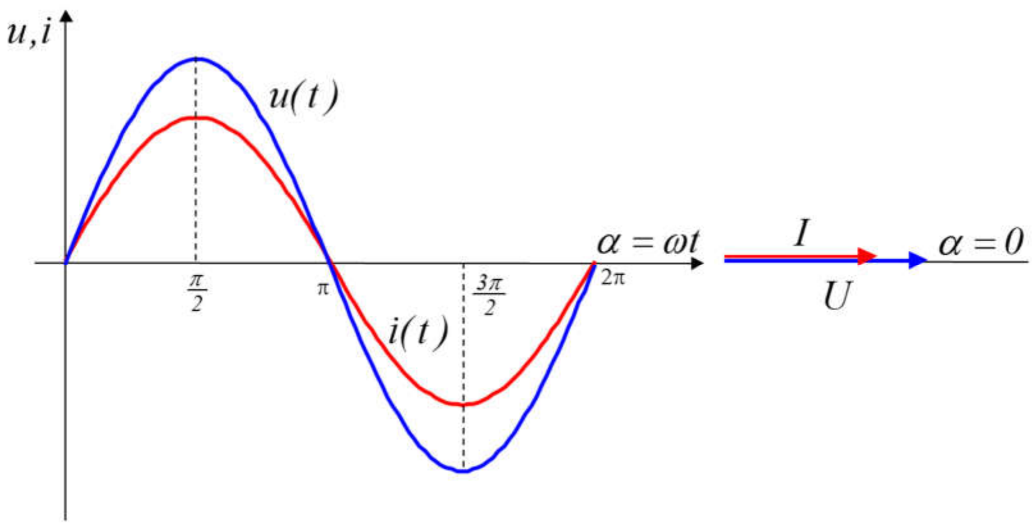


Slika 3.2 – Djelatni otpor u izmjeničnom krugu

Trenutačna vrijednost struje je:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = I_m \sin \omega t \,. \tag{3-1}$$

Valni oblici i pripadni fazorski dijagram prikazani su na *Slici 3.3*.



Slika 3.3 – Djelatni otpor – valni oblici i fazorski dijagram

Za iznose fazora struje i napona uzimaju se pripadne efektivne vrijednosti. Trenutačna struja je sinusoidna i jednake je frekvencije kao i priključeni napon. Fazni pomak između napona i struje je $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$. Fizikalna bit nepostojanja faznog pomaka u tomu je što se energija u krugu ne nagomilava, već se u potpunosti troši na pretvorbu u toplinu ili neki drugi oblik energije.

Ohmov zakon za efektivne vrijednosti struja i napona je:

$$I_m = \frac{U_m}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{R} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R} \;. \tag{3-2}$$

3.1.1. Snaga na djelatnom otporu (djelatna snaga)

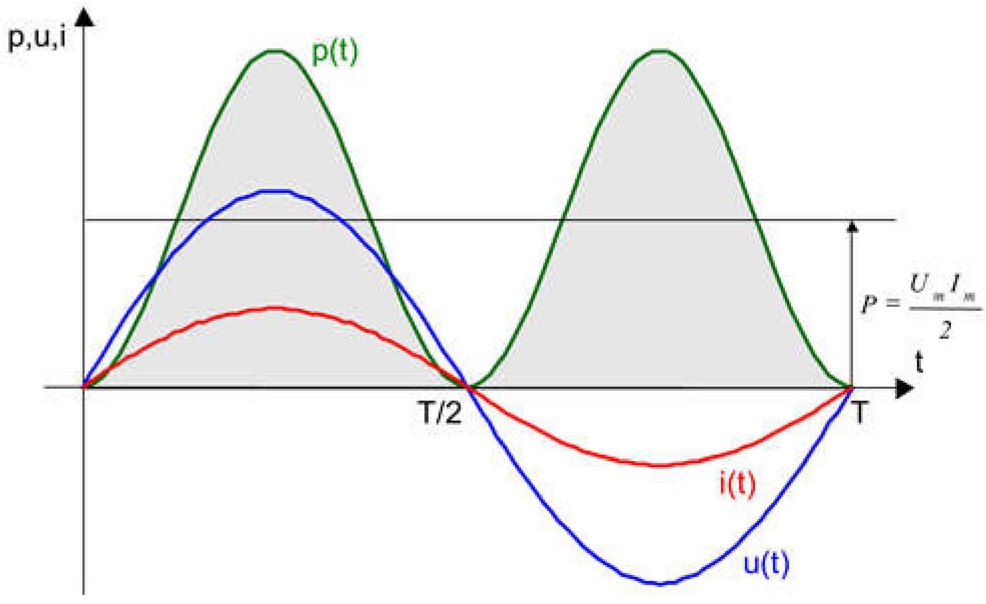
Budući da su napon i struja vremenski promjenljive funkcije, slijedi da je i trenutačna snaga također vremenski promjenljiva. Trenutačna snaga je:

$$p(t) = u \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t \;. \tag{3-3}$$

Uporabom trigonometrijske transformacije za kvadrat sinusne funkcije dobije se:

$$P = \frac{U_m I_m}{2}\left(1 - \cos 2\omega t\right) = UI\left(1 - \cos 2\omega t\right). \tag{3-4}$$

Krivulja trenutačnih vrijednosti snage uvijek je pozitivna i oscilira frekvencijom dvostruko većom od temeljne frekvencije ω, kao na *Slici 3.4*.



Slika 3.4 – Djelatni otpor – trenutačna snaga

Temeljem prethodno navedenoga može se zaključiti:

- zbog rotacije dvostrukom frekvencijom fazor snage ne može se crtati zajedno sa strujom i naponom u fazorskom dijagramu;
- dobivena snaga može biti samo pozitivna i naziva se *aktivna ili djelatna snaga*;
- kada su napon i struja jednaki nuli, energija ne dospijeva u krug ($p = 0$);
- kada struja i napon dosegnu vršnu vrijednost, trenutačna snaga je najveća: $p = P_m = U_m I_m$;

- energija se prinosi trošilu neravnomjerno, u impulsima dvostruke frekvencije u odnosu na priključeni napon;
- sva se energija na djelatnom otporu pretvara u toplinsku – proces je nepovratan (ireverzibilan);
- između generatora i trošila nema oscilacija energije.

Ireverzibilni procesi nisu karakteristični samo za pretvorbu električne u toplinsku energiju, već i u druge vidove energije: mehaničku, kemijsku, energiju zračenja i dr. Zato se svaki krug u kojem se vrše slični procesi može energetski razmatrati krugom s djelatnim otporom.

Srednja vrijednost snage je:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{U_mI_m}{2T}\int_0^T\left(1-cos\,2\omega t\right)dt=\frac{U_mI_m}{2T}\left(t-\frac{sin2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_0^T= \cdots\cdots =\frac{U_mI_m}{2}=\frac{U_m}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_m}{\sqrt{2}}=U\cdot I\ . \tag{3-5}$$

Srednja vrijednost djelatne snage u krugu s djelatnim otporom jednaka je produktu efektivnih vrijednosti struje i napona. Jedinica za mjerenje djelatne snage je vat (W).

Zaključak: U krugu s djelatnim otporom struja je u fazi s priključenim naponom. Sva energija pretvara se u toplinsku ili neke druge oblike energije. Nema oscilacija između izvora i trošila.

3.2. Induktivni otpor u izmjeničnom krugu

Induktivnost je temeljna vrijednost svakog svitka. Svitak se formira od namotaja vodljive (obično bakrene) žice, pri čemu broj namotaja N, duljina svitka l, presjek njegove jezgre S i permeabilnost μ_r materijala od kojega je napravljena jezgra mogu varirati u širokim granicama, ovisno o željenoj vrijednosti induktivnosti L:

$$L=\frac{N^2\mu_0\mu_rS}{l}\ . \tag{3-6}$$

Dvije su temeljne skupine svitaka:

- zračni svitci
- svitci s magnetskom jezgrom (prigušnice).

Izbor materijala i konstrukcija magnetske jezgre bitno utječu na karakteristike svitka. Realni svitak ima određeni djelatni otpor namotaja, a kada sadrži magnetsku jezgru dodatno se trebaju uzeti u obzir gubitci koji nastaju u jezgri i koji uzrokuju nelinearne strujno-naponske odnose.

Svitci su pasivni elementi izmjeničnih krugova s vrlo širokim mogućnostima uporabe u elektrotehnici. Primjerice služe za:

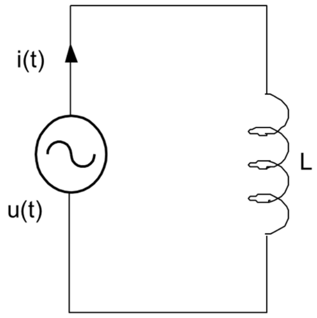
- generiranje induciranih napona (transformator, „bobina" u automobilu)
- generiranje magnetskih sila (električni motor, relej, kontaktori)
- filtriranje signala (NF filtri, VF filtri, pojasni filtri)
- skladištenje magnetske energije
- stvaranje električnog otpora.

Prigušnice su svitci velikoga induktivnog otpora. Primjenjuju se u različitim vrstama električnih filtara koji osiguravaju raspodjelu struje ovisno o frekvenciji.

Niskofrekvencijske (NF) prigušnice imaju veliku induktivnost od nekoliko ili desetak H, a stvaraju veliki induktivni otpor već pri niskim frekvencijama. Veliki se otpor u ovom slučaju postiže tako da se svitak konstruira s velikim brojem namotaja *(L ~ N^2)* i sa zatvorenom magnetskom jezgrom *(μ_r >>)*.

Visokofrekvencijske prigušnice (VF) imaju malu induktivnost (mH, μH) i predstavljaju veliki induktivni otpor samo za visoke frekvencije. Izrađuju se bez jezgre ili sa specijalnom jezgrom (feriti).

Analizu strujno/naponskih odnosa u krugu sa svitkom zanemariva djelatnog otpora $R \simeq 0$ provest ćemo za krug prema *Slici 3.5*.



Slika 3.5 – Induktivni otpor u izmjeničnom krugu

Pod djelovanjem priključenog napona kroz namotaje svitka teče izmjenična struja stvarajući promjenljivo magnetsko polje. Ako svitak nema feromagnetsku jezgru, magnetski tok mijenja se sinusoidno i u fazi je sa strujom koja ga je izazvala. Obuhvaćajući namotaje, magnetski tok inducira u svakom od njih EMS samoindukcije, koji je posljedica strujnih promjena. Inducirani EMS e razmjeran je prema zakonu elektromagnetske indukcije induktivnosti svitka i brzini promjene struje:

$$e_L = -N\frac{d\varphi}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \tag{3-7}$$

Za $i = I_m \sin\omega t$ dobije se:

$$e_L = -L\frac{d}{dt}\left(I_m \sin\omega t\right) = -L\omega I_m \cos\omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_{L_m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{3-8}$$

Priključeni napon mora savladati samo EMS samoindukcije, jer je djelatni otpor zanemariv. U svakom trenutku priključeni napon i EMS samoindukcije jednaki su po iznosu i suprotno usmjereni, pa priključeni napon fazno prethodi struji za 90 °:

$$u_L = -e_L = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{L_m} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{3-9}$$

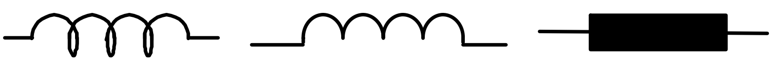
Maksimalni napon na induktivnosti je $U_{L_m} = E_{L_m} = \omega L I_m$.

Dijeljenjem s $\sqrt{2}$ dobiju se efektivne vrijednosti U_L i I, a njihov kvocijent ima dimenziju otpora:

$$\frac{U_L}{I} = \omega L = X_L \quad \left[\frac{1}{s}\cdot\frac{Vs}{A} = \frac{V}{A} = \Omega\right]. \tag{3-10}$$

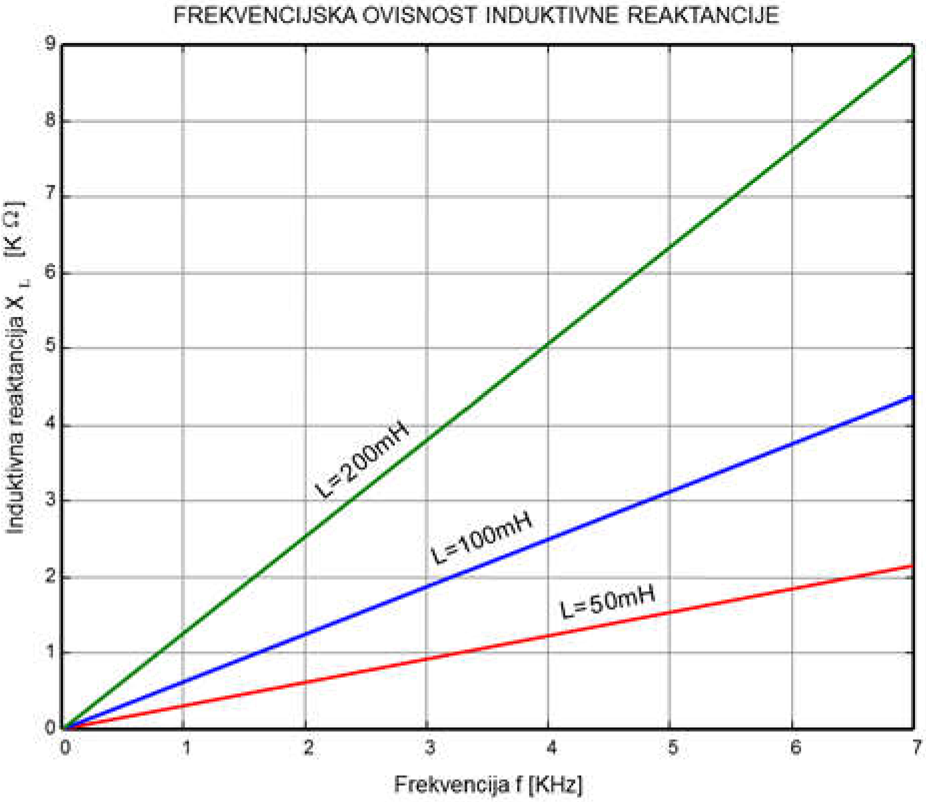
U krugu izmjenične struje s idealnim svitkom stvara se otpor induktivnog karaktera. Naziva se *induktivni otpor* ili *induktivna reaktancija*. Označuje se sa X_L.

Simboli za X_L prikazani su na *Slici 3.6*.



Slika 3.6 – Oznake induktivnog otpora

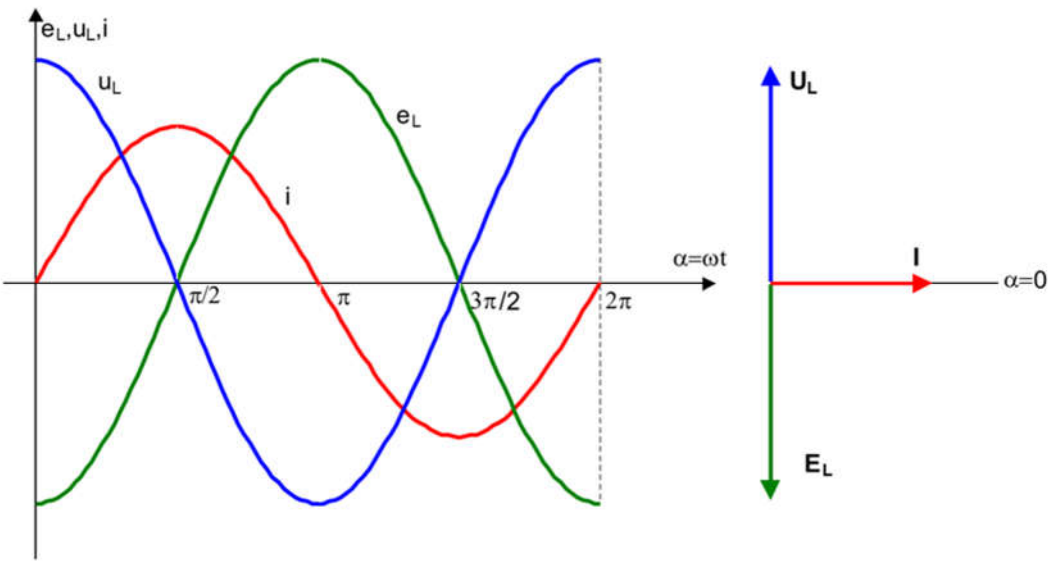
Ovisnost induktivnog otpora o frekvenciji je linearna. Na *Slici 3.7* prikazana je ovisnost o frekvenciji triju različitih induktivnih otpora, pri čemu je $L_1 < L_2 < L_3$. Za frekvenciju $f = 0$ (istosmjerna struja) induktivni je otpor $X_L = 0$, pa se idealni svitak ponaša kao kratki spoj. Za vrlo visoke frekvencije induktivni otpor postaje vrlo velik, pa već i kratki segment vodiča može izazivati veliki otpor protjecanju visokofrekvencijske struje.



Slika 3.7 – Frekvencijska ovisnost induktivnog otpora

Ohmov zakon primijenjen na krug s induktivnim otporom je: $I = \dfrac{U}{X_L}$.

Valni i pripadni fazorski dijagram kruga prikazani su na *Slici 3.8*.



Slika 3.8 – Induktivni otpor – valni oblici i fazorski dijagram

EMS samoindukcije suprotstavlja se i porastu i opadanju struje, odnosno nastoji zadržati njezinu prethodnu vrijednost. Predznak EMS samoindukcije stoga je suprotan predznaku struje. Izlazi kako EMS samoindukcije fazno zaostaje za strujom za π/2. Priključeni napon je u protufazi u odnosu na EMS samoindukcije, pa prethodi struji za π/2. To se objašnjava upravo djelovanjem elektromotorne sile samoindukcije zbog koje zakašnjava promjena struje pri promjenama priključenog napona. Stvarni fizikalni uzrok je u izgradnji i razgradnji magnetskog polja svitka.

3.2.1. Snaga na induktivnom otporu

Za poznate trenutačne vrijednosti struje i napona na induktivnom otporu:

$$i(t) = I_{max} sin\omega t \qquad , \qquad u(t) = U_{max}\, sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3-11}$$

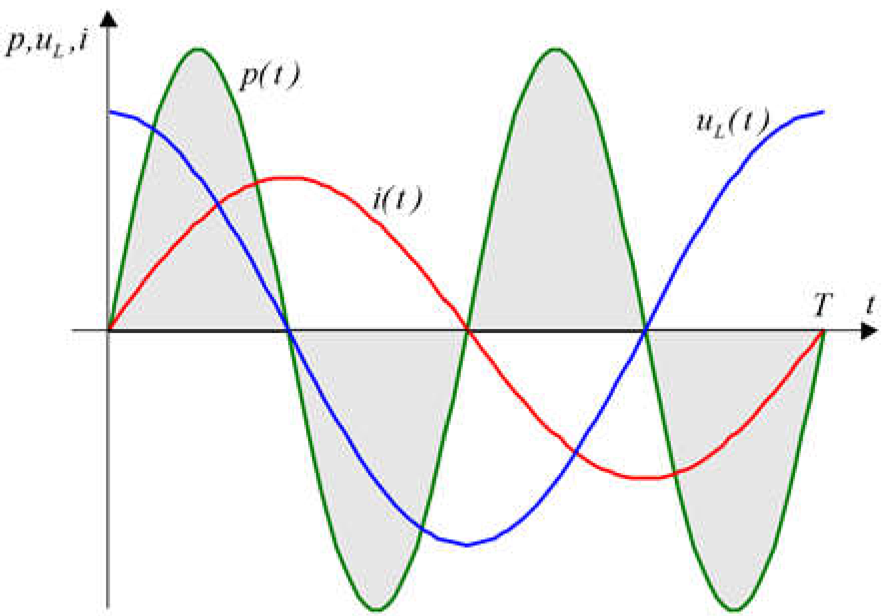
trenutačna snaga je:

$$p(t) = U_{max} I_{max} sin\omega t \cdot sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{max} I_{max} sin\omega t \cdot cos\,\omega t\,. \tag{3-12}$$

Uporabom transformacije $sin 2\alpha = 2 sin\alpha cos\alpha$ dobije se:

$$p = \frac{U_m I_m}{2} sin\, 2\omega t = UI\, sin\, 2\omega t\,. \tag{3-13}$$

Trenutačna snaga mijenja se po sinusoidnom zakonu, ali s dvostrukom frekvencijom. Valni dijagram snage prikazan je na *Slici 3.9*.



Slika 3.9 – Induktivni otpor – trenutačna snaga

U prvoj četvrtini perioda trenutačna snaga ima pozitivan predznak, jer matematički predstavlja produkt napona i struje koji su istog (pozitivnog) smjera. Fizikalno gledano struja u svitku raste, pa raste i energija magnetskog polja svitka. Energija se prostire od izvora ka trošilu. U drugoj četvrtini perioda struja je pozitivna, a napon negativan, pa trenutačna snaga ima negativan predznak. Kako se struja smanjuje, razgrađuje se magnetsko polje svitka i energija se vraća generatoru. Negativan predznak snage upućuje na protok energije usmjeren od svitka prema generatoru. U trećoj četvrtini perioda struja ponovno raste, ali sada u suprotnom smjeru. Kako je i trenutačni napon suprotnog smjera, snaga i energija su pozitivne, tj. energija se predaje trošilu. U posljednjoj četvrtini perioda energija se ponovno vraća generatoru.

Kako u krugu nema djelatnog otpora, nema ni djelatnih gubitaka snage. Po zakonu o očuvanju energije energija koju generator predaje svitku mora biti vraćena natrag u generator. Srednja djelatna snaga u tijeku jednog perioda mora biti jednaka nuli, što i matematički slijedi iz izraza:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T UI\sin 2\omega t dt = \frac{UI}{T}\cdot\left(-\frac{1}{2\omega}\right)\cos 2\omega t\Big|_0^T = 0\,. \tag{3-14}$$

Energetski gledano proces izmjene energije u krugu s čistim induktivnim otporom je reverzibilan. U krugu se vrše oscilacije energije između generatora i magnetskog polja svitka bez gubitaka. Snagu u krugu nazivamo *induktivnom jalovom snagom* Q_L i mjerimo je u volt-amperima reaktivnim VAr:

$$Q_L = U_L I (VAr)\ . \tag{3-15}$$

<u>*Zaključak*</u>: U krugu s čistim induktivnim otporom struja fazno zaostaje za priključenim naponom za 90°. Cjelokupna energija oscilira između generatora i magnetskog polja svitka. U krugu nema gubitaka energije.

Energija nagomilana u magnetskom polju u četvrtini perioda je:

$$W_L = \int_0^{T/4} p_L(t)dt = \int_0^{T/4} UI\sin 2\omega t dt = UI\cdot\left(-\frac{1}{2\omega}\right)\cos 2\omega t\Big|_0^{T/4} = \ldots\ldots = \frac{UI}{\omega}\,. \tag{3-16}$$

Kako je $U = IX_L = I\omega L \quad i \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$,

slijedi:

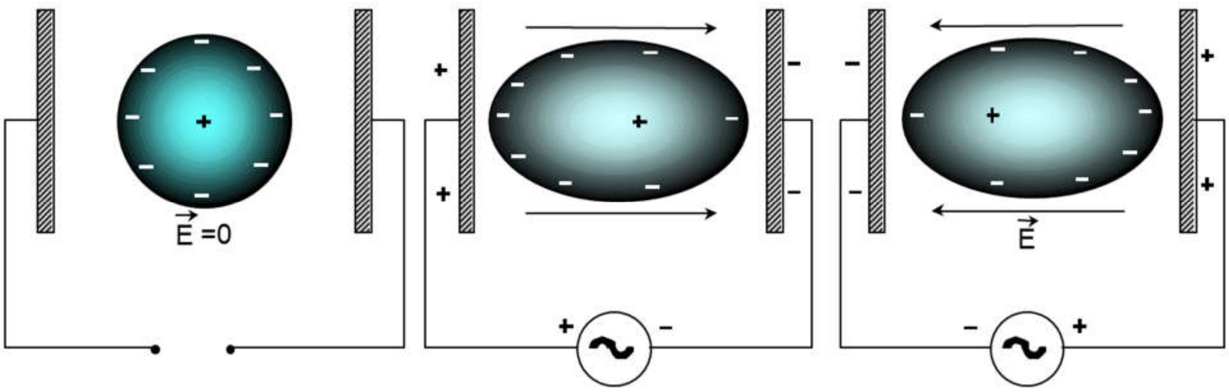
$$W_L = I^2 L = \frac{1}{2} L I_m^2\ . \tag{3-17}$$

3.3. Kapacitivni otpor u izmjeničnom krugu

Pored djelatnih otpora kondenzatori su najčešće korištene pasivne komponente izmjeničnih krugova. Uporaba im je vrlo raznovrsna. Među ostalim služe za:

- odvajanje istosmjerne komponente od izmjenične komponente struje
- ostvarivanje faznog pomaka napona i struje
- kratko spajanje izmjeničnih napona
- konstrukciju filtara i rezonancijskih krugova
- pohranu električne energije
- realizaciju vremenskog kašnjenja.

Za istosmjernu struju po završetku kratkotrajne prijelazne pojave kondenzator postaje mjesto prekida strujnog kruga. Kako bi se uspostavio stalan tok struje, mora postojati zatvoreni strujni krug. Za vremenski promjenljiv napon izvora krug se zatvara preko pomačne struje (dielektrične struje), koja predstavlja oscilacijsko kretanje vezanih naboja dielektrika pod djelovanjem izmjeničnoga električnog polja, kao što je to prikazano na *Slici 3.10*.

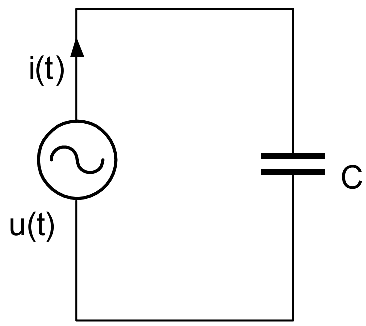


Slika 3.10 – Oscilacijsko kretanje naboja dielektrika

Kad nije priključen napon, centri pozitivnog i negativnog naboja atoma dielektrika se poklapaju. Međutim, kada je na krug narinut izmjenični izvor, jezgre atoma pomiču se u smjeru djelovanja električnog polja, a putanje elektrona eliptično se izdužuju u suprotnom smjeru. Dakle, pomačna struja opisuje se kao oscilacijsko kretanje jezgara atoma i periodična deformacija putanja elektrona u ritmu narinutih promjena napona izvora. Deformacije su „elastične" (dielektrik se vraća u stacionarno stanje kada nije priključen električni izvor) sve dok se ne prijeđe granična vrijednost jakosti električnog polja. Tada dolazi do proboja dielektrika (plastična deformacija). Kondenzator gubi svoju funkciju jer je dielektrik nepovratno uništen.

Kondenzator se periodično puni pri povećanju, odnosno prazni pri smanjenju napona. Izmjenična struja je, fizikalno gledano, struja punjenja i pražnjenja kondenzatora, a „zatvara" se preko polariziranih naboja u dielektriku.

Shema kruga s kondenzatorom kapacitivnosti C bez gubitaka ($R_c \approx 0$) prikazana je na *Slici 3.11*.



Slika 3.11 – Kapacitivni otpor u izmjeničnom krugu

Za veličinu struje bitna je brzina promjene napona izvora dU/dt. Isto tako veličina struje ovisi i o kapacitivnosti kondenzatora C, jer se s povišenjem kapacitivnosti povećava i sposobnost gomilanja naboja na njemu. Kako je struja određena vremenskim protokom naboja, ona mora biti proporcionalna i kapacitivnosti kondenzatora. Iz $dq = Cdu = idt$ dobije se $i_C = C\dfrac{du}{dt}$.

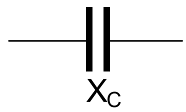
Za slučaj narinutog izmjeničnog napona $u = U_m sin\omega t$ trenutačna struja mu prethodi za 90 ° jer je:

$$i_C = C\frac{d}{dt}\left(U_m \sin\omega t\right) = U_m \omega C \cos\omega t = U_m \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_{Cm} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3\text{-}18)$$

Maksimalna struja kroz kondenzator je $I_{C_m} = \omega C U_m$.
Dijeljenjem s $\sqrt{2}$ dobiju se efektivne vrijednosti U i I_C, a njihov kvocijent ima dimenziju otpora:

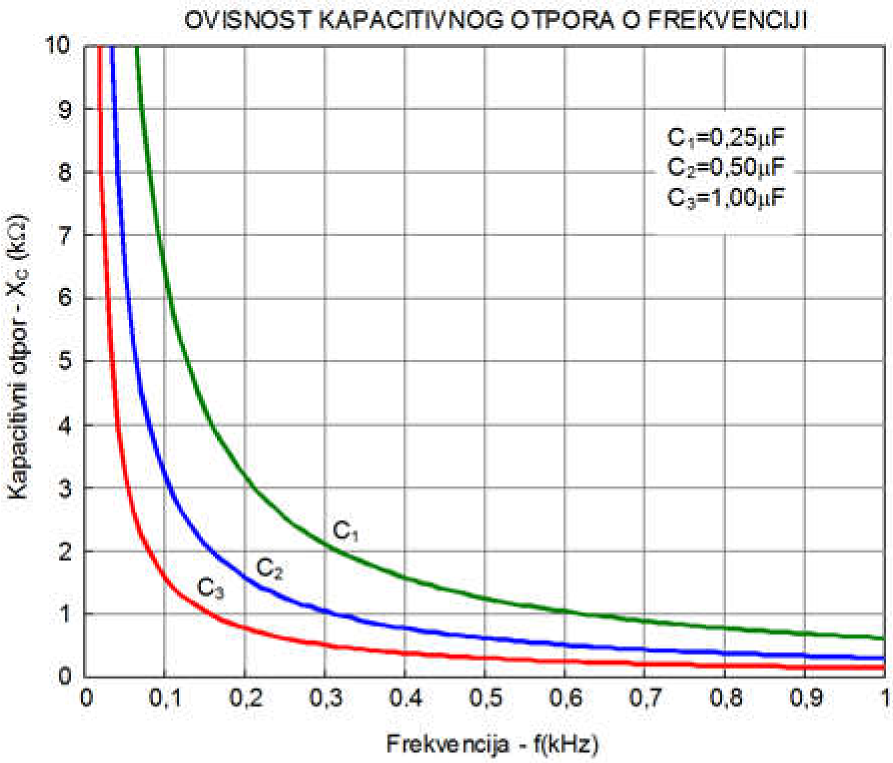
$$\frac{U}{I_C} = \frac{1}{\omega C} = X_C \quad \left[\frac{1}{s^{-1}\dfrac{As}{V}} = \frac{V}{A} = \Omega\right]. \qquad (3\text{-}19)$$

U krugu izmjenične struje s idealnim kondenzatorom stvara se otpor kapacitivnog karaktera. Naziva se *kapacitivni otpor* ili *kapacitivna reaktancija*. Označuje se sa X_C, a odgovarajući simbol dan je na *Slici 3.12*.



Slika 3.12 – Oznaka kapacitivnog otpora

Kapacitivni otpor je suprotstavljanje kondenzatora protoku izmjenične struje koje je obrnuto razmjerno frekvenciji i kapacitivnosti kondenzatora. Frekvencijska ovisnost kapacitivnog otpora oblika je hiperbole, što je prikazano na konkretnom primjeru triju različitih kondenzatora na *Slici 3.13*.

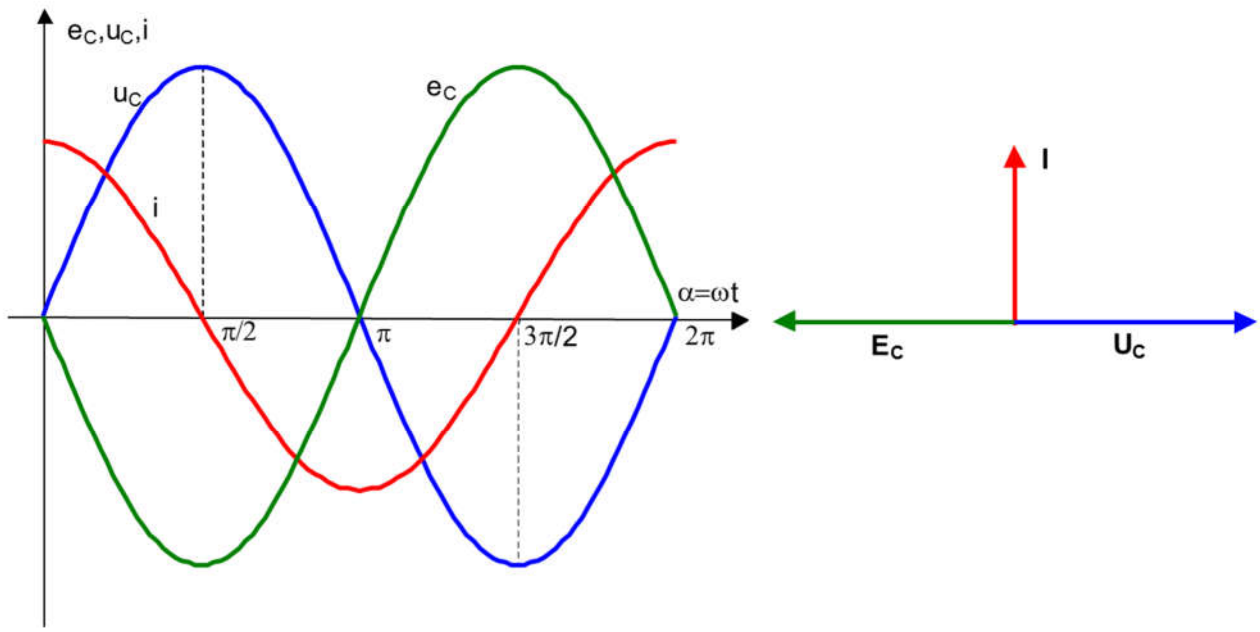


Slika 3.13 – Frekvencijska ovisnost kapacitivnog otpora

Za frekvenciju f = 0 (istosmjerna struja) $X_C \to \infty$, pa je na mjestu idealnog kondenzatora prekid strujnog kruga. Za vrlo visoke frekvencije kapacitivni otpor postaje vrlo malen, pa se za ultravisoke frekvencije ponaša gotovo kao kratki spoj.

Ohmov zakon primijenjen na krug s kapacitivnim otporom: $I_C = \dfrac{U}{X_C}$.

Valni i pripadni fazorski dijagram kruga s kapacitivnim otporom prikazan je na *Slici 3.14*.



Slika 3.14 – Kapacitivni otpor – valni oblici i fazorski dijagram

Referentna vrijednost je priključeni izmjenični napon. Struja kroz kondenzator fazno mu prednjači za $\pi/2$. EMS kondenzatora je u protufazi s priključenim naponom: $e_C = -u = E_{C_m}\sin(\omega t + \pi)$.

Napon $U_C = I_C X_C$, koji se troši na savladavanje kapacitivnog otpora, jest kapacitivni pad napona.

3.3.1. Snaga na kapacitivnom otporu

U krugu s kondenzatorom zanemarivih gubitaka strujni val prethodi naponskomu za π/2:

$$u_C(t) = U_{Cmax} sin\omega t \qquad , \qquad i_C(t) = I_{Cmax}\, sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{3-20}$$

pa je trenutačna snaga:

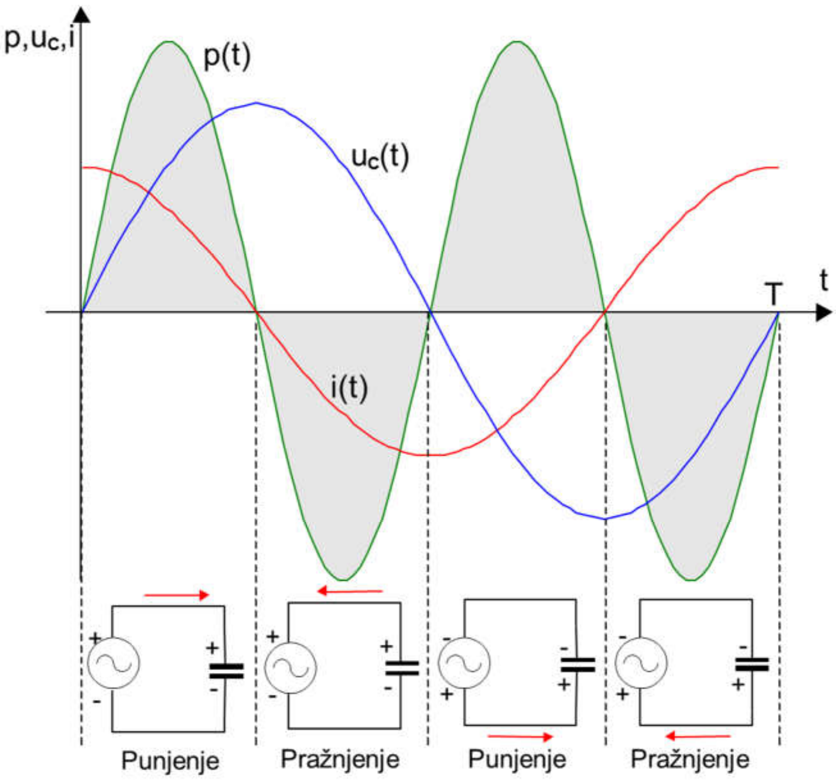
$$p(t) = U_{Cmax} I_{Cmax} sin\omega t \cdot sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cmax} I_{Cmax} sin\omega t \cdot cos\,\omega t = U_C I_C\, sin\, 2\omega t\,. \tag{3-21}$$

Trenutačna snaga mijenja se opet po sinusoidnom zakonu s dvostrukom frekvencijom.

U prvoj i trećoj četvrtini perioda kondenzator se puni, jer raste napon na njemu u pozitivnom (I. četvrtina), odnosno negativnom smjeru (III. četvrtina). Kondenzator uzima energiju s izvora. Trenutačna energija i snaga u oba je slučaja pozitivna (U_C i I_C imaju isti predznak), jer se prostire s izvora na trošilo (kondenzator) i nagomilava se u njegovu električnom polju. U drugoj i četvrtoj četvrtini perioda kondenzator se prazni, pa napon na njemu opada. Kondenzator vraća energiju natrag u generator razgrađujući pri tomu vlastito električno polje, pa je protok energije i snage negativan (U_C i I_C imaju suprotan predznak). Kako u krugu nema djelatnog otpora, nema ni djelatnih gubitaka snage.

Kao i u slučaju induktivnog otpora, sva energija koju generator predaje kondenzatoru mora biti vraćena natrag u generator. Srednja djelatna snaga u tijeku jednog perioda mora biti jednaka nuli.

Opisani proces može se pratiti na valnom dijagramu snage prema *Slici 3.15*.



Slika 3.15 – Kapacitivni otpor – trenutačna snaga

Proces izmjene energije u krugu s čistim kapacitivnim otporom je reverzibilan. U krugu se vrše oscilacije energije između generatora i električnog polja kondenzatora bez gubitaka. Snagu u krugu nazivamo *kapacitivnom jalovom snagom* Q_C i mjerimo je u volt-amperima reaktivnim VAr: $Q_C = U_C I_C (VAr)$.

<u>*Zaključak*</u>: U krugu s kondenzatorom bez gubitaka struja prethodi priključenom naponu za 90 °. Jalova energija oscilira između generatora i električnog polja kondenzatora. U krugu nema gubitaka energije. Energija nagomilana u električnom polju u četvrtini perioda (punjenje kondenzatora):

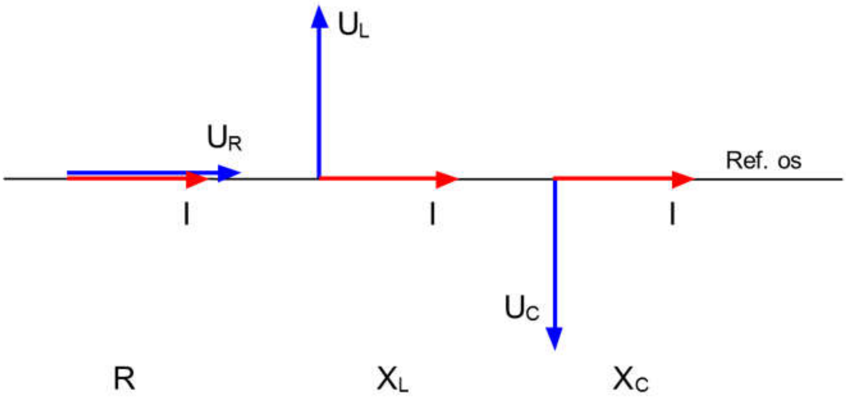
$$W_C = \int_0^{T/4} p_C(t)dt = \int_0^{T/4} UI \sin 2\omega t dt = ... = \frac{UI}{\omega} . \tag{3-22}$$

Kako je $I = \frac{U}{X_C} = U\omega C \quad i \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, slijedi:

$$W_C = U^2 C = \frac{1}{2} C U_m^2 . \tag{3-23}$$

3.4. Mješoviti spojevi u krugovima izmjenične struje

Skupni pregledan prikaz strujno-naponskih fazorskih dijagrama pasivnih elemenata izmjeničnih krugova dan je na *Slici3.16*.

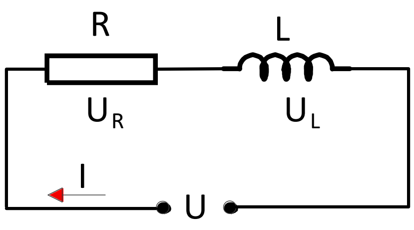


Slika 3.16 – Fazorski dijagrami pasivnih elemenata R, X_L i X_C

Analiza svih kombinacija serijskih i paralelnih spojeva pasivnih elemenata može se primijeniti na postavljanje ekvivalentnih shema sklopova i uređaja izmjenične struje, kao i na rješavanje složenih izmjeničnih krugova.

3.4.1. Serijski spoj djelatnog i induktivnog otpora

Realni svitak bez feromagnetske jezgre (zračni svitak) ima pored induktivnoga i nezanemariv djelatni otpor namotaja. Ekvivalentna shema je serijski R - X_L spoj – *Slika 3.17*.

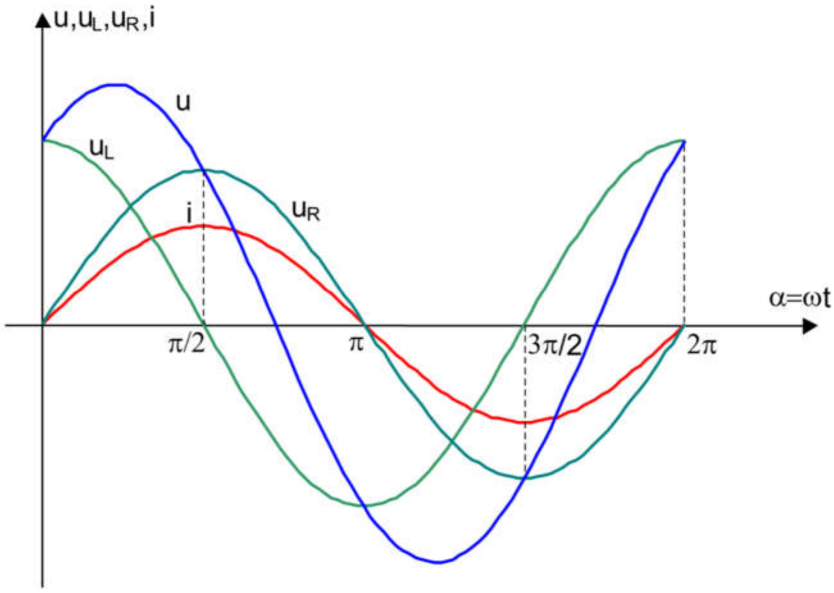


Slika 3.17 – Serijski spoj djelatnog i induktivnog otpora

Za serijski krug struja $i = I_m \sin \omega t$ je referentna vrijednost. Trenutačne vrijednosti napona u krugu su:

$$u_R = U_{R_m} \sin \omega t$$
$$u_L = U_{L_m} \sin\left(\omega t + 90^0\right) \qquad (3\text{-}24)$$
$$u = U_m \sin\left(\omega t + \varphi\right) \; .$$

Ulazni napon fazno prethodi struji za neki kut φ, koji ovisi o međusobnom odnosu aktivnog i induktivnog otpora: $0 \leq \varphi \leq 90^0$. Valni oblici struje i napona prikazani su na *Slici 3.18*. Ukupni napon je zbroj trenutačnih vrijednosti u_R i u_L.

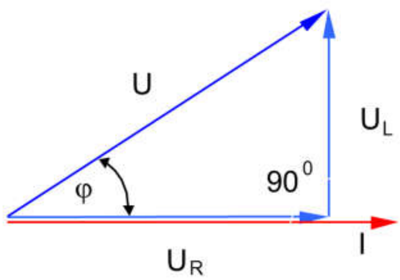


Slika 3.18 – Serijski R-X_L spoj – valni oblici

Prikaz preko trenutačnih vrijednosti postaje kompliciran i nepregledan već i za jednostavni serijski spoj. Prikladniji su prikazi pomoću pripadnih fazorskih dijagrama. Za efektivnu vrijednost struje I efektivne vrijednosti padova napona su:

$$U_R = IR$$
$$U_L = IX_L \ . \qquad (3\text{-}25)$$

Ti se naponi ne zbrajaju algebarski kao kod istosmjernih struja, već se simbolički tretiraju kao fazori. Za jakost struje odabranu kao referentni fazor dobije se fazorski dijagram napona i struja prema *Slici 3.19*.

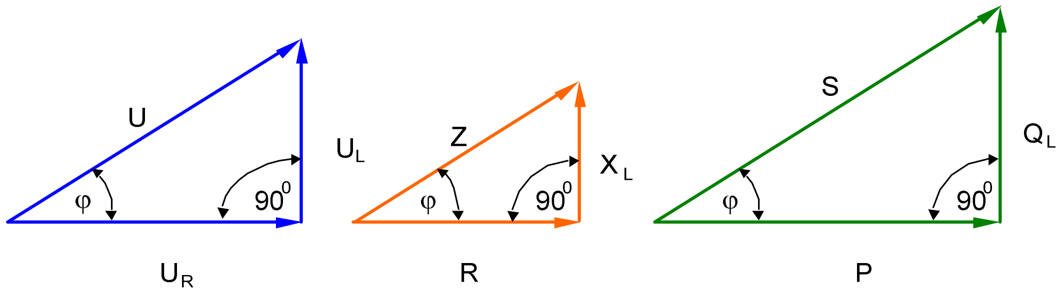


Slika 3.19 – Serijski R-X_L spoj – fazorski dijagram

Ukupan napon je hipotenuza trokuta napona:

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \ . \qquad (3\text{-}26)$$

Dijeljenjem svih stranica trokuta napona s konstantnom strujom I dobije se trokut otpora, a množenjem sa I trokut snaga, kao na *Slici 3.20*. Fazni odnosi u svim se trima slučajevima ne mijenjaju, jer se množenjem i dijeljenjem sa I proporcionalno mijenjaju sve stranice trokuta napona.



Slika 3.20 – Serijski R-X_L spoj – trokut napona, otpora i snaga

Komponente trokuta otpora su:

$R = \frac{U_R}{I}$ djelatni ili aktivni otpor (rezistencija)

$X_L = \frac{U_L}{I}$ induktivni otpor (induktivna reaktancija)

$Z = \frac{U}{I}$ ukupni ili prividni otpor (impedancija).

Iz trokuta otpora impedancija kruga je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}\,. \qquad (3\text{-}27)$$

Ohmov zakon za zadani krug glasi:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}\,. \qquad (3\text{-}28)$$

Fazni se kut može odrediti neposredno iz fazorskog dijagrama ako se u mjerilu ucrtaju sve veličine. Jednostavnije je fazni kut izraziti analitički pomoću neke od trigonometrijskih funkcija. Iz trokuta otpora dobije se:

$$\varphi = arccos\,\frac{R}{Z} = arcsin\,\frac{X_L}{Z} = arctg\,\frac{X_L}{R}\,. \qquad (3\text{-}29)$$

Trenutačna snaga je:

$$p = ui = U_m I_m\, sin\,\omega t \cdot sin\left(\omega t + \varphi\right). \qquad (3\text{-}30)$$

Valni dijagram snage prikazan je na *Slici 3.21*. Električna energija predana od izvora dijelom se pretvara u toplinsku na djelatnom otporu, a dijelom oscilira između generatora i magnetskoga polja svitka. Fazni kut φ odgovara onom dijelu perioda u tijeku kojeg je trenutačna snaga negativna, tj. vraća se u generator. Što je fazni pomak veći, to se manje svrsishodno iskorištava energija generatora.

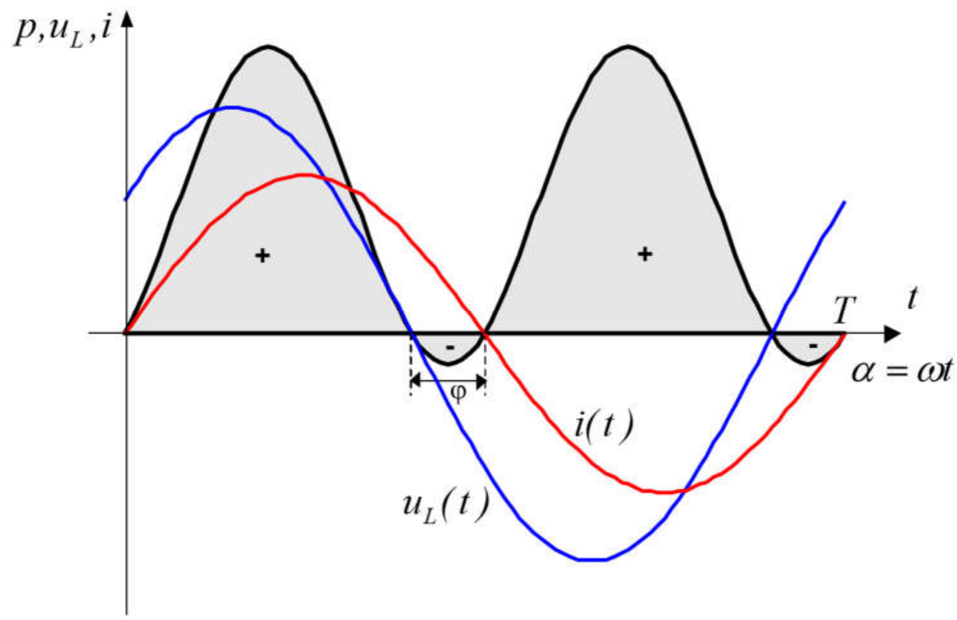
Ireverzibilni proces pretvaranja električne energije u toplinsku opisuje se djelatnom snagom $P = U_R I$.

Kako je iz trokuta napona $U_R = U\,cos\,\phi$, dobije se:

$$P = UI\,cos\,\varphi\ (W)\,. \qquad (3\text{-}31)$$

Jalova snaga Q_L karakterizira oscilacije između generatora i magnetskoga polja svitka:

$$Q_L = U_L I = UI \sin\varphi \ (VAr_{ind}) . \tag{3-32}$$



Slika 3.21 – Serijski R-X$_L$ spoj – trenutačna snaga

Ukupna ili prividna snaga *S* uzima u obzir ireverzibilne gubitke i reverzibilni proces oscilacija. Jednaka je geometrijskom zbroju aktivne i reaktivne snage, a mjeri se u VA.
Međusobni odnosi snaga iz trokuta snaga su:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(UI\cos\varphi)^2 + (UI\sin\varphi)^2} = UI \quad , \quad Q = S\sin\varphi \quad , \quad P = S\cos\varphi \ . \tag{3-33}$$

Također vrijedi:

$$P = I^2 R = \frac{U_R^2}{R} \quad ; \quad Q = I^2 X_L = \frac{U_L^2}{X_L} \quad ; \quad S = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} . \tag{3-34}$$

Aktivna snaga, uz postojanje faznog pomaka, može biti manja ili najviše jednaka prividnoj snazi. Omjer ovih snaga naziva se faktorom snage $cos\varphi$:

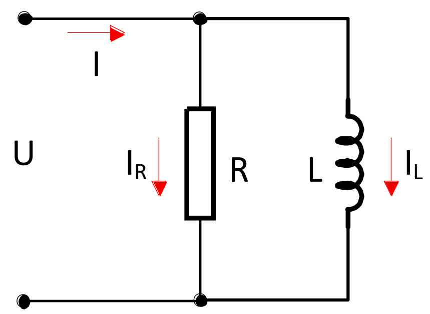
$$\cos\varphi = \frac{P}{S} . \tag{3-35}$$

Faktor snage pokazuje koliki dio prividne snage koju razvija generator, iskoristi trošilo u vanjskom dijelu kruga. Često se u praksi kao karakteristika elektrotehničkih uređaja navodi i faktor snage. Rad u uvjetima postojanja jalove snage je nepovoljan, jer se u graničnom slučaju čistoga reaktivnog trošila ne razvija djelatna snaga, a generator radi s punim opterećenjem. Vodovi za prijenos električne energije opterećeni su jalovom snagom i na njima nastaju dodatni gubitci.

Povećanje faktora snage postiže se paralelnim vezivanjem kondenzatora, čija jalova snaga reducira induktivnu snagu. Taj se postupak zove *kompenzacija faktora snage*. Povećanje faktora snage omogućuje potpunije iskorištenje nominalne snage generatora. Imajući na umu kako velik dio elektrotehničkih uređaja (elektromotori, transformatori) ima osim djelatne i jalovu induktivnu snagu, značaj kompenzacije faktora snage je očit. U cjelokupnom elektroenergetskom sustavu povećanje faktora snage za 1 % može donijeti godišnje uštede koje se mjere u milijunima kWh električne energije.

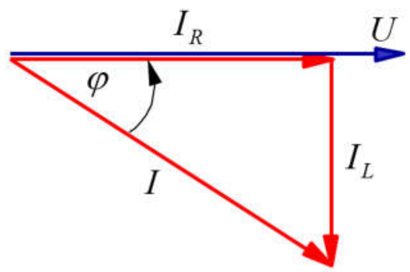
3.4.2. Paralelni spoj djelatnog i induktivnog otpora

Realni svitak bez magnetske jezgre može se prikazati i ekvivalentnom paralelnom shemom na *Slici 3.22*.



Slika 3.22 – Paralelni spoj djelatnog i induktivnog otpora

Struja I_R je u fazi s priključenim izmjeničnim naponom, struja I_L fazno zaostaje za naponom za 90 °, a ukupna struja I je geometrijski zbroj parcijalnih struja u paralelnim granama. Za paralelne spojeve napon U uzima se kao referentna veličina. Odgovarajući fazorski dijagram prikazan je na *Slici 3.23*.



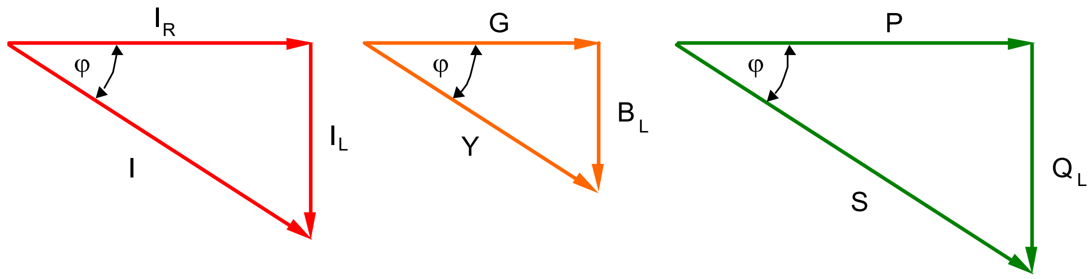
Slika 3.23 – Paralelni R-X_L spoj – fazorski dijagram

Iz trokuta struja slijedi:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_R^2 + I_L^2} \\ I_R &= I\cos\varphi \\ I_L &= I\sin\varphi\ . \end{aligned} \qquad (3\text{-}36)$$

Ukupna struja fazno zaostaje za naponom za kut $0 \leq \varphi \leq 90^0$.

Dijeljenjem svih stranica trokuta s konstantnim naponom dobije se njemu sličan trokut vodljivosti, a množenjem s naponom dobije se također sličan trokut snaga kao na *Slici3.24*.



Slika 3.24 – Paralelni R-X_L spoj – trokut napona, vodljivosti i snaga

Stranice trokuta vodljivosti su:

$G = \frac{I_R}{U}$ djelatna vodljivost (konduktancija)

$B_L = \frac{I_L}{U}$ induktivna reaktivna vodljivost (induktivna susceptancija)

$Y = \frac{I}{U}$ ukupna vodljivost (admitancija).

Dimenzije vodljivosti iskazuju se u simensima S.

Iz trokuta vodljivosti je:

$$Y = \sqrt{G^2 + B_L^2}\ . \qquad (3\text{-}37)$$

Fazni kut iz trokuta struja je:

$$\varphi = arcsin\frac{I_L}{I} = arccos\frac{I_R}{I} = arctg\frac{I_L}{I_R}\ . \qquad (3\text{-}38)$$

Fazni kut iz trokuta vodljivosti je:

$$\varphi = arcsin\ \frac{B_L}{Y} = arccos\ \frac{G}{Y} = arctg\ \frac{B_L}{G}\ . \qquad (3\text{-}39)$$

Iz trokuta snaga dobije se:

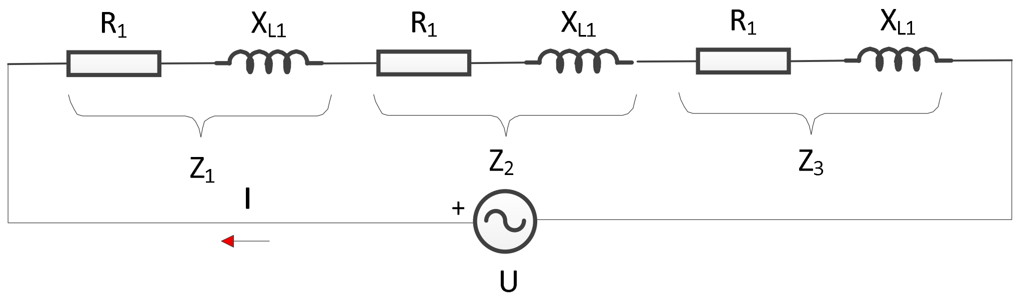
$P = UI_R = U^2G = \frac{I_R^2}{G}$ djelatna snaga (W)

$Q = UI_L = U^2B_L = \frac{I_L^2}{B_L}$ induktivna jalova snaga (VAr_{ind})

$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\left(U^2G\right)^2 + \left(U^2B_L\right)^2} = U^2\sqrt{G^2 + B_L^2} = U^2Y = \frac{I^2}{Y}$ ukupna snaga (VA).

3.4.3. Serijski i paralelni spoj svitaka

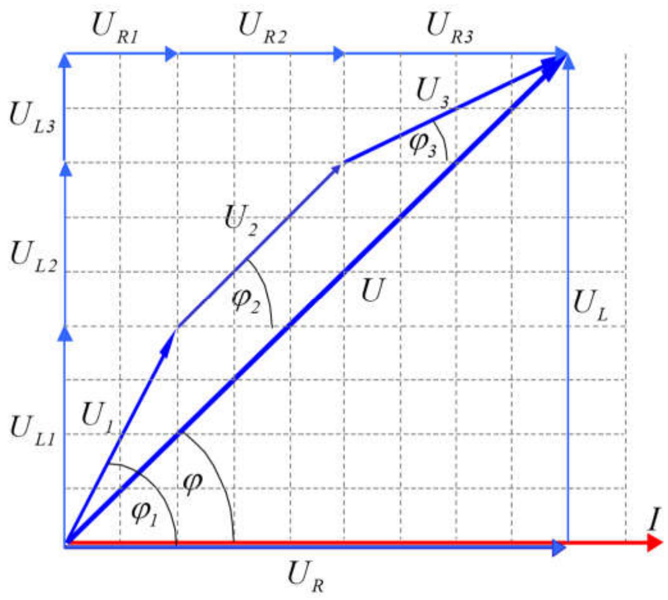
Serijski spoj realnih svitaka je višestruki serijski R-X_L spoj. U primjeru na *Slici 3.25* prikazan je serijski spoj triju svitaka različitih impedancija.



Slika 3.25 – Višestruki serijski R-X_L spoj

Ukupni napon je fazorski zbroj napona na pojedinim svitcima.

Grafičko rješenje u obliku fazorskog dijagrama dano je na *Slici 3.26*.



Slika 3.26 – Višestruki serijski R-X_L spoj – fazorski dijagram

Za pojedine komponente napona i ukupni napon vrijedi:

$$U_R = U_{R_1} + U_{R_2} + U_{R_3} \quad , \quad U_L = U_{L_1} + U_{L_2} + U_{L_3} \quad , \quad U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \; . \qquad (3\text{-}40)$$

Ukupna impedancija je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + \left(X_{L_1} + X_{L2} + X_{L_3}\right)^2} \; . \qquad (3\text{-}41)$$

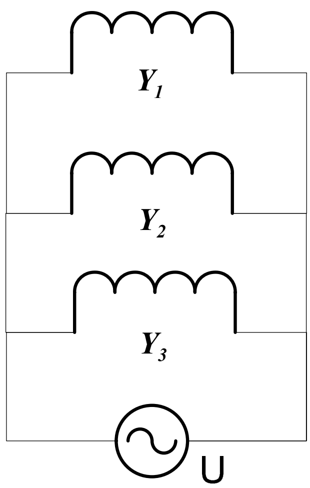
Faktor snage je $cos\,\varphi = \dfrac{R}{Z}$.

Pripadne snage su:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad ; \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad ; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \; . \qquad (3\text{-}42)$$

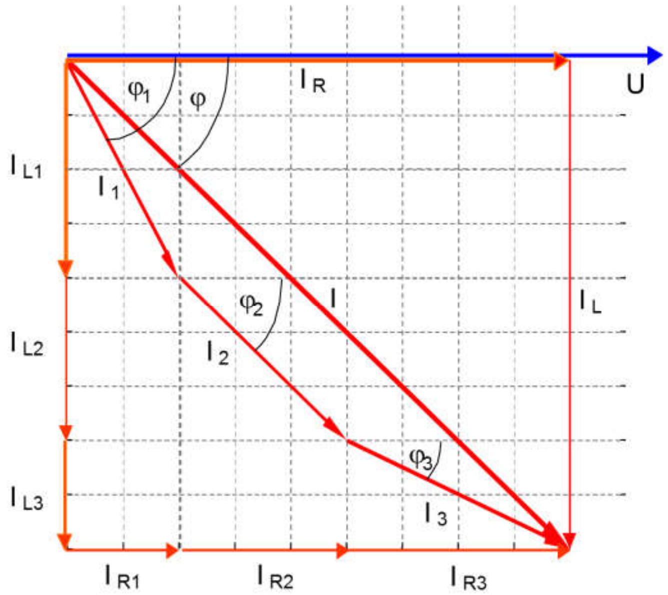
Iz: $X_L = X_{L_1} + X_{L2} + X_{L_3} \Rightarrow \omega L = \omega L_1 + \omega L_2 + \omega L_3$, pa je ekvivalentna induktivnost serijskog spoja: $L = L_1 + L_2 + L_3$.

Paralelni spoj realnih svitaka je višestruki paralelni *G-B_L* spoj. U primjeru na *Slici 3.27* prikazan je paralelni spoj triju svitaka različitih admitancija. Ukupna struja je fazorski zbroj struja u paralelnim granama.



Slika 3.27 – Višestruki paralelni G-B_L spoj

Grafičko rješenje u obliku fazorskog dijagrama dano je na *Slici 3.28*.



Slika 3.28 – Višestruki paralelni G-B_L spoj – fazorski dijagram

Ukupna struja i admitancija određene su relacijama:

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{\left(I_{R1} + I_{R2} + I_{R3}\right)^2 + \left(I_{L1} + I_{L2} + I_{L3}\right)^2} \tag{3-43}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{\left(G_1 + G_2 + G_3\right)^2 + \left(B_{L1} + B_{L2} + B_{L3}\right)^2}\ , \tag{3-44}$$

a pripadni faktor snage je $\cos\varphi = \dfrac{G}{Y}$.

Iz: $B_L = B_{L_1} + B_{L2} + B_{L_3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\omega L} = \dfrac{1}{\omega L_1} + \dfrac{1}{\omega L_2} + \dfrac{1}{\omega L_3}$,

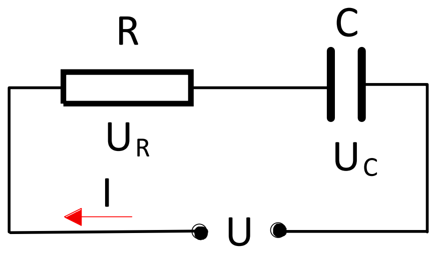
pa je ekvivalentna induktivnost paralelnog spoja: $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \dfrac{1}{L_3}$.

3.4.4. Serijski spoj djelatnog i kapacitivnog otpora

Realni kondenzator ima energetske gubitke zbog struje odvođenja uzrokovane nesavršenom izolacijom i gubitke u samom dielektriku.

Struja odvođenja dana je izrazom $I_{od} = U/R_{iz}$, gdje je R_{iz} otpor izolacije. Prisutnost vlage, nečistoća i prašine u kondenzatoru smanjuje otpor izolacije, povećavajući struju odvođenja, a time i gubitke kondenzatora. Dopunski gubitci stvaraju se pri oscilacijskom kretanju vezanih (polariziranih) naboja dielektrika pod djelovanjem izmjeničnog napona. U procesu periodične preorijentacije iona, dipola i molekula dielektrika dolazi do trenja koje je praćeno pretvorbom dijela električne energije u toplinsku. Od svih oblika polarizacije dielektrika samo elektronska nije vezana s gubitcima energije, jer je deformacija putanja elektrona vrlo elastična. Gubitci energije rastu s povišenjem frekvencije. Za smanjivanje gubitaka zbog promjene orijentacije naboja uporabljuju se kondenzatori s plinskim, keramičkim, polistirenskim ili stirofleksnim dielektricima.

U općem slučaju kondenzatora s gubitcima isti se može prikazati serijskim *R-C* spojem kao na *Slici 3.29*.

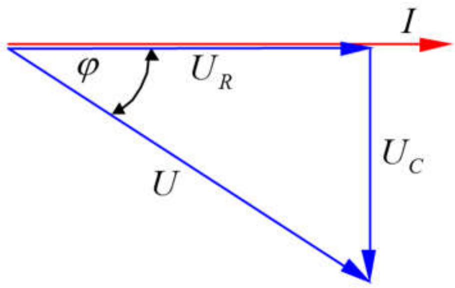


Slika 3.29 – Serijski spoj djelatnog i kapacitivnog otpora

Efektivne vrijednosti napona su:

$$U_R = IR$$
$$U_C = IX_C \ . \qquad (3\text{-}45)$$

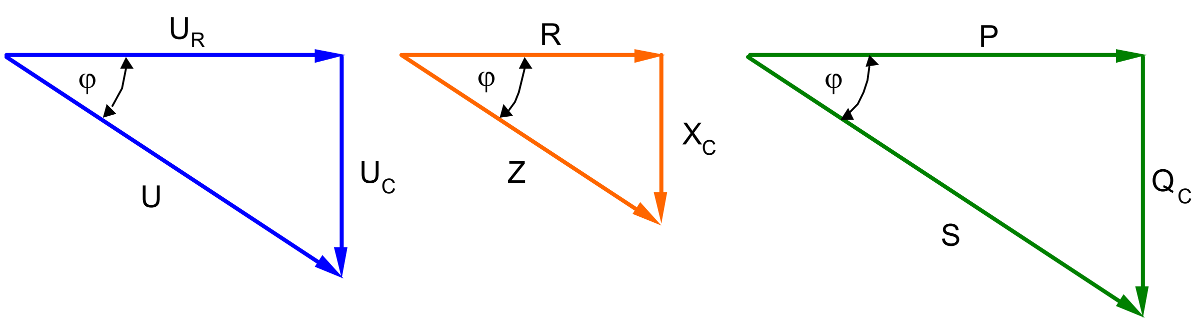
Fazorski dijagram serijskog *R-C* spoja dan je na *Slici 3.30*.



Slika 3.30 – Serijski spoj djelatnog i kapacitivnog otpora – fazorski dijagram

Napon narinut na serijsku kombinaciju zaostaje prema struji za neki kut φ, koji ovisi o međusobnom odnosu djelatnog i kapacitivnog otpora $-\ 90 \ \leq \ \varphi \ \leq \ 0$.

Trokuti napona, otpora i trokut snaga prikazani su na *Slici 3.31*.



Slika 3.31 – Serijski R-X$_C$ spoj – trokut napona, otpora i snaga

Iz trokuta napona je $U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2}$.

Komponente trokuta otpora su:

$R = \dfrac{U_R}{I}$ aktivni otpor (rezistencija)

$X_C = \dfrac{U_C}{I}$ kapacitivni otpor (kapacitivna reaktancija)

$Z = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ ukupni ili prividni otpor (impedancija).

Ohmov zakon za analizirani krug je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} . \tag{3-46}$$

Fazni kut određen je iz trokuta otpora $\varphi = arccos\ \dfrac{R}{Z} = arcsin\ \dfrac{X_C}{Z} = arctg\ \dfrac{X_C}{R}$.

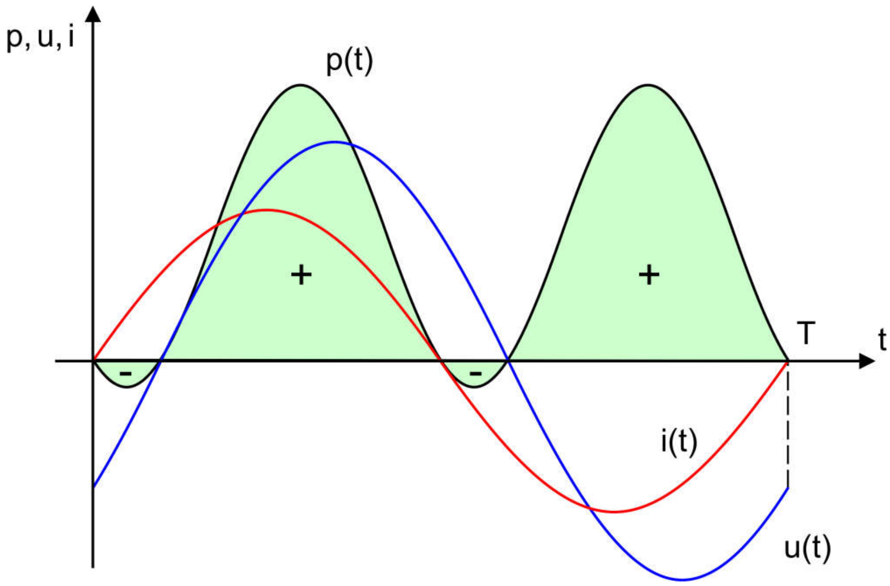
Kako je:

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin \omega t \\ u &= U_m \sin(\omega t - \varphi)\ , \end{aligned} \tag{3-47}$$

trenutačna snaga je:

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) . \tag{3-48}$$

Valni dijagram trenutačne snage serijskog *R-C* spoja dan je na *Slici 3.32*.



Slika 3.32 – Serijski R-X$_L$ spoj – trenutačna snaga

Električna energija predana od izvora dijelom se pretvara u toplinsku na djelatnom otporu, a dijelom oscilira između generatora i električnog polja kondenzatora. Ireverzibilni dio procesa zbog navedenih gubitaka kondenzatora opisuje se djelatnom snagom *P*:

$$P = U_R I = I^2 R = \frac{U_R^2}{R} = UI\cos\varphi \ \ W \ . \tag{3-49}$$

Jalova snaga Q_C karakterizira oscilacije između generatora i električnog polja kondenzatora:

$$Q_C = U_C I = I^2 X_C = \frac{U_C^2}{X_C} = UI\,sin\varphi \quad (VAr_{kap})\,. \qquad (3\text{-}50)$$

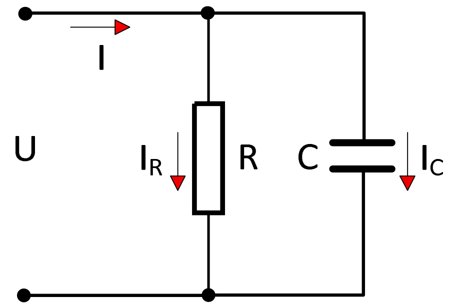
Ukupna snaga *S* je iz trokuta snaga:

$$S = \sqrt{P^2 + Q_C^2} = \sqrt{(UIcos\varphi)^2 + (UIsin\varphi)^2} = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z} \quad (VA). \qquad (3\text{-}51)$$

Također vrijedi: $Q = S\ sin\ \varphi$, $P = S\ cos\ \varphi$.

3.4.5. Paralelni spoj djelatnog i kapacitivnog otpora

Kondenzator s gubitcima može se prikazati nadomjesnom paralelnom *R-C* shemom kao na *Slici 3.33*.



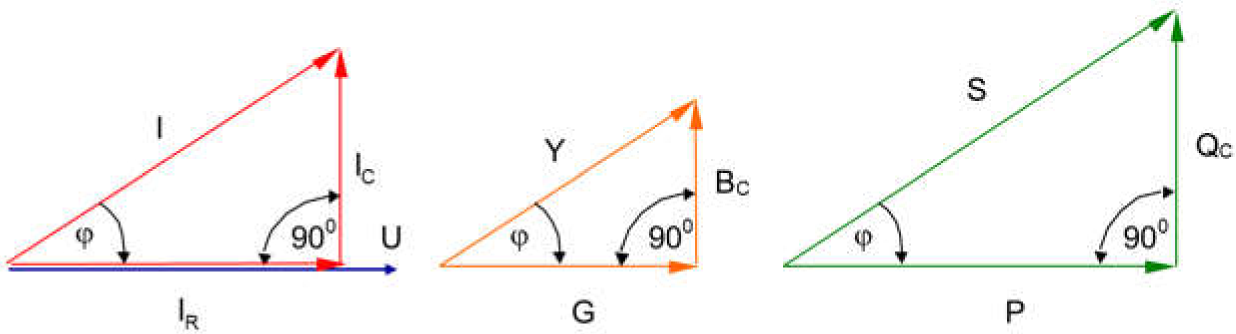
Slika 3.33 – Paralelni R-X_C spoj

U grani s djelatnim otporom teče struja I_R koja je u fazi s priključenim izmjeničnim naponom, a u grani s kapacitivnim otporom teče kapacitivna struja I_C koja fazno prethodi naponu za 90 °:

$$I_R = \frac{U}{R} = UG$$
$$I_C = \frac{U}{X_C} = UB_C\ . \qquad (3\text{-}52)$$

Ukupna struja *I* je geometrijski zbroj parcijalnih struja.

Konstruiranje fazorskog dijagrama napona i struja te trokuta otpora i snaga prikazano je na *Slici 3.34*.



Slika 3.34 – Paralelni R-X_C spoj – trokut struja, vodljivosti i snaga

Ukupna struja je $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$. Napon fazno zaostaje za kut $-90 \le \varphi \le 0$.

Stranice trokuta vodljivosti su:

$G = \dfrac{I_R}{U}$ – konduktancija

$B_C = \dfrac{I_C}{U}$ – kapacitivna vodljivost (kapacitivna susceptancija)

$Y = \dfrac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B_C^2}$ – admitancija.

Fazni kut iz trokuta vodljivosti je $\varphi = arcsin\,\dfrac{B_C}{Y} = arccos\,\dfrac{G}{Y} = arctg\,\dfrac{B_C}{G}$.

Iz trokuta snaga mogu se odrediti snage:

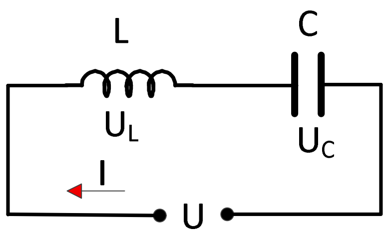
$$P = UI_R = U^2 G = UI\cos\varphi \;\; (W),$$

$$Q = UI_C = U^2 B_C = UI\sin\varphi \;\; (VAr_{kap}),$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2 Y \; (VA). \qquad (3\text{-}53)$$

3.4.6. Serijski spoj induktivnog i kapacitivnog otpora

Serijski spoj svitka i kondenzatora – oba sa zanemarivim gubitcima, prikazan je na *Slici 3.35*.



Slika 3.35 – Serijski X_L-X_C spoj

Naponi na induktivnosti i kapacitivnosti imaju suprotnu fazu – međusobni pomak u fazi je 180 °, pa se mogu algebarski oduzeti:

$$U_L = IX_L$$

$$U_C = IX_C \qquad (3\text{-}54)$$

$$U = U_L - U_C = I\left(X_L - X_C\right) = IX \; .$$

Mogu nastupiti različiti slučajevi determinirani međuodnosima reaktivnih otpora:

$$X_L > X_C$$

$$X_L = X_C \qquad (3\text{-}55)$$

$$X_L < X_C \; .$$

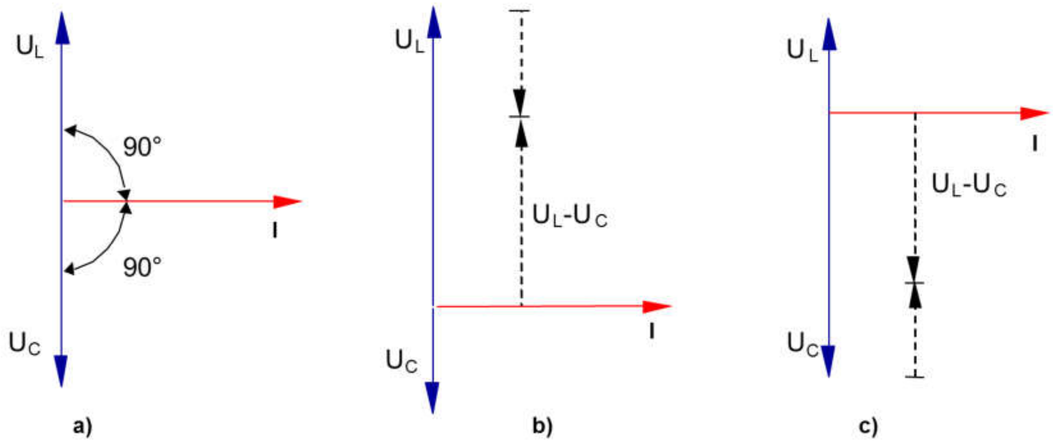
U prvom je slučaju ukupna reaktancija induktivna, u drugome je jednaka nuli, a u trećem slučaju ukupna reaktancija je kapacitivnog karaktera.

Fazorski dijagrami za sva tri razmatrana slučaja prikazani su na *Slici 3.36*.

Kada su iznosi reaktancija različiti, ukupni napon je ili kapacitivan *(c)* ili induktivan *(b)*. U slučaju jednakih reaktancija *(a)*, pa tako i napona, naponi se međusobno ponište. To je slučaj serijske ili naponske rezonancije u idealnome rezonantnom krugu. Teorijski gledano, struja bi tada imala neizmjernu vrijednost, jer su gubitci zanemareni.

Struja je $I = \dfrac{U}{X}$, a fazni kut:

$$a)\ \varphi = 0 \qquad b)\ \varphi = 90^0 \qquad c)\ \varphi = -90\ ^o. \tag{3-56}$$



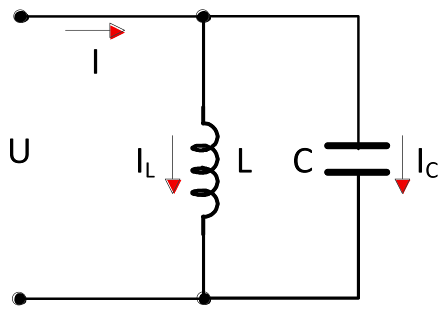
Slika 3.36 – Serijski X_L-X_C spoj – fazorski dijagram

Nema djelatnih gubitaka *(P = 0)*. Ostale snage su:

$$a) \quad S = Q = Q_L - Q_C = 0$$
$$b) \quad S = Q_{ind} > 0 \tag{3-57}$$
$$c) \quad S = Q_{kap} < 0.$$

3.4.7. Paralelni spoj induktivnog i kapacitivnog otpora

Paralelni X_L-X_C spoj izgleda kao na *Slici 3.37*.



Slika 3.37 – Paralelni X_L-X_C spoj

Ukupna struja dijeli se na dvije komponente: struju svitka I_L, koja zaostaje u odnosu na napon za 90 °, i struju kondenzatora I_C, koja mu prethodi za 90 °.

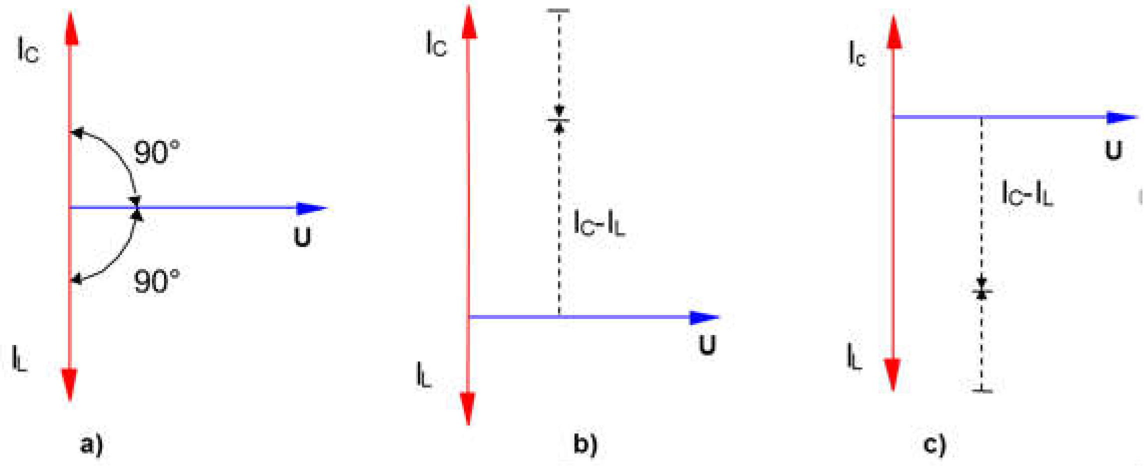
Efektivne vrijednosti struja su:

$$I_L = UB_L$$
$$I_C = UB_C \tag{3-58}$$
$$I = U\left(B_L - B_C\right) = UB\ .$$

Parcijalne struje su fazno opozitne (180 °), pa ovisno o njihovoj efektivnoj vrijednosti koju određuje jedan od mogućih odnosa susceptancija: $B_L > B_C$, $B_L = B_C$, $B_L < B_C$.

Ukupna struja može biti čisto induktivna, čisto kapacitivna ili jednaka nuli. Slučaj poništavanja reaktivnih struja zove se paralelna ili strujna rezonancija.

Ekvivalentni fazorski dijagrami za sva tri moda rada prikazani su na *Slici 3.38*.



Slika 3.38 – Paralelni X_L-X_C spoj – fazorski dijagrami

Fazni kut je:

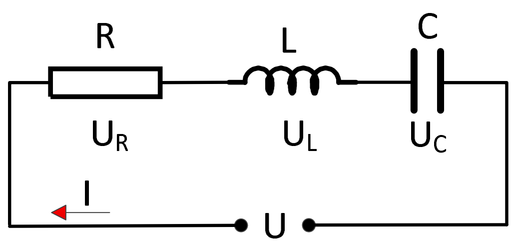
$$a)\ \varphi = 0 \qquad b)\ \varphi = -90^o \qquad c)\ \varphi = 90\ ^o. \tag{3-59}$$

U krugu nema djelatnih gubitaka *(P* = 0*)*. Ostale snage su:

$$a)\ S = Q = Q_L - Q_C = 0 \qquad b)\ S = Q_{kap} < 0 \qquad c)\ S = Q_{ind} > 0. \tag{3-60}$$

3.4.8. Serijski spoj djelatnog, induktivnog i kapacitivnog otpora

Serijski krug što sadrži otpore svih pasivnih elemenata izmjeničnih krugova (*RLC*) prikazan je na *Slici 3.39*.



Slika 3.39 – Serijski R-X_L-X_C spoj

Naponi na elementima kruga su:

$$\begin{aligned} U_R &= IR \\ U_L &= IX_L \\ U_C &= IX_C\ . \end{aligned} \tag{3-61}$$

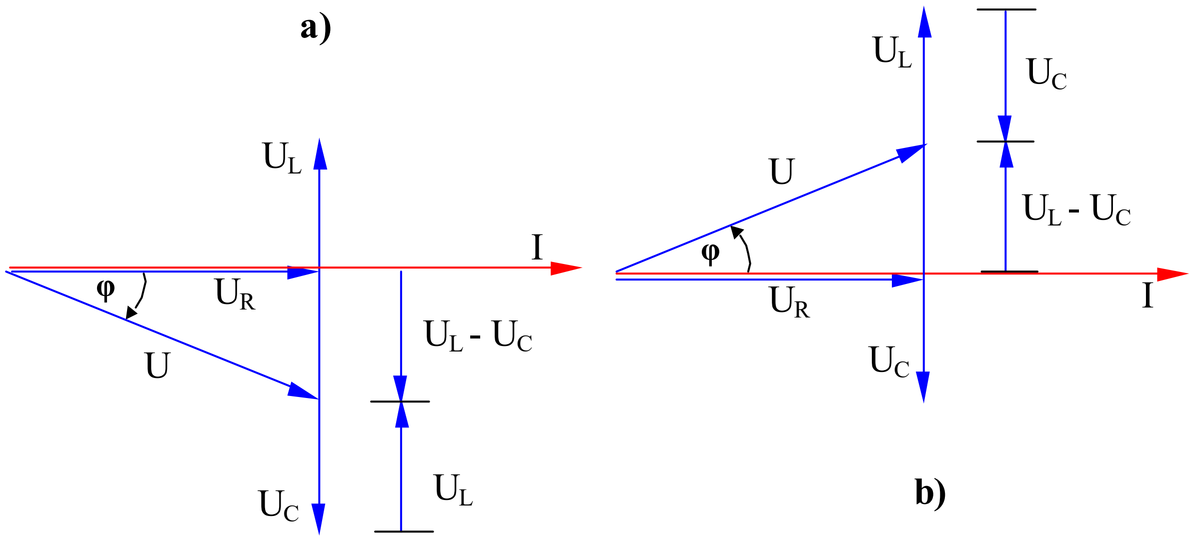
Moguća su tri različita slučaja determinirana međuodnosima reaktivnih otpora:

$$\begin{aligned} X_L &> X_C \\ X_L &= X_C \\ X_L &< X_C\ . \end{aligned} \tag{3-62}$$

U slučaju kada je $X_L = X_C$, reaktivne komponente se poništavaju i nastupa serijska ili naponska rezonancija. Zbog važnosti za tehničku praksu takvo stanje kruga posebno se i odvojeno analizira.

Na *Slici 3.40* prikazane su dvije grupe fazorskih dijagrama za preostala dva slučaja:

a) prevladava kapacitivna komponenta ($U_L < U_C$, $X_L < X_C$)
b) prevladava induktivna komponenta ($U_L > U_C$, $X_L > X_C$).



Slika 3.40 – Serijski R-X_L-X_C spoj – fazorski dijagrami

Pripadni fazni kutovi su:

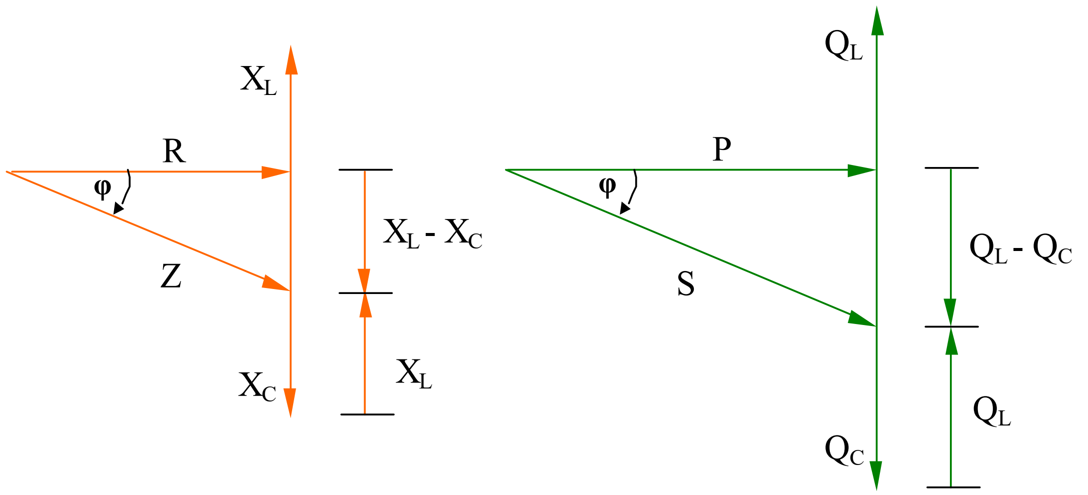
$$a)\quad -90^o < \varphi < 0$$

$$b)\quad 0 < \varphi < 90^0, \tag{3-63}$$

a ukupni napon je:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}\ . \tag{3-64}$$

Na *Slici 3.41* prikazani su trokuti otpora i snaga na primjeru $X_L < X_C$.



Slika 3.41 – Serijski R-X_L-X_C spoj – trokut otpora i snaga za $X_L < X_C$

Impedancija, fazni kut i struja određeni su jednadžbama *(3-65)*:

:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{X_L - X_C}{R}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}} \,. \qquad (3\text{-}65)$$

Pripadne snage su:

$$P = UI\cos\phi$$

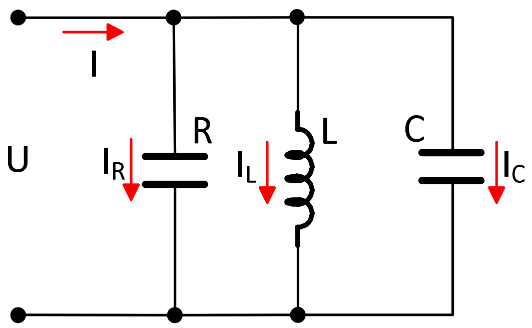
$$Q = Q_L - Q_C = UI\sin\phi \qquad (3\text{-}66)$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2} \,.$$

U krugu sa zastupljenim svim pasivnim elementima može se dogoditi da iznosi napona na reaktivnim elementima U_L i U_C budu i znatno veći od ukupnoga napona U.

3.4.9. Paralelni spoj djelatnog, induktivnog i kapacitivnog otpora

Paralelni krug što sadrži vodljivosti svih pasivnih elemenata izmjeničnih krugova (*GLC*) prikazan je na *Slici 3.42*.



Slika 3.42 – Paralelni RLC spoj

Djelomične struje u paralelnim granama su:

$$I_R = UG$$

$$I_L = UB_L \qquad (3\text{-}67)$$

$$I_C = UB_C \,.$$

Tri su moguća moda rada:

$$B_L > B_C$$

$$B_L = B_C \qquad (3\text{-}68)$$

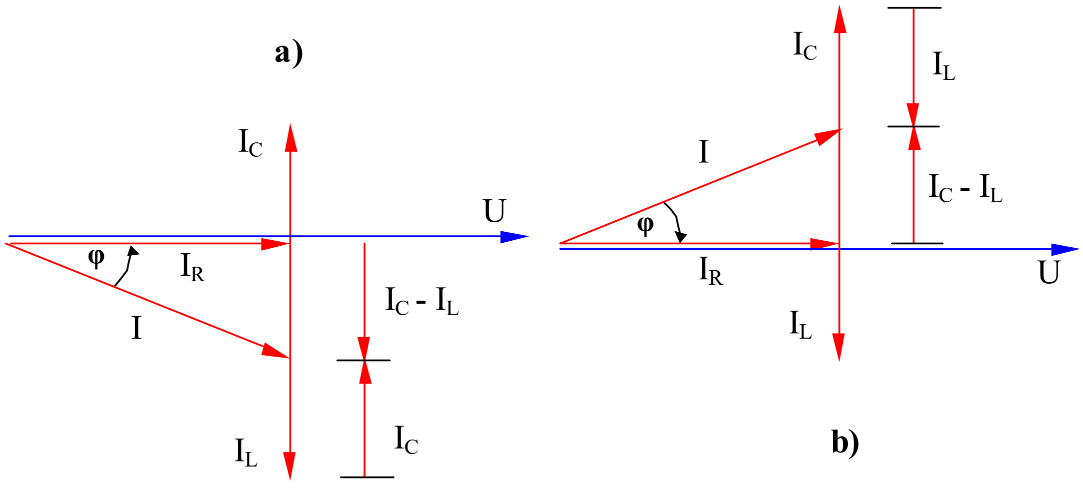
$$B_L < B_C \,.$$

U slučaju $B_L = B_C$ reaktivne komponente se poništavaju te nastupa paralelna ili strujna rezonancija – krug se ponaša kao da je priključena samo djelatna vodljivost.

Fazorski dijagram na *Slici 3.43* opisuje preostala dva slučaja (fazor napona je referentan):

a) induktivna vodljivost je veća od kapacitivne, $B_L > B_C$, pa je struja u induktivnoj veća od struje u kapacitivnoj grani – krug je induktivnog karaktera (pozitivan fazni kut);

b) za $B_L < B_C$ veća je struja u kapacitivnoj grani, pa prevladava kapacitivna komponenta – fazni kut je negativan.

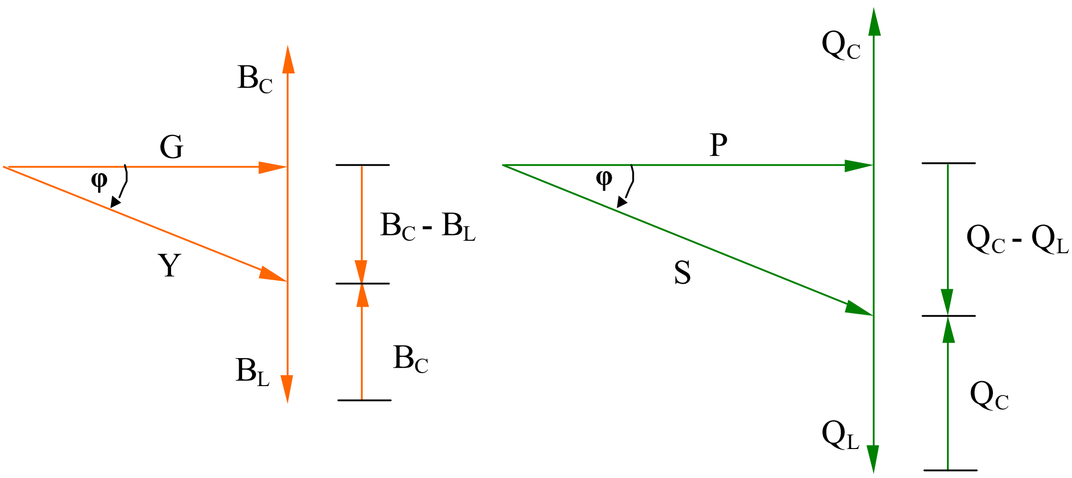


Slika 3.43 – Paralelni RLC spoj – fazorski dijagrami

Ukupna struja je:

$$I = \sqrt{I_R^2 + \left(I_L - I_C\right)^2}\,, \qquad (3\text{-}69)$$

a pripadni trokut vodljivosti i snaga na primjeru $B_L > B_C$ prikazani su na *Slici 3.44*.



Slika 3.44 – Paralelni RLC spoj – trokut vodljivosti i snaga

Admitancija, fazni kut i pripadne snage su:

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(B_L - B_C\right)^2}$$

$$\varphi = arctg\frac{B_L - B_C}{G}$$

$$P = UI\cos\varphi$$

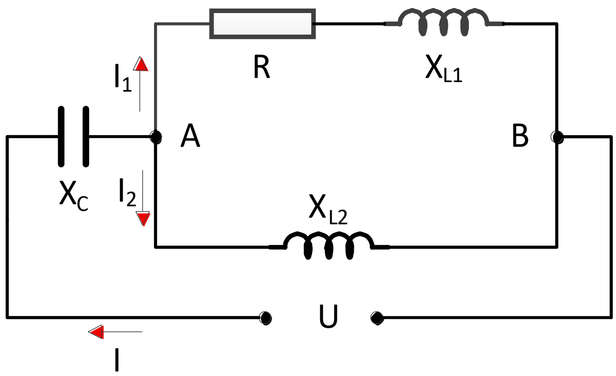
$$Q = Q_L - Q_C = UI\sin\varphi \qquad (3\text{-}70)$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}\,.$$

U paralelnom krugu sa zastupljenim svim pasivnim elementima može se dogoditi da iznosi struja na reaktivnim elementima I_L i I_C budu i znatno veći od ukupne struje I.

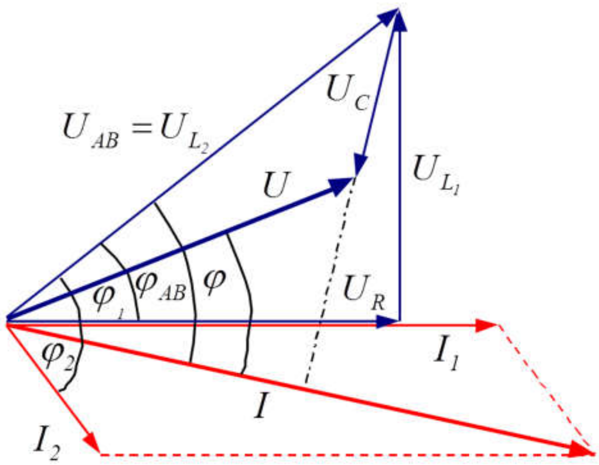
3.4.10. Mješoviti spoj djelatnih i reaktivnih otpora

Analizirat ćemo proizvoljni primjer mješovitoga kruga gdje su zastupljene sve pasivne komponente kao na *Slici 3.45*.



Slika 3.45 – Mješoviti RLC krug

Fazorski dijagram gdje je za referentnu vrijednost odabrana struja I_1 prikazan je na *Slici 3.46*.



Slika 3.46 – Mješoviti RLC krug – fazorski dijagram

Primjena fazorske metode u analitičkom rješavanju iole složenijega mješovitog izmjeničnog kruga može biti vrlo mukotrpna. Do završnog rješenja često se zahtijeva velik broj relativno jednostavnih proračuna.

Električne veličine na pojedinim dijelovima kruga potrebno je razložiti na komponente: *djelatnu* paralelnu s referentnom osi i *reaktivnu* koja je okomita na referentnu os. Geometrijska (fazorska) suma djelatne i reaktivne komponente daje ukupnu vrijednost razmatrane električne veličine. Djelatne komponente na referentnoj osi mogu se međusobno zbrajati, a isto vrijedi i za reaktivne komponente na reaktivnoj osi.

Izražavanje fazorskih električnih veličina kompleksnim brojevima omogućuje prikaz iznosa i faze fazora jedinstvenim izrazom.

4. SIMBOLIČKA METODA U PRORAČUNU IZMJENIČNIH KRUGOVA

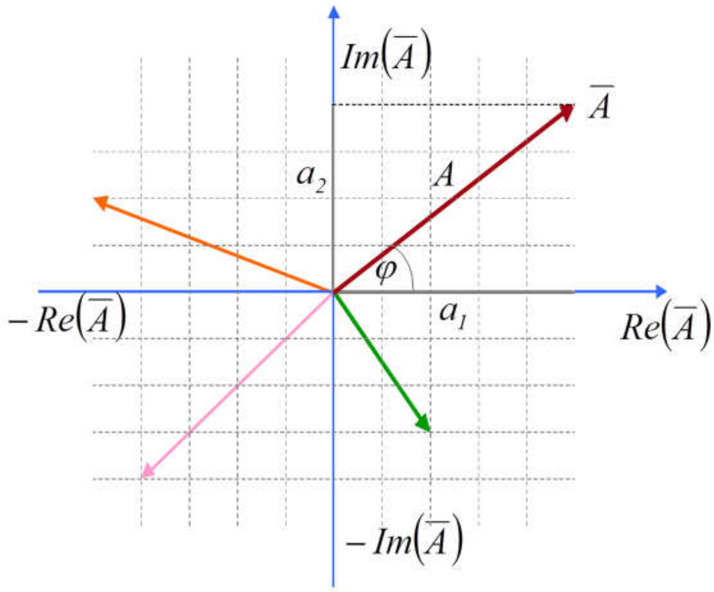
*Simboličku metod*u uveo je Steinmetz 1893. godine. Električne veličine zamjenjuju se fazorskim (vektorskim) simbolima. Fazori se prikazuju kao kompleksni brojevi. Metoda se može primijeniti samo za sinusoidno promjenljive veličine konstantne frekvencije.

U izmjeničnim mrežama vrijede svi zakoni, metode i pravila što su detaljno razrađeni u sklopu predmeta Osnove elektrotehnike I. Stoga su u analizi jednostavnih i složenih izmjeničnih mreža (*Pogl. 4.3.*, *4.4.* i *4.5.*) izostavljeni detaljni izvodi i dokazi. Opisana je izravna primjena navedenoga.

4.1. Matematičke osnove proračuna s kompleksnim brojevima

Kako se ne bi interpretirala kao trenutačna vrijednost struje, imaginarna jedinica „*i*“ označuje se sa „*j*“ ($j = \sqrt{-1}$).

Prikaz kompleksnih brojeva u svim četirima kvadrantima kompleksne (Gaussove) ravnine dan je na *Slici4.1*.



Slika 4.1 – Prikaz kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini

<u>*Algebarski oblik kompleksnog broja*</u>:

$$\overline{A} = a_1 + ja_2, \tag{4-1}$$

gdje su a_1, a_2 – realni brojevi, pri čemu su $Re(\overline{A}) = a_1$; $Im(\overline{A}) = a_2$.

Ako je $a_1 = 0$ kompleksni broj, $\overline{A}$ je imaginaran, a za $a_2 = 0$ kompleksni broj $\overline{A}$ je realan.
Dva kompleksna broja:

$$\overline{A} = a_1 + ja_2$$
$$\overline{B} = b_1 + jb_2 \tag{4-2}$$

jednaka su ako je $a_1 = b_1$ i $a_2 = b_2$.
Kompleksni broj $\overline{A}$ ima *iznos A* i nalazi se pod kutom φ u odnosu na realnu os. Projekcije fazora $\overline{A}$ na osi kompleksne ravnine su realni i imaginarni dio kompleksnog broja:

$$a_1 = A\cos\varphi \quad ; \quad a_2 = A\sin\varphi . \tag{4-3}$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja:

$$\overline{A} = A\cos\varphi + jA\sin\varphi = A\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right). \tag{4-4}$$

Za matematičke operacije množenja i dijeljenja kompleksnih brojeva pogodan je eksponencijalni prikaz. To je alternativni oblik kompleksnog broja koji se dobije uporabom Eulerove formule (Eulerov identitet):

$$e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi . \tag{4-5}$$

Relacija se može posredno dokazati razvojem u red sinusne, kosinusne i eksponencijalne funkcije:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\cdots \tag{4-6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\cdots .$$

Zamjenom $x = j\varphi$ eksponencijalna funkcija s imaginarnim eksponentom postaje:

$$e^{j\varphi} = 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - j\frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\cdots . \tag{4-7}$$

Izdvajanjem realnih i imaginarnih dijelova slijedi:

$$e^{j\varphi} = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\cdots\right)}_{\cos\varphi} + j\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\cdots\right)}_{\sin\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi . \tag{4-8}$$

Isto tako je:

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\sin\varphi . \tag{4-9}$$

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja:

$$\overline{A} = A\left(\cos\varphi \pm j\sin\varphi\right) = Ae^{\pm j\varphi} , \tag{4-10}$$

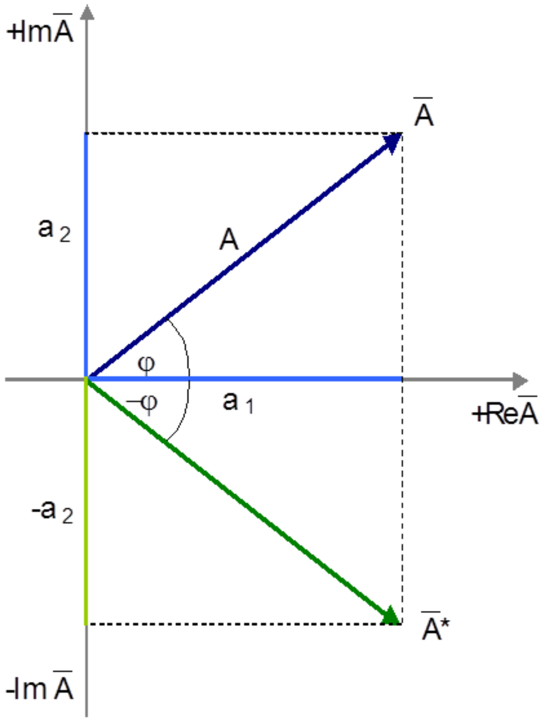
gdje je:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad ; \quad \varphi = arctg\frac{a_2}{a_1} . \tag{4-11}$$

Konjugirano kompleksni broj $\overline{A}^*$ dobije se promjenom predznaka imaginarnog dijela kompleksnog broja $\overline{A}$:

$$\overline{A}^* = a_1 - ja_2 = A\ (cos\,\varphi - j\,sin\,\varphi) = Ae^{-j\varphi}. \tag{4-12}$$

Grafički prikaz kompleksnog i konjugirano kompleksnog broja dan je na *Slici 4.2*.



Slika 4.2 – Kompleksni i konjugirano kompleksni broj

Operacije s kompleksnim brojevima

Zbrajanje:

$$\overline{C} = \overline{A} + \overline{B} = a_1 + ja_2 + b_1 + jb_2 = \underbrace{(a_1 + b_1)}_{c_1} + j\underbrace{(a_2 + b_2)}_{c_2} = c_1 + jc_2 \tag{4-13}$$

Oduzimanje:

$$\overline{D} = \overline{A} - \overline{B} = a_1 + ja_2 - b_1 - jb_2 = \underbrace{(a_1 - b_1)}_{d_1} + j\underbrace{(a_2 - b_2)}_{d_2} = d_1 + jd_2 \tag{4-14}$$

Množenje:

$$\begin{aligned} \overline{E} = \overline{A} \cdot \overline{B} &= (a_1 + ja_2) \cdot (b_1 + jb_2) = a_1 b_1 + ja_1 b_2 + ja_2 b_1 + j^2 a_2 b_2 = \\ &= \underbrace{(a_1 b_1 - a_2 b_2)}_{e_1} + j\underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{e_2} = e_1 + je_2 \end{aligned} \tag{4-15}$$

ili kraće:

$$\overline{E} = \overline{A} \cdot \overline{B} = Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = A \cdot Be^{j(\alpha+\beta)} = Ee^{j\varphi_E}. \tag{4-16}$$

Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva realan je broj i jednak je kvadratu njihovih modula:

$$\overline{A} \cdot \overline{A}^* = Ae^{j\alpha} \cdot Ae^{-j\alpha} = A^2. \tag{4-17}$$

Dijeljenje:

$$\overline{F}=\frac{\overline{A}}{\overline{B}}=\frac{a_1+ja_2}{b_1+jb_2}=\frac{a_1+ja_2}{b_1+jb_2}\cdot\frac{b_1-jb_2}{b_1-jb_2}=\frac{a_1b_1-ja_1b_2+ja_2b_1-j^2a_2b_2}{b_1^2-j^2b_2^2}=$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{b_1^2+b_2^2}+j\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1^2+b_2^2}=f_1+jf_2 \tag{4-18}$$

ili

$$\overline{F}=\frac{\overline{A}}{\overline{B}}=\frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}}=\frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}=Fe^{j\varphi_F} \tag{4-19}$$

Potenciranje:

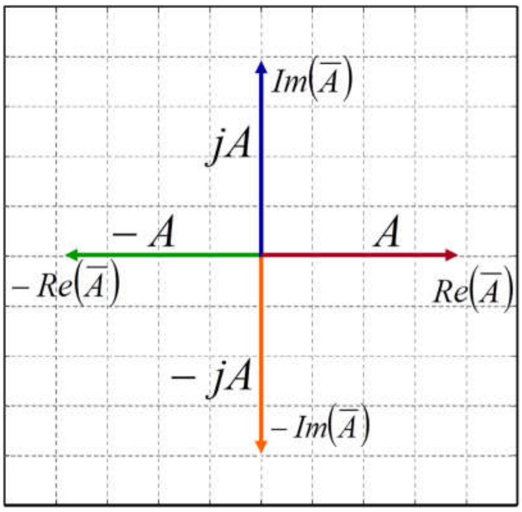
$$\left(\overline{A}\right)^n=\left(Ae^{\pm j\alpha}\right)^n=A^ne^{\pm jn\alpha}=A^n\left(\cos n\alpha\pm j\sin n\alpha\right)=Re\left[\left(\overline{A}\right)^n\right]\pm j\,Im\left[\left(\overline{A}\right)^n\right] \tag{4-20}$$

Korjenovanje:

$$\sqrt[n]{\left(\overline{A}\right)}=\left(\overline{A}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(Ae^{\pm j\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}=A^{\frac{1}{n}}e^{\pm j\frac{\alpha}{n}}=A^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\alpha}{n}\pm j\sin\frac{\alpha}{n}\right)=Re\left[\left(\overline{A}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\pm j\,Im\left[\left(\overline{A}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \tag{4-21}$$

Svojstva kompleksnih brojeva bitna za rješavanje krugova simboličkom metodom

- Množenje kompleksnog broja imaginarnom jedinicom $j=\sqrt{-1}$ znači rotaciju u pozitivnom smjeru vrtnje za $\frac{\pi}{2}=90^0$, što je pokazano na *Slici 4.3*.



Slika 4.3 – Množenje kompleksnog broja imaginarnom jedinicom

Početni položaj versora $\overline{A}$ na realnoj osi je $\overline{A}=A$, $\varphi=0$.
Kako je vidljivo iz gornje slike, vrijedi:

$$\begin{array}{lcl} A & \Rightarrow & \varphi=0^0 \\ jA & \Rightarrow & \varphi=90^0 \\ j^2A=-A & \Rightarrow & \varphi=180^0 \\ j^3A=-jA & \Rightarrow & \varphi=270^0 \\ j^4A=A & \Rightarrow & \varphi=360^0 \end{array} \tag{4-22}$$

- Operator deriviranja u kompleksnoj domeni uzrokuje fazni pomak od +90° i povećanje apsolutne vrijednosti kompleksnog broja za ω:

$$\frac{d}{dt} \equiv j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}. \tag{4-23}$$

- Operator integriranja u kompleksnoj domeni uzrokuje fazni pomak od -90° i smanjenje apsolutne vrijednosti kompleksnog broja za $1/\omega$:

$$\int dt \equiv \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}. \tag{4-24}$$

Obrazloženje

Vremenski promjenljive električne veličine mogu se derivirati i integrirati. Za struju u vremenskoj domeni $i(t) = I_m \sin \omega t$, derivacija je:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos \omega t = \omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{4-25}$$

Derivacija uzrokuje pomak od $\pi/2$ i uvećanje za ω, tj. derivacija trenutačne vrijednosti struje odgovara množenju s $j\omega$ u kompleksnom području:

$$\frac{di}{dt} \equiv j\omega I_m = \omega I_m e^{j\frac{\pi}{2}}. \tag{4-26}$$

Integral je:

$$\int i(t)dt = \int I_m \sin\omega t dt = -\frac{I_m}{\omega}\cos \omega t = \frac{I_m}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{4-27}$$

Integriranje uzrokuje fazni pomak od $-\pi/2$ i smanjenje za $1/\omega$, tj. integral trenutačne vrijednosti struje odgovara množenju s $1/j\omega$ u kompleksnom području.

4.2. Prikaz izmjeničnih veličina u simboličkoj metodi

Izmjenične sinusoidne struje/naponi u vremenskom području imaju *trenutačne vrijednosti*:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \sin(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) &= U_m \sin(\omega t + \varphi_u). \end{aligned} \tag{4-28}$$

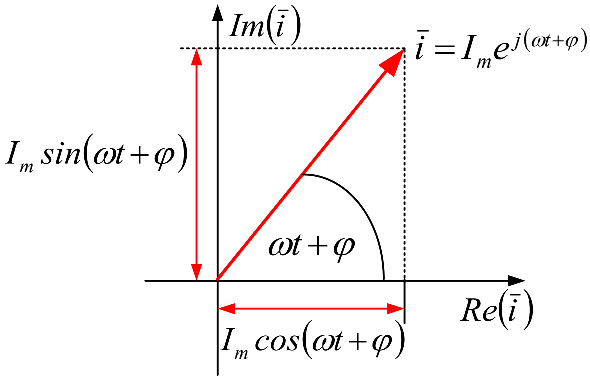
Ako se vremenska os uzme kao pozitivna os u Gaussovoj kompleksnoj ravnini, tada se obje vrijednosti mogu prikazati u simboličkom obliku kao kompleksne trenutačne vrijednosti struje/napona:

$$\begin{aligned} \overline{i}(t) &= Re[\overline{i}(t)] + j\,Im[\overline{i}(t)] = I_m[\cos(\omega t + \varphi_i) + j\sin(\omega t + \varphi_i)] = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\omega t}e^{j\varphi_i} \\ \overline{u}(t) &= Re[\overline{u}(t)] + j\,Im[\overline{u}(t)] = U_m[\cos(\omega t + \varphi_u) + j\sin(\omega t + \varphi_u)] = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\omega t}e^{j\varphi_u}. \end{aligned} \tag{4-29}$$

Kompleksna trenutačna vrijednost struje/napona je kompleksni broj čiji je modul jednak amplitudi struje/napona, a argument je jednak faznom kutu ($\omega t + \varphi$).

Grafički prikaz kompleksne trenutačne vrijednosti struje dan je na *Slici 4.4*. Može se uočiti kako je trenutačna vrijednost struje jednaka imaginarnoj komponenti kompleksne trenutačne vrijednosti struje:

$$i(t) = I_m \sin(\omega\, t + \varphi_i) = Im\left[I_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right]. \tag{4-30}$$



Slika 4.4 – Prikaz kompleksne trenutačne vrijednosti struje

Napomena: U anglo-saksonskoj tehničkoj literaturi trenutačna vrijednost definira se preko kosinusne funkcije, pa je trenutačna vrijednost struje jednaka realnoj komponenti kompleksne trenutačne vrijednosti struje, tj.:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = Re\left[I_m e^{j(\omega t+\varphi)}\right]. \tag{4-31}$$

Faktor $e^{j\omega t}$, koji definira rotaciju vršne vrijednosti pripadnog fazora u Gaussovoj ravnini, može se izostaviti u prikazu fazora. Naime, svi fazori rotiraju konstantnom kutnom brzinom ω. Relativna fazna razlika između pojedinih fazora, koja je od interesa u većini slučajeva, ostaje sačuvana u svakom trenutku. Ako se umjesto vršnih prikažu efektivne vrijednosti, dobiju se kompleksni fazori prikazani u svakom od triju raspoloživih oblika kompleksnog broja:

$$\bar{U} = Ue^{j\varphi_u} = U(\cos\varphi_u + j\sin\varphi_u) = U_{Re} + jU_{Im}$$

$$\bar{I} = Ie^{j\varphi_i} = I(\cos\varphi_i + j\sin\varphi_i) = I_{Re} + jI_{Im}. \tag{4-32}$$

Kompleksna vrijednost (fazor) struje/napona je kompleksni broj čiji je modul jednak efektivnoj vrijednosti struje/napona, a argument je jednak početnoj fazi struje/napona.

Primjer

Ako je trenutačna vrijednost napona $u(t) = 28,2\sin(\omega t + 60^0)V$, tada su:

efektivna vrijednost: $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}} = \dfrac{28,2}{1,41} = 20V$,

fazni kut: $\varphi = 60^{\,0}$,

kompleksna vrijednost (fazor): $\bar{U} = Ue^{j\varphi} = 20e^{j60^0}V$,

kompleksna trenutačna vrijednost: $\bar{u} = U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = 28,2e^{j(\omega t+60^0)}V$.

Prikaz pasivnih elemenata kruga u simboličkoj metodi

- *Djelatni otpor R* (napon i struja su u fazi, $\varphi = 0$):

$$\bar{R} = Re^{j0^0} = R(\cos 0^0 + j\sin 0^0) = R$$

- *Induktivna reaktancija* X_L (napon prethodi struji za $\varphi = 90^0$):

$$\overline{X}_L = X_L e^{j90^0} = X_L \left(\cos 90^0 + j \sin 90^0 \right) = jX_L = j\omega L$$

- *Kapacitivna reaktancija* X_C (napon zaostaje za strujom $\varphi = -90^0$):

$$\overline{X}_C = X_C e^{-j90^0} = X_C \left(\cos 90^0 - j \sin 90^0 \right) = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{j\omega C}$$

- *Impedancija Z* (induktivnog ili kapacitivnog karaktera $-90^0 < \varphi < 90^0$):

$$\overline{Z} = Ze^{\pm j\varphi} = Z\left(\cos\varphi \pm j \sin\varphi \right) = R \pm jX$$

- *Konduktancija G*

$$\overline{G} = Ge^{j0^0} = G\left(\cos 0^0 + j \sin 0^0 \right) = G$$

- *Induktivna susceptancija* B_L

$$\overline{B}_L = \frac{1}{\overline{X}_L} = B_L e^{-j90^0} = B_L \left(\cos 90^0 - j \sin 90^0 \right) = -jB_L = -j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{j\omega L}$$

- *Kapacitivna susceptancija* B_C

$$\overline{B}_C = \frac{1}{\overline{X}_C} = B_C e^{j90^0} = B_C \left(\cos 90^0 + j \sin 90^0 \right) = jB_C = j\omega C$$

- *Admitancija Y*

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = Ye^{\mp j\varphi} = Y\left(\cos\varphi \mp j \sin\varphi \right) = G \mp jB$$

4.3. Analiza jednostavnih izmjeničnih mreža simboličkom metodom

Za odnose trenutačnih vrijednosti napona i struja na pasivnim elementima kruga (R, L i C) vrijedi:

$$\begin{aligned}
&R: \quad u_R = iR && i = \frac{u}{R} \\
&L: \quad u_L = L\frac{di_L}{dt} && i_L = \frac{1}{L}\int u_L dt \\
&C: \quad u_C = \frac{1}{C}\int i_C dt && i_C = C\frac{du_C}{dt}.
\end{aligned} \tag{4-33}$$

Temeljem gornjih izraza može se vršiti izravna pretvorba jednadžbi serijskih i paralelnih krugova u odgovarajuću simboličku prezentaciju.

Serijski spojevi

Kroz sve dijelove serijskog kruga teče struja $i = I_m \sin\omega t$, a ukupni se napon (napon izvora) dobije po II. KZ-u kao zbroj padova napona na pojedinim elementima kruga.

<u>Serijski R-L spoj</u>:

$$u = u_R + u_L = iR + L\frac{di}{dt} = RI_m \sin\omega t + L\omega I_m \cos\omega t = \cdots\cdots = \\ = I_m\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin\left(\omega t + arctg\frac{\omega L}{R}\right) = U_m \sin(\omega t + \varphi)\ . \tag{4-34}$$

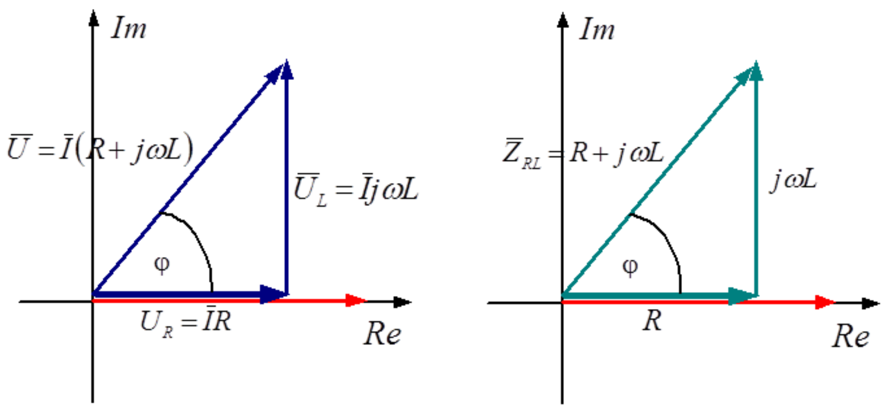
Umjesto mukotrpnog rada s trenutačnim vrijednostima izravna primjena simboličke metode omogućuje brži i jednostavniji put do rješenja. Potrebno je napon i struju zamijeniti pripadnim fazorima i primijeniti pravilo za zamjenu operatora deriviranja s $j\omega$:

$$u = iR + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{U} = \overline{I}R + j\omega L\overline{I} = \overline{I}(R + j\omega L) = \overline{I}(R + jX_L) = \overline{I}\overline{Z}_{RL}\ , \tag{4-35}$$

gdje je:

$$\overline{Z}_{RL} = R + j\omega L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\, e^{jarctg\frac{\omega L}{R}} = Z_{RL}e^{j\varphi_{RL}}\ . \tag{4-36}$$

Grafički prikaz u kompleksnoj ravnini istog je oblika kao i fazorski prikaz u pravokutnom koordinatnom sustavu – *Slika 4.5*.



Slika 4.5 – Grafički prikaz serijskog R-L spoja u kompleksnoj ravnini

Serijski R-C spoj:

$$u = u_R + u_C = iR + \frac{1}{C}\int idt\ . \tag{4-37}$$

Jednadžba pretvorena u simbolički oblik:

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_C = \overline{I}R + \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = \overline{I}\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right) = \overline{I}(R - jX_C) = \overline{I}\overline{Z}_{RC}\ , \tag{4-38}$$

gdje je:

$$\overline{Z}_{RC} = R - j\frac{1}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\, e^{-jarctg\frac{1}{\omega RC}} = Z_{RC}e^{-j\varphi_{RC}}\ . \tag{4-39}$$

Serijski L-C spoj:

$$u = u_L + u_C = L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt\ . \tag{4-40}$$

Simbolički oblik:

$$\overline{U} = \overline{U}_L + \overline{U}_C = j\omega L\overline{I} + \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\overline{I} = \pm jX\overline{I}\ , \qquad (4\text{-}41)$$

gdje je $X = X_L - X_C$.

<u>*Serijski R-L-C spoj*</u>:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt\ . \qquad (4\text{-}42)$$

Simbolički oblik:

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = R\overline{I} + j\omega L\overline{I} + \frac{1}{j\omega C}\overline{I} = \overline{I}\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right] = \overline{I}\left(R \pm jX\right) = \overline{I}\overline{Z}_{RLC}\ , \qquad (4\text{-}43)$$

gdje se modul i faza impedancije određuju iz izraza:

$$Z_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} \quad ; \quad tg\varphi_{RLC} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}\ . \qquad (4\text{-}44)$$

<u>*Višestruki serijski spojevi*</u>:

Općenito se odredi:

$$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 + \cdots = \overline{I}\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3 + \cdots\right) = \overline{I}\left[\sum_k R_k + j\left(\sum_l X_{L_l} - \sum_m X_{C_m}\right)\right] = \overline{I}\overline{Z}\ . \qquad (4\text{-}45)$$

Paralelni spojevi

Na svaku paralelnu granu priključen je napon $u = U_m sin\omega t$, a ukupna se struja dobije po I. KZ-u kao zbroj svih struja u paralelnim granama.

<u>*Paralelni R-L spoj*</u>:

$$i = i_R + i_L = \frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int udt\ . \qquad (4\text{-}46)$$

Jednadžba pretvorena u simbolički oblik:

$$\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L = \frac{\overline{U}}{R} + \frac{1}{j\omega L}\overline{U} = \overline{U}\left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}\right) = \overline{U}\left(G - jB_L\right) = \overline{U}\overline{Y}_{RL}\ , \qquad (4\text{-}47)$$

gdje je:

$$\overline{Y}_{RL} = G - jB_L = \sqrt{G^2 + B_L{}^2}\, e^{-jarctg\frac{B_L}{G}} = Y_{RL}e^{-j\varphi_{RL}}\ . \qquad (4\text{-}48)$$

<u>*Paralelni R-C spoj*</u>:

$$i = i_R + i_L = \frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int udt\ . \qquad (4\text{-}49)$$

Jednadžba pretvorena u simbolički oblik:

$$\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L = \frac{\overline{U}}{R} + \frac{1}{j\omega L}\overline{U} = \overline{U}\left(\frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}\right) = \overline{U}\left(G - jB_L\right) = \overline{U}\overline{Y}_{RL}\ , \qquad (4\text{-}50)$$

gdje je:

$$\overline{Y}_{RL} = G - jB_L = \sqrt{G^2 + B_L^{\,2}}\, e^{-jarctg\frac{B_L}{G}} = Y_{RL} e^{-j\varphi_{RL}} . \qquad (4\text{-}51)$$

Paralelni R-C spoj:

$$i = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{I} = \frac{\overline{U}}{R} + j\omega C\overline{U} = \overline{U}\left(G + jB_C\right) = \overline{U}\overline{Y}_{RC} , \qquad (4\text{-}52)$$

gdje je:

$$\overline{Y}_{RC} = G + jB_C = \sqrt{G^2 + B_C^{\,2}}\, e^{jarctg\frac{B_C}{G}} = Y_{RC} e^{j\varphi_{RC}} . \qquad (4\text{-}53)$$

Paralelni L-C spoj:

$$i = i_L + i_C = \frac{1}{L}\int udt + C\frac{du}{dt} . \qquad (4\text{-}54)$$

Simbolički oblik:

$$\overline{I} = \overline{I}_L + \overline{I}_C = \frac{1}{j\omega L}\overline{U} + j\omega C\overline{U} = j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)\overline{U} = \mp jB\overline{U} , \qquad (4\text{-}55)$$

gdje je $B = B_L - B_C$.

Paralelni R-L-C spoj:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int udt + C\frac{du}{dt} . \qquad (4\text{-}56)$$

Simbolički oblik:

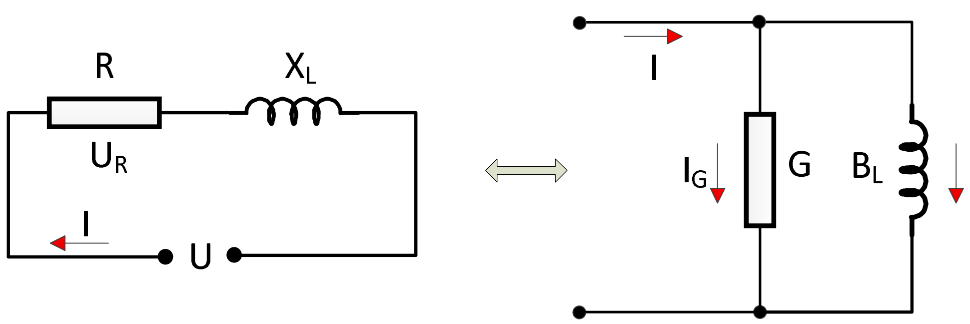
$$\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C = \frac{\overline{U}}{R} + \frac{1}{j\omega L}\overline{U} + j\omega C\overline{U} = \overline{U}\left[G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right] = \overline{U}\left[G - j\left(B_L - B_C\right)\right] = \overline{U}\overline{Y}_{RLC} . \qquad (4\text{-}57)$$

Modul i faza admitancije su:

$$Y_{RLC} = \sqrt{R^2 + \left(B_L - B_C\right)^2} \quad ; \quad tg\phi_{RLC} = -\frac{B_L - B_C}{R} . \qquad (4\text{-}58)$$

Pretvorbe: serijski spoj ⇔ paralelni spoj

Uvjet: fazni pomak te efektivne vrijednosti ukupnog napona i struje moraju ostati nepromijenjeni.
Primjer 1.: R-L spoj (Slika 4.6):



Slika 4.6 – Pretvorbe: serijski R-X_L spoj ⇔ paralelni G-B_L spoj

Za: $\bar{Z}_{RL} = R + jX_L$

$$\bar{Y}_{RL} = \frac{1}{\bar{Z}_{RL}} = \frac{1}{R + jX_L} \cdot \frac{R - jX_L}{R - jX_L} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{Z_{RL}^2} - j\frac{X_L}{Z_{RL}^2} = G - jB_L \qquad (4\text{-}59)$$

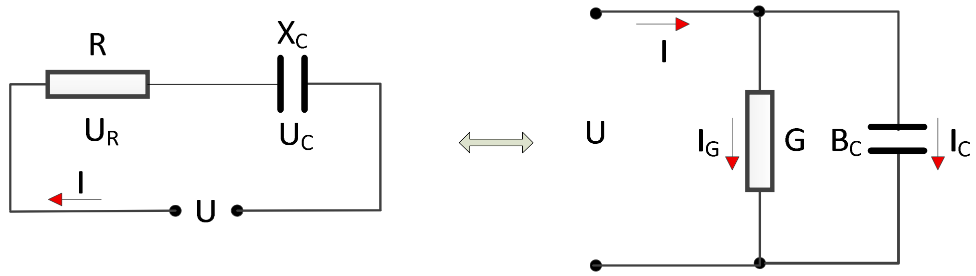
Negativni predznak imaginarnog dijela admitancije upućuje na induktivnu susceptanciju.
Za zadane elemente serijskog kruga (R, X_L) parametri ekvivalentnoga paralelnog kruga su:

$$G = \frac{R}{Z_{RL}^2} \qquad B_L = \frac{X_L}{Z_{RL}^2} \qquad Y = \frac{1}{Z}. \qquad (4\text{-}60)$$

Analogno bi za zadane elemente paralelnog kruga (G, B_C) parametri ekvivalentnoga serijskog kruga bili:

$$R = \frac{G}{Y_{RL}^2} \qquad X_L = \frac{B_L}{Y_{RL}^2} \qquad Z = \frac{1}{Y}. \qquad (4\text{-}61)$$

Primjer 2.: R-C spoj (Slika 4.7):



Slika 4.7 – Pretvorbe: serijski R-X_C spoj ⇔ paralelni G-B_C spoj

Za: $\bar{Z}_{RC} = R - jX_C$

$$\bar{Y}_{RC} = \frac{1}{\bar{Z}_{RC}} = \frac{1}{R - jX_C} \cdot \frac{R + jX_C}{R + jX_C} = \frac{R}{R^2 + X_C^2} + j\frac{X_C}{R^2 + X_C^2} = \frac{R}{Z_{RC}^2} + j\frac{X_C}{Z_{RC}^2} = G + jB_C \qquad (4\text{-}62)$$

Pozitivni predznak imaginarnog dijela admitancije upućuje na kapacitivnu susceptanciju.
Za zadane elemente serijskog kruga (R, X_C) parametri ekvivalentnoga paralelnog kruga su:

$$G = \frac{R}{Z_{RC}^2} \qquad B_C = \frac{X_C}{Z_{RC}^2} \qquad Y = \frac{1}{Z}. \qquad (4\text{-}63)$$

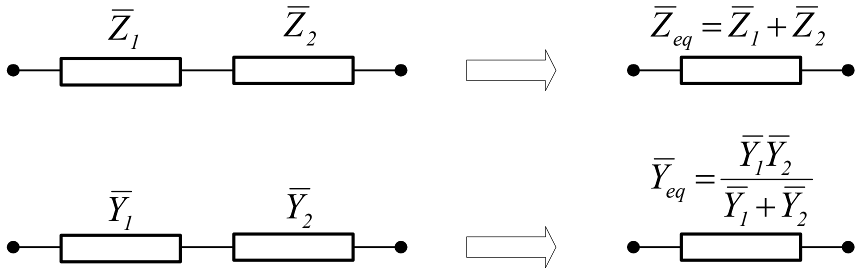
Analogno bi za zadane elemente paralelnog kruga (G, B_C) parametri ekvivalentnoga serijskog kruga bili:

$$R = \frac{G}{Y_{RC}^2} \qquad X_C = \frac{B_C}{Y_{RC}^2} \qquad Z = \frac{1}{Y}. \qquad (4\text{-}64)$$

Nadomjesna impedancija/admitancija

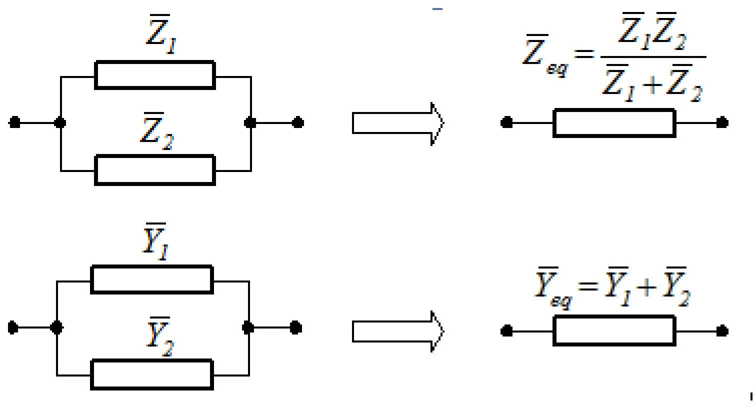
Primjenjuju se ista pravila kao i za krugove s linearnim otporima kod istosmjernih struja.

Određivanje nadomjesne impedancije i admitancije serijskog kruga prikazano je na *Slici 4.8*.



Slika 4.8 – Nadomjesna impedancija/admitancija serijskog kruga

Određivanje nadomjesne impedancije i admitancije paralelnog kruga prikazano je na *Slici 4.9*.

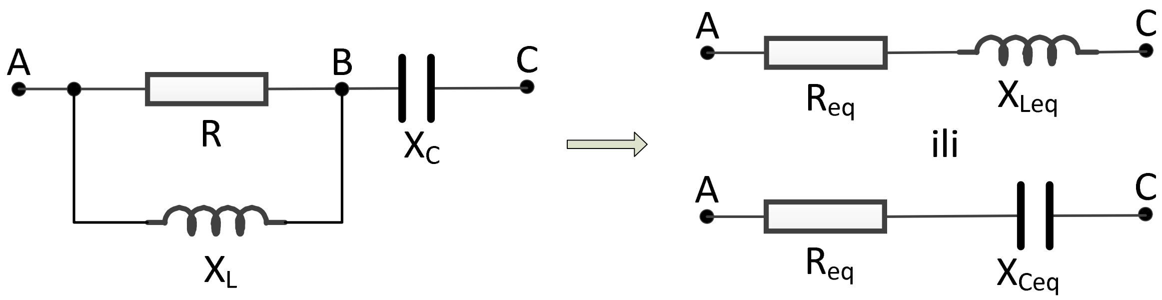


Slika 4.9 – Nadomjesna impedancija/admitancija paralelnog kruga

Nadomjesna impedancija mješovitog kruga (pretvorba u ekvivalentni serijski spoj serijsko-paralelnom redukcijom)

Do nadomjesnog otpora dolazi se metodom korak po korak uz uporabu relacija za serijski i paralelni spoj na pojedinim dijelovima mreže.

Primjer 1. (Slika 4.10):



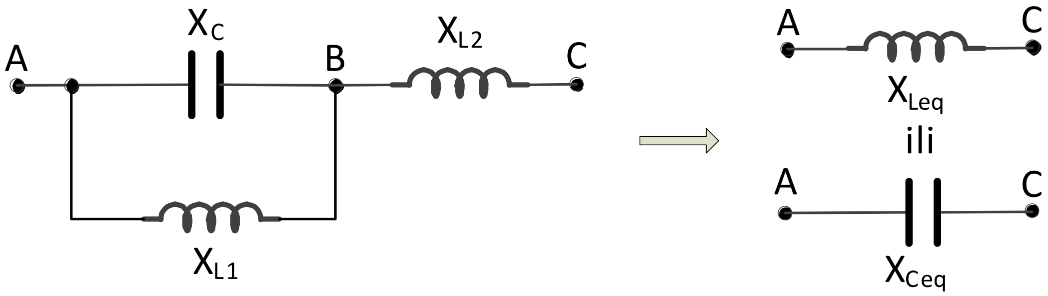
Slika 4.10 – Nadomjesna impedancija mješovitog RLC kruga

$$\overline{Z}_{AC} = \overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} - jX_C = \frac{R \cdot jX_L\left(R - jX_L\right)}{R^2 + X_L^2} - jX_C = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} + j\left(\frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2} - X_C\right) =$$

$$= \frac{R(\omega L)^2}{R^2+(\omega L)^2} + j\left(\frac{R^2\omega L}{R^2+(\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C}\right) = R_{eq} \pm jX_{eq} = \sqrt{R_{eq}^2+X_{eq}^2}\,e^{\pm j\,arctg\frac{X_{eq}}{R_{eq}}} \qquad (4\text{-}65)$$

Nadomjesna impedancija je induktivnog ili kapacitivnog karaktera.

Primjer 2. (Slika 4.11):



Slika 4.11 – Nadomjesna impedancija mješovitog LC kruga

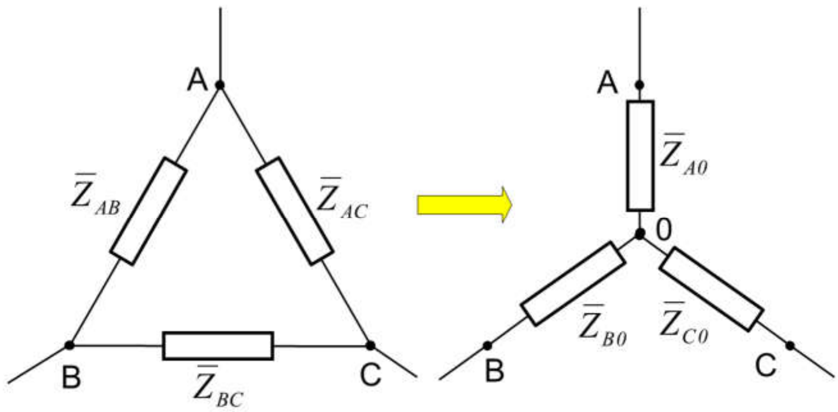
$$\overline{Z}_{AC} = \overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_{BC} = \frac{j\omega L_1 \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega L_2 = \frac{j\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C} + j\omega L_2 = j\left(\frac{\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C} + \omega L_2\right) \qquad (4\text{-}66)$$

Ekvivalentna impedancija je čisto induktivna ili kapacitivna reaktancija.

Pretvorbe: zvijezda ⇔ trokut

Za pretvorbe zvijezda ⇔ trokut vrijedi isto što vrijedi i za pretvorbe kod istosmjernih struja uz primjenu simboličke metode.

Pretvorba trokuta u zvijezdu prikazana je na *Slici 4.12*.

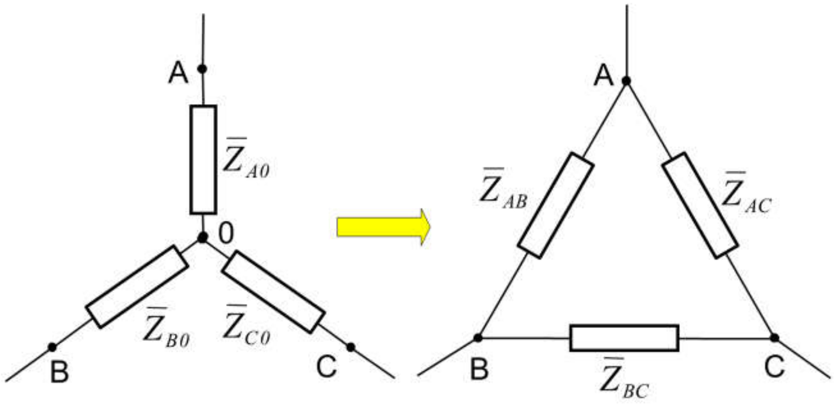


Slika 4.12 – Pretvorba: trokut → zvijezda

$$\overline{Z}_{A0} = \frac{\overline{Z}_{AB}\overline{Z}_{AC}}{\overline{Z}_{AB}+\overline{Z}_{AC}+\overline{Z}_{BC}} \quad ; \quad \overline{Z}_{B0} = \frac{\overline{Z}_{AB}\overline{Z}_{BC}}{\overline{Z}_{AB}+\overline{Z}_{AC}+\overline{Z}_{BC}} \quad ; \quad \overline{Z}_{C0} = \frac{\overline{Z}_{BC}\overline{Z}_{AC}}{\overline{Z}_{AB}+\overline{Z}_{AC}+\overline{Z}_{BC}} \qquad (4\text{-}67)$$

Za: $\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_{AC} = \overline{Z}_{BC} = \overline{Z}_{\Delta} \Rightarrow \overline{Z}_{\curlywedge} = \frac{1}{3}\overline{Z}_{\Delta}$

Pretvorba zvijezde u trokut prikazana je na *Slici 4.13*.



Slika 4.13 – Pretvorba: zvijezda → trokut

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_{A0} + \overline{Z}_{B0} + \frac{\overline{Z}_{AO}\overline{Z}_{B0}}{\overline{Z}_{C0}} \quad ; \quad \overline{Z}_{AC} = \overline{Z}_{A0} + \overline{Z}_{C0} + \frac{\overline{Z}_{AO}\overline{Z}_{C0}}{\overline{Z}_{B0}} \quad ; \quad \overline{Z}_{BC} = \overline{Z}_{B0} + \overline{Z}_{C0} + \frac{\overline{Z}_{BO}\overline{Z}_{C0}}{\overline{Z}_{A0}} \qquad (4\text{-}68)$$

Za: $\overline{Z}_{A0} = \overline{Z}_{B0} = \overline{Z}_{C0} = \overline{Z}_{\curlywedge} \Rightarrow \overline{Z}_{\Delta} = 3\overline{Z}_{\curlywedge}$

4.4. Analiza složenih mreža primjenom simboličke metode

Kompleksni prikaz struja, napona i drugih električnih veličina omogućuje rješavanje složenih izmjeničnih mreža uporabom metoda poznatih iz analize istosmjernih krugova. Sve tehnike rješavanja istosmjernih krugova primjenjive su i za izmjenične struje određene frekvencije. Bitna je razlika u činjenici da su izmjenični krugovi ovisni o frekvenciji.

U postavljanju jednadžbi potrebno je uzeti u obzir referentne smjerove napona i struja. Naponski i strujni izvori u potpunosti su definirani ako su zadani pripadnim kompleksnim brojem i referentnim smjerom. Strujama u pojedinim granama pridjeljuju se po volji referentni smjerovi. Kompleksni brojevi dobiveni proračunom za struje u mreži povezani su s prethodno odabranim referentnim smjerovima pojedinih struja.

***Ohmov zakon*:**

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \overline{U}\,\overline{Y} \quad ; \quad \overline{U} = \overline{I}\,\overline{Z} = \frac{\overline{I}}{\overline{Y}} \qquad (4\text{-}69)$$

***Kirchhoffovi zakoni*:**

I. Kirchhoffov zakon – algebarski zbroj kompleksnih struja što ulaze u čvor/izlaze iz čvora električnog kruga jednak je nuli (ili zbroj ulaznih jednak je zbroju izlaznih struja):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \overline{I}_i = 0 \quad ili \quad \sum_j \overline{I}_{ul} = \sum_k \overline{I}_{iz} \;\; ; \; i = j + k\,. \qquad (4\text{-}70)$$

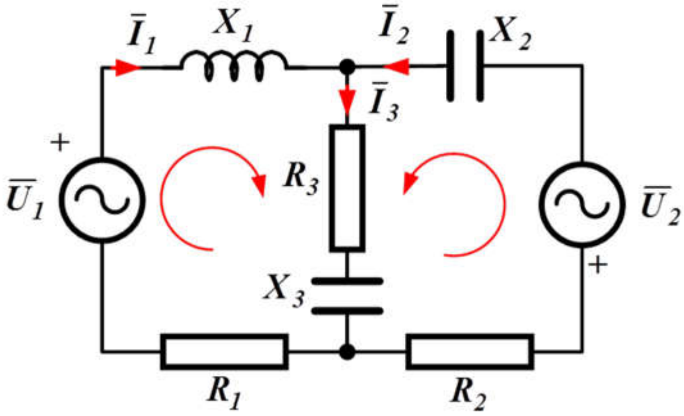
II. Kirchhoffov zakon – algebarski zbroj svih napona u zatvorenoj strujnoj petlji jednak je nuli (ili algebarski zbroj kompleksnih EMS-ova u zatvorenom električnom krugu jednak je zbroju padova napona u krugu):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \overline{U}_i = 0 \quad ili \quad \sum_j \overline{E}_j = \sum_k \overline{I}_k \overline{Z}_k \,. \tag{4-71}$$

Broj jednadžbi za rješavanje mreže:

$$\begin{aligned} &I.\ KZ: && Č\text{-}1 \\ &II.\ KZ: && G\text{-}(Č\text{-}1). \end{aligned} \tag{4-72}$$

Primjer: Za krug prema *Slici 4.14* postavite jednadžbe za određivanje struja $\overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3$ uporabom Kirchhoffovih zakona.

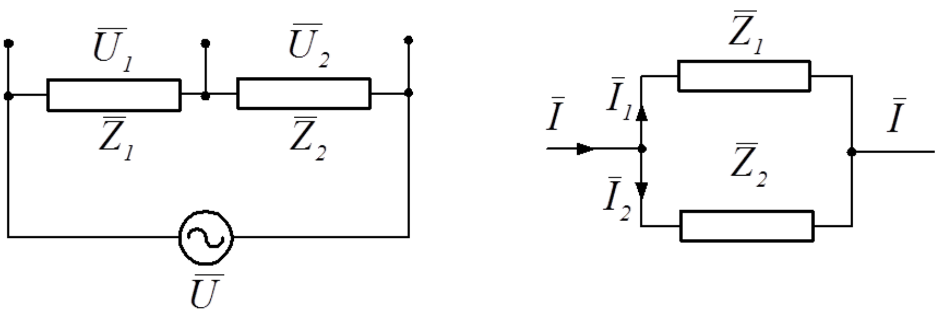


Slika 4.14 – Primjer primjene Kirchhoffovih zakona

$$\begin{aligned} &(1) \quad \overline{I}_1 + \overline{I}_2 - \overline{I}_3 = 0 \\ &(2) \quad \overline{U}_1 = \overline{I}_1(R_1 + jX_1) + \overline{I}_3(R_3 - jX_3) \quad \Longrightarrow \quad \overline{I}_1, \overline{I}_2, \overline{I}_3 \\ &(3) \quad -\overline{U}_2 = \overline{I}_2(R_2 - jX_2) + \overline{I}_3(R_3 - jX_3) \end{aligned} \tag{4-73}$$

***Djelila napona i struja*:**

Temeljem I. i II. KZ-a mogu se odrediti relacije koje vrijede za primjenu strujnog i naponskog djelila prema *Slici 4.16*.



Slika 4.15 – Naponsko i strujno djelilo

Djelomični naponi:

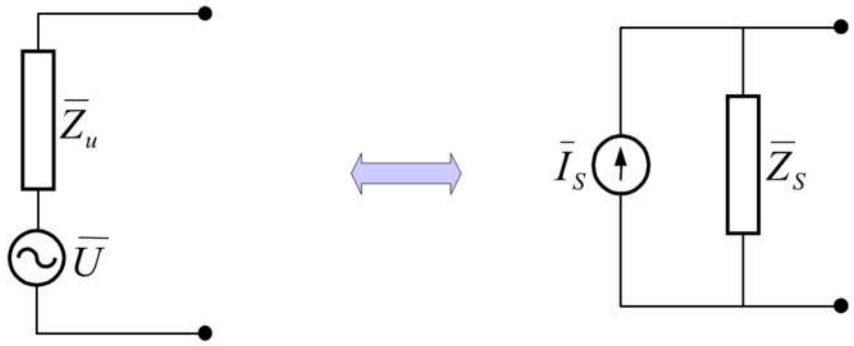
$$\overline{U}_1 = \overline{U}\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \quad ; \quad \overline{U}_2 = \overline{U}\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \tag{4-74}$$

Djelomične struje:

$$\overline{I}_1 = \overline{I}\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \quad ; \quad \overline{I}_2 = \overline{I}\frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \tag{4-75}$$

Pretvorbe: naponski izvor ⇔ strujni izvor

Pretvorbe realnog naponskog u realni strujni izvor i obratno prikazane su na *Slici 4.16*.



Slika 4.16 – Pretvorbe: naponski izvor ⇔ strujni izvor

Za zadani naponski izvor parametri nadomjesnog strujnog izvora su:

$$\overline{I}_S = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_u} \quad ; \quad \overline{Z}_S = \overline{Z}_u \,. \tag{4-76}$$

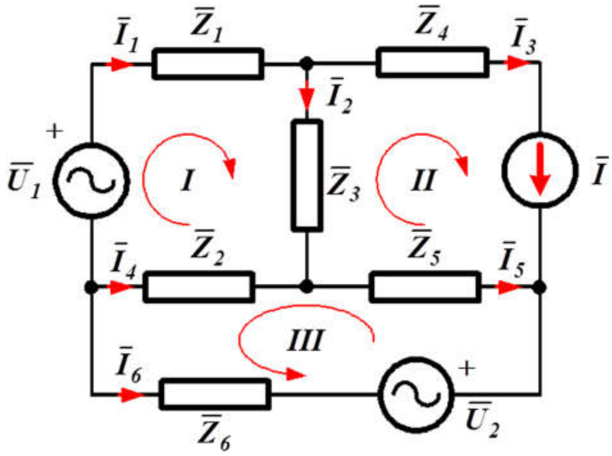
Za zadani strujni izvor parametri nadomjesnog naponskog izvora su:

$$\overline{U} = \overline{I}_S \overline{Z}_S \quad ; \quad \overline{Z}_u = \overline{Z}_S \,. \tag{4-77}$$

Metoda konturnih struja

Zahtijeva manji broj jednadžbi – postavljaju se samo jednadžbe kontura sukladno II. KZ-u, tj.: *G - (Č-1)*. Ako složeni krug sadrži strujne izvore, može se broj neophodnih jednadžbi smanjiti za broj strujnih izvora S_I [G - ($Č$-1) - S_I], tako da se grane sa strujnim izvorima izaberu za nezavisne grane. Struja u *nezavisnoj grani* konture pripada samo jednoj konturi i jednaka je toj konturnoj struji. Struje u *zajedničkim granama* kontura jednake su algebarskom zbroju konturnih struja koje teku tom granom.

<u>Primjer</u>: Postavite jednadžbe za određivanje struja u svim granama kruga prema *Slici 4.17* uporabom metode konturnih struja.



Slika 4.17 – Primjer primjene metode konturnih struja

$$\overline{I}_{II} = \overline{I}$$

$$\overline{U}_1 = \overline{I}_I\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3\right) - \overline{I}\overline{Z}_3 + \overline{I}_{III}\overline{Z}_2 \tag{4-78}$$

$$\overline{U}_2 = \overline{I}_{III}\left(\overline{Z}_2+\overline{Z}_5+\overline{Z}_6\right)+\overline{I}_I\overline{Z}_2+\overline{I}\overline{Z}_5$$

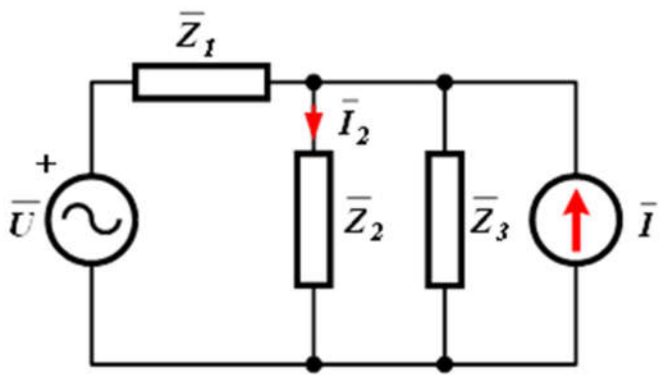
$$\overline{I}_1=\overline{I}_I \quad ; \quad \overline{I}_2=\overline{I}_I-\overline{I} \quad ; \quad \overline{I}_3=\overline{I}$$

$$\overline{I}_4=-\overline{I}_I-\overline{I}_{III} \quad ; \quad \overline{I}_5=-\overline{I}-\overline{I}_{III} \quad ; \quad \overline{I}_6=\overline{I}_{III} \tag{4-79}$$

Metoda superpozicije

Princip superpozicije vrijedi za linearne mreže. Struja u nekoj grani složene mreže može se odrediti kao algebarski zbroj pojedinačnih (parcijalnih) struja nastalih djelovanjem svake pojedine elektromotorne sile, odnosno strujnog izvora. Pri određivanju parcijalne struje sve se preostale elektromotorne sile i strujni izvori odstranjuju iz mreže. Na mjestima gdje su bile elektromotorne sile postavlja se kratki spoj, a na položajima strujnih izvora je prekid kruga.

Primjer: Za krug prema *Slici 4.18* odredite struju $\overline{I}_2$ uporabom metode superpozicije.



Slika 4.18 – Primjer primjene metode superpozicije

$$\overline{I}_2=\overline{I}_2'+\overline{I}_2'' \tag{4-80}$$

$$\overline{I}_2' = \frac{\overline{U}\,\dfrac{\dfrac{\overline{Z}_2\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}}{\dfrac{\overline{Z}_2\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}+\overline{Z}_1}}{\overline{Z}_2} \quad ; \quad \overline{I}_2''=\overline{I}\,\frac{\dfrac{\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}}{\dfrac{\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}+\overline{Z}_2} \tag{4-81}$$

$$\overline{I}_2=\frac{\overline{U}\cdot\overline{Z}_3+\overline{I}\cdot\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_2+\overline{Z}_1\overline{Z}_3+\overline{Z}_2\overline{Z}_3} \tag{4-82}$$

Theveninov teorem

Za određivanje struje u nekoj grani *n* složenog kruga potrebno je:

- prekinuti granu kojom teče tražena struja;
- ostatak mreže od mjesta prekida zamijeniti Theveninovim ekvivalentnim naponskim izvorom $\overline{E}_T, \overline{Z}_T$);
- odrediti traženu struju prema:

$$\overline{I}_n=\frac{\overline{E}_T}{\overline{Z}_T+\overline{Z}_n}, \tag{4-83}$$

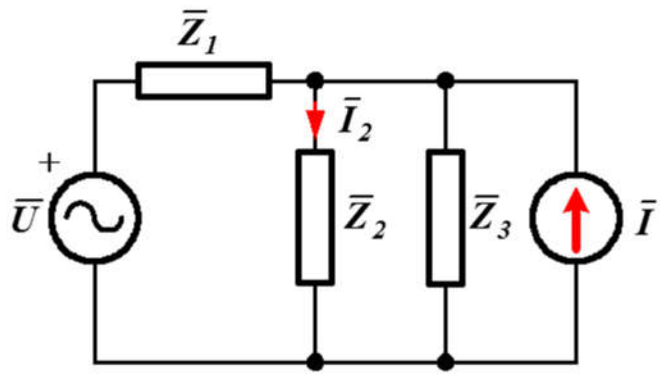
gdje je:

$\overline{E}_T$ – kompleksni EMS Theveninova izvora (napon otvorenog kruga na izlaznim terminalima nakon odstranjivanja grane *n* iz mreže);

$\overline{Z}_T$ – unutarnja impedancija Theveninova generatora, tj. kompleksna impedancija ostatka složene mreže gledano s otvorenih terminala grane *n*. Dobije se kada se kratko spoje svi naponski i odstrane svi strujni izvori;

$\overline{Z}_n$ – kompleksna impedancija grane *n.*

Primjer: Za krug prema *Slici 4.19* odredite struju $\overline{I}_2$ uporabom Theveninova teorema.



Slika 4.19 – Primjer primjene Theveninova teorema

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{E}_T}{\overline{Z}_T + \overline{Z}_2} \tag{4-84}$$

$$\overline{Z}_T = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3} \quad ; \quad \overline{E}_T = \overline{Z}_3 \left(\overline{I} \cdot \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3} + \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_3} \right) \tag{4-85}$$

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U} \cdot \overline{Z}_3 + \overline{I} \cdot \overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_3}{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2 + \overline{Z}_1 \overline{Z}_3 + \overline{Z}_2 \overline{Z}_3} \tag{4-86}$$

Nortonov teorem

Za određivanje struje u nekoj grani *n* složenog kruga potrebno je:

- prekinuti granu kojom teče tražena struja;
- ostatak mreže od mjesta prekida zamijeniti Nortonovim ekvivalentnim strujnim izvorom $\overline{I}_N, \overline{Z}_N$;
- odrediti traženu struju prema:

$$\overline{I}_n = \overline{I}_N \frac{\overline{Z}_N}{\overline{Z}_N + \overline{Z}_n}, \tag{4-87}$$

gdje je:

$\bar{I}_N$ – kompleksna struja Nortonova strujnog izvora (struja kratkog spoja između izlaznih terminala);

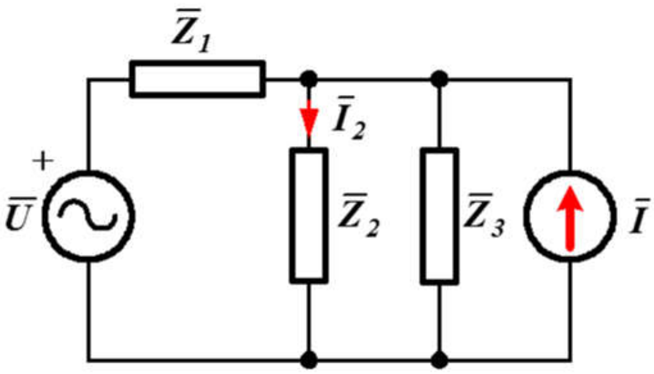
$\bar{Z}_N$ – unutarnja impedancija Nortonova generatora, tj. kompleksna impedancija ostatka složene mreže gledano s otvorenih terminala grane *n*. Dobije se kada se kratko spoje svi naponski i odstrane svi strujni izvori;

$\bar{Z}_n$ – kompleksna impedancija grane *n*.

Napomena: Unutarnje impedancije Theveninova odnosno Nortonova generatora mogu se odrediti i temeljem izraza:

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_N = \frac{\bar{U}_{OK}}{\bar{I}_{KS}} = \frac{\bar{U}_T}{\bar{I}_N}. \tag{4-88}$$

Primjer: Za krug prema *Slici 4.20* odredite struju $\bar{I}_2$ uporabom Nortonova teorema.



Slika 4.20 – Primjer primjene Nortonova teorema

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_N \cdot \frac{\bar{Z}_N}{\bar{Z}_N + \bar{Z}_2} \tag{4-89}$$

$$\bar{Z}_N = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3} \quad ; \quad \bar{I}_N = \bar{I} + \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1} \tag{4-90}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U} \cdot \bar{Z}_3 + \bar{I} \cdot \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 + \bar{Z}_1 \bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 \bar{Z}_3} \tag{4-91}$$

Millmannov teorem (metoda dvaju čvorova)

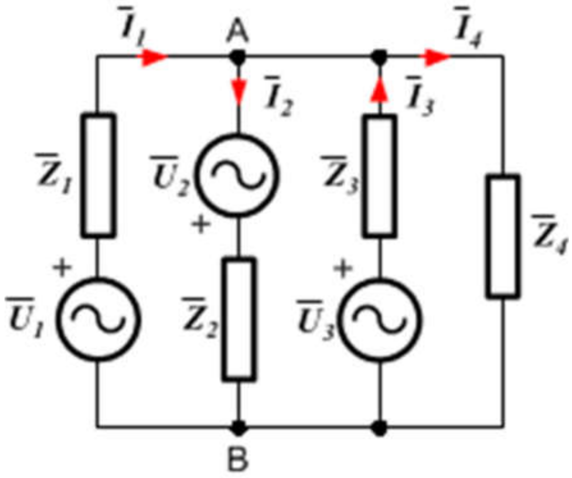
Vrijedi za krug s dva čvora *A* i *B* koji povezuju proizvoljan broj paralelnih grana. Napon između čvorova je:

$$\bar{U}_{AB} = \frac{\sum_i \bar{E}_i \bar{Y}_i}{\sum_i \bar{Y}_i} = \frac{\bar{E}_1 \bar{Y}_1 + \bar{E}_2 \bar{Y}_2 + \bar{E}_3 \bar{Y}_3 + \cdots\cdot}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \cdots\cdot}. \tag{4-92}$$

Struje u paralelnim granama su:

$$\bar{I}_i = \left(\bar{E}_i - \bar{U}_{AB}\right) \bar{Y}_i. \tag{4-93}$$

Primjer: Postavite jednadžbe za određivanje struja u svim granama kruga prema *Slici 4.21* uporabom Millmannova teorema.



Slika 4.21 – Primjer primjene Millmannova teorema

$$\bar{U}_{AB}=\frac{\bar{U}_1\bar{Y}_1-\bar{U}_2\bar{Y}_2+\bar{U}_3\bar{Y}_3}{\bar{Y}_1+\bar{Y}_2+\bar{Y}_3+\bar{Y}_4} \quad ; \quad \bar{I}_i=\left(\bar{U}_i-\bar{U}_{AB}\right)\bar{Y}_i \tag{4-94}$$

$$\bar{I}_1=\frac{\bar{U}_1-\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_1} \quad ; \quad \bar{I}_2=\frac{\bar{U}_2+\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_2} \quad ; \quad \bar{I}_3=\frac{\bar{U}_3-\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_3} \quad ; \quad \bar{I}_4=\frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_4} \tag{4-95}$$

4.5. Prikaz snaga u simboličkoj metodi

Općenito je:

- *trenutačna snaga p(t)*: $p(t)=u(t)i(t)$
- *srednja snaga P* za periodični signal perioda *T*: $P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt$.

U uvjetima ustaljenog stanja sinusoidnih signala (engl. *sinusoidal steady state*) svi su naponi i struje sinusnog karaktera i jednake su frekvencije. Neka su napon i struja nekog trošila:

$$u(t)=U_m\sin\left(\omega t+\varphi_u\right)$$

$$i(t)=I_m\sin\left(\omega t+\varphi_i\right). \tag{4-96}$$

Trenutačna snaga sastoji se od jedne komponente konstantnog iznosa i druge komponente koja se mijenja u ritmu dvostruke frekvencije:

$$p(t)=U_m\sin\left(\omega t+\varphi_u\right)I_m\sin\left(\omega t+\varphi_i\right)=\frac{U_mI_m}{2}\cos\left(\varphi_u-\varphi_i\right)-\frac{U_mI_m}{2}\cos\left(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i\right). \tag{4-97}$$

Gornji izraz slijedi iz trigonometrijske jednakosti: $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$.

Srednja snaga koju uzima trošilo je:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_mI_m}{2}\cos\left(\varphi_u-\varphi_i\right)dt-\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_mI_m}{2}\cos\left(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i\right)dt\ . \tag{4-98}$$

Drugi integral u izrazu *(4-98)* jednak je nuli, jer je integracija kosinusne funkcije protegnuta na cijeli period, pa je:

$$P = \frac{U_m I_m}{2} cos\left(\varphi_u - \varphi_i\right) = UI\ cos\left(\varphi_u - \varphi_i\right) = UI\ cos\ \varphi\ , \tag{4-99}$$

što je poznata relacija za djelatnu snagu.

Kako uvesti fazorsku (kompleksnu) notaciju u odnose snaga u izmjeničnom krugu?

Prividna kompleksna snaga $\overline{S}$ treba biti kompleksni broj čiji je realni dio djelatna, a imaginarni dio jalova snaga. Snaga $\overline{S}$ ne može se, po uzoru na istosmjernu snagu, računati kao umnožak kompleksnih vrijednosti napona i struje:

$$\overline{UI} = Ue^{j\varphi_u} Ie^{j\varphi_i} = UIe^{j(\varphi_u+\varphi_i)}. \tag{4-100}$$

Realni bi dio bio: $UIcos(\varphi_u+\varphi_i) \neq UIcos\varphi$. Rezultat nema fizikalnog značenja. Naime, snaga se mijenja dvostrukom frekvencijom, a kada se radi s kompleksnim brojevima različitih frekvencija, nije moguća izravna primjena zakona elektrotehnike u kompleksnom obliku.

Kako bi se u argumentu relacije za snagu pojavila razlika $\left(\varphi_u - \varphi_i\right) = \varphi$, potrebno je odabrati konjugirano kompleksnu vrijednost struje $\overline{I}^*$, pa je snaga $\overline{S}$ kompleksni broj definiran izrazom:

$$\overline{S} = \overline{UI}^*. \tag{4-101}$$

Razvoj gornje relacije daje:

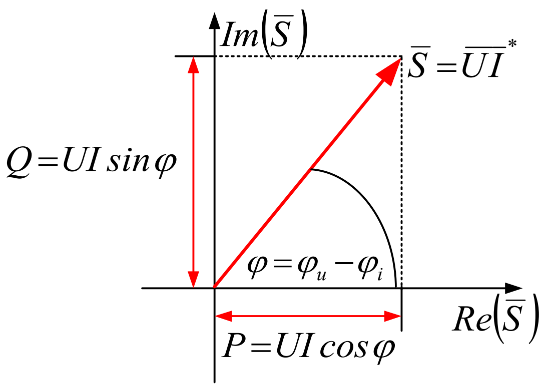
$$\overline{S} = \overline{UI}^* = Ue^{j\varphi_u} Ie^{-j\varphi_i} = UIe^{j(\varphi_u-\varphi_i)} = Se^{j\varphi} = S\,cos\,\varphi + jS\,sin\,\varphi = P + jQ\,. \tag{4-102}$$

Aktivna i reaktivna snaga su:

$$P = Re\left(\overline{UI}^*\right) = Re\left[UIe^{j(\varphi_u-\varphi_i)}\right] = UI\,cos\left(\varphi_u - \varphi_i\right) = UI\,cos\,\varphi = S\,cos\,\varphi$$

$$Q = Im\left(\overline{UI}^*\right) = Im\left[UIe^{j(\varphi_u-\varphi_i)}\right] = UI\,sin\left(\varphi_u - \varphi_i\right) = UI\,sin\,\varphi = S\,sin\,\varphi\,. \tag{4-103}$$

Trokut snaga u kompleksnoj ravnini prikazan je na *Slici 4.22*.



Slika 4.22 – Trokut snaga u kompleksnoj ravnini

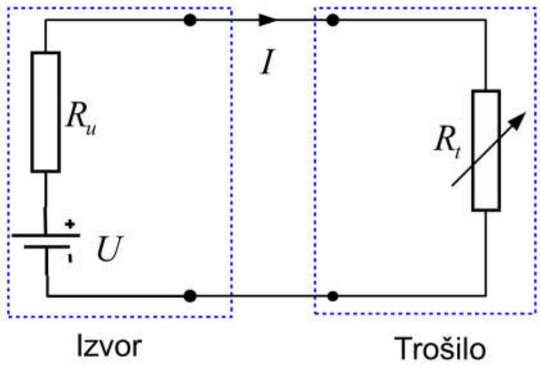
Prividna snaga i fazni kut su:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad ; \quad \varphi = arctg\,\frac{Q}{P}. \tag{4-104}$$

4.5.1. Teorem o maksimalnoj snazi u izmjeničnim mrežama

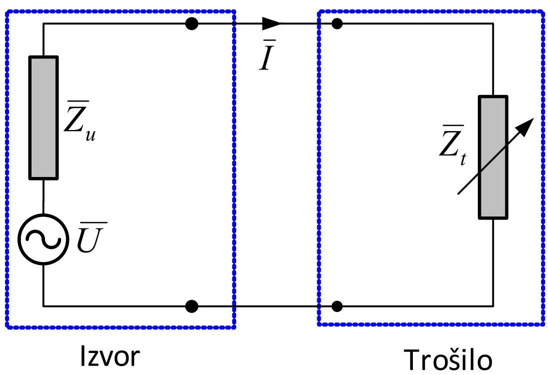
Uvjet za prijenos maksimalne snage (prilagodba snage) za istosmjerne mreže s linearnim otpornicima jest da otpor trošila mora biti jednak unutarnjem otporu istosmjernog izvora – *Slika 4.23*.

$$R_u = R_t$$



Slika 4.23 – Prilagodba u istosmjernom krugu

Isti bi uvjet vrijedio i za izmjenične mreže s čistim djelatnim otporima. U složenim izmjeničnim mrežama s dodatnim elementima L i C koji pohranjuju energiju, uvjet maksimalnog prijenosa snage mora se proširiti. U općem slučaju trošilo promjenljive impedancije $\overline{Z}_t$ spojeno je na složenu izmjeničnu mrežu. Složena se mreža može zamijeniti aktivnim dvopolom (Theveninov ekvivalent) s nadomjesnom elektromotornom silom, EMS $\overline{U}$, i nadomjesnom unutarnjom impedancijom $\overline{Z}_u$, kao na *Slici 4.24*.



Slika 4.24 – Pojednostavljen prikaz složene izmjenične mreže

Teorem o prijenosu maksimalne snage u izmjeničnim mrežama glasi:

Za zadani izmjenični izvor (fiksni $\overline{U}, \overline{Z}_u, \omega$) srednja snaga isporučena trošilu bit će maksimalna ako je ispunjen uvjet da je impedancija trošila jednaka konjugirano kompleksnoj vrijednosti unutarnje impedancije izvora.

$$\overline{Z}_t = \overline{Z}_u^* \quad tj. \quad R_t = R_u \quad i \quad X_t = -X_u \tag{4-105}$$

Maksimalna prosječna snaga je:

$$P_{max} = I^2 R_t = \frac{U^2}{4R_t}. \tag{4-106}$$

Dokaz za gornje tvrdnje

Fazor struje je:

$$\bar{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_u + \overline{Z}_t} = \frac{\overline{U}}{(R_u + R_t) + j(X_u + X_t)} . \qquad (4\text{-}107)$$

Efektivna vrijednost struje:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{(R_u + R_t)^2 + (X_u + X_t)^2}} . \qquad (4\text{-}108)$$

Srednja snaga isporučena trošilu:

$$P = I^2 R_t = \frac{U^2 R_t}{(R_u + R_t)^2 + (X_u + X_t)^2} . \qquad (4\text{-}109)$$

Snaga je funkcija dviju varijabla, R_t i X_t, jer R_u i X_u imaju unaprijed definiranu fiksnu vrijednost. Za određivanje uvjeta maksimalne snage potrebno je izjednačiti parcijalne derivacije $\partial P / \partial R_t$ i $\partial P / \partial X_t$ s nulom te iz dobivenih dviju jednadžba izraziti R_t i X_t.

$$\frac{\partial P}{\partial R_t} = \frac{U^2\left[(R_u + R_t)^2 + (X_u + X_t)^2\right] - 2U^2 R_t (R_u + R_t)}{\left[(R_u + R_t)^2 + (X_u + X_t)^2\right]^2} = 0 \qquad (4\text{-}110)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_t} = \frac{-2U^2 R_t (X_u + X_t)}{\left[(R_u + R_t)^2 + (X_u + X_t)^2\right]^2} = 0 \qquad (4\text{-}111)$$

Jedino rješenje druge jednadžbe koje ima fizikalnog smisla jest: $X_t = -X_u$.

Uvrštenjem u prvu jednadžbu slijedi:

$$\frac{U^2 (R_u - R_t)}{(R_u + R_t)^3} = 0 . \qquad (4\text{-}112)$$

Fizikalno značenje ima samo rješenje: $R_t = R_u$.

Oba rješenja opisana su jedinstvenim izrazom: $\overline{Z}_t = \overline{Z}_u^*$.

Uvrštavanjem u relaciju za snagu dobije se: $P_{max} = \dfrac{U^2}{4R_u}$.

Dobivena maksimalna snaga koja se može isporučiti trošilu naziva se *dostupna snaga* (engl. *available power*) fiksnog izvora.

Korisnost η je omjer snage na trošilu P_t i snage koju razvija generator P_g:

$$\eta = \frac{P_t}{P_g} = \frac{I^2 R_t}{I^2 (R_u + R_t)} = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \eta(\%) = 50\% . \qquad (4\text{-}113)$$

Do teorema o maksimalnoj snazi može se doći i bez formalnog dokazivanja. Naime, za bilo koji $\overline{Z}_t$ spojen na izvor i ukupnu reaktanciju kruga $(X_u + X_t)$ različitu od nule, iznos struje, pa stoga i snaga isporučena trošilu, uvijek se može povećati prilagodbom reaktancije tako da bude $X_t = -X_u$. U takvim uvjetima krug ostaje samo s djelatnim otporima, a tada vrijedi $R_t = R_u$.

Gornje relacije za prijenos maksimalne snage vrijede kada se R_t i X_t mogu prilagođivati. Ako je samo R_t prilagodljiv (X_t fiksan), uvjet za maksimalan prijenos snage je:

$$R_t = \sqrt{R_u^2 + \left(X_u + X_t\right)^2}\ . \tag{4-114}$$

Za slučaj kada je trošilo čisto djelatni otpor $(X_t = 0)$, prilagodba nastupa onda kada je:

$$R_t = \sqrt{R_u^2 + X_u^2}\ . \tag{4-115}$$

Prilagodba, odnosno prijenos maksimalne snage posebno su važni u komunikacijskim mrežama, gdje se želi izvući maksimalna snaga korisnog signala koji sadrži informaciju.

U energetskim mrežama za prijenos i distribuciju električne energije prijenos maksimalne snage nije od presudne važnosti. Važnija je korisnost.

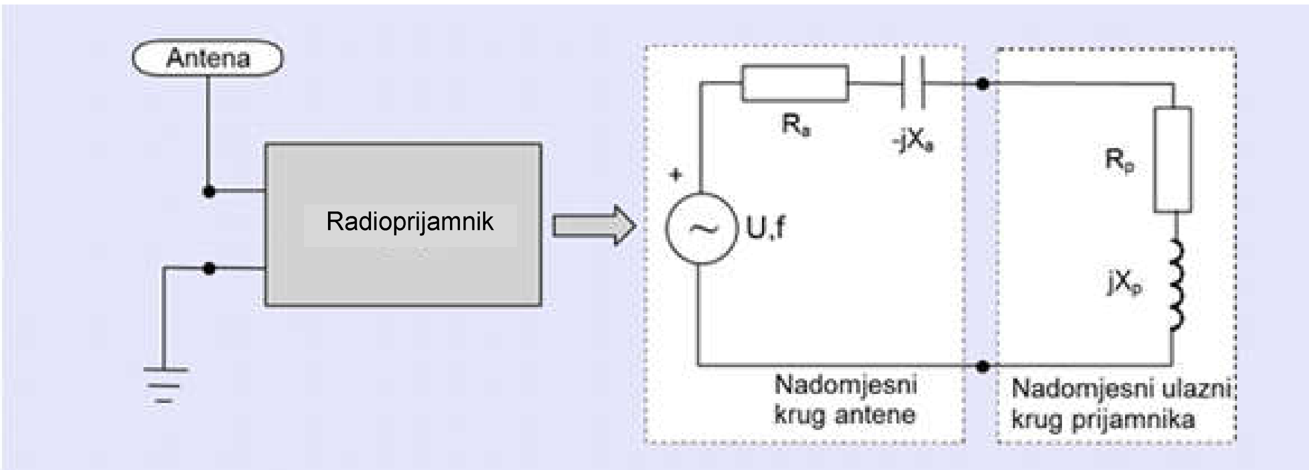
Istosmjerni i izmjenični naponski izvori/generatori obično imaju mali otpor, odnosno impedanciju. Primjerice, akumulator u automobilu mora osigurati približno konstantan izlazni napon za očekivane struje trošila. Kontinuiran rad u uvjetima prijenosa maksimalne snage preopteretio bi i na kraju uništio akumulator.

Prije primjene teorema o maksimalnoj snazi potrebno je odrediti Theveninov naponski ekvivalent koji predstavlja izvor linearne mreže s dva terminala. Na tako prikazan izvor spojeno je pripadno trošilo.

Primjenu teorema o maksimalnoj snazi pokazat ćemo na dvama primjerima gdje su za prilagodbu uporabljeni sprežni četveropol, odnosno transformator.

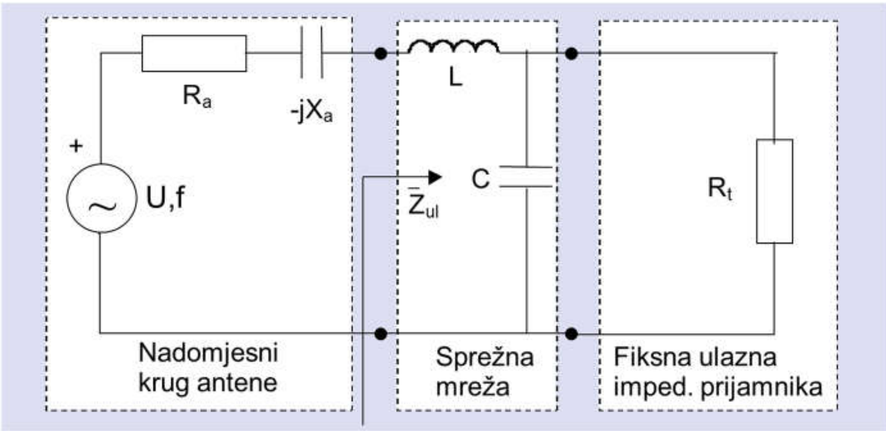
Primjer 1.: Antena je spojena na ulazni krug radijskog prijamnika kao na *Slici 4.25*. Antena prima elektromagnetske valove koje na određenoj frekvenciji f emitira željena radijska postaja. Snaga koja se može „izvući“ iz antene vrlo je malena, obično reda veličine 10^{-6} W, pa je potrebno s antenskog sustava dobiti što je moguće veću snagu. U svrhu analize antena se može prikazati odgovarajućim Theveninovim ekvivalentom. Kako bi se s antene u prijamnik prenijela maksimalna snaga, ulazna impedancija prijamnika mora biti:

$$\overline{Z}_p = R_p + jX_p = \left(R_a - jX_a\right)^*\ . \tag{4-116}$$



Slika 4.25 – Primjer primjene prilagodbe snage

U dosadašnjoj analizi pretpostavka je bila kako se impedancija trošila može prilagođivati. U praksi je trošilo često unaprijed poznatog fiksnog iznosa. U takvim je slučajevima potrebno projektirati mrežu za spregu (povezivanje) između izvora i trošila. Takva je mreža četveropol koji se sastoji od pasivnih elemenata bez gubitaka (L i C). Sprežna mreža transformira fiksnu impedanciju trošila u onu čija je konjugirana vrijednost prilagođena fiksnoj impedanciji izvora. Time je omogućen prijenos maksimalne snage na trošilo. Za razmatrani primjer u realnim slučajevima ulazna impedancija u prijamnik je djelatnog karaktera, pa je potrebno između antenskog sustava i ulaza u prijamnik postaviti sprežni četveropol. To je mreža s parom ulaznih i parom izlaznih stezaljka. Shema s umetnutim četveropolom za spregu prikazana je na *Slici4.26*.



Slika 4.26 – Primjer primjene prilagodbe snage preko sprežnog kruga

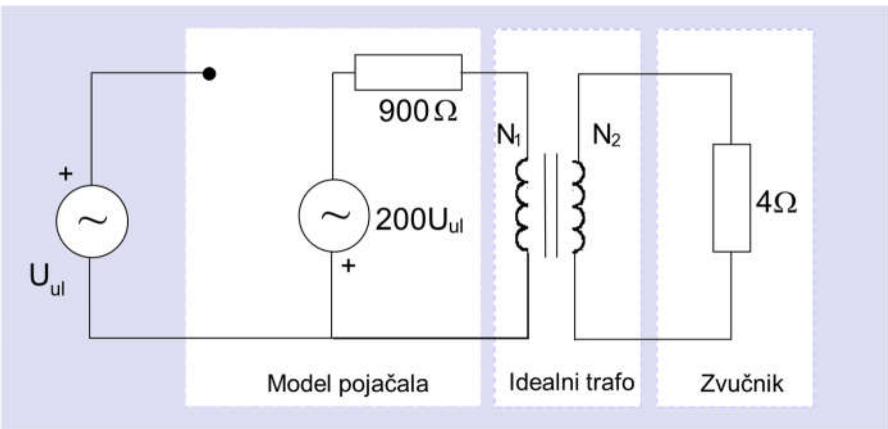
Prilagodba se može postići različitim rasporedom elemenata unutar četveropola. Elementi moraju biti tako odabrani da ulazna impedancija:

$$\overline{Z}_{ul} = j\omega L + \cfrac{1}{j\omega C + \cfrac{1}{R_t}} \tag{4-117}$$

mora biti konjugirano kompleksna vrijednost impedancije izvora (antenskog sustava).

Primjer 2.:

Kao element za prilagodbu može se upotrijebiti i transformator, primjerice kada je potrebno, radi prijenosa maksimalne snage, prilagoditi izlaznu impedanciju pojačala na impedanciju zvučnika.

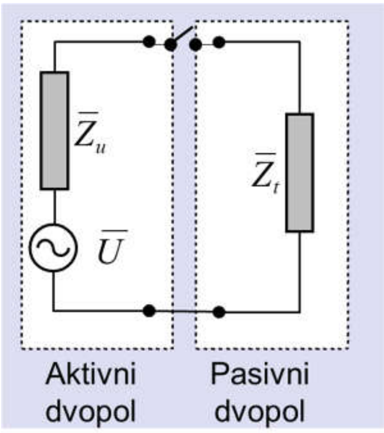


Slika 4.27 – Primjer primjene prilagodbe snage pomoću transformatora

5. ČETVEROPOLI

U dosadašnjim analizama električni krugovi razmatrani su kao aktivni, odnosno pasivni dvopoli prikazani jednim parom ulaznih ili izlaznih stezaljka (engl. *one port – two terminals*). Svojstvo je dvopola da za bilo koji napon na njegovim stezaljkama struja koja ulazi u jednu stezaljku mora biti jednaka struji koja izlazi iz druge stezaljke.

Složena se mreža u cilju određivanja struje i napona na trošilu može svesti na aktivni dvopol prikazan Theveninovim nadomjesnim naponskim izvorom. Dvopol se smatra aktivnim jer sadrži izvor EMS-a. Izlazne stezaljke (terminali) aktivnog dvopola istovremeno su ulazne stezaljke pasivnog dvopola predstavljenoga otporom trošila kao na *Slici 5.1*.



Slika 5.1 – Mreža s aktivnim i pasivnim dvopolom

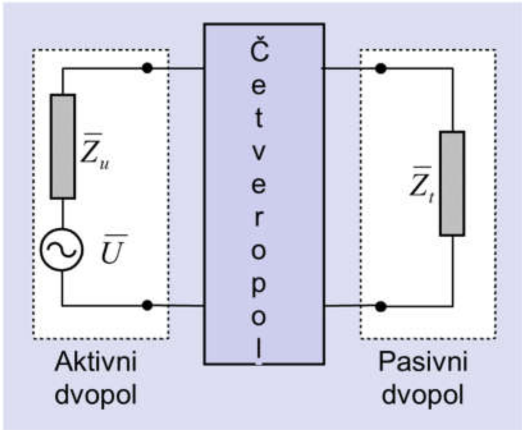
Temeljni dijelovi svakog električnog kruga su izvor i trošilo kao krajnje odredište za prijam energije ili informacije. Izvor i trošilo (žarulja, motor, zvučnik, pisač...) jesu dvopoli koje može povezivati samo prekidač (sklopka) koja uključuje/isključuje struju u krugu.

Međutim, često je potrebno na određeni način intervenirati između izvora i trošila, primjerice umetnuti transformator, pojačalo signala ili distribucijski sustav. Umetnuti element ili sustav tada mora imati najmanje dva para stezaljka: ulazne za spajanje na izvor i izlazne za spajanje na trošilo, kao na *Slici 5.2*.

U analizi složenih sustava često je prikladnije pojedine dijelove složenog sustava razmatrati kao blokove s dvjema ulaznim i dvjema izlaznim stezaljkama. Takve blokove nazivamo četveropolima.

Četveropoli su sastavni dio elektroničkih i komunikacijskih sustava, prijenosnih i distribucijskih sustava u energetici, kao i sustava automatskog upravljanja. Električni signal ili električna energija s nekog izvora prima se na ulazne stezaljke četveropola, obrađuje se unutar njega i usmjeruje preko izlaznih stezaljka na sljedeći blok sustava ili trošilo.

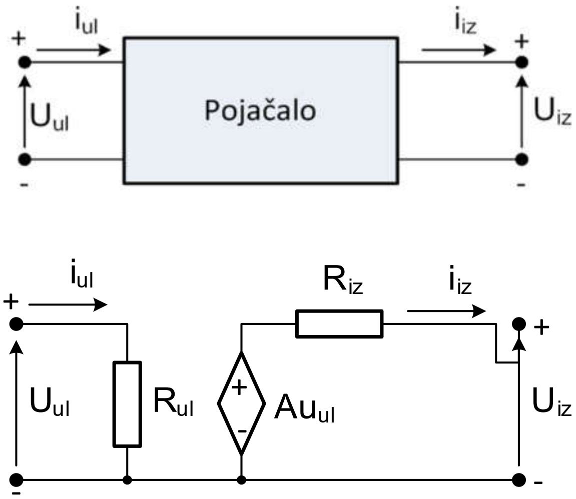
Naziv četveropol je uobičajen jer četveropol sadrži četiri stezaljke. Ispravnije bi bilo definirati ih kao mreže ili sklopove s dva para izvoda – ulaznim i izlaznim stezaljkama (engleski nazivi: *two port network*, *four-terminal network*).



Slika 5.2 – Izmjenična mreža s umetnutim četveropolom

Primjerice, stereopojačalo može se tretirati kao četveropol koji na ulaznim stezaljkama prima audiosignal male snage. Zadatak je četveropola pojačati snagu signala bez izobličenja i predati je sustavu zvučnika na izlazu četveropola, pri čemu treba biti ispunjen uvjet prilagodbe, odnosno maksimalnog prijenosa snage.

Razmatranja u teoriji četveropola provode se isključivo u cilju određivanja odnosa između ulaznih i izlaznih veličina (struja, napona, impedancija, admitancija). Iz tih odnosa mogu se odrediti temeljne karakteristike (pojačanje struje, napona, snage, gušenje, ulazna i izlazna impedancija...) uređaja, sklopova, prijenosnih linija i dr. U analizi se četveropol može razmatrati kao „crna kutija" jer za ispitivanje odnosa ulazno-izlaznih veličina nije neophodno poznavanje unutarnje strukture, tj. elemenata unutar četveropola. Analiza preko ulazno/izlaznih svojstava četveropola ne nalaže potrebu rada s unutarnjim moguće vrlo složenim krugovima. S druge strane, temeljem unaprijed definiranih zahtjeva odnosa ulaznih i izlaznih veličina, može se projektirati unutarnja struktura četveropola (sinteza) koja će zadovoljiti te zahtjeve i koja ne mora biti jednoznačna. Razni tipovi uređaja ili mreža prikazuju se nadomjesnim shemama u obliku četveropola. Četveropoli mogu biti izolirani elementi (transformator, tranzistor) ili dijelovi neke složene mreže (mrežni blokovi, pojačala, pretvarači, filtri). Aktivni četveropoli sadrže električni izvor. Primjer takva četveropola je tranzistorsko pojačalo prikazano na *Slici 5.3*.



Slika 5.3 – Blokovski prikaz pojačala kao četveropola i model bloka pojačala za male signale

Ulazni dio modela određuje ulazni otpor R_{ul}, a izlazni dio kruga je ekvivalentni ovisni naponski izvor, odnosno Theveninov ekvivalent. Unutarnji otpor tog izvora je izlazni otpor R_{iz}, a Theveninov naponski izvor AU_{ul}, gdje je A naponsko pojačanje.

Pasivni četveropoli sadrže pasivne R, L, C elemente i nemaju vlastitih nezavisnih izvora. Primjer su različite vrste električnih filtara (NF, VF, pojasni propust).

5.1. Jednadžbe i parametri četveropola

Umjesto analize svih unutarnjih varijabla složenog kruga puno je prikladnije raditi s naponima i strujama na ulaznim i izlaznim terminalima. Dakle, od interesa su veličine $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{I}_1, \overline{I}_2$ i njihovi međusobni odnosi definirani pripadnim jednadžbama četveropola. Ovisno o izboru zavisne odnosno nezavisne varijable moguće je definirati šest parova jednadžbi s različitim tipovima parametara četveropola. U praksi se najčešće analiziraju sustavi s impedancijskim ili Z parametrima, admitancijskim ili Y parametrima, prijenosnim (transmisijskim) ili t parametrima i hibridnim ili h parametrima. Ponekad su u uporabi i g parametri (inverzni h parametri) te b parametri (inverzni t parametri). Uvijek je moguća pretvorba iz jednog tipa parametara u drugi.

U daljoj analizi ograničit ćemo se na pasivne četveropole, uz pretpostavku kako su početni uvjeti jednaki nuli, tj. prije spajanja četveropola na izvor kondenzatori su bez početnih naboja, a induktivnosti bez početnih struja.

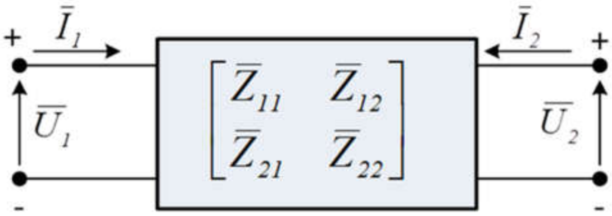
Blok shema četveropola s ulazno/izlaznim naponima/strujama prikazana je na *Slici 5.4*.

Slika 5.4 – Blok četveropola s ulaznim i izlaznim naponima i strujama

Iz razloga simetrije izlaz je prikazan kao naponski izvor $\overline{U}_2$ koji tjera struju $\overline{I}_2$ prema četveropolu. To je konvencija (dogovor) koji nema fizikalnog značenja. Izlaz je obično spojen na trošilo ili drugi četveropol. Biranje suprotnog smjera za struju $\overline{I}_2$ samo će promijeniti predznak svakog koeficijenta uz tu struju u pripadnim jednadžbama četveropola.

5.1.1. Z-parametri ili impedancijski parametri

Blok shema četveropola s matricom $\overline{Z}$-parametara prikazana je na *Slici 5.5*.



Slika 5.5 – Z-parametri četveropola

Ovi parametri pokazuju ovisnost ulaznih i izlaznih napona o odgovarajućim strujama. Jednadžbe četveropola u skalarnom obliku dobiju se postavljanjem jednadžbi ulazne i izlazne petlje:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{Z}_{11}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{12}\overline{I}_2 \\ \overline{U}_2 &= \overline{Z}_{21}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{22}\overline{I}_2 \end{aligned} \qquad (5\text{-}1)$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix}. \qquad (5\text{-}2)$$

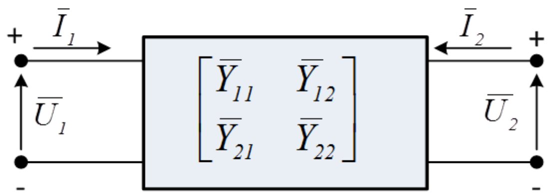
$\overline{Z}$-parametri četveropola su $\overline{Z}_{11}, \overline{Z}_{12}, \overline{Z}_{21}, \overline{Z}_{22}$, a određuju se iz pokusa otvorenog kruga na ulaznoj, odnosno izlaznoj strani:

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{11} &= \left.\frac{\overline{U}_1}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{I}_2=0} \quad , \quad \overline{Z}_{12} = \left.\frac{\overline{U}_1}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{I}_1=0} \\ \overline{Z}_{21} &= \left.\frac{\overline{U}_2}{\overline{I}_1}\right|_{\overline{I}_2=0} \quad , \quad \overline{Z}_{22} = \left.\frac{\overline{U}_2}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{I}_1=0} \end{aligned} . \qquad (5\text{-}3)$$

Kako se parametri $\overline{Z}_{ij}$ dobiju uz otvoren ulazni ili izlazni port, tj. uz $\overline{I}_1 = 0$ ili $\overline{I}_2 = 0$, zovu se impedancijski parametri otvorenog kruga, a jedinice su im omi.

5.1.2. Y-parametri ili admitancijski parametri

Blok shema četveropola s $\overline{Y}$-parametrima prikazana je na *Slici 5.6*.



Slika 5.6 – Y-parametri četveropola

Pokazuju ovisnost ulaznih i izlaznih struja o odgovarajućim naponima. Jednadžbe četveropola u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{bmatrix} \qquad (5\text{-}4)$$

i u skalarnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{U}_2 \end{bmatrix}. \qquad (5\text{-}5)$$

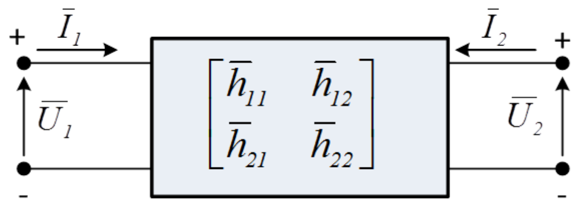
$\overline{Y}$-parametri četveropola određuju se iz pokusa kratkog spoja na ulaznoj, odnosno izlaznoj strani:

$$\overline{Y}_{11} = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{U}_1}\right|_{\overline{U}_2=0} \quad , \quad \overline{Y}_{12} = \left.\frac{\overline{I}_1}{\overline{U}_2}\right|_{\overline{U}_1=0}$$
$$\overline{Y}_{21} = \left.\frac{\overline{I}_2}{\overline{U}_1}\right|_{\overline{U}_2=0} \quad , \quad \overline{Y}_{22} = \left.\frac{\overline{I}_2}{\overline{U}_2}\right|_{\overline{U}_1=0} \quad . \tag{5-6}$$

Parametri $\overline{Y}_{ij}$ dobiju se iz pokusa kratkog spoja, tj. uz $\overline{U}_1 = 0$ ili $\overline{U}_2 = 0$, pa se zovu admitancijski parametri kratkog spoja, a dimenzije su im u siemensima.

5.1.3. h-parametri ili hibridni parametri

Blok shema četveropola s $\overline{h}$-parametrima prikazana je na *Slici 5.7*.

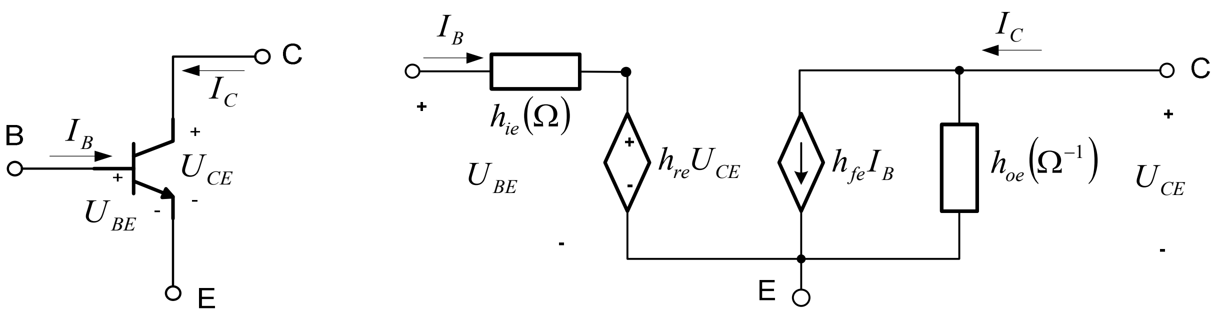


Slika 5.7 – h-parametri četveropola

Model koji se najviše rabi u analizi tranzistora i tranzistorskih pojačala model je s *hibridnim ili h-parametrima.* Jednadžbe čiji su koeficijenti hibridni parametri jesu:

$$\overline{U}_1 = \overline{h}_{11}\overline{I}_1 + \overline{h}_{12}\overline{U}_2$$
$$\overline{I}_2 = \overline{h}_{21}\overline{I}_1 + \overline{h}_{22}\overline{U}_2 \quad . \tag{5-7}$$

<u>Primjer</u>: Bipolarni tranzistor u spoju zajedničkog emitera (*ZE*) može se prikazati odgovarajućim hibridnim ekvivalentnim aktivnim četveropolom kao na *Slici 5.8*. Pri tomu je $U_1 = U_{BE}$, $U_2 = U_{CE}$, $I_1 = I_B$, $I_2 = -I_C$, a parametri su $h_{11} = h_{ie}$, $h_{12} = h_{re}$, $h_{21} = h_{fe}$, $h_{22} = h_{oe}$. Oznaka *e* u supstriktu *h* parametara upućuje na to da se parametri odnose na ZE spoj tranzistora.



Slika 5.8 – Bipolarni tranzistor i ekvivalentni aktivni četveropol

Parametri se definiraju iz pokusa kratkog spoja (U_{CE} = 0 V) i otvorenoga kruga (I_B = 0 A):

$$h_{ie} = \left.\frac{U_{BE}}{I_B}\right|_{U_{CE}=0} \quad (\Omega) \quad \text{je ulazni otpor kratkoga spoja}$$

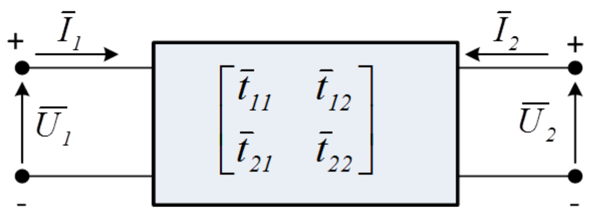
$$h_{re} = \left.\frac{U_{BE}}{U_{CE}}\right|_{I_B=0} \quad \text{je inverzno naponsko pojačanje otvorenoga kruga}$$

$$h_{fe} = \left.\frac{I_C}{I_B}\right|_{U_{CE}=0} \quad \text{je strujno pojačanje kratkoga spoja}$$

$$h_{oe} = \left.\frac{I_C}{U_{CE}}\right|_{I_B=0} \quad (\Omega^{-1}) \quad \text{je izlazna vodljivost otvorenoga kruga.}$$

5.1.4. t-parametri ili prijenosni parametri

Blok shema četveropola s $\overline{t}$ -parametrima prikazana je na *Slici 5.9*.



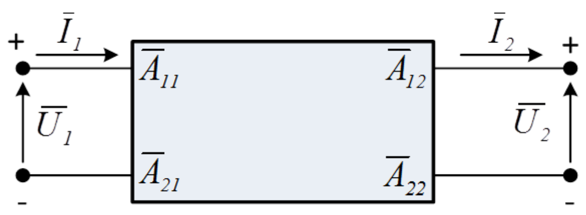
Slika 5.9 – t-parametri četveropola

Prijenosne parametre od početka su najviše primjenjivali inženjeri u elektroenergetici i to za analizu prijenosnih vodova. Matrični prikaz *t*-parametara:

$$\begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{t}_{11} & \overline{t}_{12} \\ \overline{t}_{21} & \overline{t}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_2 \\ -\overline{I}_2 \end{bmatrix}. \qquad (5\text{-}8)$$

U literaturi se $\overline{t}$ -parametri ponekad nazivaju *ABCD* parametri$\left(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}\right)$. Često se označuju i kao $\overline{A}_{ij}$ *ili* $\overline{a}_{ij}$ -parametri.

U daljim izlaganjima analizirat ćemo karakteristike četveropola analiziranih preko prijenosnih parametara uz $\overline{A}_{ij}$ notaciju parametara. Smjer struje $\overline{I}_2$ bit će prema trošilu, što je prikladnije kada se na izlaz spaja pasivno trošilo ili kaskada četveropola – *Slika 5.10*.



Slika 5.10 – $\overline{A}$ -parametri četveropola

Jednadžbe četveropola su:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{U}_2 + \bar{A}_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{A}_{21}\bar{U}_2 + \bar{A}_{22}\bar{I}_2\ .\end{aligned} \tag{5-9}$$

Parametre pasivnog četveropola međusobno vezuje tzv. uvjetna jednadžba četveropola, koja slijedi iz teorema recipročnosti:

$$\bar{A}_{11}\bar{A}_{22} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{21} = 1, \tag{5-10}$$

pa je dovoljno poznavanje samo triju parametara da bi četveropol bio u potpunosti definiran. Za aktivne četveropole gornja relacija ne vrijedi.

Parametri pasivnih četveropola nazivaju se još i konstantama četveropola.

5.2. Eksperimentalno određivanje parametara četveropola

U režimu praznog hoda (otvorene izlazne stezaljke) jest: $\bar{I}_2 = 0$. Iz prve jednadžbe četveropola je:

$$\bar{A}_{11} = \left.\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} . \tag{5-11}$$

Parametar je bez dimenzija i naziva se inverzno naponsko pojačanje praznog hoda.

Primijeni li se slučaj praznog hoda na drugu jednadžbu, dobije se parametar dimenzija vodljivosti:

$$\bar{A}_{21} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} . \tag{5-12}$$

Ako četveropol radi u režimu kratkog spoja (premoštene izlazne stezaljke), tada je $\bar{U}_2 = 0$. Iz prve jednadžbe slijedi parametar:

$$\bar{A}_{12} = \left.\frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{U}_2=0} \tag{5-13}$$

koji ima dimenziju otpora.

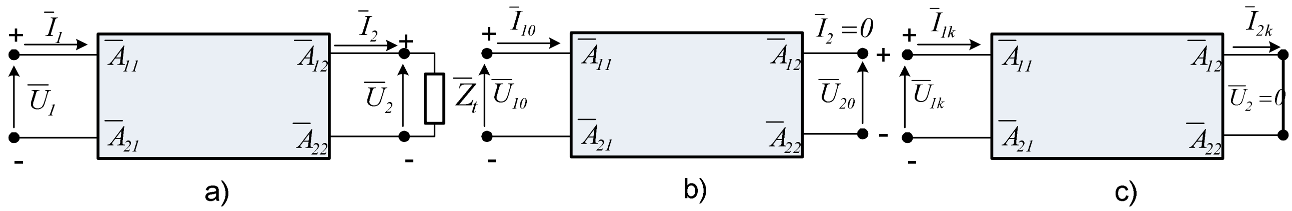
Kratki spoj primijenjen na drugu jednadžbu daje:

$$\bar{A}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{U}_2=0} . \tag{5-14}$$

Parametar je bez dimenzija i predstavlja inverzno strujno pojačanje kratkog spoja.

Pokusi praznog hoda i kratkog spoja omogućuju određivanje parametara (proračunom ili mjerenjem) neovisno o složenosti pasivne mreže unutar četveropola. Za poznate parametre može se konstruirati ekvivalentni četveropol. Isto tako pokusi praznog hoda i kratkog spoja omogućuju određivanje napona i struje na ulaznim stezaljkama za bilo koji zadani režim rada na izlazu četveropola, tj. bilo koje trošilo $\bar{Z}_t$.

Zadatak: Odrediti mjerenjem (ili proračunom ako je poznata unutarnja struktura četveropola, tj. njegovi elementi) ulazne veličine napona i struja $\bar{U}_1, \bar{I}_1$ ako je zadan izlazni režim rada $\bar{U}_2, \bar{I}_2$ [*Slika 5.11.a*)].



Slika 5.11 – Određivanje ulaznih veličina napona i struja za zadani izlazni režim rada

Pokus praznog hoda [Slika 5.11.b)] – Ulazni napon prilagođuje se na vrijednost $\overline{U}_{10}$ za koju je izlazni napon $\overline{U}_{20}$ upravo jednak željenom naponu $\overline{U}_2$ i izmjeri se ulazna struja praznog hoda $\overline{I}_{10}$. Vrijedi:

Za: $\overline{Z}_t \to \infty$, $\overline{I}_2 = 0$, $\overline{U}_{20} = \overline{U}_2$ *izmjereni podatci su:* $\overline{U}_{10}, \overline{I}_{10}$.

Pripadni parametri četveropola su:

$$\overline{A}_{11} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_{20}} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_2} \quad ; \quad \overline{A}_{21} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_{20}} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_2} . \tag{5-15}$$

Pokus kratkog spoja [Slika 5.11.c)] – Ulazni napon prilagođuje se na vrijednost $\overline{U}_{1k}$ za koju je izlazna struja kratkog spoja $\overline{I}_{2k}$ upravo jednaka željenoj struji $\overline{I}_2$ i izmjeri se ulazna struja kratkog spoja $\overline{I}_{1k}$. Vrijedi:

Za: $\overline{Z}_t = 0$, $\overline{U}_2 = 0$, $\overline{I}_{2k} = \overline{I}_2$ *izmjereni podatci su:* $\overline{U}_{1k}, \overline{I}_{1k}$.

Pripadni parametri četveropola su:

$$\overline{A}_{12} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_2} \quad ; \quad \overline{A}_{22} = \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_2} . \tag{5-16}$$

Uvrste li se dobivene konstante s izmjerenim podatcima u jednadžbe četveropola:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_2}\overline{U}_2 + \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_2}\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 &= \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_2}\overline{U}_2 + \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_2}\overline{I}_2 , \end{aligned} \tag{5-17}$$

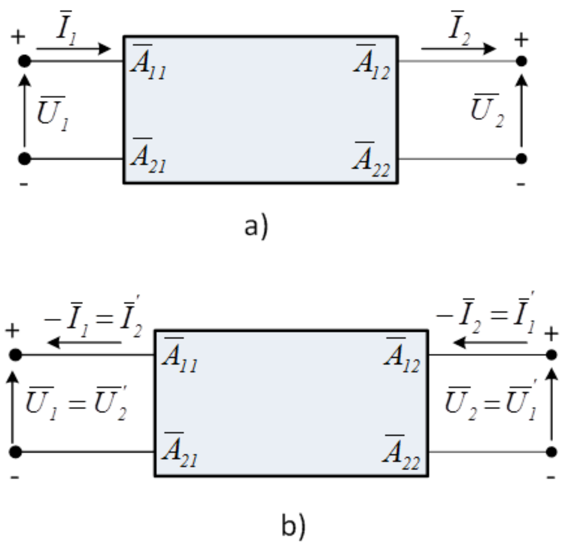
dobije se konačno:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{U}_{10} + \overline{U}_{1k} \\ \overline{I}_1 &= \overline{I}_{10} + \overline{I}_{1k} . \end{aligned} \tag{5-18}$$

Ulazni napon i struja za zadani režim rada na izlazu (zadano trošilo) mogu se odrediti mjerenjem napona i struja u režimima praznog hoda i kratkog spoja.

5.3. Simetrični četveropol

Ako se stanje (svojstva) četveropola ne mijenja kada se zamijene ulaz i izlaz, četveropol je simetričan. Narinemo li napon s bilo koje strane četveropola, na suprotnoj strani ostaju iste vrijednosti napona i struja kao na *Slici 5.12*.



Slika 5.12 – Simetrični četveropol

Jednadžbe četveropola [a)] su:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{U}_2 + \bar{A}_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{A}_{21}\bar{U}_2 + \bar{A}_{22}\bar{I}_2 \ .\end{aligned} \tag{5-19}$$

Ako se kao zavisne varijable izraze $\bar{U}_2,\bar{I}_2$, imajući u vidu uvjetnu jednadžbu četveropola, dobije se:

$$\begin{aligned}\bar{U}_2 &= \bar{A}_{22}\bar{U}_1 - \bar{A}_{12}\bar{I}_1 \\ -\bar{I}_2 &= \bar{A}_{21}\bar{U}_1 - \bar{A}_{11}\bar{I}_1 \ .\end{aligned} \tag{5-20}$$

Nakon zamjene ulaza i izlaza četveropol [b)] je:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1' &= \bar{A}_{22}\bar{U}_2' + \bar{A}_{12}\bar{I}_2' \\ \bar{I}_1' &= \bar{A}_{21}\bar{U}_2' + \bar{A}_{11}\bar{I}_2' \ .\end{aligned} \tag{5-21}$$

Kako bi četveropol bio simetričan, mora biti zadovoljeno:

$$\bar{I}_1' = \bar{I}_1 \quad , \quad \bar{I}_2' = \bar{I}_2 \quad , \quad \bar{U}_1' = \bar{U}_1 \quad , \quad \bar{U}_2' = \bar{U}_2 , \tag{5-22}$$

pa su jednadžbe četveropola sa zamijenjenim ulazom/izlazom:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{A}_{22}\bar{U}_2 + \bar{A}_{12}\bar{I}_2 \\ \bar{I}_1 &= \bar{A}_{21}\bar{U}_2 + \bar{A}_{11}\bar{I}_2 \ .\end{aligned} \tag{5-23}$$

Usporedbom s jednadžbama četveropola [a)] izlazi kako je uvjet simetrije četveropola $\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22}$.

Dovoljno je poznavanje samo dvaju parametara kako bi simetrični četveropol bio u potpunosti određen:

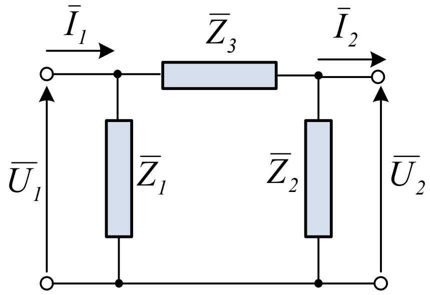
$$\bar{A}_{11} = \bar{A}_{22} = \sqrt{1 + \bar{A}_{12}\bar{A}_{21}} \ . \tag{5-24}$$

5.4. Nadomjesne sheme četveropola

Četveropol sastavljen od linearnih pasivnih elemenata može se, s obzirom na vanjska svojstva, odrediti sa samo tri parametra. Četvrti se dobije iz uvjetne jednadžbe. Slijedi kako se svaki četveropol, ma kako mu složena bila unutarnja struktura, može nadomjestiti krugom koji sadrži samo tri komponente. Pod komponentom se razumijeva impedancija/admitancija koja može predstavljati više od jednog fizičkog elementa. Dvije su vrste nadomjesnih sklopova: T i Π ekvivalent. To je dogovorni naziv za spojeve četveropola koje smo inače nazivali spojem u zvijezdu, odnosno u trokut. Stoga se relacije za pretvorbu zvijezda ⇔ trokut mogu upotrijebiti za pretvaranje jednog tipa četveropola u drugi.

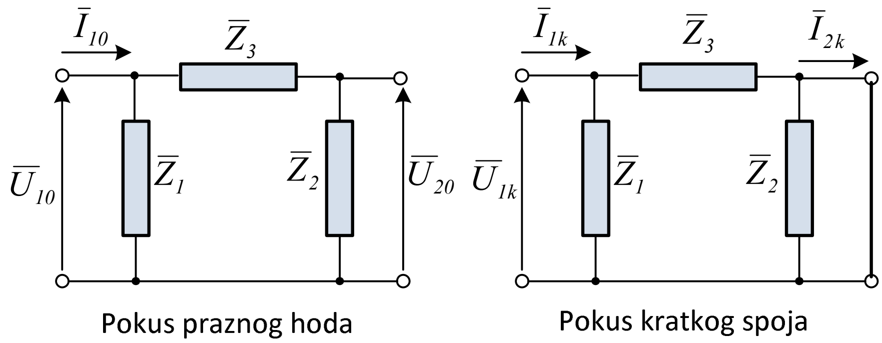
5.4.1. Nesimetrični i simetrični Π i T četveropoli

Nesimetrični Π četveropol prikazan je shemom na *Slici 5.13*.



Slika 5.13 – Nesimetrični Π četveropol

Pokusom praznog hoda i kratkog spoja, što je shematski prikazano na *Slici 5.14*, određuju se parametri četveropola.



Slika 5.14 – Pokus praznog hoda i kratkog spoja za nesimetrični Π četveropol

Iz zadanih elemenata $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \overline{Z}_3$ određuju se pripadni parametri Π četveropola:

$$\overline{A}_{11} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_{20}} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_{10}\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}} = \frac{\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2} \qquad (5\text{-}25)$$

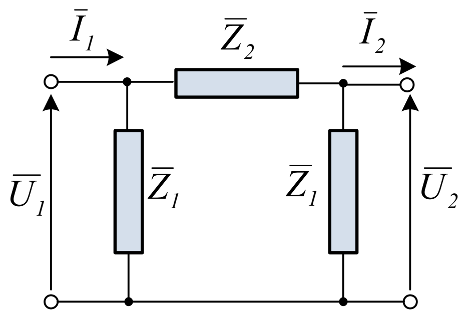
$$\overline{A}_{12} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{I}_{2k}\overline{Z}_3}{\overline{I}_{2k}} = \overline{Z}_3 \qquad (5\text{-}26)$$

$$\overline{A}_{21}=\frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_{20}}=\frac{\overline{U}_{10}\dfrac{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1\left(\overline{Z}_2+\overline{Z}_3\right)}}{\overline{U}_{10}\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}}=\frac{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1\overline{Z}_2} \qquad (5\text{-}27)$$

$$\overline{A}_{22}=\frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{2k}}=\frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{1k}\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}}=\frac{\overline{Z}_1+\overline{Z}_3}{\overline{Z}_1}. \qquad (5\text{-}28)$$

Očito je kako se može provesti i obratni postupak. Temeljem gornjih izraza mogu se iz zadanih parametara $\overline{A}_{11},\overline{A}_{22},\overline{A}_{12},\overline{A}_{21}$ odrediti elementi nadomjesnog *Π* četveropola. Pri projektiranju četveropola polazi se od zahtjeva koje on mora zadovoljavati (parametri), pa se u nadomjesnoj *Π* ili *T* shemi odrede pripadni elementi (impedancije).

Simetrični *Π* četveropol prikazan je shemom na *Slici 5.15*.

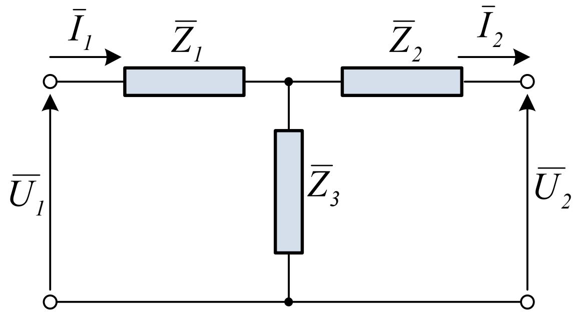


Slika 5.15 – Simetrični Π četveropol

Parametri simetričnoga *Π* četveropola:

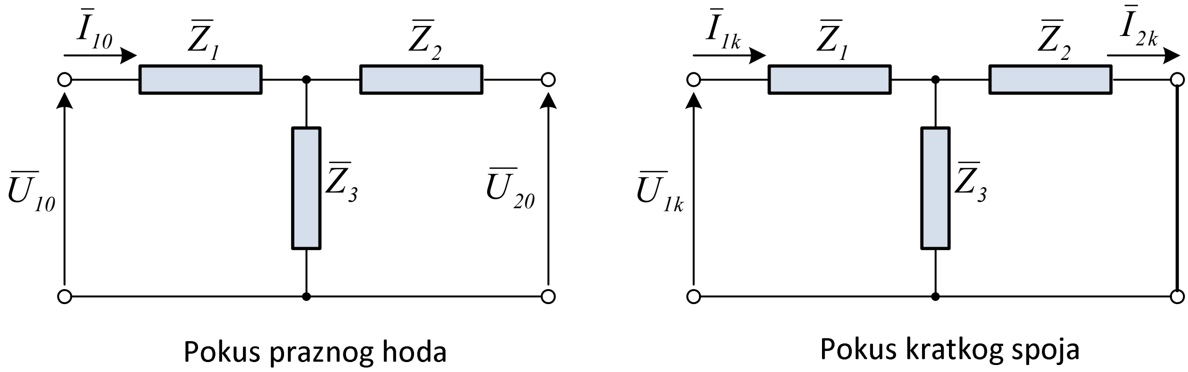
$$\overline{A}_{11}=\overline{A}_{22}=\frac{\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1} \quad , \quad \overline{A}_{12}=\overline{Z}_2 \quad , \quad \overline{A}_{21}=\frac{2\overline{Z}_1+\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1^2}. \qquad (5\text{-}29)$$

Nesimetrični *T* četveropol prikazan je shemom na *Slici 5.16*.



Slika 5.16 – Nesimetrični T četveropol

Shema pokusa kratkog spoja i praznog hoda dana je na *Slici 5.17*.



Slika 5.17 – Pokus praznog hoda i kratkog spoja za nesimetrični T četveropol

---

<u>Zadatak</u>: Za zadane impedancije $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ pokusom *PH* i *KS* odredite pripadne parametre *T* četveropola.

Prijenosni parametri *T* četveropola mogu se alternativno izvesti i pretvorbom jednadžbi sa *Z*-parametrima u odgovarajuće jednadžbe s *A*-parametrima. Jednadžbe konturnih struja ulaznog i izlaznog kruga su:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \left(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3\right)\bar{I}_1 - \bar{Z}_3\bar{I}_2 \qquad (1) \\ -\bar{U}_2 &= \left(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3\right)\bar{I}_2 - \bar{Z}_3\bar{I}_1 \qquad (2)\ . \end{aligned} \tag{5-30}$$

Iz jednadžbe (2) je:

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_3}\bar{U}_2 + \frac{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}\bar{I}_2 \qquad (3)\,. \tag{5-31}$$

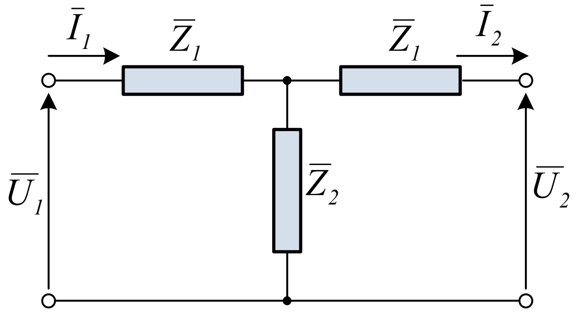
Uvrsti li se (3) u (1), dobije se:

$$\bar{U}_1 = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}\bar{U}_2 + \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}\bar{I}_2 \qquad (4)\,. \tag{5-32}$$

Jednadžbe (3) i (4) jednadžbe su s prijenosnim parametrima. Usporedbom s temeljnim jednadžbama četveropola dobiju se izravno vrijednosti svih *A*-parametara:

$$\bar{A}_{11} = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3} \quad , \quad \bar{A}_{12} = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3}{\bar{Z}_3} \quad , \quad \bar{A}_{21} = \frac{1}{\bar{Z}_3} \quad , \quad \bar{A}_{22} = \frac{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}\,. \tag{5-33}$$

Simetrični *T* četveropol prikazan je shemom na *Slici 5.18*.



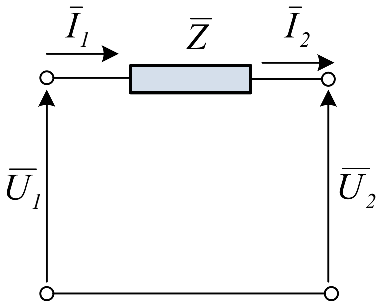
Slika 5.18 – Simetrični T četveropol

Kada se uvrsti uvjet simetričnosti četveropola, dobiju se parametri simetričnoga T-četveropola:

$$\overline{A}_{11} = \overline{A}_{22} = \frac{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}{\overline{Z}_2} \quad , \quad \overline{A}_{12} = \frac{\overline{Z}_1^2 + 2\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2} \quad , \quad \overline{A}_{21} = \frac{1}{\overline{Z}_2} . \qquad (5\text{-}34)$$

5.4.2. Primjeri proračuna parametara nekih posebnih oblika četveropola

1. *primjer*:



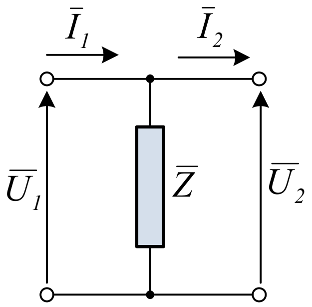
$$\overline{A}_{11} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_{20}} = 1 \qquad \overline{A}_{12} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{I}_{2k}\overline{Z}}{\overline{I}_{2k}} = \overline{Z}$$

$$\overline{A}_{21} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_{20}} = 0 \qquad \overline{A}_{22} = \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \overline{A}_{11} = 1$$

Četveropol je simetričan. Parametri se mogu odrediti i preko parametara simetričnoga Π četveropola uz uvjet da su elementi u poprečnim granama $\overline{Z}_1 \to \infty$.

---

2. *primjer*:



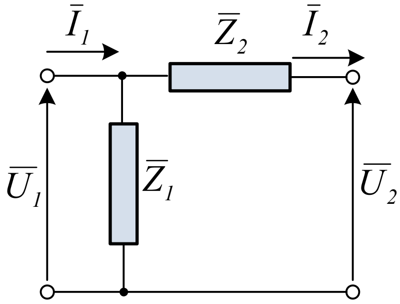
$$\overline{A}_{11} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_{20}} = 1 \qquad \overline{A}_{12} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\infty} = 0$$

$$\overline{A}_{21} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_{20}} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{I}_{10}\overline{Z}} = \frac{1}{\overline{Z}} \qquad \overline{A}_{22} = \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \overline{A}_{11} = 1$$

Četveropol je simetričan. Parametri se mogu odrediti i preko parametara simetričnoga T četveropola uz uvjet da su elementi u uzdužnoj grani $\overline{Z}_1 = 0$.

---

3. *primjer*:



$$\overline{A}_{11} = \frac{\overline{U}_{10}}{\overline{U}_{20}} = 1 \qquad \overline{A}_{12} = \frac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{I}_{2k}\overline{Z}_2}{\overline{I}_{2k}} = \overline{Z}_2$$

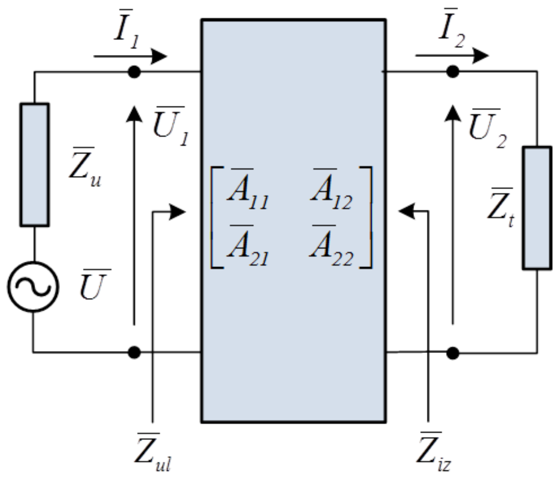
$$\overline{A}_{21} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{U}_{20}} = \frac{\overline{I}_{10}}{\overline{I}_{10}\overline{Z}_1} = \frac{1}{\overline{Z}_1} \qquad \overline{A}_{22} = \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{2k}} = \frac{\overline{I}_{1k}}{\overline{I}_{1k}\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}} = \frac{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1}$$

Ovo je nesimetrični Γ četveropol. Parametri se mogu odrediti i preko parametara Π četveropola ako je element u desnoj poprečnoj grani $\overline{Z}_2 \to \infty$ ili preko T četveropola ako je lijevi element u uzdužnoj grani $\overline{Z}_1 = 0$.

5.5. Ulazna, izlazna i karakteristična impedancija četveropola

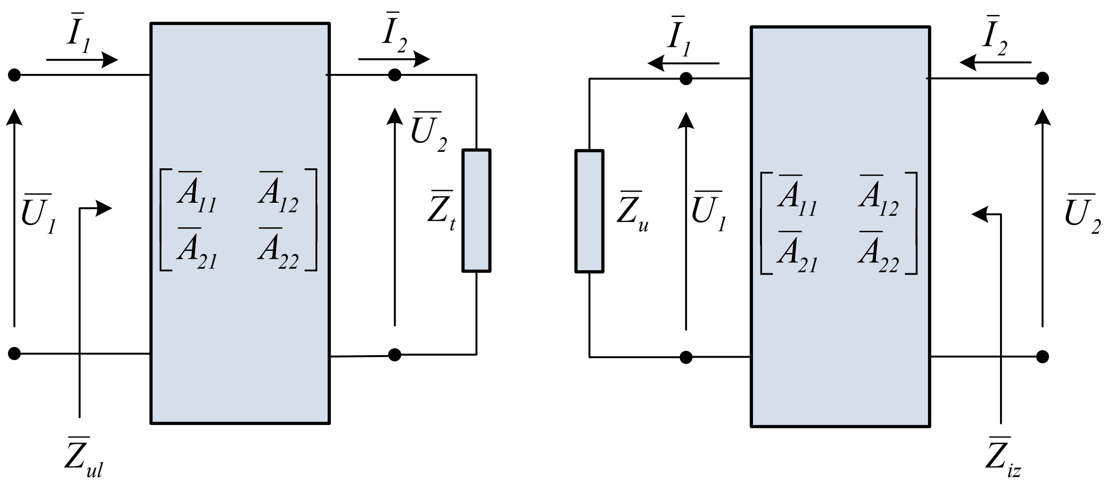
Ulazna i izlazna impedancija

Ulazna i izlazna impedancija/admitancija bitne su vrijednosti četveropola, posebno u određivanju prijenosa snage i proračunima različitih vrsta pojačanja. Potpuna shema sklopa za određivanje ulazne/izlazne impedancije prikazana je na *Slici 5.19*.



Slika 5.19 – Ulazna i izlazna impedancija četveropola

Nadomjesne sheme za određivanje ulazne i izlazne impedancije prikazane su na *Slici 5.20*.



Slika 5.20 – Nadomjesne sheme za određivanje ulazne i izlazne impedancije četveropola

Ako je na izlazu četveropol zaključen impedancijom: $\overline{Z}_t = \overline{U}_2 / \overline{I}_2$, ulazna impedancija je:

$$\overline{Z}_{ul} = \frac{\overline{U}_1}{\overline{I}_1} = \frac{\overline{A}_{11}\overline{U}_2 + \overline{A}_{12}\overline{I}_2}{\overline{A}_{21}\overline{U}_2 + \overline{A}_{22}\overline{I}_2} = \frac{\overline{A}_{11}\overline{Z}_t + \overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}\overline{Z}_t + \overline{A}_{22}}. \tag{5-35}$$

Za određivanje nadomjesne impedancije gledano s izlaza četveropola $\overline{Z}_{iz} = \overline{U}_2 / \overline{I}_2$ potrebno je u jednadžbama promijeniti smjerove struja:

$$\begin{aligned}\overline{U}_1 &= \overline{A}_{11}\overline{U}_2 - \overline{A}_{12}\overline{I}_2\\ -\overline{I}_1 &= \overline{A}_{21}\overline{U}_2 - \overline{A}_{22}\overline{I}_2\ .\end{aligned} \tag{5-36}$$

S izlaza četveropola na ulazu se „vidi“ unutarnja impedancija izvora $\overline{Z}_u = \overline{U}_1/\overline{I}_1$, pa je:

$$-\overline{Z}_u = -\frac{\overline{U}_1}{\overline{I}_1} = \frac{\overline{A}_{11}\overline{U}_2 - \overline{A}_{12}\overline{I}_2}{\overline{A}_{21}\overline{U}_2 - \overline{A}_{22}\overline{I}_2} = \frac{\overline{A}_{11}\overline{Z}_{iz} - \overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}\overline{Z}_{iz} - \overline{A}_{22}}. \tag{5-37}$$

Slijedi:

$$-\overline{Z}_u\overline{A}_{21}\overline{Z}_{iz} + \overline{A}_{22}\overline{Z}_u = \overline{A}_{11}\overline{Z}_{iz} - \overline{A}_{12}\ . \tag{5-38}$$

Izlazna impedancija je:

$$\overline{Z}_{iz} = \frac{\overline{U}_2}{\overline{I}_2} = \frac{\overline{A}_{22}\overline{Z}_u + \overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}\overline{Z}_u + \overline{A}_{11}}. \tag{5-39}$$

Karakteristična impedancija

Ulazna impedancija simetričnog četveropola je:

$$\overline{Z}_{ul} = \frac{\overline{A}_{11}\overline{Z}_t + \overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}\overline{Z}_t + \overline{A}_{11}}. \tag{5-40}$$

Impedancija trošila $\overline{Z}_t$ može poprimati vrijednosti od 0 do ∞. Razmatrat ćemo poseban slučaj određivanja impedancije mreže za koji vrijedi da je impedancija trošila (izlazna impedancija) upravo jednaka ulaznoj impedanciji $\overline{Z}_{ul}$. Impedancija trošila tada je *prilagođena* na sustav. Impedancija $\overline{Z}_0$ za koju vrijedi $\overline{Z}_0 = \overline{Z}_{ul} = \overline{Z}_t$ zove se karakteristična impedancija (valna impedancija, iterativna impedancija).

Uvrštavanjem u izraz za ulaznu impedanciju:

$$\overline{Z}_0 = \frac{\overline{A}_{11}\overline{Z}_0 + \overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}\overline{Z}_0 + \overline{A}_{11}}, \tag{5-41}$$

odnosno:

$$\overline{A}_{21}\overline{Z}_0^2 + \overline{A}_{11}\overline{Z}_0 = \overline{A}_{11}\overline{Z}_0 + \overline{A}_{12} \tag{5-42}$$

dobije se karakteristična impedancija izražena preko parametara četveropola:

$$\overline{Z}_0 = \sqrt{\frac{\overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{\overline{A}_{11}^2 - 1}{\overline{A}_{21}^2}}\ . \tag{5-43}$$

Dakle, uvijek je moguće odrediti neku impedanciju $\overline{Z}_0$ kojom se zaključuje četveropol, a da pritom ulazna impedancija bude također $\overline{Z}_0$.

Karakteristična impedancija može se odrediti i mjerenjem ulazne impedancije u uvjetima otvorenog kruga, odnosno kratkog spoja.

$$\overline{Z}_{ul} = \frac{\overline{A}_{11}\overline{Z}_t + \overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}\overline{Z}_t + \overline{A}_{11}} = \frac{\overline{A}_{11} + \dfrac{\overline{A}_{12}}{\overline{Z}_t}}{\overline{A}_{21} + \dfrac{\overline{A}_{11}}{\overline{Z}_t}} \tag{5-44}$$

Otvoreni krug: $\overline{Z}_t \to \infty \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{ul_{OK}} = \dfrac{\overline{A}_{11}}{\overline{A}_{21}}$

Kratki spoj: $\overline{Z}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_{ul_{KS}} = \dfrac{\overline{A}_{12}}{\overline{A}_{11}}$

Umnožak dobivenih vrijednosti daje: $\overline{Z}_{ul_{OK}} \overline{Z}_{ul_{KS}} = \dfrac{\overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}}$,

pa je karakteristična impedancija:

$$\overline{Z}_0 = \sqrt{\overline{Z}_{ul_{OK}} \overline{Z}_{ul_{KS}}} . \qquad (5\text{-}45)$$

Karakteristična impedancija važna je za analizu vodova (zračnih, koaksijalnih) koji se mogu prikazati kaskadom simetričnih četveropola. Konstante $\overline{A}_{12}$ i $\overline{A}_{21}$ imaju dimenzije impedancije odnosno admitancije, pa je općenito:

$$\overline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} . \qquad (5\text{-}46)$$

Za idealni četveropol (vod) bez gubitaka je $\overline{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, što je čisto realna vrijednost, neovisna o frekvenciji. Gornja relacija vrijedi i za proračun voda pri vrlo visokim frekvencijama ($j\omega L >> R, j\omega C >> G$). Za dovoljno niske vrijednosti frekvencija koje su blizu istosmjernog signala jest $\overline{Z}_0 = \sqrt{\dfrac{R}{G}}$, što je također realna vrijednost, tj. djelatni otpor.

Prijenosni vodovi su sustavi s distribuiranim elementima koji prenose energiju od izvora do trošila. Prvi čimbenik koji određuje kvalitetu prijenosa jest konstanta atenuacije (gušenja). Konstanta gušenja definira izravne gubitke energije u vodu. Obično se određuje u decibelima po jedinici duljine. Za koaksijalni vod ovisi o vodljivosti metala dvaju vodiča, dielektričnim gubitcima u izolatoru i radnoj frekvenciji.

Drugi čimbenik je stupanj prilagođenosti voda i trošila. Što je veća razlika između karakteristične impedancije voda i impedancije trošila, veći je nivo reflektirane energije na spoju voda i trošila. Reflektirana energija reducira iznos signala koji se prinosi trošilu i smanjuje iskoristivost sustava. Koeficijent refleksije je kompleksna veličina:

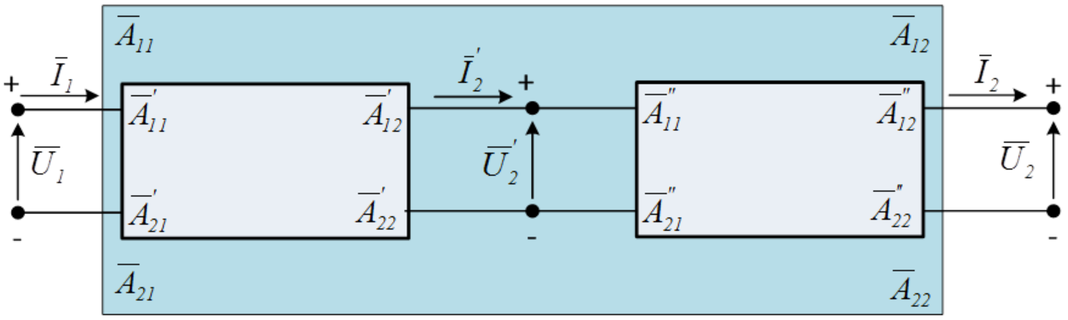
$$\overline{\Gamma}_0 = \frac{\overline{Z}_t - \overline{Z}_0}{\overline{Z}_t + \overline{Z}_0} . \qquad (5\text{-}47)$$

Modulom koeficijenta refleksije određen je odnos amplitude reflektiranoga prema amplitudi izravnog naponskog/strujnog vala. Očito je u slučaju $\overline{Z}_t = \overline{Z}_0$ koeficijent refleksije $\overline{\Gamma}_0 = 0$, tj. nema refleksije.

5.6. Kaskadni spoj četveropola

Četveropoli se mogu međusobno spajati serijski, paralelno i u kaskadi. Prijenosni parametri pogodni su za analizu kaskadnih spojeva četveropola. Kaskada se realizira tako da se na izlaz jednoga spoji ulaz drugog četveropola itd.

Odredimo nadomjesni četveropol dvaju kaskadno spojenih četveropola prikazanih na *Slici 5.21*.



Slika 5.21 – Kaskadni spoj četveropola

Jednadžbe prvog četveropola su:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{A}_{11}'\overline{U}_2' + \overline{A}_{12}'\overline{I}_2' \\ \overline{I}_1 &= \overline{A}_{21}'\overline{U}_2' + \overline{A}_{22}'\overline{I}_2' \ . \end{aligned} \tag{5-48}$$

Jednadžbe drugog četveropola su:

$$\begin{aligned} \overline{U}_2' &= \overline{A}_{11}''\overline{U}_2 + \overline{A}_{12}''\overline{I}_2 \\ \overline{I}_2' &= \overline{A}_{21}''\overline{U}_2 + \overline{A}_{22}''\overline{I}_2 \ . \end{aligned} \tag{5-49}$$

Iz izraza *(5-48)* i *(5-49)* dobiju se jednadžbe nadomjesnog četveropola:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{A}_{11}'\left(\overline{A}_{11}''\overline{U}_2 + \overline{A}_{12}''\overline{I}_2\right) + \overline{A}_{12}'\left(\overline{A}_{21}''\overline{U}_2 + \overline{A}_{22}''\overline{I}_2\right) \\ \overline{I}_1 &= \overline{A}_{21}'\left(\overline{A}_{11}''\overline{U}_2 + \overline{A}_{12}''\overline{I}_2\right) + \overline{A}_{22}'\left(\overline{A}_{21}''\overline{U}_2 + \overline{A}_{22}''\overline{I}_2\right) \ , \end{aligned} \tag{5-50}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \left(\overline{A}_{11}'\overline{A}_{11}'' + \overline{A}_{12}'\overline{A}_{21}''\right)\overline{U}_2 + \left(\overline{A}_{11}'\overline{A}_{12}'' + \overline{A}_{12}'\overline{A}_{22}''\right)\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 &= \left(\overline{A}_{21}'\overline{A}_{11}'' + \overline{A}_{22}'\overline{A}_{21}''\right)\overline{U}_2 + \left(\overline{A}_{21}'\overline{A}_{12}'' + \overline{A}_{22}'\overline{A}_{22}''\right)\overline{I}_2 \ . \end{aligned} \tag{5-51}$$

Konstante nadomjesnog četveropola su:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{11} &= \overline{A}_{11}'\overline{A}_{11}'' + \overline{A}_{12}'\overline{A}_{21}'' \quad ; \quad \overline{A}_{12} = \overline{A}_{11}'\overline{A}_{12}'' + \overline{A}_{12}'\overline{A}_{22}'' \\ \overline{A}_{21} &= \overline{A}_{21}'\overline{A}_{11}'' + \overline{A}_{22}'\overline{A}_{21}'' \quad ; \quad \overline{A}_{22} = \overline{A}_{21}'\overline{A}_{12}'' + \overline{A}_{22}'\overline{A}_{22}'' \ . \end{aligned} \tag{5-52}$$

<u>Napomena</u>: Do istog se rezultata brže dolazi preko matričnog prikaza:

$$\begin{bmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11}' & \overline{A}_{12}' \\ \overline{A}_{21}' & \overline{A}_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_2' \\ \overline{I}_2' \end{bmatrix} \quad i \quad \begin{bmatrix} \overline{U}_2' \\ \overline{I}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11}'' & \overline{A}_{12}'' \\ \overline{A}_{21}'' & \overline{A}_{22}'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{U}_2 \\ \overline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{5-53}$$

pa je:

$$\begin{bmatrix}\overline{U}_1\\ \overline{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}'_{11} & \overline{A}'_{12}\\ \overline{A}'_{21} & \overline{A}'_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{A}''_{11} & \overline{A}''_{12}\\ \overline{A}''_{21} & \overline{A}''_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{U}_2\\ \overline{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{U}_2\\ \overline{I}_2\end{bmatrix}. \quad (5\text{-}54)$$

Matrica parametara kaskadnog četveropola jednaka je umnošku matrica parametara pojedinih četveropola u kaskadi.

Ako su oba četveropola simetrična, vrijedi:

$$\overline{A}'_{11}=\overline{A}'_{22} \quad , \quad \overline{A}''_{11}=\overline{A}''_{22}. \quad (5\text{-}55)$$

Ako su k tomu i oba četveropola u kaskadi jednaka, onda je još i:

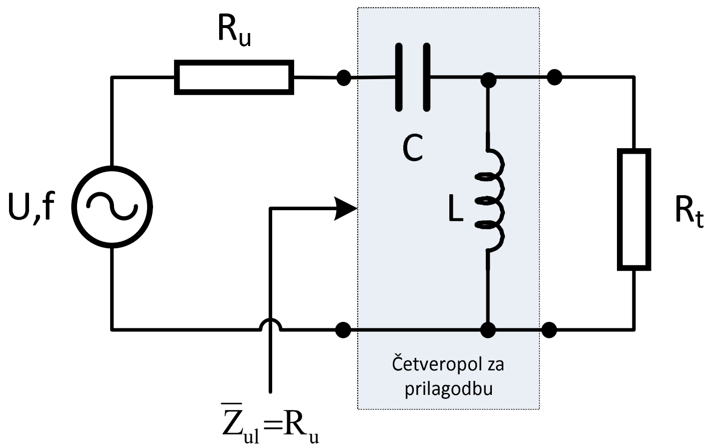
$$\overline{A}'_{11}=\overline{A}'_{22}=\overline{A}''_{11}=\overline{A}''_{22} \quad , \quad \overline{A}'_{12}=\overline{A}''_{12} \quad , \quad \overline{A}'_{21}=\overline{A}''_{21}. \quad (5\text{-}56)$$

Konstante četveropola sastavljenog od kaskade dvaju jednakih simetričnih četveropola su:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{11}&=\overline{A}'^{\,2}_{11}\overline{A}''_{11}+\overline{A}'_{12}\overline{A}'_{21} \quad ; \quad \overline{A}_{12}=2\overline{A}'_{11}\overline{A}'_{12}\\ \overline{A}_{21}&=2\overline{A}'_{21}\overline{A}'_{11} \quad ; \quad \overline{A}_{22}=\overline{A}_{11}\ .\end{aligned} \quad (5\text{-}57)$$

5.7. Primjeri uporabe četveropola kao kruga za spregu (*Coupling Network*)

Zadatak 1.: Izvor U unutarnjeg otpora R_u, kutne frekvencije ω, potrebno je prilagoditi na trošilo djelatnog otpora R_t (gdje je $R_t > R_u$) pomoću sprežnog LC kruga prema *Slici 5.22*. Potrebno je odrediti vrijednosti kapacitivnosti kondenzatora C i induktivnosti svitka L koji će zadovoljiti postavljeni uvjet.



Slika 5.22 – Krug sa sprežnim LC četveropolom

Ulazna impedancija četveropola je:

$$\overline{Z}_{ul}=\frac{R_t\cdot jX_L}{R_t+jX_L}-jX_C=\frac{j\omega LR_t\left(R_t-j\omega L\right)}{R_t^2+\omega^2L^2}-j\frac{1}{\omega C}=\frac{\omega^2L^2R_t}{R_t^2+\omega^2L^2}+j\left(\frac{\omega LR_t^2}{R_t^2+\omega^2L^2}-\frac{1}{\omega C}\right). \quad (5\text{-}58)$$

Kako mora biti $\overline{Z}_{ul}=R_u$, izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova dobije se:

$$\frac{\omega^2 L^2 R_t}{R_t^2+\omega^2 L^2}=R_u \quad (1) \quad i \quad \frac{\omega L R_t^2}{R_t^2+\omega^2 L^2}-\frac{1}{\omega C}=0 \quad (2)\,. \tag{5-59}$$

Iz izraza *(1)* slijedi:

$$L=\frac{R_t}{\omega}\sqrt{\frac{R_u}{R_t-R_u}} \qquad (R_t>R_u)\,. \tag{5-60}$$

Iz izraza *(2)* nakon uvrštavanja L dobije se:

$$C=\frac{1}{\omega\sqrt{R_u(R_t-R_u)}}\ . \tag{5-61}$$

Time je projektiran pasivni krug za spregu (pasivni nesimetrični četveropol) koji zadovoljava uvjet prilagodbe zadanog izvora na zadano trošilo.

Primjerice za f = 1 kHz, R_t = 200 Ω, R_u = 100 Ω dobije se: L = 31,85 mH, C = 159 nF.

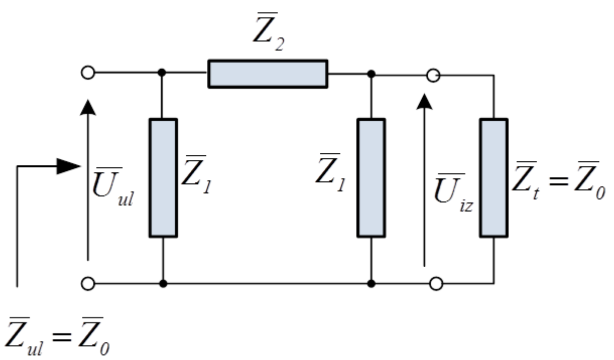
<u>*Zadatak 2.*</u>: Snagu izvora unutarnjeg otpora R_u, kutne frekvencije ω, potrebno je atenuirati za 20 dB pomoću pasivnog Π četveropola uz nepromijenjeno opterećenje izvora.

Ponekad je potrebno između izvora i trošila projektirati četveropol sa zadatkom apsorbiranja određene unaprijed definirane snage, koja bi se inače disipirala na trošilu. Istovremeno, opterećenje izvora mora biti isto kao i prije umetanja četveropola. Takav tip kruga za spregu zove se *atenuator* i obično se realizira u obliku simetričnog Π ili T četveropola. Kako bi bio zadovoljen uvjet nepromijenjenog opterećenja izvora, ulazna impedancija u četveropol na čijem je izlazu trošilo mora biti jednaka impedanciji trošila. To znači da karakteristična impedancija četveropola mora biti jednaka impedanciji trošila.

Kao što je već poznato, karakteristična impedancija četveropola može se odrediti na nekoliko načina. Pokazat ćemo to na primjeru simetričnoga Π četveropola.

a) Određivanje karakteristične impedancije kao ulazne impedancije mreže

Shema sklopa prikazana je na *Slici 5.23*.



Slika 5.23 – Karakteristična impedancija kao ulazna impedancija mreže

Ulazna impedancija uz zadovoljen uvjet $\overline{Z}_{ul}=\overline{Z}_0$ je:

$$\overline{Z}_0 = \frac{\overline{Z}_1\left(\overline{Z}_2 + \dfrac{\overline{Z}_1\overline{Z}_0}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_0}\right)}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dfrac{\overline{Z}_1\overline{Z}_0}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_0}} . \tag{5-62}$$

Nakon sređivanja dobije se:

$$\overline{Z}_0 = \overline{Z}_1\sqrt{\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2 + 2\overline{Z}_1}} . \tag{5-63}$$

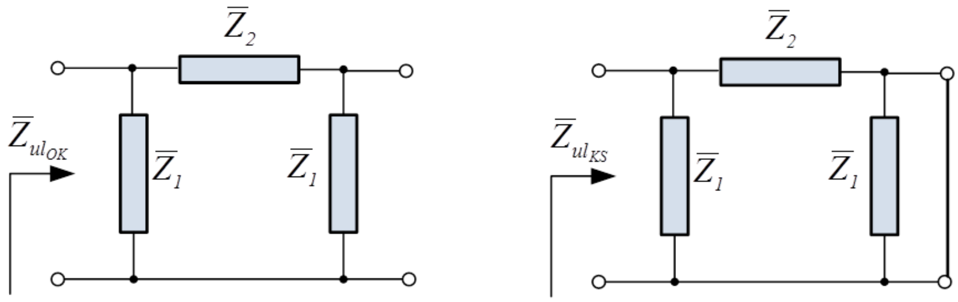
b) Određivanje karakteristične impedancije pomoću parametara četveropola

Uporabom jednadžbe *(5-43)* i relacija za konstante simetričnoga Π četveropola *(5-29)* dobije se:

$$\overline{Z}_0 = \sqrt{\frac{\overline{A}_{12}}{\overline{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{\overline{Z}_2}{\dfrac{2\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1^2}}} = \overline{Z}_1\sqrt{\frac{\overline{Z}_2}{2\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}} . \tag{5-64}$$

c) Određivanje karakteristične impedancije pokusom otvorenog kruga i kratkog spoja

Shema sklopa za pokuse otvorenog kruga i kratkog spoja prikazana je na *Slici 5.24*.



Slika 5.24 – Određivanje karakteristične impedancije iz pokusa OK-a i KS-a

Ulazne impedancije za slučajeve OK-a i KS-a su:

$$\overline{Z}_{ul_{OK}} = \frac{\overline{Z}_1\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right)}{2\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} , \qquad \overline{Z}_{ul_{KS}} = \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} , \tag{5-65}$$

pa je karakteristična impedancija:

$$\overline{Z}_0 = \sqrt{\overline{Z}_{ul_{OK}}\overline{Z}_{ul_{KS}}} = \sqrt{\frac{\overline{Z}_1\left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right)}{2\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}\cdot\frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}} = \overline{Z}_1\sqrt{\frac{\overline{Z}_2}{2\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}} . \tag{5-66}$$

Definicija decibela

U praksi se često vrijednost pojačanja ili gušenja izražava u *decibelima* (dB) jer je za ovisnost pojačanja o frekvenciji prikladnije upotrijebiti logaritamsku skalu. Decibel nije jedinica u istom smislu kao primjerice kilogram. Pravi je smisao decibela u usporedbi neke vrijednosti s referentnom.

Neka su P_{ul} i P_{iz} ulazna i izlazna snaga (snaga trošila). Omjer snaga izražen kao decibel snage jest:

$$dB = 10 log_{10} \frac{P_{iz}}{P_{ul}} \; . \qquad (5\text{-}67)$$

Ako su ulazna impedancija Z_{ul} i izlazna impedancija (impedancija trošila) Z_t jednake, tj. $\overline{Z}_0 = \overline{Z}_{ul} = \overline{Z}_t$, može se postaviti omjer ulaznog i izlaznog napona. Decibel napona je:

$$dB = 10 log_{10} \frac{\dfrac{U_{iz}^2}{Z_0}}{\dfrac{U_{ul}^2}{Z_0}} = 10 log_{10} \frac{U_{iz}^2}{U_{ul}^2} = 20 log_{10} \frac{U_{iz}}{U_{ul}} \; . \qquad (5\text{-}68)$$

Pozitivna vrijednost dB znači pojačanje, a negativna gušenje. Primjerice vrijednost od 60 dB znači kako je izlazni napon pojačan za 1000 puta u odnosu na ulazni napon: $\frac{U_{iz}}{U_{ul}} = 10^{\frac{60}{20}} = 10^3$. Analogno za -60 dB izlazni napon je atenuiran za 1000 puta.

U postavljenom zadatku gušenje je -20 dB, pa je:

$$-20 = 10 log_{10} \frac{P_{iz}}{P_{ul}} \quad \Rightarrow \quad log_{10} \frac{P_{iz}}{P_{ul}} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{iz}}{P_{ul}} = 10^{-2} = \frac{1}{100} \; . \qquad (5\text{-}69)$$

Kako je četveropol zaključen karakterističnom impedancijom $\overline{Z}_0 = \overline{Z}_{ul} = \overline{Z}_t$, omjer napona je:

$$-20 = 20 log_{10} \frac{U_{iz}}{U_{ul}} \quad \Rightarrow \quad log_{10} \frac{U_{iz}}{U_{ul}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{iz}}{U_{ul}} = 10^{-1} = \frac{1}{10} \; . \qquad (5\text{-}70)$$

Napon na izlazu iz četveropola je (naponsko djelilo):

$$\overline{U}_{iz} = \overline{U}_{ul} \frac{\dfrac{\overline{Z}_1 \overline{Z}_0}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_0}}{\overline{Z}_2 + \dfrac{\overline{Z}_1 \overline{Z}_0}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_0}} = \overline{U}_{ul} \frac{\overline{Z}_1 \overline{Z}_0}{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 \overline{Z}_0 + \overline{Z}_1 \overline{Z}_0} \; . \qquad (5\text{-}71)$$

Omjer napona je:

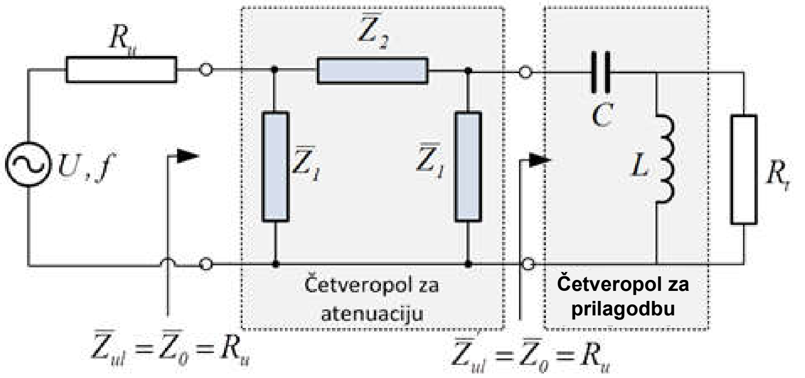
$$\frac{\overline{U}_{iz}}{\overline{U}_{ul}} = \frac{1}{10} = \frac{\overline{Z}_1 \overline{Z}_0}{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 \overline{Z}_0 + \overline{Z}_1 \overline{Z}_0} \quad \Rightarrow \quad \overline{Z}_1 \overline{Z}_2 + \overline{Z}_2 \overline{Z}_0 = 9 \overline{Z}_1 \overline{Z}_0 \quad . \qquad (5\text{-}72)$$

Iz izraza za karakterističnu impedanciju *(5-63)* i gornje relacije *(5-72)* dobiju se tražene vrijednosti elemenata četveropola:

$$\overline{Z}_1 = \frac{11}{9} \overline{Z}_0 \quad , \quad \overline{Z}_2 = \frac{99}{20} \overline{Z}_0 \; . \qquad (5\text{-}73)$$

Za slučaj kada je $\overline{Z}_0 = \overline{Z}_{ul} = \overline{Z}_t = 100 \Omega$, dobije se $\overline{Z}_1 = 122,\ 2 \Omega$, odnosno $\overline{Z}_2 = 495\ \Omega$.

Na kraju se mogu kombinirati rezultati dvaju opisanih zadataka. Zadani izvor U unutarnjeg otpora R_u, kutne frekvencije ω, prilagodili smo na trošilo djelatnog otpora R_t pomoću sprežnog LC kruga. Između izvora i prilagodnog kruga postavljamo *Π* četveropol koji će atenuirati ulazni signal za 20 dB ne mijenjajući opterećenje izvora. Za zadane vrijednosti f = *1 kHz*, R_t = 200 Ω, R_u = 100 Ω proračunom je određeno: L = 31,85 mH, C = 159 nF, $\overline{Z}_1 = 122{,}2\Omega$, $\overline{Z}_2 = 495\Omega$. Rezultirajući sklop prikazan je na *Slici 5.25*.



Slika 5.25 – Mreža s četveropolima za atenuaciju i prilagodbu

Projektirana mreža zadovoljava uvjete maksimalnog prijenosa snage i zadanog gušenja.

Ukupna ulazna impedancija u mrežu mora biti $\overline{Z}_{ul} = 100\Omega$, što se može provjeriti uvrštavanjem dobivenih vrijednosti elemenata mreže u jednadžbu:

$$\overline{Z}_{ul} = \left\{ \left[\left(R_t \| jX_L - jX_C \right) \ \| \ \overline{Z}_1 \right] + \overline{Z}_2 \right\} \ \| \overline{Z}_1 = 100\Omega \,. \qquad (5\text{-}74)$$

6. REZONANCIJA

Uzrok – Rezonancija nastaje kada se frekvencija slobodnih titraja (oscilacija) izjednači s frekvencijom prinudnih titraja nastalih pod djelovanjem narinutog napona.

Posljedica – Rezonancija je pojava za koju ukupna impedancija ili admitancija u serijskom R-X_L-X_C, odnosno paralelnom G-B_L-B_C krugu, postaje čisti djelatni otpor.

Kao fizikalna pojava rezonancija se javlja:

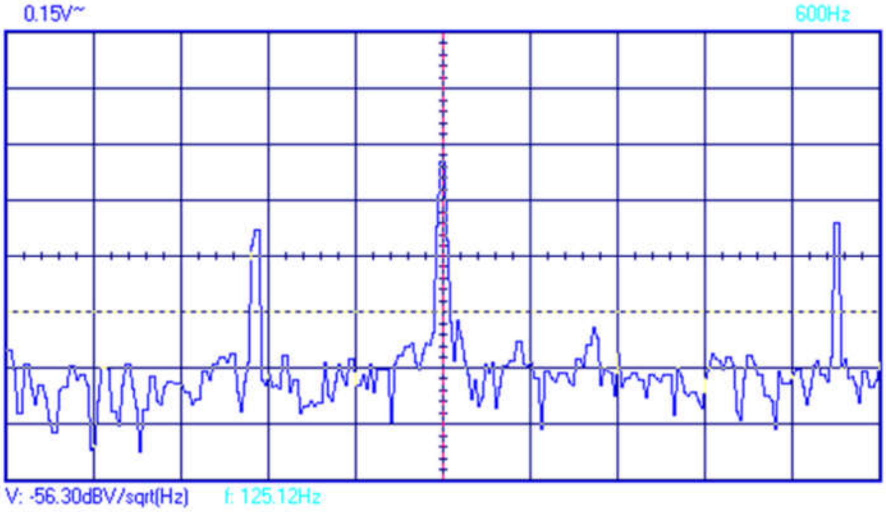
- u mehaničkim sustavima – posljedica mehaničke rezonancije na brodovima, zrakoplovima, automobilima, željezničkim vagonima vibracije su koje nastaju pri strogo određenim brzinama kretanja. Smanjuju se ako se brzina objekta povećava ili smanjuje u odnosu na tu brzinu. Primjeri mehaničke rezonancije: visoki C $\rightarrow$ pucanje staklene čaše, mlažnjak $\rightarrow$ pucanje prozorskih stakala, stupanje vojske $\rightarrow$ rušenje drvenog mosta i dr.;
- u elektroenergetskim sustavima – rezonancija izaziva neplanirane i iznenađujuće poraste napona i struja u mreži koji izazivaju kvarove na električnim strojevima i postrojenjima;
- u elektroničkim, radiokomunikacijskim, telekomunikacijskim i radarskim sustavima – pojava rezonancije može se iskoristiti za projektiranje odgovarajućih rezonancijskih krugova u cilju postizanja prilagodbe, izdvajanja korisnog signala iz širokog spektra titraja različitih frekvencija, selektivno pojačanje titraja određene frekvencije i dr.

<u>Primjer mehaničke rezonancije</u>

Glazbena vilica proizvodi samo jedan čisti ton – najčešće ton A koji vibrira na 440 herca. Predstavlja alat za glazbenike – služi za ugađanje (štimanje) instrumenata. Odsvira se A žica i ugodi prema zvuku vilice. Na *Slici 6.1* prikazana je glazbena vilica koja generira ton frekvencije 125 Hz. Signal je harmoničan i sinusoidan.

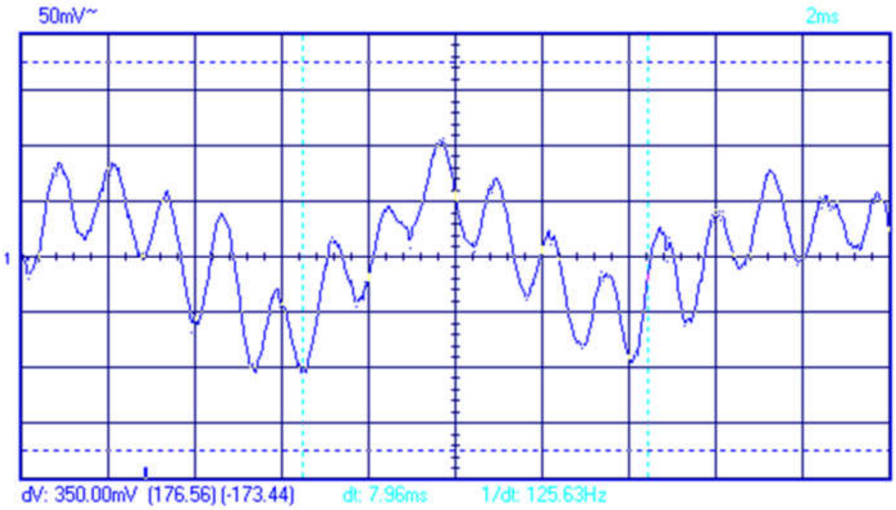
Slika 6.1 – Glazbena vilica

Frekvencijski spektar snimljen mikrofonom (temeljni signal glazbene vilice i dva harmonika mreže) prikazan je na *Slici 6.2*.



Slika 6.2 – Frekvencijski spektar glazbene vilice

Signal u vremenskom području – sinusoida modulirana harmonicima mreže i šumom, prikazan je na *Slici 6.3*.



Slika 6.3 – Odziv glaazbene vilice u vremenskom području

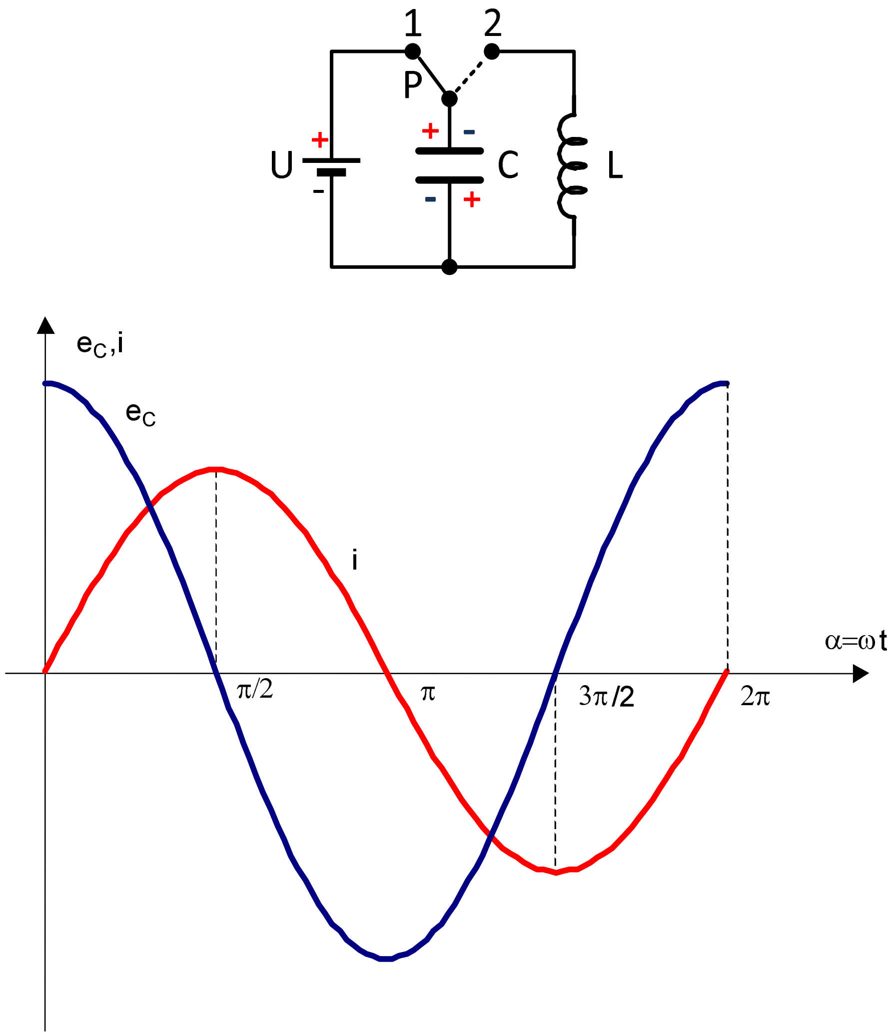
6.1. Slobodni i prinudni titraji u titrajnom krugu

Slobodni titraji u idealnome titrajnom krugu

Titrajni strujni krug jedan je od temeljnih elemenata elektroničkih generatora koji generiraju struje različitih frekvencija. Idealni titrajni krug je krug s idealnim svitkom i kondenzatorom.

Princip generiranja slobodnih oscilacija u idealnome titrajnom krugu dan je na *Slici 6.4*.

Kondenzator se nabije električnom energijom iz izvora U za položaj *1* prekidača P. Prebacivanjem P u položaj *2* zatvara se idealni titrajni krug. Unošenjem određene količine energije u titrajnom krugu nastaju oscilacije između električnog polja kondenzatora i magnetskog polja svitka. Eksperimentalno je dokazano kako pri osciliranju krugom teče izmjenična (sinusna) struja, a na elementima kruga stvara se izmjenični napon. Ovakve oscilacije su *slobodne oscilacije* i analogne su mehaničkim oscilacijama (njihalo). Kružna frekvencija slobodnih oscilacija je ω_0.



Slika 6.4 – Idealni titrajni krug – generiranje slobodnih oscilacija

U prvoj četvrtini perioda kondenzator se prazni kroz svitak, pa se akumulirana električna energija kondenzatora (potencijalna) u idealnom slučaju u potpunosti pretvara u energiju magnetskog polja (kinetičku). U drugoj četvrtini sva se akumulirana magnetska energija vraća kondenzatoru. Kondenzator se ponovno nabija nabojem istog iznosa, ali suprotnog polariteta u odnosu na početno stanje. EMS samoindukcije po Lentzovu zakonu podržava opadajuću struju, pa smjer struje ostaje isti. U preostaloj polovici perioda ponavlja se pretvorba električne energije kondenzatora u magnetsku energiju svitka, ali s promijenjenim smjerom struje.

U krugu bez gubitaka proces osciliranja nastavlja se unedogled. Energija u titrajnom strujnom krugu u svakom je trenutku jednaka i konstantna:

$W_{uk} = W_C = W_L$, gdje su $W_C = \dfrac{CU_m^2}{2}$, $W_L = \dfrac{LI_m^2}{2}$ već poznate energije akumulirane u električnom, odnosno magnetskom polju u četvrtini perioda.

<u>Ovisnost perioda i frekvencije o parametrima kruga</u>

Uvrsti li se struja: $I_m = \dfrac{U_m}{\omega_0 L}$ u gornji izraz za jednakost energija, slijedi:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{C}{2}\frac{U_m^2}{\omega_0^2 L^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}\,, \qquad (6\text{-}1)$$

gdje su f_0 i T_0 frekvencija i period slobodnih oscilacija.

Karakteristična (valna) impedancija titrajnog kruga

Iz $W_C = W_L$ je:

$$\frac{U_m^2}{I_m^2} = \frac{L}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0 . \qquad (6\text{-}2)$$

Karakteristična impedancija može se izraziti kao:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L}{\frac{1}{\omega_0^2 L}}} = \omega_0 L = \sqrt{\frac{\frac{1}{\omega_0^2 C}}{C}} = \frac{1}{\omega_0 C} . \qquad (6\text{-}3)$$

Pri slobodnim oscilacijama reaktivni otpori elemenata kruga međusobno su jednaki i jednaki su karakterističnoj impedanciji titrajnog kruga ($Z_0 = X_L = X_C$).

Slobodni titraji u realnom titrajnom krugu

U realnom krugu nastaju ireverzibilni gubitci energije u svitku i kondenzatoru, kao i na spojnim vodovima, pa ih opisujemo djelatnim otporom kruga. Gubitci imaju za posljedicu:

- prigušivanje oscilacija energije
- smanjivanje amplituda struje i napona
- smanjivanje frekvencije.

Prigušenje i dobrota titrajnog kruga

Prigušenje d je odnos djelatnog otpora i karakteristične impedancije: $d = R/Z_0$. Što je d veći, brže opadaju amplitude struje i napona i kraće traje smirivanje oscilacija. Češće se navodi vrijednost recipročna prigušenju, koja se zove *dobrota* ili *kvaliteta* titrajnog (rezonantnog) kruga Q:

$$Q = \frac{1}{d} = \frac{Z_0}{R} = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} . \qquad (6\text{-}4)$$

Fizikalno Q predstavlja omjer jalove snage titrajnog kruga i djelatne snage gubitaka:

$$Q = \frac{Q_L}{P} = \frac{Q_C}{P} . \qquad (6\text{-}5)$$

Za nastajanje oscilacija u realnom krugu gubitci ne smiju prijeći određenu graničnu veličinu ($R < 2 Z_0$), odnosno faktor dobrote mora biti $Q > ½$. Ispod graničnog slučaja ($Q = ½$) nema oscilacija. Tada se radi o tzv. aperiodičnom prigušenju ($Q < ½$).

Za analizu navedenih slučajeva potrebno je riješiti integralno-diferencijalnu jednadžbu:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = 0 , \qquad (6\text{-}6)$$

koja se deriviranjem svodi na homogenu diferencijalnu jednadžbu drugog stupnja s konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}=0\,. \qquad (6\text{-}7)$$

Prisilni titraji u realnom titrajnom krugu

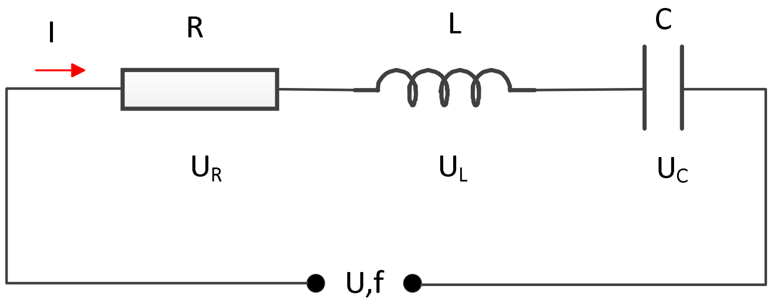
Kako je već navedeno, slobodni titraji u realnom titrajnom krugu postaju prigušeni jer se dio energije pretvara u toplinu na ekvivalentnom djelatnom otporu kruga. Od praktične su koristi neprigušeni titraji. To znači kako je potrebno stalno nadopunjavati odgovarajuću količinu energije radi kompenzacije gubitaka, pa se krug priključuje na izmjenični generator. Neprigušene oscilacije nazivaju se prisilnima jer im je frekvencija određena frekvencijom generatora.

Promjenom frekvencije generatora može se postići podudarnost frekvencije generatora f_{gen} s vlastitom frekvencijom priključenog kruga f_0 (frekvencijom slobodnih oscilacija). To je neophodan uvjet za pojavu rezonancije. Postignuta frekvencija je *rezonantna frekvencija* – f_r ($f_{gen} = f_0 = f_r$).

Analizirat ćemo uvjete za rezonanciju i karakteristične rezonancijske krivulje za slučajeve pojave rezonancije u serijskome, odnosno paralelnome titrajnom krugu.

6.2. Serijska (naponska) rezonancija

Serijski *RLC* krug za analizu pojava u uvjetima serijske rezonancije prikazan je na *Slici 6.6*.



Slika 6.5 – Serijski RLC rezonancijski krug

Kako je već navedeno u *Pogl. 3.*, za serijski *R-L-C* krug općenito vrijedi:

- naponi na elementima kruga: $U_R = IR \quad ; \quad U_L = IX_L \quad ; \quad U_C = IX_C$
- ukupni napon: $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$
- impedancija, fazni kut i struja: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad ; \quad \varphi = arctg\,\dfrac{X_L - X_C}{R} \quad ;$

  $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}\,.$

Krug je spojen na generator promjenljive frekvencije. Kao što je već pokazano, promjenom frekvencije mogu nastupiti tri različita slučaja ($X_L < X_C$, $X_L = X_C$, $X_L > X_C$). Posebno ćemo analizirati slučaj kada je $X_L = X_C$. Tada je ukupni reaktivni otpor jednak nuli: $X_L - X_C = 0$.

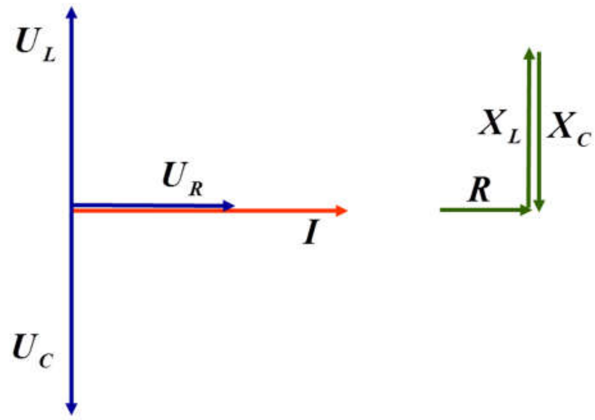
Frekvencija za koju je ispunjen gornji uvjet naziva se *rezonantna frekvencija* serijskoga titrajnog kruga. Dobije se iz izraza:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad . \qquad (6\text{-}8)$$

Usporedi li se f_r s frekvencijom slobodnih oscilacija titrajnog kruga f_0, vidi se kako se radi o jednakim frekvencijama.

Definicija: Serijska ili naponska rezonancija je pojava koja nastaje u serijskom titrajnom krugu kada se izjednače frekvencije izvora i slobodnih oscilacija titrajnog kruga. Amplituda električnih titraja postiže maksimum pri rezonanciji.

Fazorski dijagram za serijsku rezonanciju dan je na *Slici 6.6*.



Slika 6.6 – Fazorski dijagrami – serijska rezonancija

Svojstva serijskoga kruga u rezonanciji su:

- impedancija je minimalna i jednaka je djelatnom otporu: $Z_r = Z_{min} = R$;
- fazni kut $\varphi_r = 0$;
- struja je maksimalna i u fazi je s priključenim naponom: $I_r = I_{max} = \dfrac{U}{R}$. Za $R = 0, I \to \propto$.;
- naponi na induktivnoj i kapacitivnoj reaktanciji su jednaki, pa se serijska zove još i naponska rezonancija. Navedeni naponi Q puta su veći od priključenog napona:

$$U_{L_r} = U_{C_r} \quad , \quad \frac{U_{C_r}}{U} = \frac{U_{L_r}}{U} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r CR} = Q \quad . \qquad (6\text{-}9)$$

Kako je često u serijskome krugu $X_L = X_C >> R$, naponi na kondenzatoru i svitku mogu znatno premašivati iznos priključenog napona. Fizikalna je osnova u tomu što su jalove energije nagomilane u krugu mnogo veće od energije gubitaka na djelatnom otporu.

Karakteristike serijskoga titrajnog kruga pri promjeni frekvencije mogu se najbolje analizirati na rezonancijskim krivuljama koje prikazuju frekvencijsku ovisnost relevantnih veličina kruga. Na sljedećim grafovima prikazane su rezonancijske krivulje za nekoliko primjera zadanih vrijednosti R, L, C i U. Simulacija je izvedena pomoću programskog paketa MATLAB. Kôd programa je:

FREKVENCIJSKE KRIVULJE SERIJSKOGA REZONANTNOG KRUGA

(Programska podrška za Matlab)

```
clear
format short                              % izlazni format brojeva
R=10;                                     % djelatni otpor
L=10^-3;                                  % induktivnost svitka
```

```
C=10^-6;                              % kapacitivnost kondenzatora
U=100;                                % narinuti napon
f=0:10:2*10^4;                        % frekvencijski opseg 0–20 KHz
XL=j*2*pi*f*L;                        % induktivna reaktancija
XC=j*1./(2*pi*f*C);                   % kapacitivna reaktancija
Z=R+XL-XC;                            % impedancija serijskoga R-L-C kruga
I=U./Z;                               % struja
UL=XL.*I;                             % napon na induktivnoj reaktanciji
UC=XC.*I;                             % napon na kapacitivnoj reaktanciji
UR=R*I;                               % napon na djelatnom otporu
UX=U-UR;                              % napon na ukupnoj reaktanciji
Faza_rad=atan((abs(XL)-abs(XC))./R);  % fazni kut u radijanima
Faza_stup=Faza_rad*180/pi;            % fazni kut u stupnjevima
frC=sqrt((L*C)^(-1)-R^2/(2*L^2))/(2*pi)  % frekvencija maksimuma na C
frL=sqrt(2/(2*L*C-R^2*C^2))/(2*pi)    % frekvencija maksimuma na L
fr=1/(2*pi*sqrt(L*C))                 % rezonantna frekvencija
Q=2*pi*fr*L/R                         % faktor dobrote
% Ovisnost reaktancija o frekvenciji
figure (1)
Nula=0*f;                             % os apscisa
G=plot(f,Nula,'y',f,-abs(XC),f,abs(XL),f,abs(XL)-abs(XC));    % grafovi XL, XC, X
set(G,'linewidth',2);                 % debljina krivulje
axis([0,(2*10^4),-150,150]);          % koordinatne osi
title('OVISNOST REAKTANCIJA O FREKVENCIJI')       % naslov
xlabel('Frekvencija f[Hz]')           % oznaka X-osi
ylabel('Reaktancije: X, XL, XC [Ohm]')   % oznaka Y-osi
grid                                  % rešetka
pause
% Ovisnost impedancije o frekvenciji
figure (2)
G=plot(f,abs(Z));
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(2*10^4),0,10*min(abs(Z))]);
title('OVISNOST IMPEDANCIJE O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Impedancija [Ohm]')
grid
pause
% Ovisnost faznog kuta o frekvenciji
figure (3)
G=plot(f,Nula,'y',f,Faza_stup);
set(G,'linewidth',2);
```

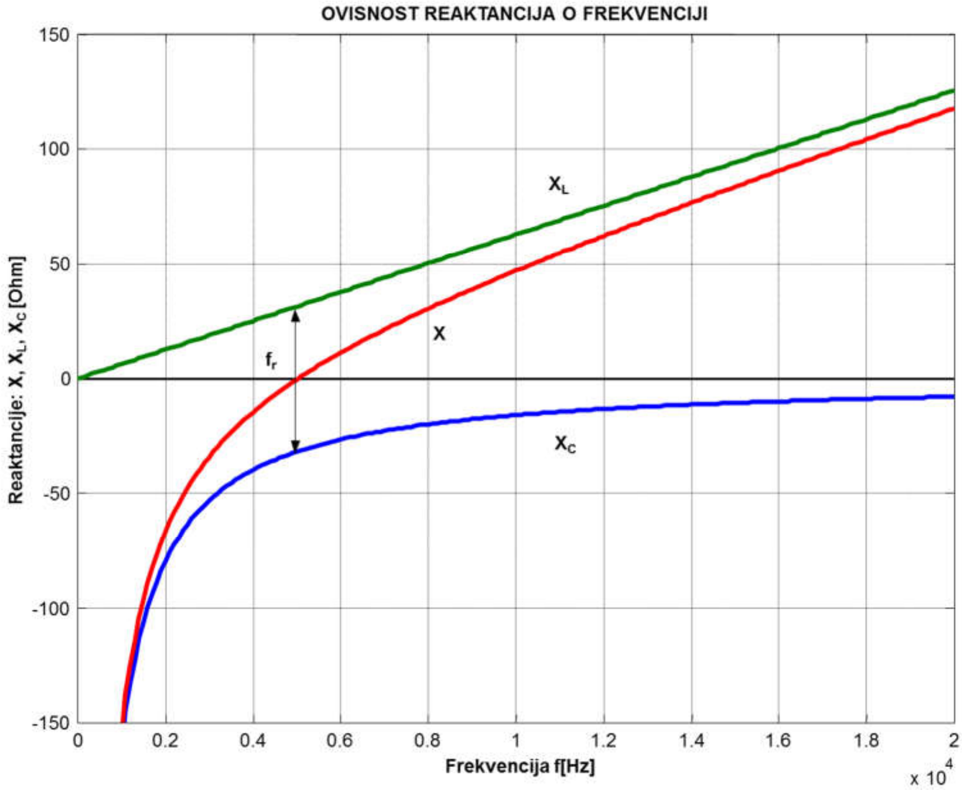
```
axis([0,(2*10^4),-90,90]);
title('OVISNOST FAZNOG KUTA O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Fazni kut [Stupnjevi]')
grid
pause
% Ovisnost struje o frekvenciji
figure (4)
G=plot(f,abs(I),'b');
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(2*10^4),0,1.1*max(abs(I))]);
title('OVISNOST STRUJE O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Struja [A]')
grid
pause
% Ovisnost napona svitka i kondenzatora o frekvenciji
figure (5)
G=plot(f,abs(UL),'r',f,abs(UC),'b');
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(20*10^3),0,1.1*max(abs(UC))]);
title('OVISNOST REAKTIVNIH NAPONA O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Naponi UL i UC [V]')
grid
pause
% Ovisnost aktivnog, reaktivnog i ukupnog napona o frekvenciji
figure (6)
G=plot(f,U,'g',f,UR,'r',f,UX,'b');
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(20*10^3),0,1.1*U]);
title('OVISNOST NAPONA O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Naponi U, UR i UX [V]')
grid
```

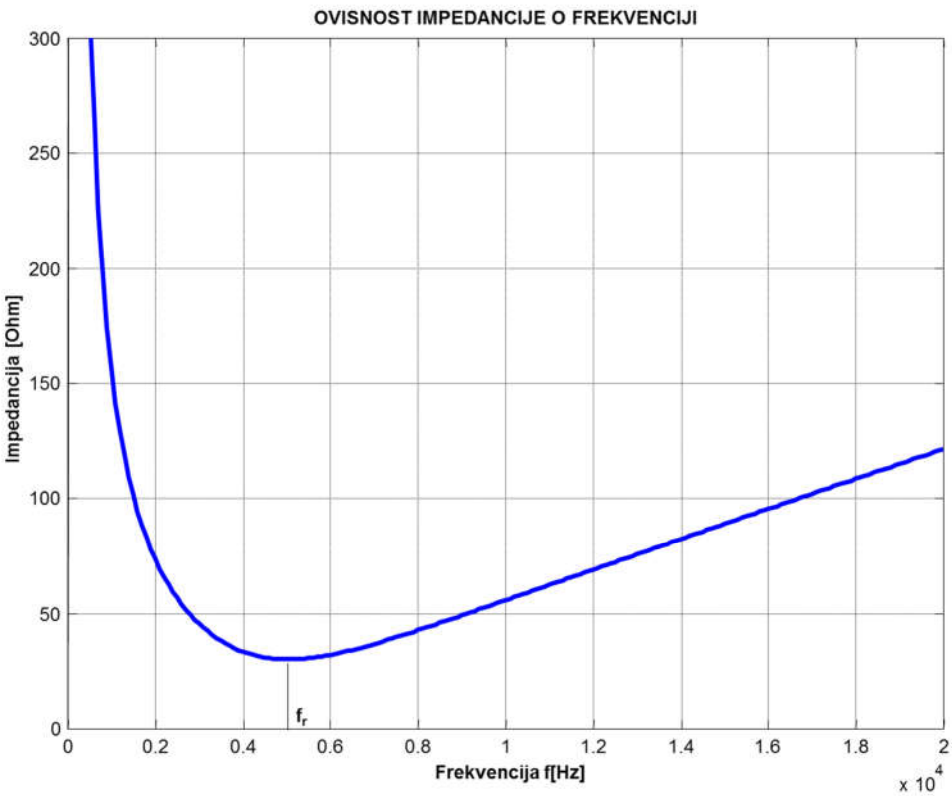
Na sljedećim slikama prikazane su grupe dijagrama dobivene za različite vrijednosti relevantnih parametara rezonancijskog kruga:

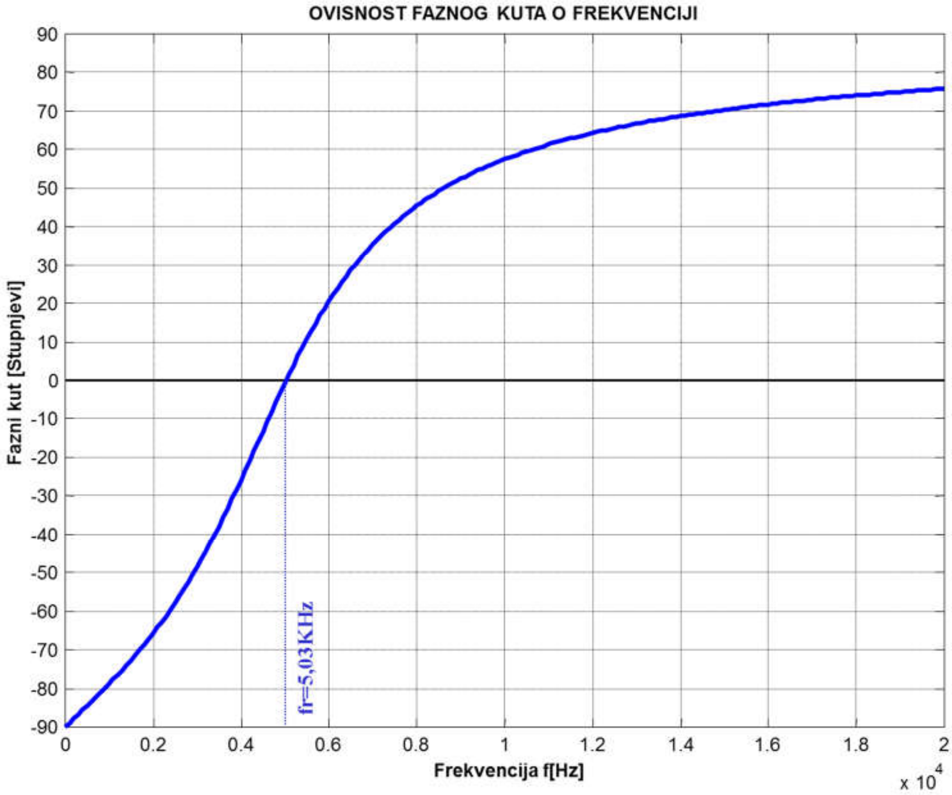
1. $R=30\Omega$, $L=1mH$, $C=1\mu F$, $U=100V$, $f=0...20KHz$
2. $R=10\Omega$, $L=1mH$, $C=1\mu F$, $U=100V$, $f=0...20KHz$
3. $R=1\Omega$, $L=1mH$, $C=1\mu F$, $U=100V$, $f=0...20KHz$
4. $R=30\Omega$, $L=2mH$, $C=0,5\mu F$, $U=100V$, $f=0...20KHz$.

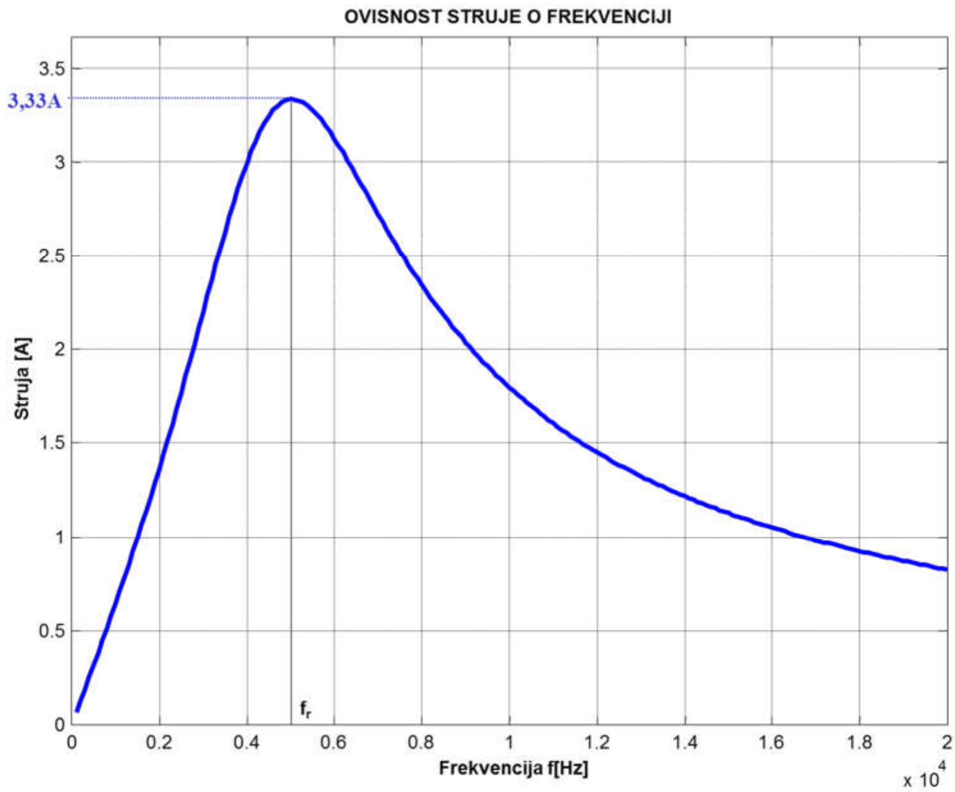
1. Serijska rezonancija:

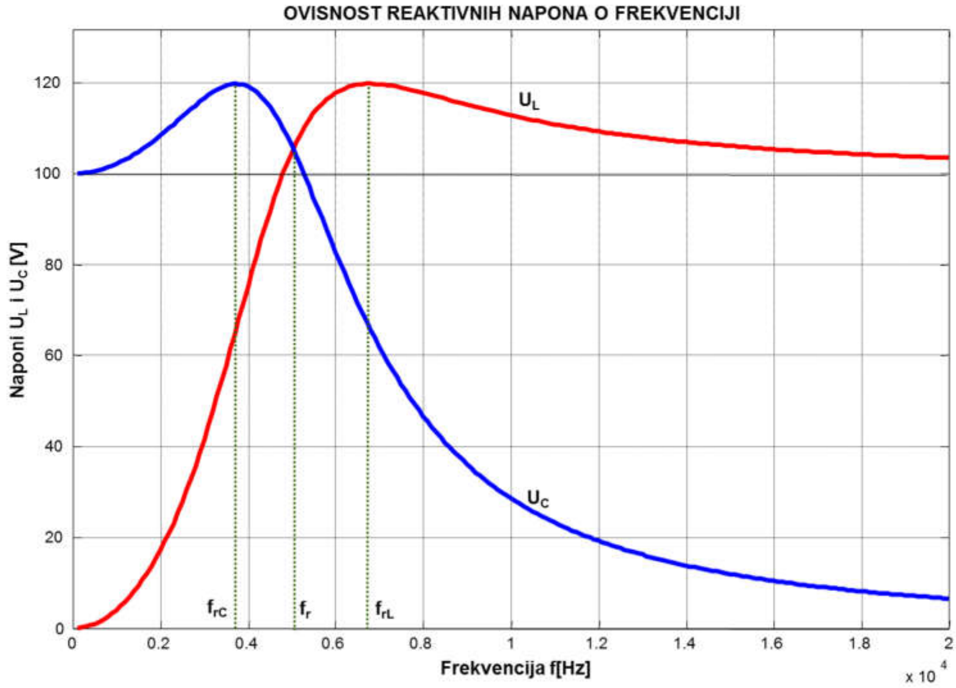
R=30Ω; L=1mH; C=1μF; U=100V; f=0...20KHz

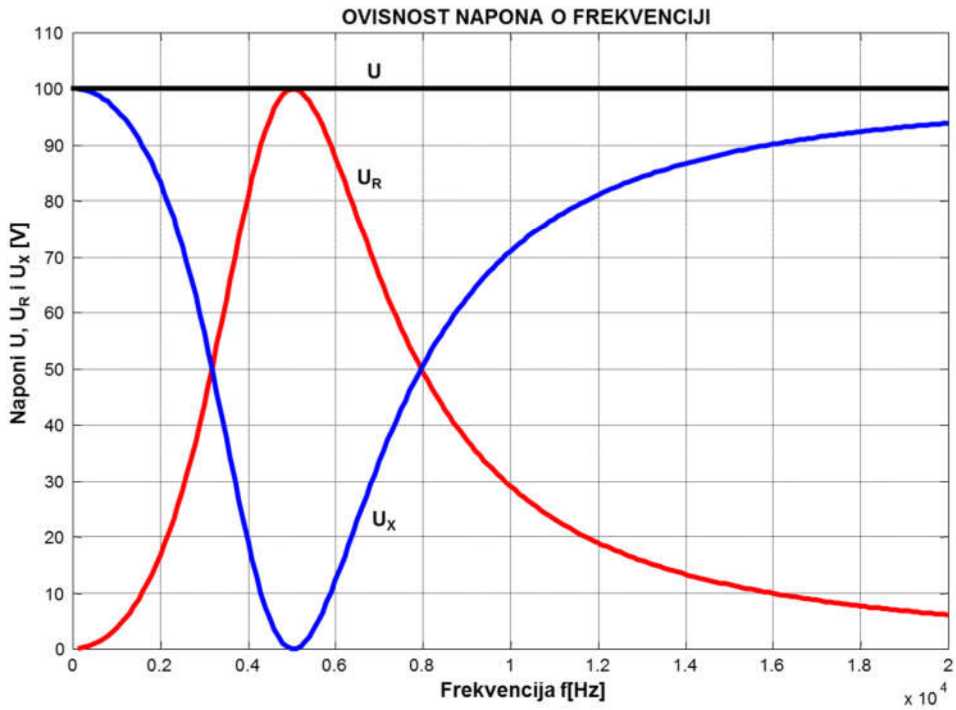





OVISNOST FAZNOG KUTA O FREKVENCIJI
Fazni kut [Stupnjevi]
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
fr=5,03KHz
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
Frekvencija f[Hz]
x 10^4


OVISNOST STRUJE O FREKVENCIJI
Struja [A]
3.5
3,33A
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
f_r
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
Frekvencija f[Hz]
x 10^4





Slike 6.7 – Frekvencijski dijagrami za prvu grupu parametara serijskoga rezonancijskog kruga

Analiza dijagrama:

1. $X_L, X_C, X = F(f)$ – lijevo od $f_r = 5{,}03\ kHz$ prevladava kapacitivna, a desno induktivna reaktivna komponenta. U rezonanciji se poništavaju, pa je ukupna reaktancija jednaka nuli.
2. $Z = F(f)$ – impedancija je minimalna u rezonanciji: $Z = R = 30\,\Omega$. Oblik krivulje ovisi o odabranim parametrima kruga. Kako bi se snimio potpuni oblik krivulje, frekvencija se često prikazuje logaritamskom skalom.
3. $\varphi = F(f)$ – fazni kut se mijenja u rasponu $-90^o < \varphi < 90^o$ i jednak je nuli za f_r.
4. $I = F(f)$ – struja je maksimalna u rezonanciji: $I = \frac{U}{R} = \frac{100}{30} = 3{,}33\ A$. Za vrlo niske, kao i za vrlo visoke frekvencije $I \to 0$.
5. $U_L, U_C = F(f)$ – naponi na reaktancijama:

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad , \quad U_L = \omega L I = \frac{U\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{6-10}$$

jednaki su u rezonanciji. Po iznosu su neznatno veći od napona izvora, jer je Q malen ($Q = \pi/3$). Lijevo od f_r napon na kondenzatoru je maksimalan, a desno od f_r maksimum je napona na svitku. Frekvencije f_{rC} i f_{rL}, za koje pripadni naponi imaju maksimum, dobiju se izjednačavanjem prve derivacije napona s nulom:

$$\frac{dU_C}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow f_{rC} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \tag{6-11}$$

$$\frac{dU_L}{d\omega} = 0 \quad \Rightarrow f_{rL} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} \tag{6-12}$$

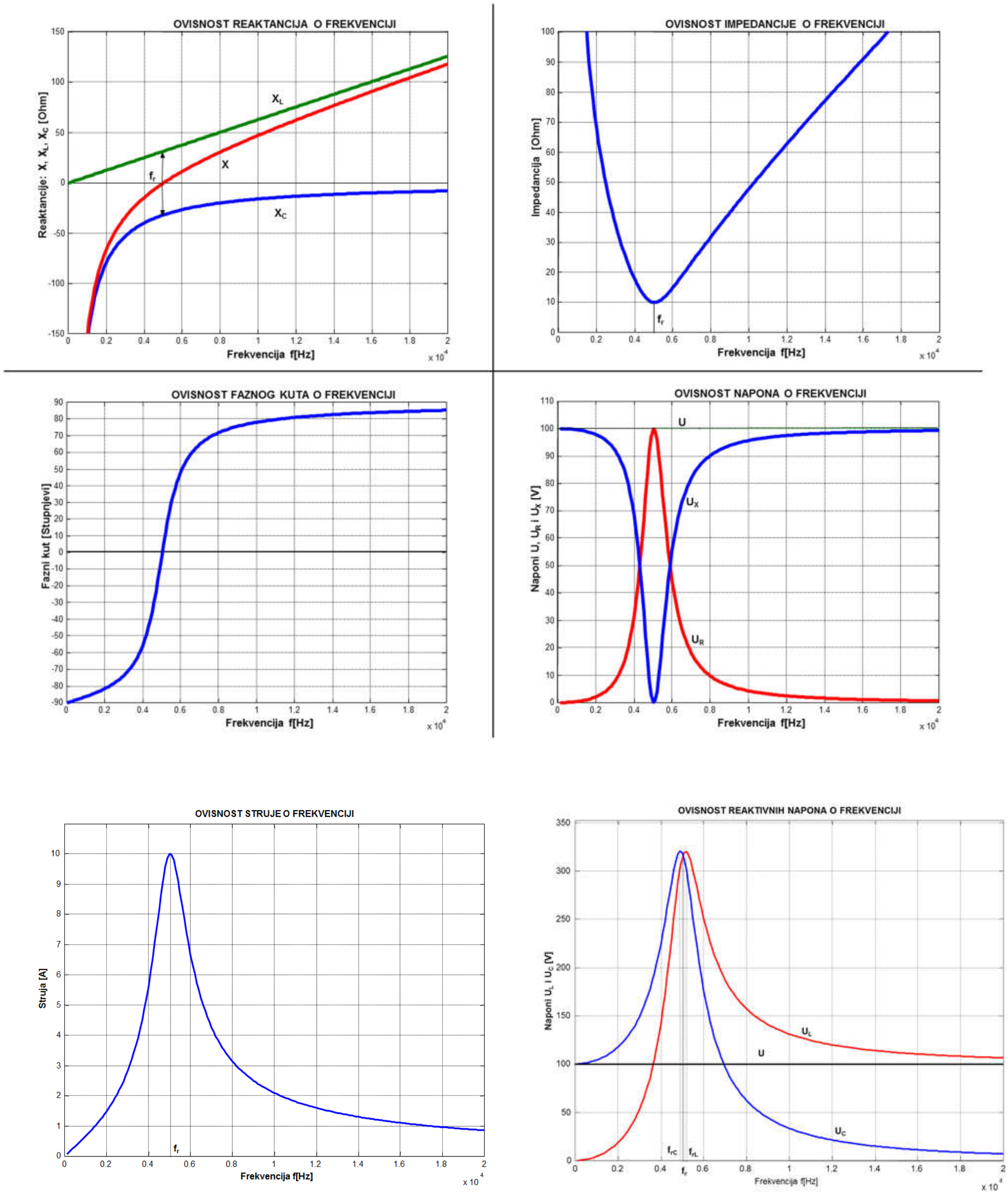
Za razmatrani primjer dobije se: f_{rC} = 3,73 kHz, f_{rL} = 6,79 kHz.

Smanjivanjem R (povećanjem Q) f_{rC} i f_{rL} približavaju se rezonantnoj frekvenciji, a za $R = 0$ je $f_{rC} = f_{rL} = f_r$.

6. $U, U_X, U_R = F(f)$ – u rezonanciji je $U_R = U$, $U_X = U_L - U_C = 0$. Za $f = 0$ kondenzator je prekid strujnog kruga ($X_C \to \infty$), pa je sav napon na njemu. Za $f \to \infty$ napon svitka jednak je priključenom naponu, jer je $X_C \to \infty$.

2. Serijska rezonancija:

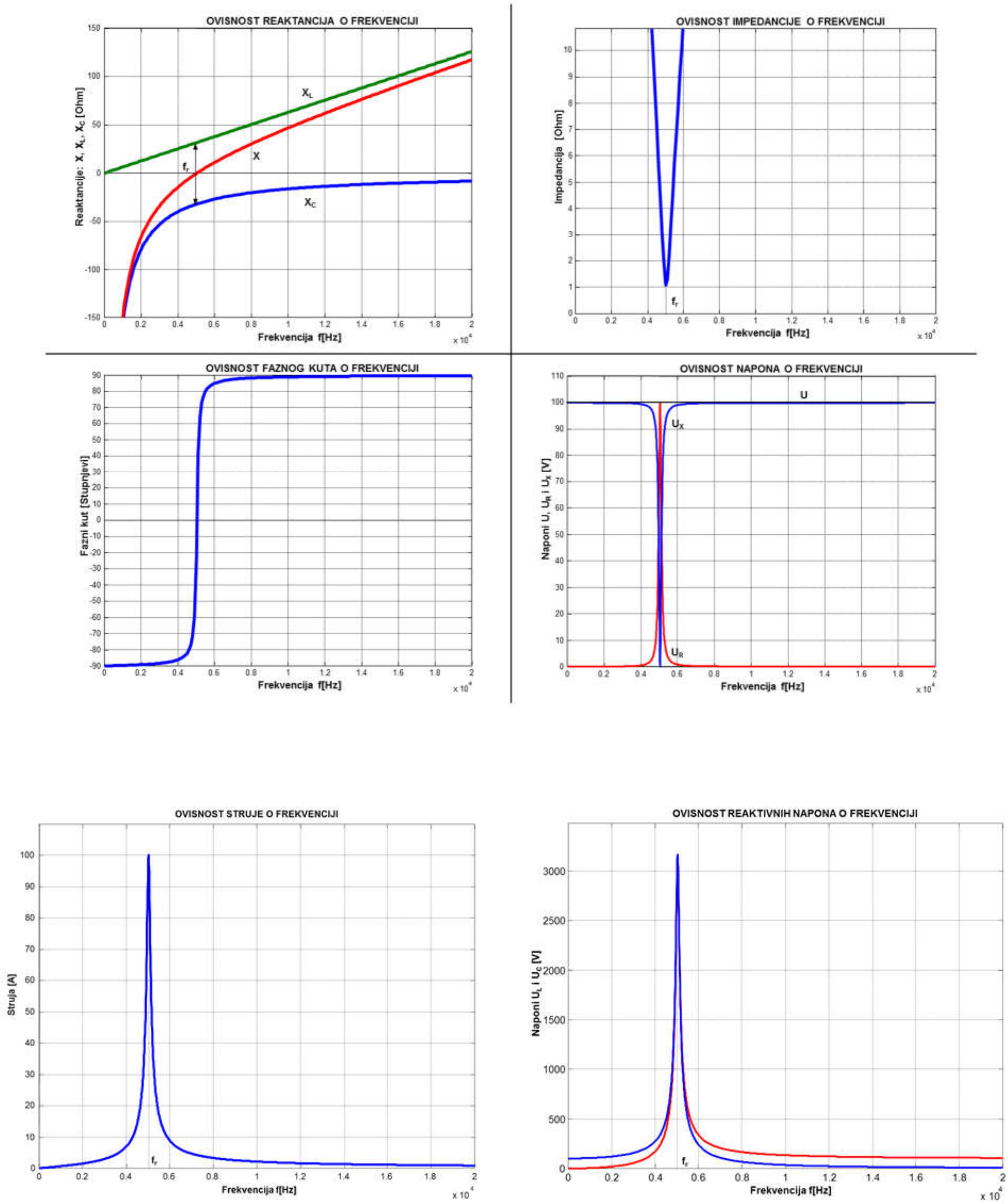
R=10Ω; L=1mH; C=1μF; U=100V; f=0...20KHz



Slike 6.8 – Frekvencijski dijagrami za drugu grupu parametara serijskoga rezonancijskog kruga

Druga grupa dijagrama prikazuje odzive titrajnog kruga za trostruko bolji faktor dobrote $Q = \pi$, jer je $R = 10\ \Omega$. Rezonantna krivulja struje je uža („oštrija“), a f_{rC} i f_{rL} približavaju se f_r.

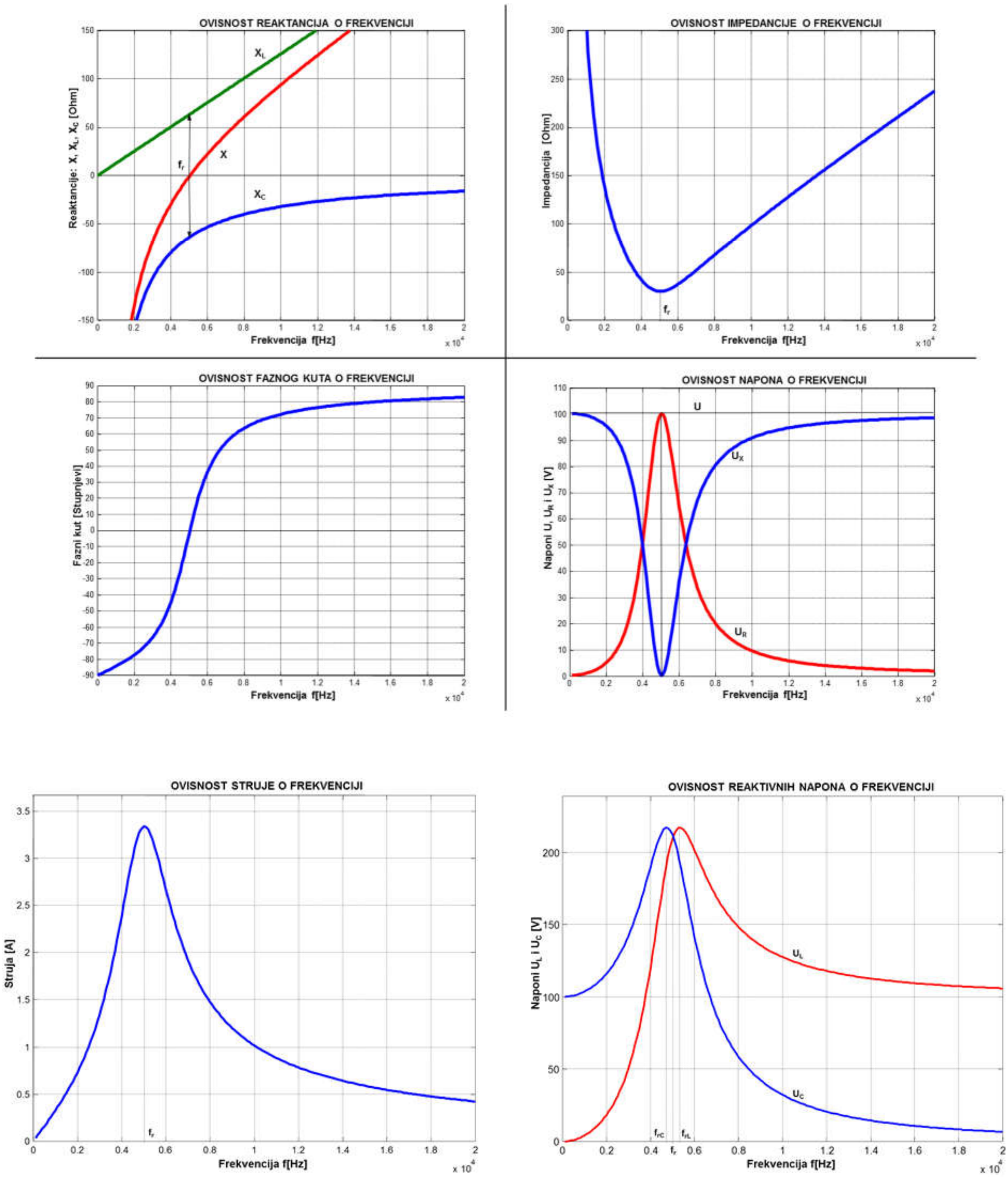
3. Serijska rezonancija:
R=1Ω; L=1mH; C=1μF; U=100V; f=0...20KHz



Slike 6.9 – Frekvencijski dijagrami za treću grupu parametara serijskoga rezonancijskog kruga

Za vrlo mali $R = 1\ \Omega$ trideset puta je poboljšan Q ($Q = 10\ \pi$). Oštrina rezonancije vrlo je jako izražena, a $f_{rC} \approx f_{rL} \approx f_r$ (treća grupa grafova). Reaktivni naponi naglo rastu, a maksimumi znatno nadmašuju napon izvora ($U_L \approx U_C$ = 3140 V), što je bitno za praktičnu primjenu (selektivno izdvajanje i pojačanje korisnog signala).

4. Serijska rezonancija:
R=30Ω; L=2mH; C=0,5μF; U=100V; f=0...20KHz

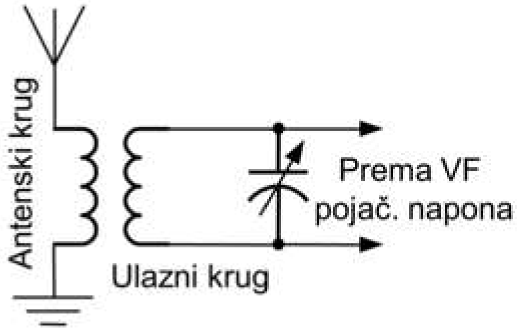


Slike 6.10 – Frekvencijski dijagrami za četvrtu grupu parametara serijskoga rezonancijskog kruga

Iz uvjeta za rezonanciju $f_r = f_0$ slijedi kako se, osim promjenom frekvencije generatora, prilagodba rezonantnog kruga može vršiti i promjenom frekvencije slobodnih oscilacija. Kako ona ovisi o L i C, prilagodba se može vršiti pomoću promjenljivih kondenzatora i/ili induktivnosti koji omogućuju ravnomjerno ugađanje u granicama određenog frekvencijskog opsega.

Četvrta grupa grafova prikazuje odzive rezonancijskog kruga za $R = 30\ \Omega$, ali je u odnosu na prethodne primjere udvostručen L, a C smanjen na polovicu prethodne vrijednosti ($L = 2\ mH$, $C = 0{,}5\ \mu F$). Time je Q poboljšan za dva puta u odnosu na prvu grupu dijagrama, jer je $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Primjer primjene serijske rezonancije je ulazni krug radijskog prijamnika, kao na *Slici 6.11*.



Slika 6.11 – Primjena serijske rezonancije na ulazni krug radijskog prijamnika

Elektromagnetski valovi induciraju u anteni EMS-e različitih frekvencija koje emitiraju radijske postaje. Preko induktivne sprege u ulaznom krugu prijamnika također se induciraju EMS-i i protječu struje različitih frekvencija. U odnosu na inducirani EMS elementi kruga vezani su serijski. Promjenljivi kondenzator omogućuje ugađanja ulaznog kruga na željenu rezonantnu frekvenciju. Na toj je frekvenciji struja maksimalna, a napon na kondenzatoru naglo poraste na Q puta veću vrijednost od napona izvora. Napon korisnog signala koji se skida s kondenzatora pojačan je i to *selektivno*. Naime, za signale drugih postaja koje u odnosu na željeni signal predstavljaju smetnju, nije ispunjen uvjet za rezonanciju. Za te je signale pripadni napon na kondenzatoru bitno manji od napona korisnog signala, premda su EMS-i inducirani u anteni mogli imati jednaku vrijednost.

Univerzalne rezonancijske krivulje

Za praktične primjene pojave rezonancije važna je što veća strmina povišenja struje u blizini rezonancije. Mjera za tu strminu je relativni odnos struje I pri nekoj frekvenciji prema maksimalnoj struji u rezonanciji I_r, dakle normalizirana vrijednost I/I_r. Ako želimo izdvojiti signal samo jedne nosive frekvencije, idealno bi bilo postići $I/I_r = 1$ za rezonantnu, odnosno $I/I_r \to 0$ za sve ostale frekvencije. Strmina, odnosno selektivnost kruga, strogo ovisi o faktoru dobrote. Kako bi se dobio što bolji uvid u kvalitetu kruga te jednostavna usporedba različitih rezonancijskih krugova, prikladno je analizirati univerzalne rezonantne krivulje. Na ordinati je normalizirana vrijednost struje, a na apscisi frekvencija normalizirana na rezonantnu f/f_r.

Izvodom izraza za univerzalne rezonancijske krivulje dobije se:

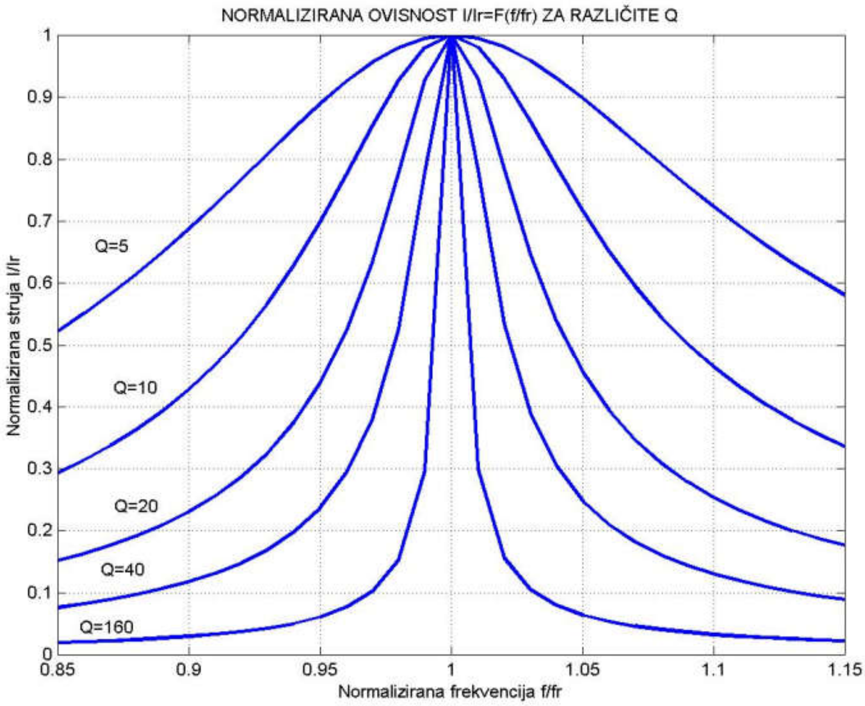
$$\frac{I}{I_r} = \frac{\dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}}{\dfrac{U}{R}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \frac{/\,\omega_r L}{/\,\omega_r L} = \frac{\dfrac{R}{\omega_r L}}{\sqrt{\dfrac{R^2}{\omega_r^2 L^2} + \left(\dfrac{\omega L}{\omega_r L} - \dfrac{1}{\omega\omega_r LC}\right)^2}} . \qquad (6\text{-}13)$$

Uvrsti li se $Q = \omega_r L/R$, slijedi:

$$\frac{I}{I_r}=\frac{\frac{1}{Q}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}+\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_r}-\frac{\omega_r}{\omega}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)^2}}. \qquad (6\text{-}14)$$

Očito je kako je za svaku frekvenciju koja odstupa od rezonancijske bitno odabrati što veći faktor dobrote Q.

Univerzalne rezonancijske krivulje prema izrazu *(6-14)* i to za Q = 5, 10, 20, 40, 160 prikazane su na *Slici 6.12*.



Slika 6.12 – Univerzalne rezonancijske krivulje

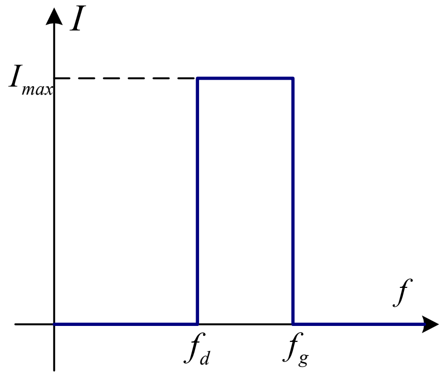
Kôd pripadnoga Matlab programa:

```
% NORMALIZIRANI PRIKAZ OVISNOSTI STRUJE O FREKVENCIJI ZA RAZLIČITE FAKTORE DOBROTE Q
clear
format long                                  % izlazni format brojeva
f=500:10:2*10^3;                             % frekvencijski opseg 0-2 KHz
frez=1000;                                   % odabrana rezonantna frekvencija
Q=[5 10 20 40 160];                          % odabrani Q-ovi
for i=1:1:5
  Qtren=Q(i);                                % petlja za promjenu Q
  NormStruja=((sqrt((Qtren*(f/frez-frez./f)).^2+1))).^(-1);   % normirane struje
  NormFrek=f/frez;                           % normirane frekvencije
    G=plot(NormFrek,NormStruja);             % graf
```

```
    set(G,'linewidth',2);                    % debljina krivulje
    axis([0.85,1.15,0,1]);                   % koordinatne osi
  pause                                      % stanka prije nove slike
  hold on                                    % zadržava prethodnu sliku
end                                          % kraj petlje izbora Q
title('NORMALIZIRANA OVISNOST I/Ir=F(f/fr) ZA RAZLIČITE Q')    % naslov
xlabel('Normalizirana frekvencija f/fr')     % oznaka X-osi
ylabel('Normalizirana struja I/Ir')          % oznaka Y-osi
grid                                         % rešetka
```

Oblik dobivenih krivulja bitan je za definiranje zahtjeva na proračun elemenata kruga i odnosa vezanih za širinu propusnog pojasa frekvencija. Propusni pojas uzima se kao mjera selektivnosti rezonancijskog kruga. Kako bi se spriječilo izobličenje signala, neophodno je da rezonancijski krug prenese samo one frekvencije koje ulaze u sastav korisnog signala i ravnomjerno ih pojača. Ovisno o tipu signala (telefonski, radijski, TV, radarski...) frekvencijski spektar signala može imati širinu od desetak Hz do nekoliko MHz, pa i više.

Karakteristika idealnog kruga izgleda kao na *Slici 6.13*.



Slika 6.13 – Frekvencijska karakteristika idealnog kruga

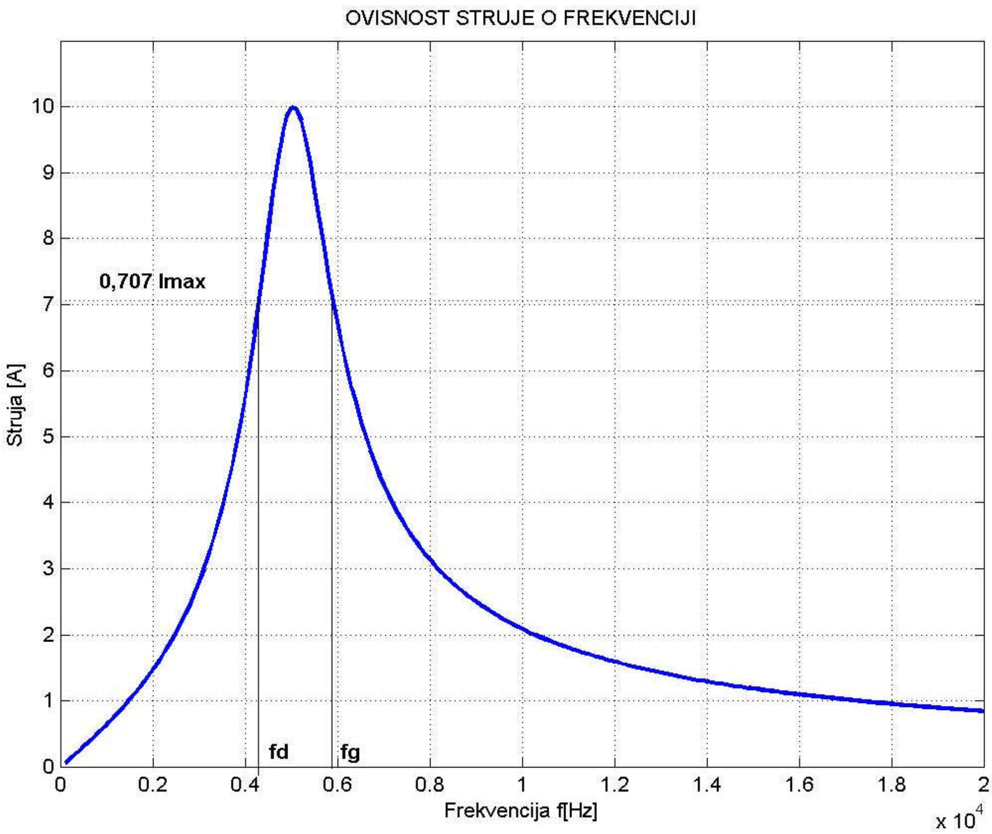
Pod idealnim krugom razumijeva se krug koji propušta i ravnomjerno pojačava sve komponente koje predstavljaju spektar ulaznog signala omeđenog graničnim vrijednostima $f_d < f < f_g$, a sve ostale komponente frekvencije izvan dopuštenog pojasa u potpunosti su eliminirane na izlazu. „Zvonolike“ karakteristike s visokim Q predstavljaju dobro približenje idealnima. S dodatnim složenijim krugovima može se postići još bolja aproksimacija.

U realnim se krugovima za pravu mjeru selektivnosti kruga uzima *širina propusnog pojasa.* To je onaj pojas frekvencija unutar kojega se struja (ili napon) smanje za ne više od $1/\sqrt{2}=0{,}707$ maksimalne vrijednosti. Propusni pojas je $B=f_g-f_d$.

Na gornjoj f_g i donjoj f_d graničnoj frekvenciji snaga signala opadne na polovicu (engl. *half power frequencies*). Naime, u relaciji za snagu kvadrira se struja (napon), dakle $\left(1/\sqrt{2}\right)^2=1/2$. Granične frekvencije mogu se definirati i kao frekvencije na kojima snaga opadne za $3\ dB$, jer je:

$$10\log_{10}\frac{P_{iz}}{P_{ul}}=10\log_{10}\frac{1}{2}=-3dB\,. \tag{6-15}$$

Primjer rezonancijske krivulje iz koje se mogu odrediti gornja i donja granična frekvencija dan je na *Slici 6.14*.



Slika 6.14 – Određivanje gornje i donje granične frekvencije

Potrebno je ustanoviti vezu između propusnog pojasa i parametara kruga. Iz definicije propusnog pojasa je:

$$\frac{I}{I_r}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad Q^2\left(\frac{f}{f_r}-\frac{f_r}{f}\right)^2=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\left(f^2-f_r^2\right)^2}{f_r^2 f^2}=\frac{1}{Q^2}. \qquad (6\text{-}16)$$

Dobivena bikvadratna jednadžba korjenovanjem se može razložiti na dvije kvadratne:

$$\frac{f^2-f_r^2}{f_r f}=\pm\frac{1}{Q} \quad\Rightarrow\quad Qf^2-f_r f-Qf_r^2=0 \quad\Rightarrow\quad Qf^2+f_r f-Qf_r^2=0\ . \qquad (6\text{-}17)$$

Uzmu li se u obzir samo dva realna rješenja (frekvencija ne može biti negativna):

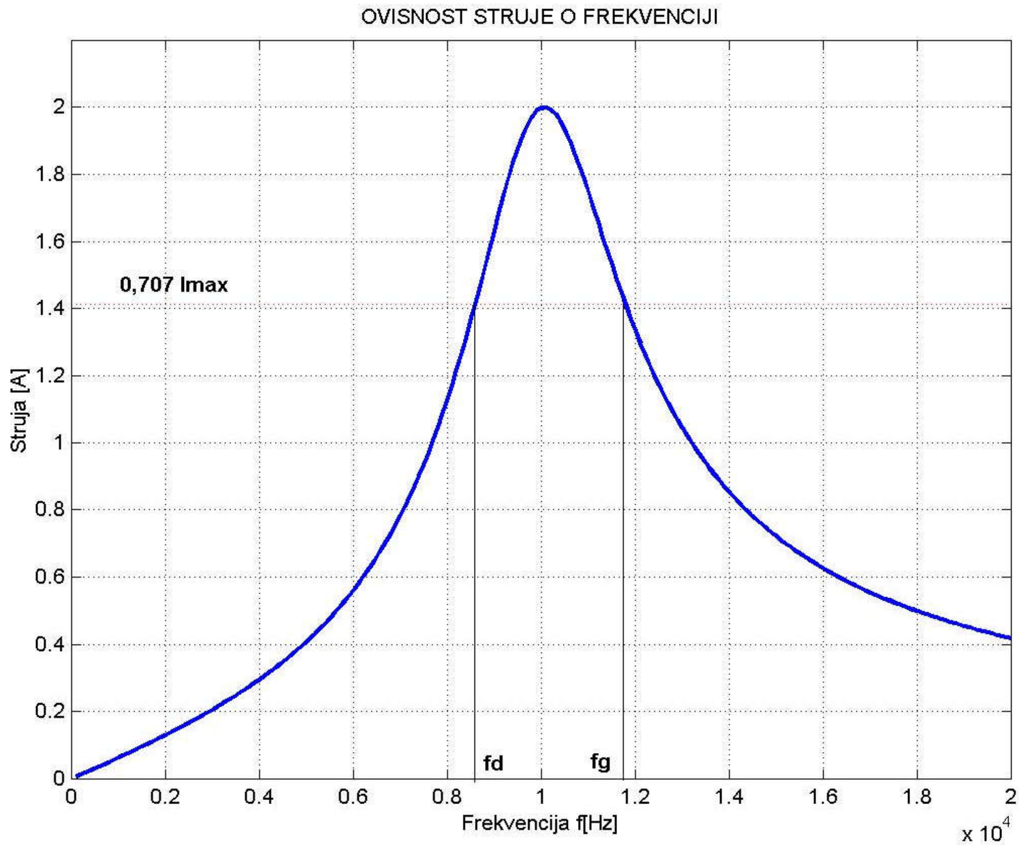
$$f_g=\frac{f_r+\sqrt{f_r^2+4Q^2f_r^2}}{2Q}\quad ,\quad f_d=\frac{-f_r+\sqrt{f_r^2+4Q^2f_r^2}}{2Q}\quad , \qquad (6\text{-}18)$$

konačno se za propusni pojas dobije:

$$B=f_g-f_d=\frac{f_r}{Q}. \qquad (6\text{-}19)$$

Što je dobrota veća, rezonancijska krivulja je oštrija, a propusni pojas uži. Pri jednakoj dobroti krug ugođen na višu frekvenciju ima širi propusni opseg.

Na *Slici 6.15* dan je primjer kruga s parametrima: R = 50 Ω, L = 2,5 mH, C = 0,1 μF, U = 100 V.



Slika 6.15 – Primjer grafičkog određivanja propusnog pojasa i faktora dobrote

Proračunom se dobije:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 10{,}066\,KHz \approx 10\,KHz \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{2\pi \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}}{50} = \pi = 3{,}14$$

$$I_{max} = I_r = \frac{100}{50} = 2A \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1{,}414A. \qquad (6\text{-}20)$$

Iz rezonancijske krivulje može se mjerenjem odrediti dobrota i za rezonancijski krug nepoznatih parametara. Nakon što se snimi rezonancijska krivulja struje, očita se f_r i frekvencije za koje struja opadne na 70,7 % maksimalne vrijednosti. Tada je Q:

$$Q = \frac{f_r}{f_g - f_d}. \qquad (6\text{-}21)$$

Za gornji se primjer iz dijagrama za granične struje $I = 1{,}414\ A$ mogu odrediti približne granične frekvencije: $f_d = 0{,}86 \cdot 10^4 HZ$, $f_g = 1{,}18 \cdot 10^4 HZ$,

pa se iz očitanih vrijednosti dobije: $Q' = \frac{f_r}{B} = \frac{10^4}{(1{,}18 - 0{,}86) \cdot 10^4} = \frac{1}{0{,}32} = 3{,}125 \approx Q$.

Dobivena vrijednost dobro se slaže s proračunanom.

6.3. Paralelna (strujna) rezonancija

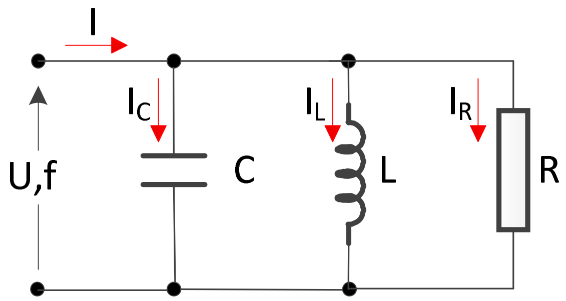
- Za paralelni *R-L-C* krug općenito vrijedi: $I_R=UG$; $I_L=UB_L$; $I_C=UB_C$.
- Ukupna struja:

$$I=\sqrt{I_R^2+\left(I_L-I_C\right)^2}=UY\ . \tag{6-22}$$

- Admitancija i fazni kut:

$$Y=\sqrt{G^2+\left(B_L-B_C\right)^2} \quad ; \quad \varphi=arctg\frac{B_L-B_C}{G}\ . \tag{6-23}$$

Krug je spojen na generator promjenljive frekvencije, kao na *Slici 6.16*.



Slika 6.16 – Paralelni rezonancijski RLC krug

Kako je već pokazano, promjenom frekvencije mogu nastupiti tri različita slučaja ($B_L < B_C$, $B_L = B_C$, $B_L > B_C$). Posebno ćemo analizirati slučaj kada je $B_L = B_C$. Tada je ukupna reaktivna vodljivost jednaka nuli: $B_L - B_C = 0$.

Frekvencija za koju je ispunjen gornji uvjet naziva se *rezonantna frekvencija* paralelnoga titrajnog kruga. Dobije se iz izraza:

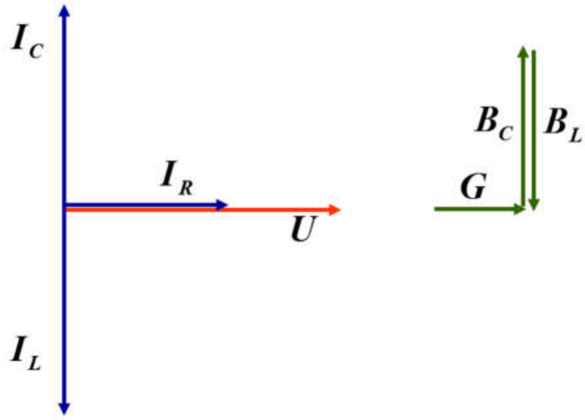
$$\omega_r C=\frac{1}{\omega_r L} \quad \Rightarrow \quad \omega_r=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_r=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\ . \tag{6-24}$$

Dakle, dobije se isti izraz kao i za serijsku rezonanciju.

Svojstva paralelnoga kruga u rezonanciji:

- admitancija je minimalna i jednaka je djelatnoj vodljivosti: $Y_r=Y_{min}=G$. To znači kako je impedancija u rezonanciji maksimalna;
- fazni kut $\varphi_r = 0$;
- struja je minimalna i u fazi je s priključenim naponom: $I_r=I_{min}=UG$;
- struje kroz induktivnu i kapacitivnu reaktanciju su jednake, pa se paralelna zove još i strujna rezonancija. Navedene struje su Q puta veće od struje napajanja: $I_{L_r}=I_{C_r}=QI$;
- faktor dobrote paralelnoga rezonantnog kruga je $Q=\frac{I_{L_r}}{I}=\frac{UB_L}{UG}=\frac{R}{\omega_r L}=R\omega_r C=R\sqrt{\frac{C}{L}}$;
- propusni opseg je $B=f_g-f_d=\frac{f_r}{Q}=\frac{1}{2\pi RC}$.

Fazorski dijagram u uvjetima paralelne rezonancije prikazan je na *Slici 6.17*.



Slika 6.17 – Fazorski dijagrami – paralelna rezonancija

Rezonancijske krivulje paralelnoga titrajnog kruga prikazane su na sljedećim grafovima. Simulacija je izvedena pomoću programskog paketa MATLAB. Kôd programa je:

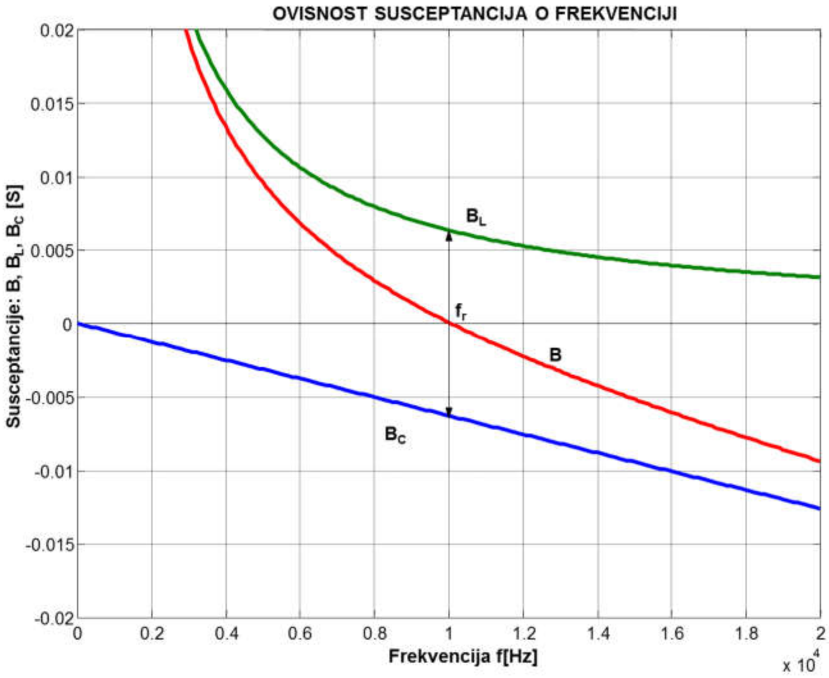
```
% FREKVENCIJSKE KRIVULJE PARALELNOGA REZONANCIJSKOG KRUGA
format short                          % izlazni format brojeva
R=1000;                               % djelatni otpor
L=2.5*10^-3;                          % induktivnost svitka
C=0.1*10^-6;                          % kapacitivnost kondenzatora
U=100;                                % narinuti napon
f=0:100:2*10^4;                       % frekvencijski opseg 0–10 KHz
G=1/R;                                % konduktancija
BL=j*1./(2*pi*f*L);                   % induktivna susceptancija
BC=j*2*pi*f*C;                        % kapacitivna susceptancija
Y=G-BL+BC;                            % admitancija paralelnoga R-L-C kruga
Z=1./Y;                               % impedancija paralelnoga R-L-C kruga
I=U.*Y;                               % ukupna struja
IL=BL*U;                              % struja kroz induktivnu susceptanciju
IC=BC*U;                              % struja kroz kapacitivnu susceptanciju
IG=G*U;                               % struja kroz konduktanciju
IX=I-IG;                              % struja kroz ukupnu susceptanciju
Faza_rad=atan((abs(BL)-abs(BC))./G);  % fazni kut u radijanima
Faza_stup=Faza_rad*180/pi;            % fazni kut u stupnjevima
% Ovisnost reaktancija o frekvenciji
figure (1)
Nula=0*f;                             % os apscisa
G=plot(f,Nula,'b',f,-abs(BC),f,abs(BL),f,abs(BL)-abs(BC));     % grafovi BL, BC, B
set(G,'linewidth',2);                 % debljina krivulje
axis([0,(2*10^4),-20*10^-3,20*10^-3]);                         % koordinatne osi
title('OVISNOST SUSCEPTANCIJA O FREKVENCIJI')                  % naslov
xlabel('Frekvencija f[Hz]')                                    % oznaka X-osi
```

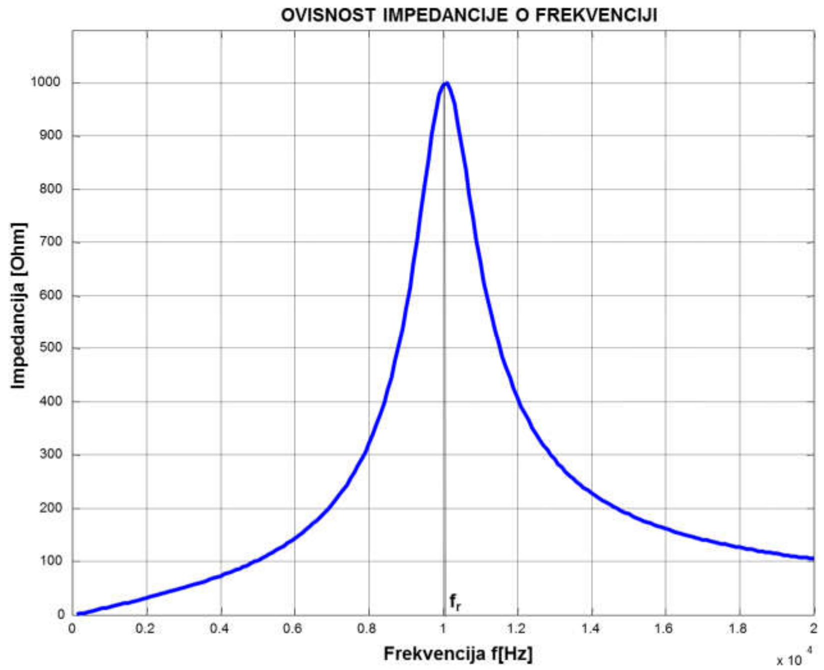
```
ylabel('Susceptancije: B, BL, BC [S]')                % oznaka Y-osi
grid
pause
% Ovisnost faznog kuta o frekvenciji
figure (2)
G=plot(f,Nula,'y',f,Faza_stup);
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(2*10^4),-90,90]);
title('OVISNOST FAZNOG KUTA O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Fazni kut [Stupnjevi]')
grid
pause
% Ovisnost impedancije o frekvenciji
figure (3)
G=plot(f,abs(Z));
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(2*10^4),0,1.1*max(abs(Z))]);
title('OVISNOST IMPEDANCIJE O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Impedancija [Ohm]')
grid
pause
% Ovisnost struje o frekvenciji
figure (4)
G=plot(f,abs(I),'b');
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(2*10^4),0,10*min(abs(I))]);
title('OVISNOST STRUJE O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Struja [A]')
grid
pause
% Ovisnost aktivne i reaktivnih struja o frekvenciji
figure (5)
G=plot(f,IG,'g',f,abs(IL),'r',f,abs(IC),'b');
set(G,'linewidth',2);
axis([0,(20*10^3),0,20*IG]);
title('OVISNOST STRUJA O FREKVENCIJI')
xlabel('Frekvencija f[Hz]')
ylabel('Struje IG, IL i IC [A]')
grid
```

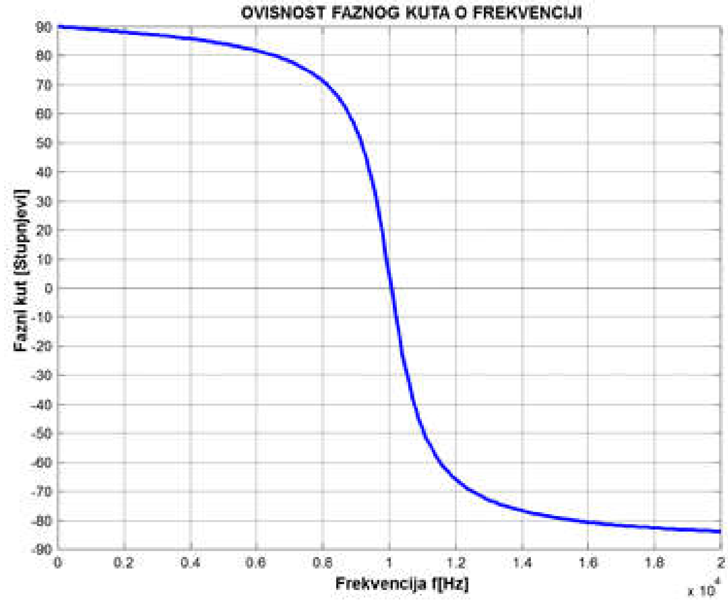
Peta grupa dijagrama dobivena je za odabrane vrijednosti R = 1000 Ω, L = 2,5 mH, C = *0,1 μF*, U = 100 V.

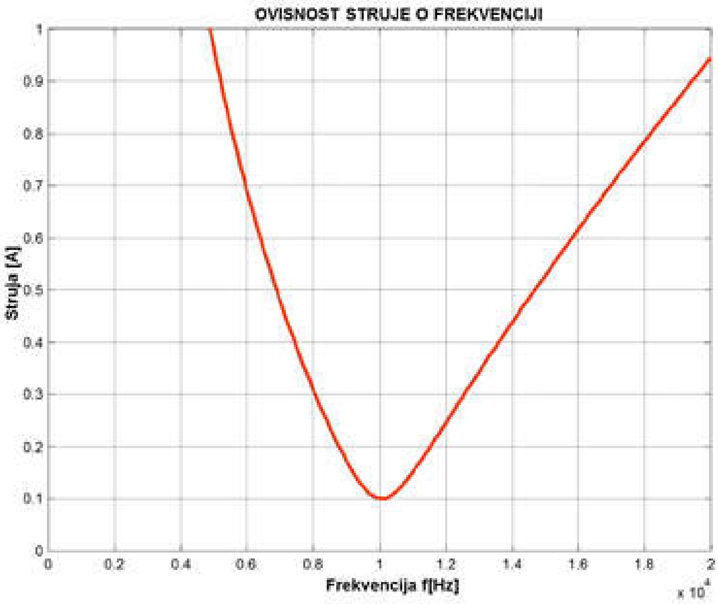
5. Paralelna rezonancija:

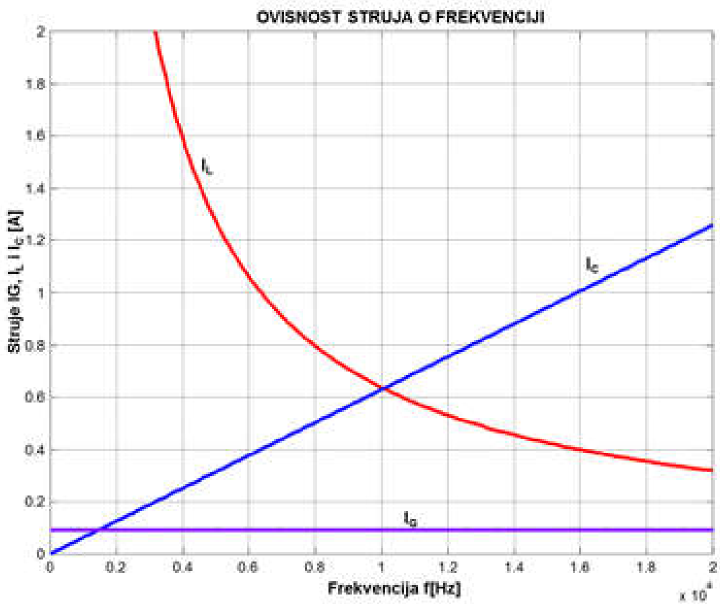
R=1000Ω; L=2,5mH; C=0,1μF; U=100V; f=0...20KHz











Slike 6.18 – Frekvencijski dijagrami za petu grupu parametara – paralelni rezonancijski krug

Analiza dijagrama na *Slikama 6.18*:

1. B_L, B_C, $B = F(f)$ – lijevo od $f_r \approx 10\ kHz$ prevladava induktivna, a desno kapacitivna reaktivna komponenta. U rezonanciji se poništavaju, pa je ukupna susceptancija jednaka nuli.
2. $Z = F(f)$ – impedancija je maksimalna u rezonanciji: $Z = R = 1000\Omega$. Admitancija je minimalna $Y = G = 10^{-3}\ S$.
3. $\varphi = F(f)$ – fazni kut se mijenja u rasponu $90^o > \varphi > -90^o$ i jednak je nuli za f_r.
4. $I = F(f)$ – struja je minimalna u rezonanciji: $I_r = \frac{U}{R} = \frac{100}{1000} = 0{,}1A$. Za vrlo niske, kao i za vrlo visoke frekvencije $I \to \infty$.
5. I_L, $I_C = F(f)$ – struje kroz susceptancije jednake su pri rezonanciji, pa se poništavaju.

6.4. Kriterij za određivanje vrste rezonancije u složenom krugu

Složeni krugovi s više reaktivnih elemenata razmještenih u serijskim i/ili paralelnim granama općenito mogu imati nekoliko rezonancijskih frekvencija. Pri tomu na različitim frekvencijama mogu nastupiti i serijska i paralelna rezonancija. Koja je vrsta rezonancije moguća dade se odrediti po jednostavnom kriteriju:

- paralelna rezonancija – pri odspojenom izvoru postoje ekvivalentni reaktivni elementi suprotnog polariteta (X_L *i* X_C) u paralelnim granama;
- serijska rezonancija – pri kratko spojenom izvoru u serijskoj grani ekvivalentni su reaktivni elementi suprotnog polariteta (X_L i X_C).

Općenito se za krug koji konfiguracijom odstupa od čistog serijskog ili paralelnog *R-L-C* kruga rezonantna frekvencija, ili neki drugi parametar u rezonancijskim uvjetima, može odrediti iz uvjeta:

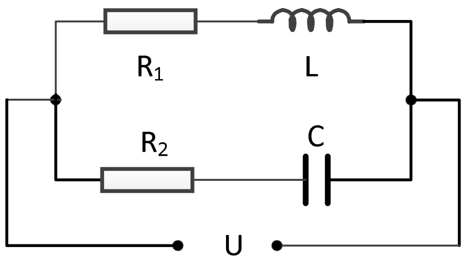
$$Im\left(\overline{Z}_{eq}\right) = 0 \quad ili \quad Im\left(\overline{Y}_{eq}\right) = 0\,. \tag{6-25}$$

Dakle, nadomjesna impedancija/admitancija u rezonancijskim uvjetima mora imati djelatni karakter.

Primjer:

Rezonancija u krugu s realnim kondenzatorom i svitkom

Shema realnog svitka i kondenzatora prikazana je na *Slici 6.19*.



Slika 6.19 – Krug s realnim kondenzatorom i svitkom

Iz uvjeta $Im\left(\overline{Y}_{eq}\right) = 0$ slijedi kako je potrebno odrediti nadomjesnu admitanciju i imaginarni dio izjednačiti s nulom:

$$\overline{Y} = \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + jX_L} + \frac{1}{R_2 - jX_C} = \frac{R_1 - jX_L}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2 + jX_C}{R_2^2 + X_C^2} =$$
$$= \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_C^2} \right) + j \underbrace{\left(\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} \right)}_{=0} . \qquad (6\text{-}26)$$

Uvjet za rezonanciju je:

$$\frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega C}\left(R_1^2 + \omega^2 L^2\right) = \omega L \left(R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right), \qquad (6\text{-}27)$$

pa se za rezonantnu frekvenciju dobije:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L - CR_1^2}{LC\left(L - CR_2^2\right)}} . \qquad (6\text{-}28)$$

Vidi se kako se za R_1 << i R_2 << dobije idealni titrajni krug s poznatom rezonantnom frekvencijom $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$.

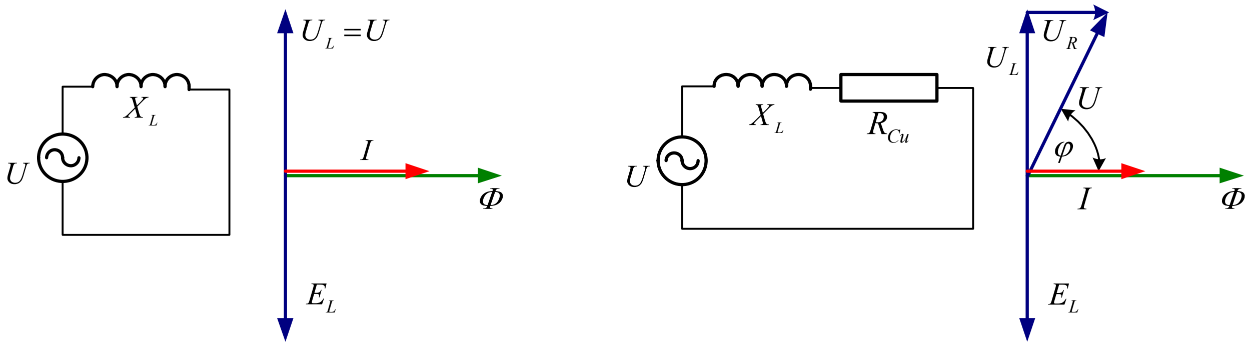
Fizikalni proces izmjene energije između kondenzatora i svitka analogan je za obje vrste rezonancije. Međutim način napajanja, odnosno karakteristike izvora, stvaraju bitne razlike između tih pojava. Svojstva kruga u uvjetima paralelne rezonancije znatno ovise o veličini unutarnjeg otpora generatora na koji je spojen rezonancijski krug. Pri priključenom realnom naponskom izvoru napon na rezonancijskom krugu pri rezonanciji dostiže maksimalnu vrijednost. Za vrlo veliki unutarnji otpor generatora u odnosu na djelatni otpor paralelnoga rezonancijskog kruga može se smatrati kako je rezonancijski krug priključen na izvor konstantne struje, pa se oblik rezonancijskih krivulja bitno mijenja.

Poznato je kako je za dobivanje maksimalne snage na trošilu potrebno ispuniti uvjet prilagodbe, tj. unutarnji otpor generatora mora biti jednak otporu kruga u rezonanciji. Za mali unutarnji otpor generatora svrsishodno je primijeniti naponsku, a pri velikom unutarnjem otporu strujnu rezonanciju. U praksi se naponska rezonancija primjenjuje u antenskim krugovima i u sekundarnim krugovima induktivno spregnutih svitaka, jer je izvor EMS-a samoindukcije s malim unutarnjim otporom. Strujna se rezonancija uporabljuje primjerice u kolektorskom krugu tranzistora jer je velik unutarnji otpor generatora (velik R_{iz} u kolektoru).

Jedna je od primjena rezonancijskih krugova primjerice tonsko biranje telefonskih brojeva.

7. SVITAK S FEROMAGNETSKOM JEZGROM

U *Pogl. 3.* opisani su idealni i realni svitak bez feromagnetske jezgre (zračni ili linearni svitak). Realni svitak ima pored induktivnoga i nezanemariv djelatni otpor namotaja R_{Cu}. Ekvivalentne sheme i pripadni fazorski dijagrami prikazani su na *Slici 7.1*.



Slika 7.1 – Zračni svitak – ekvivalentna shema i fazorski dijagram

U ovom će se poglavlju analizirati svitci s feromagnetskom jezgrom koji se često primjenjuju u elektrotehnici bilo kao samostalni dijelovi ili sastavni dijelovi različitih elektrotehničkih uređaja (prigušnice, transformatori, autotransformatori, električni strojevi...). Fizikalni procesi u takvim svitcima razlikuju se od onih u linearnim svitcima. Svitak s Fe jezgrom je nelinearni element kroz koji pri narinutom sinusoidnom naponu teče izobličena nesinusoidna struja.

Značajno je da se već pri malom zračnom rasporu u jezgri prigušnice (između jarma i kotve) izobličenje strujnog vala znatno ublažuje. Zračni raspor (engl. *"air gap"*) čisti struju od jakih izobličenja.

Simboli svitaka dani su na *Slici 7.2*.

Slika 7.2 – Simboličke oznake svitaka

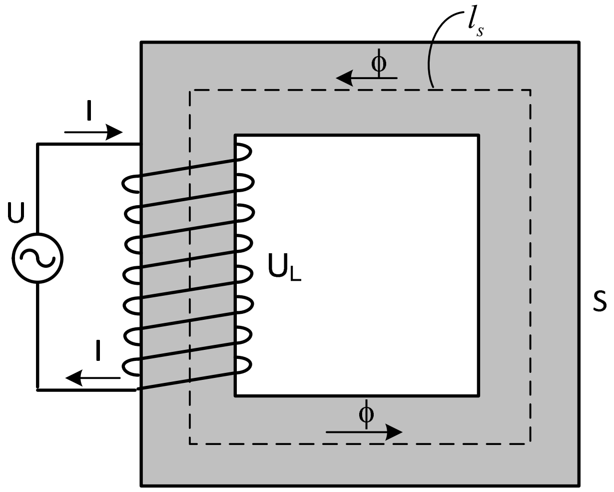
Uzročnik nelinearne *U - I* karakteristike je feromagnetska jezgra koju karakterizira nelinearna krivulja magnetiziranja. Naime, permeabilnost feromagnetskog materijala nije konstantna, već ovisi o trenutačnim vrijednostima *B* i *H*.

Induktivnost svitka je:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \mu_r \mu_0 S}{l_s}. \qquad (7\text{-}1)$$

Za zračni (linearni) svitak *L* je konstantan ($\mu_r \approx 1$). Svitak s feromagnetskom jezgrom ima promjenljiv μ_r koji se mijenja ovisno o karakteristikama petlje histereze ($B = \mu_0 \mu_r H$) materijala odabranog za jezgru. Stoga ni L nije konstantan. Kroz svitak spojen na sinusni izvor teče struja: $i = \frac{1}{L}\int u dt$. Zbog promjenljive induktivnosti ona će imati istu frekvenciju, ali neće imati čisti sinusni oblik kao napon. Egzaktna analiza strujnog signala provodila bi se razvojem u Fourierov red koji bi osim temeljnoga imao i više harmonike. Mi ćemo se ograničiti na analizu preko aproksimativne nadomjesne sheme u kojoj se u razmatranje uzima samo prvi harmonik struje.

Shema svitka s feromagnetskom jezgrom dana je na *Slici 7.3*.



Slika 7.3 – Svitak s feromagnetskom jezgrom

Kada se sinusoidni napon $u = U_m sin\omega t$ narine na svitak sa željeznom jezgrom, izmjenična struja stvara promjenljivi magnetski tok. Dio toka se zatvara izvan jezgre tvoreći *rasipni tok* Φ_σ. Kako je rasipni tok obično puno manji od glavnoga magnetskog toka, na početku razmatranja može se zanemariti. Ako je k tomu i otpor svitka zanemarivo malen, u krugu preostaje idealna induktivnost. Narinuti napon drži ravnotežu induciranom EMS-u samoindukcije: $u + e = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -e$. Kako je po zakonu elektromagnetske indukcije: $e = -N\frac{d\Phi}{dt}$, magnetski tok dobije se iz izraza:

$$U_m \sin \omega t = N\frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) = \frac{U_m}{N}\int sin(\omega t)dt = \frac{U_m}{N\omega}[-cos(\omega t)] = \frac{U_m}{2\pi f N} sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \qquad (7\text{-}2)$$

gdje je maksimalni tok:

$$\Phi_m = \frac{U_m}{2\pi f N} = \frac{U}{\sqrt{2}\pi f N} \approx \frac{U}{4{,}44\, fN}, \qquad (7\text{-}3)$$

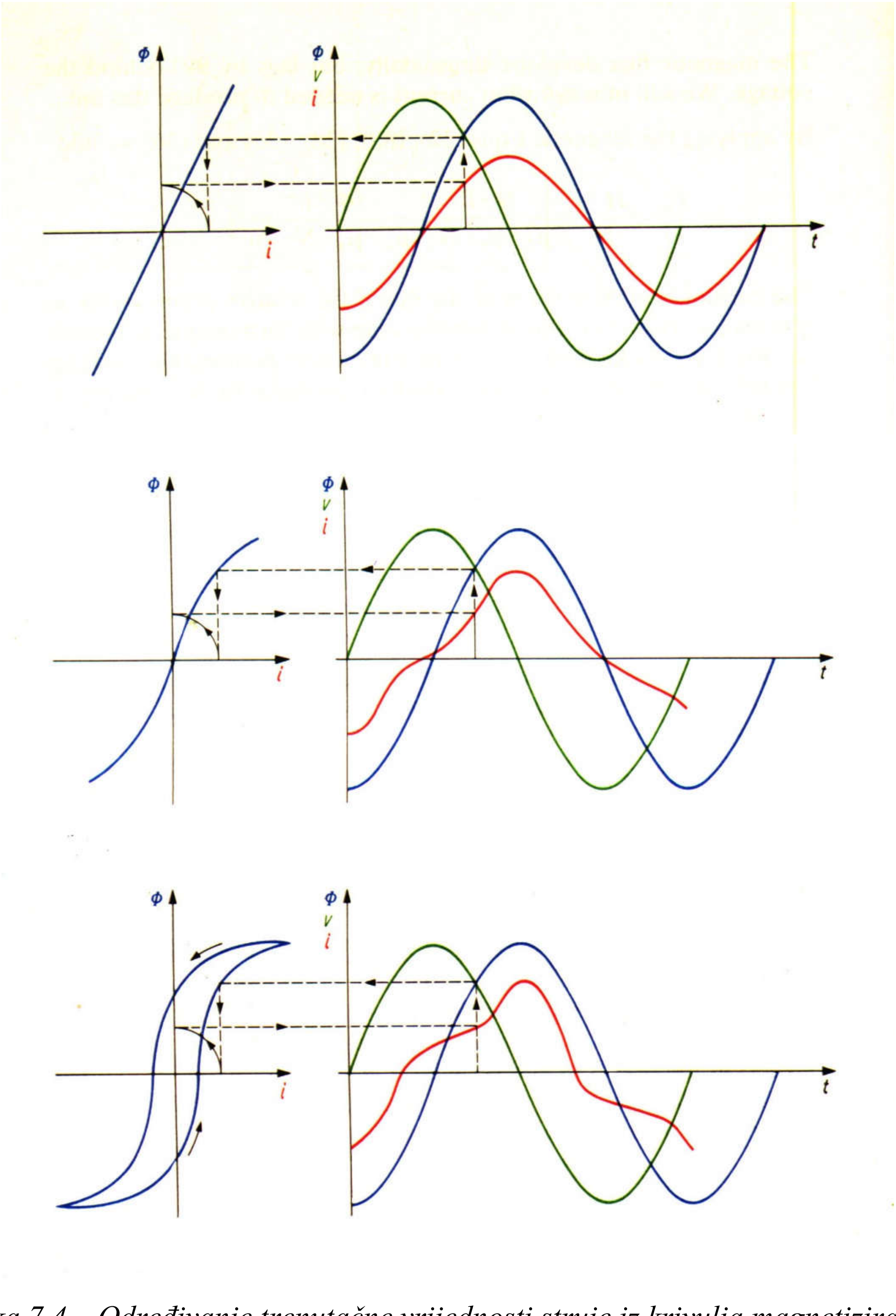
pa je efektivna vrijednost priključenog napona: $U = 4{,}44 f N\Phi_m$.

Magnetski tok je sinusoidno promjenljiva veličina koja zaostaje za narinutim naponom za 90^0. Potrebno je ispitati koja je struja potrebna za stvaranje toga toka. Prema zakonu protjecanja je:

$$H \cdot l = N \cdot i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{H \cdot l}{N} = \frac{B \cdot l}{\mu_0 \mu_r N} = \frac{\Phi(t) \cdot l}{\mu_0 \mu_r NS}. \qquad (7\text{-}4)$$

Struja je izravno proporcionalna magnetskom toku samo ako je relativna permeabilnost μ_r konstantna, što vrijedi za zračni svitak. Ako je jezgra napravljena od feromagnetskog materijala, ovisnost struje *i* i toka Φ, pa tako i ovisnosti jakosti polja *H* i gustoće toka *B*, prikazuje odgovarajuća petlja histereze. Petlja se ne može opisati jedinstvenim matematičkim izrazom, pa je krivulju ovisnosti struje $i = f(t)$ moguće odrediti jedino grafički.

Dakle, za određivanje dijagrama trenutačnih vrijednosti struja potrebno je iz krivulje magnetiziranja za svaku trenutačnu vrijednost magnetskog toka odrediti trenutačnu vrijednost struje. Od interesa su tri slučaja prikazana na *Slici 7.4*.



Slika 7.4 – Određivanje trenutačne vrijednosti struje iz krivulja magnetiziranja

U skladu s gornjim izrazima napon je prikazan kao referentna veličina, a magnetski tok zaostaje za 90°. Grafički postupak izvodi se u sljedećim koracima: za pojedine točke u $\Phi = f(t)$ dijagramu traže se pripadne vrijednosti struje u $\Phi = f(i)$ dijagramu, koji je ekvivalentan $B = f(H)$ dijagramu. Dobivene vrijednosti struje prenose se u $i = f(t)$ dijagram.

1. Svitak bez Fe (ili svitak s Fe, ali s približno linearnim karakteristikama) – magnetska karakteristika je linearna (pravac). Odnosi električnih i magnetskih veličina mogu se i matematički opisati, kako je već pokazano. Ako je djelatni otpor namotaja zanemariv, tok i struja su u fazi i međusobno su proporcionalni. Iz faznog pomaka napona i struje od 90° slijedi kako nema utroška djelatne snage.
2. Svitak s Fe jezgrom sa zasićenjem, ali zanemarivim gubitcima u željezu (vrlo uska petlja histereze bez remanentnog otpora) – struja magnetiziranja je izobličena, ali je u fazi s tokom i simetrična je četvrtinu perioda. Djelatna snaga jednaka je nuli.
3. Svitak s Fe jezgrom s jakim zasićenjem i znatnim gubitcima u željezu – struja je dodatno izobličena i više nije u fazi s tokom. Dijagram struje više nije simetričan u *T/4*, nego poluvalno (*T/2*) kao u zrcalu. Struja prema naponu zaostaje za kut manji od 90° što upućuje na postojanje djelatnih gubitaka. Pri konstrukciji dijagrama treba uzeti u obzir karakter promjene toka. Pri porastu toka pripadna vrijednost struje uzima se s desnog kraka petlje histereze (magnetiziranje), a kada tok pada, s lijevog kraka (demagnetiziranje).

Kada bismo odredili krivulju trenutačne snage $p(t) = ui$, ona bi također bila izobličena u odnosu na sinusoidnu. Štoviše, krivulja bi bila više pozitivna nego negativna. Unatoč pretpostavci o idealnoj induktivnosti dio snage pretvara se u djelatnu snagu potrebnu za održavanje magnetskog toka. To je posljedica kontinuiranog remagnetiziranja molekularnih magneta (promjena orijentacije elementarnih magnetića – Weissovih domena) u željeznoj jezgri i vrtložnih struja u masivnoj homogenoj jezgri. Nastali gubitci su gubitci jezgre ili *gubitci u željezu* P_{Fe}.

Gubitci u željezu ne mogu se izravno odrediti. Kada bismo za realni svitak snimili oscilograme $u = f(t)$ i $i = f(t)$, dobili bismo $p(t)$ kao grafičku prezentaciju jednadžbe:

$$P_{Fe} = \frac{1}{T}\int_0^T uidt - \frac{R_{Cu}}{T}\int_0^T i^2 dt = P_{uk} - P_{Cu} . \tag{7-5}$$

Prvi je član ukupno uložena djelatna snaga P_{uk}, a drugi su član *gubitci u bakru* $P_{Cu} = I^2R_{Cu}$ koji nastaju na otporu namotaja svitka.

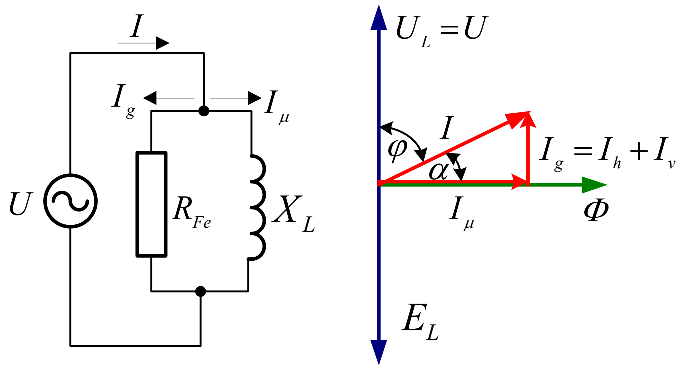
7.1. Nadomjesne sheme i fazorski dijagrami svitka s Fe jezgrom

Budući da struja kroz svitak s Fe jezgrom odstupa od sinusne funkcije, ne može se izravno prikazati kao fazor. Za crtanje fazorskog dijagrama svitka potrebno je zamijeniti izobličenu krivulju struje s ekvivalentnom sinusoidnom krivuljom jednake efektivne vrijednosti I_{eq}. Pored toga ekvivalentna struja I_{eq} mora imati toliki fazni pomak φ da njezina djelatna komponenta izaziva jednake gubitke u jezgri kao i izobličena struja. Fazni pomak je.

$$\varphi = arccos\frac{P_{Fe}}{UI_{eq}} . \tag{7-6}$$

Nadomjesna ukupna struja može se, dakle, podijeliti na djelatnu komponentu $I_{eqR} = I_{eq}cos\varphi$, koja pokriva gubitke u jezgri, i reaktivnu komponentu $I_{eqX} = I_{eq}sin\varphi$, koja generira magnetski tok.

Nadomjesna shema stoga se sastoji od paralelnog kruga s dvije grane protjecane spomenutim strujama, kao na *Slici 7.5*. Otpor R_{Fe} je *fiktivni otpor željeza*, tj. nadomjesni otpor na kojem se stvaraju toplinski gubitci u željezu.



Slika 7.5 – Nadomjesna shema i fazorski dijagram svitka s gubitcima u željezu

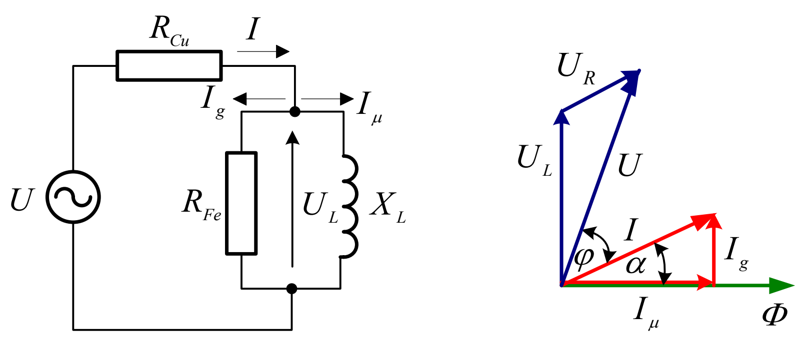
Napomena: fazorski dijagrami svitka i transformatora obično se crtaju s osima Gaussove kompleksne ravnine rotiranima za 90° u pozitivnom smjeru. Realna os stoga je vertikalna os.

U crtanje dijagrama kreće se od toka Φ. Jalova struja I_{eqX} zove se *struja magnetiziranja* i označuje s I_μ. To je struja potrebna za stvaranje magnetskog toka i u fazi je s tokom. Gubitci u željezu „pokriveni“ su djelatnom strujom I_{eqR}, koja se zove *struja gubitaka* i označuje s I_g. Geometrijska suma tih dviju struja je ukupna struja $\bar{I} = \bar{I}_g + \bar{I}_\mu$, gdje je:

$$I_\mu = I\cos\alpha \quad , \quad I_g = I\sin\alpha \quad , \quad I = \sqrt{I_\mu^2 + I_g^2} \; . \tag{7-7}$$

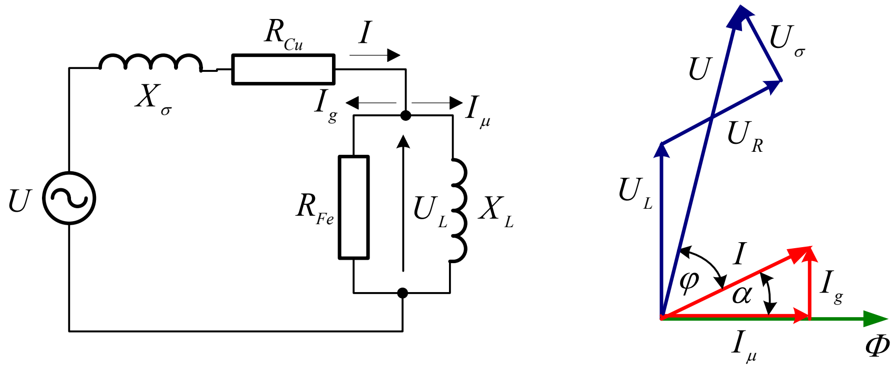
Napon na svitku $U_L = U$ u fazi je strujom gubitaka i drži ravnotežu induciranom EMS-u samoindukcije E_L.

Kada nije moguće zanemariti otpor namotaja svitka R_{Cu}, svitak se u ekvivalentnoj shemi spaja serijski s izvorom, jer njime teče ukupna struja – *Slika 7.6*. Izvor tada mora nadoknaditi dodatne gubitke $P_{Cu} = I^2 R_{Cu}$. Pad napona $U_R = IR_{Cu}$ u fazi je s ukupnom strujom. Napon izvora je $\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L$. Zbog povećanja djelatne komponente smanjuje se fazni kut φ.



Slika 7.6 – Nadomjesna shema i fazorski dijagram svitka s gubitcima u željezu i bakru

Ako se uzme u obzir da i zrak oko jezgre ima neku, doduše malu, magnetsku vodljivost, dio toka zatvara se izvan jezgre. To je rasipni tok u zraku Φ_σ, koji se obično prikazuje u postocima glavnog toka. Kako u zraku nema histereze ni vrtložnih struja, rasipni tok u fazi je s ukupnom strujom. On inducira u svitku rasipni napon U_σ koji prethodi rasipnom toku (ukupnoj struji) za 90°. Nadomjesna shema za taj slučaj prikazana je na *Slici 7.7*.



Slika 7.7 – Potpuna nadomjesna shema svitka s feromagnetskom jezgrom

U nadomjesnoj je shemi utjecaj rasipnog toka obuhvaćen rasipnom induktivnosti X_σ. Ukupni je napon suma fazora: $\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_\sigma$.

Rasipni tok povećava fazni kut jer je povećan ukupni tok svitka, pa time i njegova induktivnost.

<u>Određivanje parametara i elemenata potpune nadomjesne sheme svitka</u>

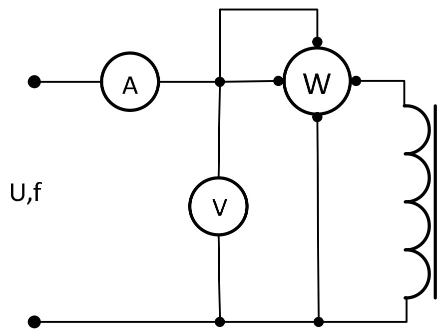
Zadano:

- broj namotaja svitka N
- feromagnetska jezgra (trafo lim, lijevani čelik, željezo...) s poznatom krivuljom magnetiziranja $B = f(H)$ danom u obliku grafa ili tablice
- dimenzije jezgre iz kojih se može odrediti površina poprečnog presjeka S i duljina l srednje magnetske silnice
- procijenjeni rasipni tok u odnosu na ukupni tok $\Phi_{\sigma m} = k\Phi_m$, gdje k obično nije veći od 0,1 odnosno 10 % ukupnog toka.

Izmjereno:

- svitak je spojen na izvor napona U frekvencije f. Mjerenjem prema shemi na *Slici 7.8* mogu se odrediti: $I_A = I,\ U_V = U,\ P_W = P_{uk}$, a ommetrom se izmjeri R_{Cu}.

<u>Napomena</u>: U prvom se koraku pretpostavi da je $U_L \approx U$, pa se poslije po potrebi vrši korekcija.



Slika 7.8 – Mjerna shema za određivanje parametara svitka

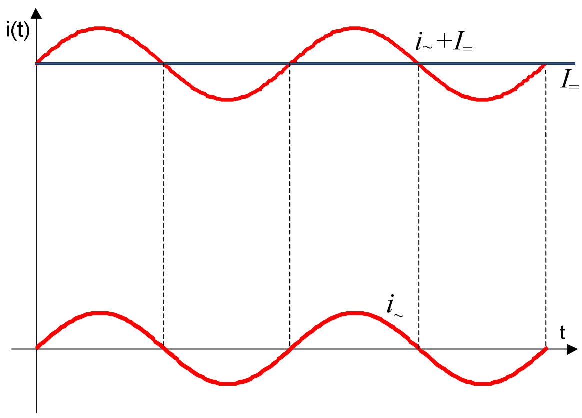
Izračunano:

- Magnetski tok: $\Phi_m = \dfrac{U}{4{,}44 fN}$

- Gustoća magnetskog toka (magnetska indukcija) u jezgri: $B_m = \frac{\Phi_m}{S}$
- Iz krivulje ili tablice magnetiziranja $B = f(H)$ za uporabljeni materijal jezgre očita se pripadna jakost magnetskog polja H.
- Amplituda struje magnetiziranja: $I_{\mu m} = \frac{H_m l}{N}$
- Efektivna vrijednost struje magnetiziranja: $I_\mu = \frac{H_m l}{\sqrt{2} N}$
- Za izmjerenu ukupnu struju I struja gubitaka je: $I_g = \sqrt{I^2 - I_\mu^2}$
- Gubitci u bakru: $P_{Cu} = I^2 R_{Cu}$
- Gubitci u željezu: $P_{Fe} = P_{uk} - P_{Cu}$
- Fiktivni otpor željeza: $R_{Fe} = \frac{P_{Fe}}{I_g^2}$
- Induktivni otpor: $X_L = \frac{U_L}{I_\mu}$
- Rasipni induktivni otpor: $X_\sigma = \frac{U_\sigma}{I}$, gdje je: $U_\sigma = kU$.

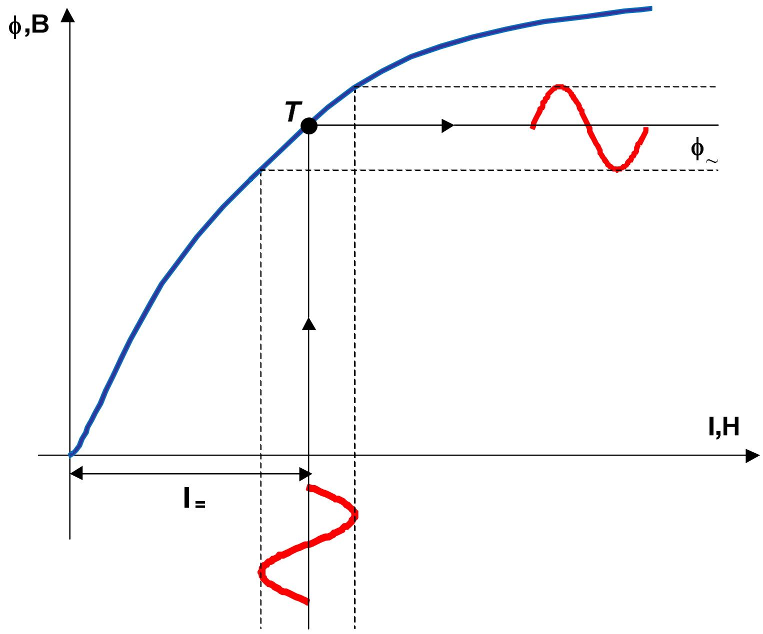
7.2. Predmagnetiziranje istosmjernom strujom

U uvodu u ovo poglavlje pokazano je da induktivnost svitka s homogenom Fe jezgrom za zadane dimenzije jezgre ovisi samo o relativnoj permeabilnosti μ_r. S obzirom na oblik krivulje magnetiziranja jasno je kako μ_r ovisi o promjenama struje, odnosno jakosti magnetskog polja. Za određene primjene promjena induktivnosti ostvaruje se tako da se, pored postojećeg svitka kojim teče izmjenična struja $I_\sim$, oko jezgre omota i drugi svitak protjecan istosmjernom strujom $I_=$. Obično je istosmjerna komponenta mnogo veća od izmjenične. Struje se superponiraju, pa je ukupan efekt osciliranje male sinusoidne struje s amplitudom I_m oko $I_=$, kao na *Slici 7.9*.



Slika 7.9 – Predmagnetiziranje istosmjernom strujom

Time se postiže da se magnetizacija u ritmu promjene struje ne odvija oko nulte vrijednosti na petlji histereze, nego oko neke točke T na krivulji magnetiziranja. Položaj točke T određen je iznosom istosmjerne struje predmagnetiziranja (engl. *bias current*). Kako se promjene događaju unutar određenih granica oko točke T, kvocijentom B/H ne može se odrediti permeabilnost. Posljedica kolebanja struje ΔI oko točke T (kolebanje je razlika između maksimalne i minimalne vrijednosti izmjenične struje) jest odgovarajuća promjena toka $\Delta\Phi$. Izraženo čisto magnetskim veličinama, promjena ΔH na krivulji magnetiziranja izaziva promjenu ΔB – *Slika 7.10*.



Slika 7.10 – Primjena predmagnetiziranja – promjenljiva induktivnost

Rezultat je da se ovisno o nivou istosmjernog predmagnetiziranja i vrsti jezgre (krivulji magnetiziranja) dobiju različite vrijednosti induktivnosti.

Dokaz:

Iz Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije je:

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L = N\frac{d\Phi}{di} = N\frac{S\cdot dB}{di} \;, \tag{7-8}$$

a iz Amperova zakona (zakon protjecanja):

$$Hl = Ni \quad \Rightarrow \quad dH\cdot l = N\cdot di \quad \Rightarrow \quad di = \frac{l\cdot dH}{N} \;. \tag{7-9}$$

Induktivnost je:

$$L = N\frac{S\cdot dB}{\frac{l\cdot dH}{N}} = \frac{N^2 S}{l}\cdot\frac{dB}{dH} = k\cdot\frac{dB}{dH} \;, \tag{7-10}$$

gdje je konstanta $k = N^2S/L$.

Usporedbom te relacije s izrazom *(7-1)* slijedi kako se permeabilnost može opisati diferencijalnim kvocijentom dB/dH, tj. nagibom krivulje magnetiziranja u radnoj točki T. Radna se točka bira ugađanjem istosmjernog nivoa magnetizacije, a time se određuje i vrijednost induktivnosti: $L = k\frac{\Delta B}{\Delta H}$.

Sklop s istosmjernim predmagnetiziranjem zove se *transduktor* ili *magnetsko pojačalo*. Ako je svitak protjecan izmjeničnom strujom (radni svitak) serijski spojen s trošilom, može se upravljati strujom kroz trošilo pomoću istosmjernog (upravljačkog) svitka. Sklop djeluje kao pojačalo jer male promjene upravljačke struje uzrokuju velike promjene struje trošila.

7.3. Gubitci histereze i vrtložnih struja

U analizi električnih strojeva ukupni se gubitci dijele u tri temeljne kategorije. To su gubitci u bakru, koji nastaju u namotajima, gubitci zbog trenja rotirajućih dijelova strojeva (nastaju u ležajevima, četkicama...) i magnetski gubitci (gubitci u željezu, gubitci u jezgri). Potonji imaju dvojak uzrok: *gubitci histereze* (engl. *hysteresis loss*) i *gubitci vrtložnih struja* (engl. *eddy-current loss*).

Gubitci histereze

Za svako prelaženje (prebrisavanje) petlje histereze u uvjetima protjecanja izmjenične struje kroz magnetsku jezgru potrebno je uložiti neki rad. Gubitci snage koji nastaju zovu se gubitci histereze P_h. Uvjetovani su molekularnim trenjem magnetskih domena koje su prisiljene mijenjati svoj smjer pod djelovanjem narinutoga izmjeničnog EMS-a. Nakon nekoliko ciklusa magnetiziranja petlja histereze postaje simetrična. Uložena energija po jedinici volumena (gustoća energije) w, potrebna za formiranje magnetskog polja pri promjenama magnetskog toka, jednaka je ukupnoj površini petlje histereze:

$$w = \frac{W_{mag}}{V} = \oint_{S_{hist}} H dB \ . \tag{7-11}$$

Nažalost gubitci se ne mogu analitički izračunati, jer nije moguće izraziti H kao jednostavnu funkciju od B. Matematička jednadžba koja bi na adekvatan način opisala petlju histereze ovisi o vrlo kompliciranom rasporedu velikog broja magnetskih domena. Stoga se uporabljuju iskustvene relacije. Gubitci su u svakom ciklusu konstantni i ovise o broju ciklusa, tj. frekvenciji f. Također ovise o promjenama maksimalne gustoće toka B_m. Ispitujući različite feromagnetske materijale, Charles Steinmetz predložio je da se gubitci histereze izraze izrazom:

$$P_h = k_h f B_m^n V \ , \tag{7-12}$$

gdje je k_h konstanta koja ovisi o magnetskom materijalu, a n Steinmetzov eksponent, koji se temeljem eksperimentalnih istraživanja kreće u granicama od 1,5 do 2,5, te V volumen jezgre.

Gubitci se mogu reducirati uporabom materijala s vrlo uskom petljom histereze.

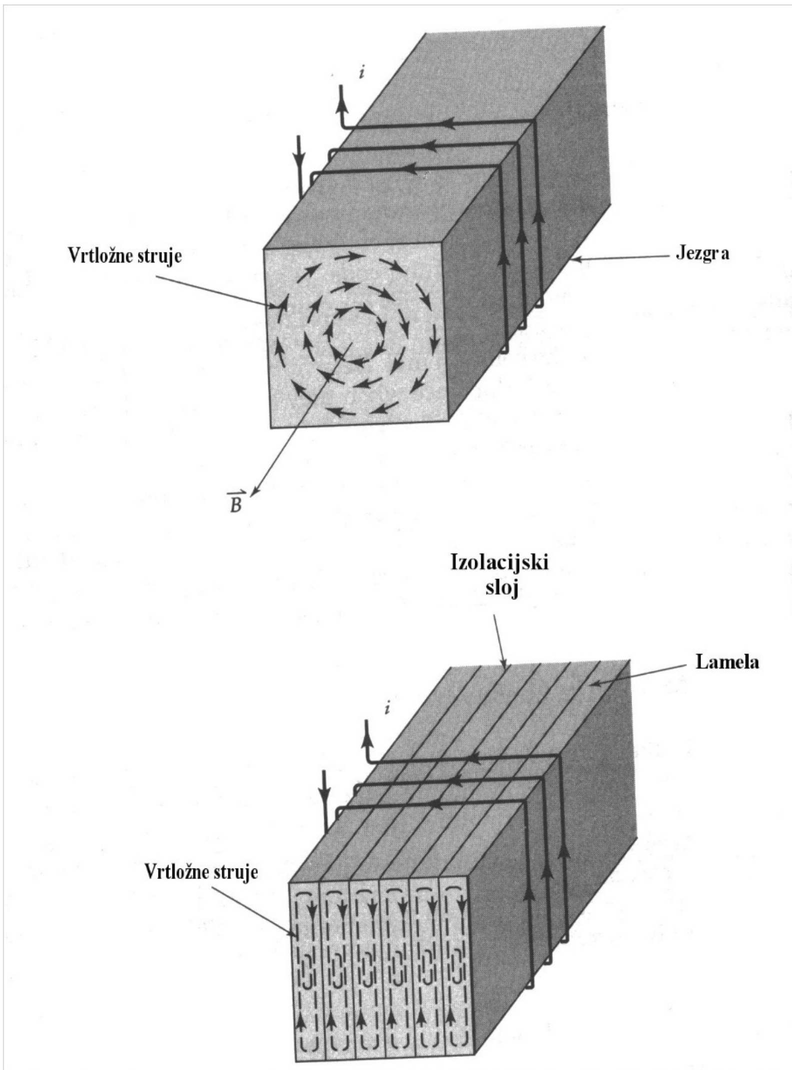
Gubitci vrtložnih struja

Vremenski promjenljiv magnetski tok inducira EMS u svitku prema Faradayevu zakonu elektromagnetske indukcije. Ako je svitak namotan na magnetsku jezgru, isti tok inducira EMS i u jezgri. Kako je jezgra relativno dobar vodič elektriciteta, inducirani EMS unutar zatvorenih petlja u magnetskom materijalu uspostavlja struje koje obuhvaćaju magnetski tok koji ih je izazvao. Na *Slici 7.11* prikazane su konture induciranih struja u jezgri za slučaj porasta gustoće toka.

Raspored struja podsjeća na zračne ili vodene vrtloge, pa otud ime *vrtložne struje.* Porastom toka raste inducirani EMS u svakoj konturi, pa tako i vrtložne struje kontura. Posljedica je pretvorba energije u toplinu na otporu uzduž konture. Zbroj gubitaka na svim konturama unutar jezgre predstavlja gubitke nastale zbog vrtložnih struja.

Vrtložne struje pored stvaranja gubitaka izazivaju i efekt demagnetizacije jezgre. Naime, one se svojim tokom opiru originalnomu magnetskom toku. Zbog toga je potrebna veća magnetomotorna sila da se zadrži jednak tok u jezgri. Demagnetizacija se pojačava prema središtu (osi) jezgre, pa je ukupni efekt gomilanje magnetskog toka prema vanjskoj površini jezgre. Zbog toga unutarnji dio jezgre postaje neiskorišten u magnetskom smislu.

Negativna djelovanja vrtložnih struja mogu se minimizirati ako se poveća otpor magnetske jezgre u smjeru u kojem teku vrtložne struje. To se u praksi izvodi slaganjem paketa tankih lamela magnetskog materijala paralelno sa smjerom magnetskog toka, kao na *Slici 7.11*. Lamele su međusobno izolirane slojem laka ili šelaka (prirodna smola). Debljina im se kreće u granicama od 0,36 mm do 0,70 mm. Tanak premaz laka osigurava električnu izoliranost susjednih lamela. Zbog toga su vrtložne struje zatvorene u duge uske petlje unutar svake lamele. Iznosi vrtložnih struja se smanjuju, a opada i efekt demagnetizacije.



Slika 7.11 – Reduciranje vrtložnih struja postupkom lameliranja

Lameliranjem jezgre povećava se ukupni volumen zbog izolacijskih slojeva laka. Omjer volumena čistog magnetskog materijala prema ukupnom volumenu zove se *faktor ispune.* Što su lamele tanje, to je faktor ispune manji. Kreće se obično u granicama 0,5 – 0,95.

Analitički proračun gubitaka zbog vrtložnih struja je složen i dobije se uz određene pretpostavke. Srednji gubitci vrtložnih struja P_v dani su izrazom:

$$P_v = k_v f^2 \delta^2 B_m^2 V \;, \tag{7-13}$$

gdje je k_v konstanta ovisna o vodljivosti magnetskog materijala, a δ debljina lamele. Očito je kako gubitci bitno opadaju ako se smanji debljina lamele, a mogu se smanjiti i uporabom magnetskog materijala visokoga specifičnog otpora.

Gornja relacija vrijedi primjerice za proračun transformatora snage na nižim frekvencijama. Za visoke frekvencije nije dovoljno lameliranje jezgre, pa je potrebno feromagnetski materijal još finije parcelirati. Uporabljuje se željezna prašina pomiješana s izolacijskim sredstvom. Na vrlo visokim frekvencijama do reda veličine GHz rabe se feriti, materijali vrlo visokoga specifičnog otpora.

Vrtložne struje imaju korisnu primjenu za taljenje u šamotnim pećima.

Ukupni gubitci u feromagnetskom materijalu

Zbroj gubitaka histereze i vrtložnih struja predstavlja ukupne gubitke u feromagnetskom materijalu. Gubitci histereze ne ovise o debljini lamela. Za zadani magnetski materijal ukupni gubitci P_{Fe} mogu se izraziti izrazom:

$$P_{Fe} = P_h + P_v = K_h f B_m^n + K_v f^2 B_m^2 , \qquad (7\text{-}14)$$

gdje je $K_h = k_h V$, $K_v = k_v \delta^2 V$.

Ako se žele izdvojeno odrediti gubitci histereze i vrtložnih struja, potrebne su tri jednadžbe za određivanje nepoznatih vrijednosti K_h, K_v i n. U tom smislu treba izvršiti mjerenja ukupnih magnetskih gubitaka za dvije frekvencije, odnosno za dvije gustoće toka.

8. TRANSFORMATORI

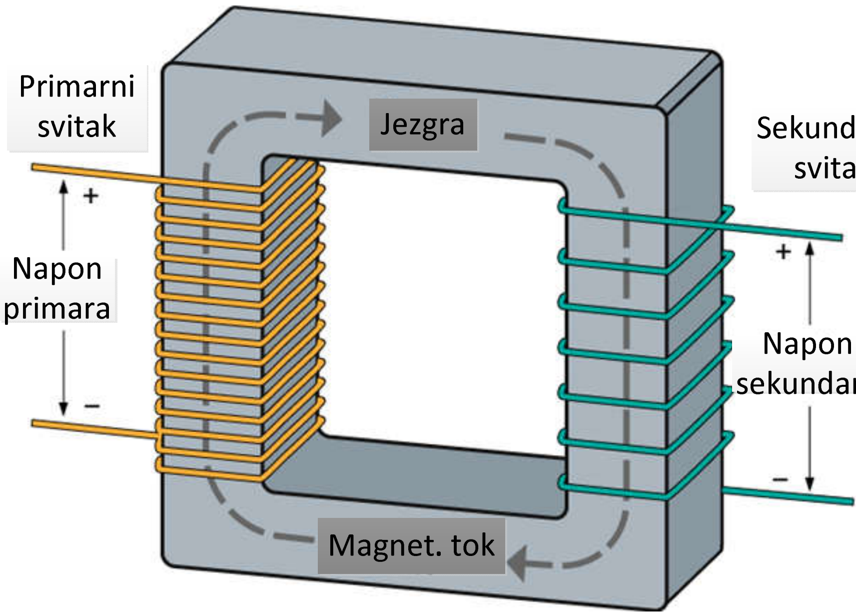
8.1. Uvod

Transformator je statički elektromagnetski uređaj koji se sastoji od dvaju električki izoliranih (galvanski odvojenih) svitaka. Vremenski promjenljiv tok u jednom svitku izaziva inducirani EMS u drugom svitku. Za poboljšanje sprege između svitaka oni se namataju na zajedničku jezgru.

- *Zračni transformator* – jezgra je napravljena od nemagnetskog materijala (mala korisnost η).
- *Transformator sa željezom* – jezgra je od feromagnetskog materijala relativno visoke permeabilnosti, pa gotovo cijeli stvoreni tok obuhvaća svitke uz relativno malen magnetski otpor (velika korisnost η).

Frekvencija induciranog napona u drugom svitku ista je kao frekvencija struje u prvom svitku. Ako je drugi svitak spojen na trošilo, inducirani EMS uspostavlja struju kroz trošilo. Dakle, snaga se prenosi s jednoga na drugi svitak isključivo preko magnetskog toka u jezgri.

Svitak spojen na izvor EMS-a je *primarni svitak*, a svitak s kojega se isporučuje snaga trošilu je *sekundarni svitak*, tj. transformator je na primarnoj strani priključen na izmjenični izvor, a na sekundarnoj opterećen trošilom, kao na *Slici 8.1*.



Slika 8.1 – Transformator s Fe jezgrom

Ovisno o naponskom radnom nivou svitak je *visokonaponski* ili *niskonaponski*. Kada se primjerice spaja generator relativno niskog napona na visokonaponski prijenosni vod (dalekovod), primarni svitak je niskonaponski, a sekundarni visokonaponski (engl. *step-up transformer*). S druge strane, stroj za zavarivanje zahtijeva veliku struju na sekundaru, pa njegov transformator ima primarni svitak visokonaponski, a sekundarni niskonaponski (engl. *step-down transformer*).

Transformatori se primjenjuju za transformaciju struje i napona, za vjerno prenošenje oblika strujnih i naponskih impulsa male snage, prilagodbu struje, napona i snage, promjenu impedancije te za izolaciju električnih krugova (galvansku izolaciju).

Proizvode se u raznim veličinama, od vrlo malih, težine desetak dekagrama, do vrlo velikih, teških na stotine tona.

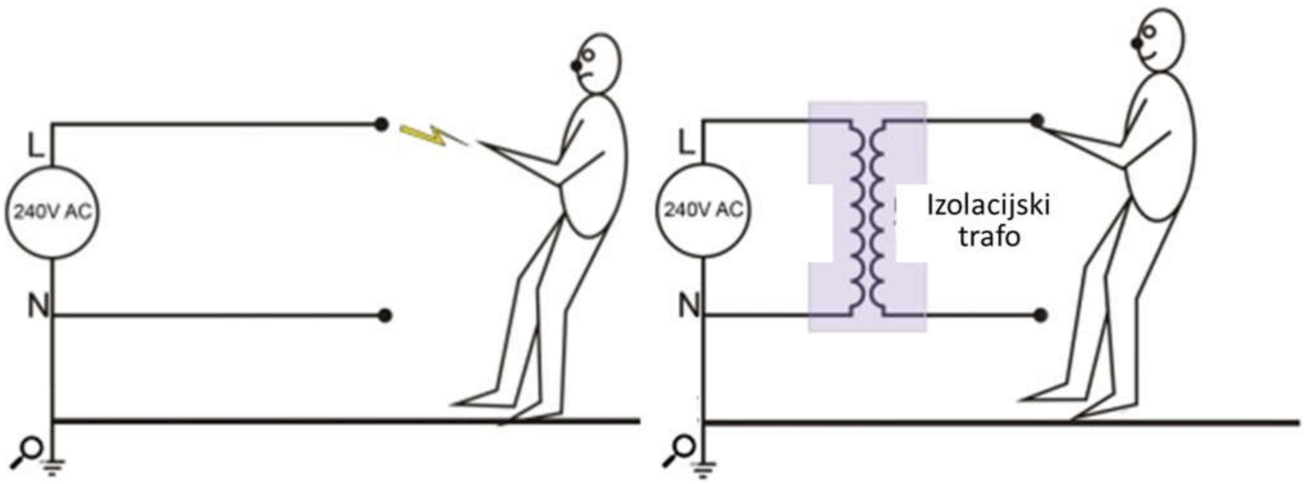
Nominalne snage im se kreću u vrlo širokim granicama: u elektroničkim krugovima i sustavima tipične vrijednosti se kreću do 300 VA, a za energetske transformatore, koji se rabe u prijenosnim i distribucijskim sustavima, te su vrijednosti od nekoliko kVA do nekoliko MVA.

Instrumentacijski transformatori (strujni i naponski mjerni transformatori), koji daju male izlazne volt-amperske vrijednosti, omogućuju sigurno mjerenje napona i struja u energetici.

Primjer: Strujni mjerni transformator (strujna kliješta), prikazan na *Slici 8.2* – izlazni napon proporcionalan je ulaznoj izmjeničnoj struji.

Slika 8.2 – Strujni mjerni transformator

Kada je narinuti napon na primaru jednak induciranom EMS-u na sekundaru, trafo ima omjer jedan napram jedan (engl. *one-to-one ratio*). To je izolacijski transformator čija je svrha električno izoliranje sekundarne od primarne strane (primjer: aparat za brijanje priključuje se preko izolacijskog trafa). Princip zaštite od strujnog udara prikazan je na *Slici 8.3*. Može se primijeniti i za odvajanje istosmjerne komponente signala koji sadrži AC i DC komponente.



Slika 8.3 – Izolacijski transformator – zaštita od strujnog udara

Transformatori se klasificiraju i po frekvencijskom opsegu: niskofrekvencijski mrežni transformatori (opskrbljuju snagom elektroničke sustave i rade na fiksnoj frekvenciji), audio i VHF transformatori, širokopojasni i uskopojasni frekvencijski transformatori i impulsni transformatori.

Obično imaju dva namotaja, ali podvrsta, tzv. autotransformatori, imaju samo jedan namotaj. U trofaznim sustavima rabe se trofazni transformatori s po tri namotaja spojena u zvijezdu ili u trokut.

Konkretni primjeri transformatora prikazani su na *Slikama 8.4* i *8.5*.

Slika 8.4 – VE ORLICE (transformator vlastite potrošnje – kućni trafo)

Slika 8.5 – Trofazni transformator: 110/10 kV, 68,5 tona, 15 tona ulja

Idealni transformator

Za razumijevanje rada transformatora razmatra se idealizirani transformator za koji vrijedi:

- jezgra ima vrlo visoku magnetsku propustljivost, tako da je potrebna zanemarivo mala magnetomotorna sila za uspostavljanje magnetskog toka;
- u jezgri nema gubitaka histereze i vrtložnih struja;

- cjelokupni tok zatvara se unutar jezgre (rasipni tok je zanemariv);
- otpor namotaja je zanemariv – nema gubitaka u bakru.

8.1.1. Neidealni (realni) transformator

U praktičnim izvedbama transformatora gubitci se stvaraju u namotajima i jezgri transformatora, tako da se samo dio proizvedene snage prenosi na trošilo. Za projektiranje ekvivalentnih krugova realnih transformatora treba uzeti u obzir sljedeće:

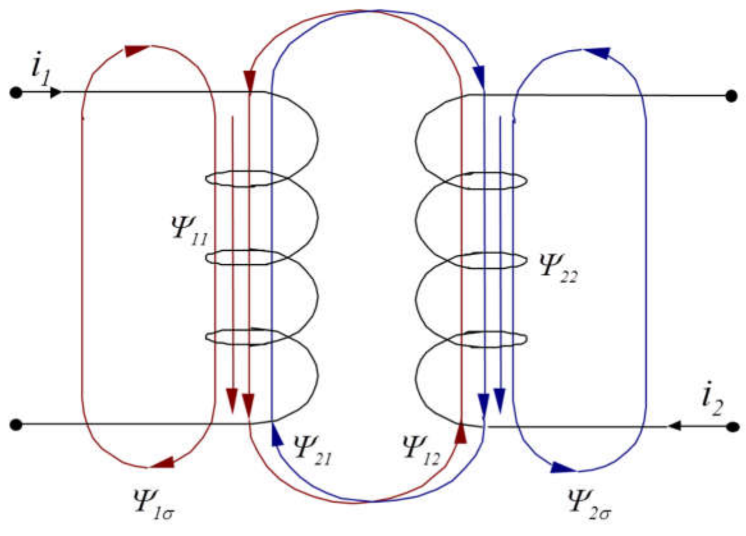
- gubitke histereze i vrtložnih struja u feromagnetskoj jezgri
- gubitke na otporu primarnog i sekundarnog svitka
- konačnu propustljivost jezgre koja zahtijeva određenu magnetomotornu silu za održavanje toka
- rasipne magnetske tokove na primarnom i sekundarnom svitku
- gubitke u zračnom rasporu na poprečnom presjeku jezgre, koji se postavlja radi poboljšanja svojstava transformatora.

Za svitak s feromagnetskom jezgrom ne vrijedi linearna ovisnost između struje i magnetskog toka, pa ni induktivnost takvih svitaka nije konstantna, već ovisi o veličine struje. Električni krugovi koji sadržavaju svitke s feromagnetskom jezgrom nelinearni su, pa izobličuju strujni signal.

8.1.2. Međuinduktivna sprega

Svojstva transformatora temelje se na međusobnoj indukciji dvaju svitaka postavljenih jedan do drugoga, tako da se prožimaju svojim tokovima.

Potrebno je podsjetiti se nekih prethodnih razmatranja o međuinduktivnoj sprezi. Promatrat ćemo međuodnose dvaju induktivno spregnutih svitaka s brojevima namotaja N_1 i N_2 i pripadnim induktivnostima L_1 i L_2. Pri tomu se ulazni krug s prvim svitkom naziva primarnim krugom, ili kraće primarom. Izlazni krug je krug sa sekundarnim svitkom, ili kraće sekundarom. Magnetski tokovi generirani u svitcima zbog protjecanja struja i_1 i i_2 prikazani su na *Slici 8.6*.



Slika 8.6 – Magnetski tokovi primara i sekundara

Svaki namotaj primara protjecan strujom i_1 proizvede tok Φ_{11}, a svaki namotaj sekundara protjecan strujom i_2 proizvede tok Φ_{22}. Navedeni su tokovi dani izrazom:

$$\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{1\sigma}$$
$$\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{2\sigma} . \qquad (8\text{-}1)$$

U gornjim je relacijama tok Φ_{12} onaj dio toka primara koji obuhvaća i namotaje sekundara. Preostali tok $\Phi_{1\sigma}$ rasipni je tok primara. Analogno je Φ_{21} dio toka sekundara koji obuhvaća i namotaje primara, a preostali tok $\Phi_{2\sigma}$ rasipni je tok sekundara.

Tokovi Φ_{12} i Φ_{21} tvore glavni magnetski tok: $\Phi_g = \Phi_{12} - \Phi_{21}$.

Ukupni magnetski tok proizveden primarnom strujom i ulančen primarnim svitkom Ψ_{11} je:

$$\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11} = L_1 i_1 . \qquad (8\text{-}2)$$

Isto vrijedi i za ukupni tok proizveden u sekundarnom svitku Ψ_{22}:

$$\Psi_{22} = N_2 \Phi_{22} = L_2 i_2 . \qquad (8\text{-}3)$$

Ukupni tok kroz sekundarni svitak Ψ_{12} izazvan tokom Φ_{12} proporcionalan je struji i_1 koja ga je stvorila, a faktor proporcionalnosti je međuinduktivnost M_{12}. Vrijedi, dakle:

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = M_{12} i_1 . \qquad (8\text{-}4)$$

Isto tako ukupni tok kroz primarni svitak izazvan tokom Φ_{21} proporcionalan je struji i_2:

$$\Psi_{21} = N_1 \Phi_{21} = M_{21} i_2 . \qquad (8\text{-}5)$$

Međuinduktivnost M dvaju svitaka ovisi o njihovim dimenzijama, broju namotaja, međusobnom položaju i permeabilnosti magnetske sredine. Utjecaj svih navedenih parametara na induktivnu povezanost primarnog i sekundarnog kruga definira se faktorom sprege k:

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} \cdot \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{22}}} = \sqrt{k_1 k_2} . \qquad (8\text{-}6)$$

Pri tomu k_1 pokazuje koliki je dio magnetskog toka primarnog kruga obuhvaćen sekundarnim krugom, a k_2 koliki je dio toka sekundarnog kruga obuhvaćen primarnim krugom. Iz odnosa tokova u gornjem izrazu očito je da se k može kretati u granicama: $0 \leq k \leq 1$.

Ako krugovi nisu induktivno spregnuti ($\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0$), koeficijent sprege je $k = 0$. S druge strane, ako je tok jednog kruga u potpunosti ulančen drugim krugom ($\Phi_{12} = \Phi_{11}$ i $\Phi_{21} = \Phi_{22}$), onda je $k = 1$. To približno odgovara slučaju kada su svitci neposredno jedan uz drugoga i povezani su zajedničkom feromagnetskom jezgrom.

Kako je $M_{12} = M_{21} = M$, za koeficijent sprege dobije se uvrštavanjem odgovarajućih tokova:

$$k = \sqrt{\frac{\dfrac{Mi_1}{N_2}}{\dfrac{L_1 i_1}{N_1}} \cdot \frac{\dfrac{Mi_2}{N_1}}{\dfrac{L_2 i_2}{N_2}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} . \qquad (8\text{-}7)$$

Tako izraženim koeficijentom sprege omogućeno je njegovo mjerenje, jer je izražen mjerljivim, odnosno računski odredivim veličinama.

Za određivanje mjere rasipanja toka definira se koeficijent rasipanja:

$$\sigma = \frac{\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}} = 1 - \frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}} = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}. \tag{8-8}$$

Kada je faktor sprege maksimalan, faktor rasipanja jednak je nuli.

Iz rasipnih tokova primara i sekundara mogu se odrediti rasipne induktivnosti preko odgovarajućih električnih veličina.

Ukupni rasipni tok na primaru $\Psi_{1\sigma}$ proizveden primarnom strujom i ulančen primarnim svitkom jest:

$$\Psi_{1\sigma} = N_1 \Phi_{1\sigma} = L_{1\sigma} i_1 . \tag{8-9}$$

Rasipni tok sekundara proizveden je sekundarnom strujom i ulančen sekundarnim svitkom:

$$\Psi_{2\sigma} = N_2 \Phi_{2\sigma} = L_{2\sigma} i_2 . \tag{8-10}$$

Rasipna induktivnost primara je:

$$L_{1\sigma} = \frac{N_1 \Phi_{1\sigma}}{i_1} = \frac{N_1}{i_1}\left(\Phi_{11} - \Phi_{12}\right) = \frac{N_1}{i_1}\left(\frac{L_1 i_1}{N_1} - \frac{M i_1}{N_2}\right) = L_1 - M\frac{N_1}{N_2}. \tag{8-11}$$

Analogno se za rasipnu induktivnost sekundara dobije:

$$L_{2\sigma} = L_2 - M\frac{N_2}{N_1}. \tag{8-12}$$

U cilju poboljšanja magnetske sprege primarni i sekundarni krug transformatora međusobno se povezuju magnetskom jezgrom. Ovisno o faktoru sprege magnetski tok u jezgri je veći ili manji, pa se na odgovarajući način povećavaju ili smanjuju naponi inducirani u sekundarnom svitku.

Za izbjegavanje izobličenja signala koji se transformira i izbjegavanje preuranjenog magnetskog zasićenja istosmjernom strujom faktor sprege reducira se formiranjem zračnog raspora.

Bit međuindukcije je u induciranju EMS-a u jednom krugu radi promjena struje u drugom krugu, koji je s prvim induktivno spregnut. Električna energija prenosi se iz jednog kruga u drugi iako nema izravne galvanske veze i to uz posredovanje magnetskog polja. U jednom se krugu električna energija pretvara u energiju magnetskog polja, a u drugome se vrši obrnuti proces, tj. energija magnetskoga polja pretvara se u električnu. Magnetsko polje je prenositelj električne energije iz primarnoga u sekundarni krug.

8.1.3. Transformacija napona, struja i otpora

Ustanovili smo kakva je i kako se određuje sprega između svitaka transformatora. U sljedećem koraku razmotrit ćemo na koji način transformator vrši svoju temeljnu funkciju transformacije električnih veličina i kako se ona iskazuje.

Ako želimo napon U_1 transformirati na neki drugi veći ili manji napon, priključit ćemo ga na primarni svitak s N_1 namotaja. Tok stvoren u namotaju primarnog svitka, kroz koji teče izmjenična struja, mijenja se u ritmu promjena struje, tj. po sinusoidnom zakonu: $\Phi_{11} = \Phi_{11_m} \sin\omega t$.

Trenutačna vrijednost induciranog EMS-a na primaru bit će prema zakonu elektromagnetske indukcije:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{11}}{dt} = -N_1 \Phi_{11_m} \omega \cos\omega t = N_1 \Phi_{11_m} \omega \sin\left(\omega t - 90^0\right). \qquad (8\text{-}13)$$

Amplituda EMS-a je $E_{11_m} = N_1 \Phi_{11_m} \omega$, a njezina efektivna vrijednost:

$$E_1 = \frac{E_{11_m}}{\sqrt{2}} = \frac{N_1 \Phi_{11_m} 2\pi f}{\sqrt{2}} = 4{,}44 f N_1 \Phi_{11_m}. \qquad (8\text{-}14)$$

Taj EMS drži ravnotežu narinutom naponu, tj. $U_1 \approx E_1$.

Izmjenični tok generiran u primarnom svitku djelomice je obuhvaćen i sekundarnim svitkom. Taj djelomični tok Φ_{12} stvara elektromotornu silu e_2 suprotnog smjera u sekundarnom svitku:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = N_2 \Phi_{12_m} \omega \sin\left(\omega t - 90^0\right). \qquad (8\text{-}15)$$

Analogno prijašnjem postupku odredi se njezina efektivna vrijednost:

$$E_2 = \frac{E_{12_m}}{\sqrt{2}} = 4{,}44 f N_2 \Phi_{12_m}. \qquad (8\text{-}16)$$

Omjer elektromotornih sila primarnog i sekundarnog svitka tada je:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4{,}44 f N_1 \Phi_{11_m}}{4{,}44 f N_2 \Phi_{12_m}} = \frac{N_1 \Phi_{11_m}}{N_2 \Phi_{12_m}}. \qquad (8\text{-}17)$$

Za transformator s feromagnetskom jezgrom rasipanje toka je zanemarivo, faktor sprege je $k \approx 1$, odnosno $\Phi_{12} = \Phi_{11}$. Omjer induciranih elektromotornih sila poprima vrlo jednostavan oblik:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2}. \qquad (8\text{-}18)$$

To je bitan izraz koji opisuje temeljnu karakteristiku transformatora: inducirane elektromotorne sile na primarnoj i sekundarnoj strani proporcionalne su odgovarajućim brojevima namotaja. Dakle, ako je $N_1 > N_2$, primarni svitak je visokonaponski, a sekundarni niskonaponski, pa se transformacija vrši s višeg na niži napon. Obratno je u slučaju $N_1 < N_2$ kada niži napon primara transformiramo na viši napon sekundara. Teoretski bismo mogli dobiti bilo koliko velik omjer napona. U praksi postoje ograničenja vezana za generirane, a u izvedenom izrazu zanemarene gubitke. Isto tako postoje i ograničenja u tehnološkoj razini izvedbe transformatora, kao što je primjerice kvaliteta izolacije.

Ako transformator nije opterećen (krug sekundarnog svitka je otvoren), napon na njegovim krajevima približno je jednak EMS-u, E_2 ($U_2 \approx E_2$). Pored toga za zračni transformator može se zanemariti relativno malen djelatni otpor namotaja svitaka. Tada je i napon priključen na primarni svitak približno jednak EMS-u samoindukcije ($U_1 \approx E_1$), pa za omjer ulaznog (primarnog) napona U_1 i izlaznog (sekundarnog) napona U_2 približno vrijedi isto što i za omjer EMS-a samoindukcije:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{N_1}{N_2}. \tag{8-19}$$

Odnos broja namotaja primara i sekundara naziva se prijenosni omjer ili odnos transformacije n, pa vrijedi:

$$n=\frac{N_1}{N_2}=\frac{E_1}{E_2}=\frac{U_1}{U_2}. \tag{8-20}$$

Zanemare li se gubitci u prijenosu snage s primara na sekundar $(P_1 \approx P_2)$, tada je $U_1 I_1 = U_2 I_2$, pa se može odrediti i omjer struja primarne i sekundarne strane:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{U_2}{U_1}=\frac{N_2}{N_1}=\frac{1}{n}. \tag{8-21}$$

Struje su obrnuto razmjerne broju namotaja. Ako se uzme prijašnji primjer primara s većim brojem namotaja, na sekundaru je manji napon, ali zato i veća struja od primarne. Općenito se može zaključiti: visokonaponski svitak izrađuje se s većim brojem namotaja vodiča manjeg presjeka, a niskonaponski svitak s manjim brojem namotaja vodiča većeg presjeka, jer moraju podnijeti veću struju.

Kada je na sekundar priključeno trošilo impedancije Z_2, kroz njega teče struja I_2, pa je $Z_2=\frac{U_2}{I_2}$.

S druge strane, ulazna impedancija transformatora određuje se iz primarnog napona i struje: $Z_1=\frac{U_1}{I_1}$.

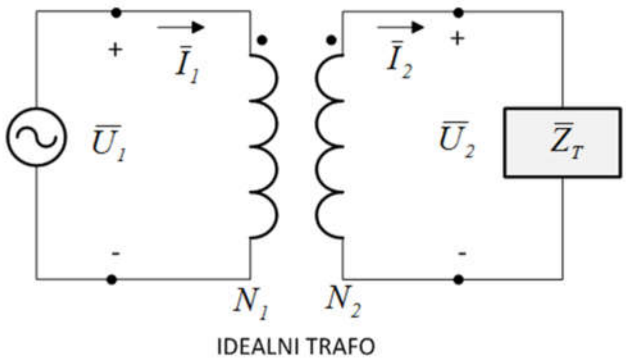
Iz odnosa impedancija dobije se:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\frac{U_1}{I_1}}{\frac{U_2}{I_2}}=\frac{U_1 I_2}{U_2 I_1}=n\cdot n=n^2. \tag{8-22}$$

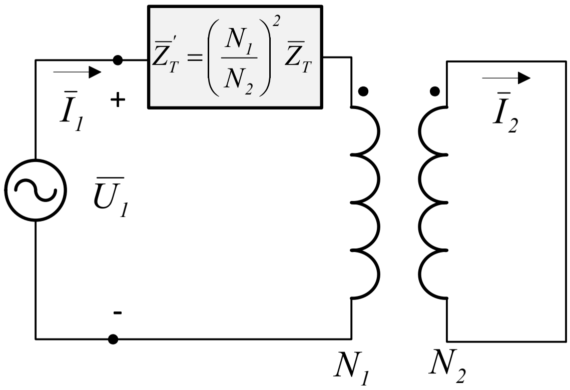
Zaključujemo da se impedancija sa sekundara (impedancija trošila) transformira na primarnu stranu s kvadratom prijenosnog omjera, tj.:

$$Z_1=n^2 Z_2. \tag{8-23}$$

Ako se na idealni transformator priključi trošilo $\overline{Z}_T$ (*Slika 8.7*), nadomjesni krug viđen sa stezaljka izvora nakon transformacije impedancije trošila na primarnu stranu izgleda kao na *Slici 8.8*.

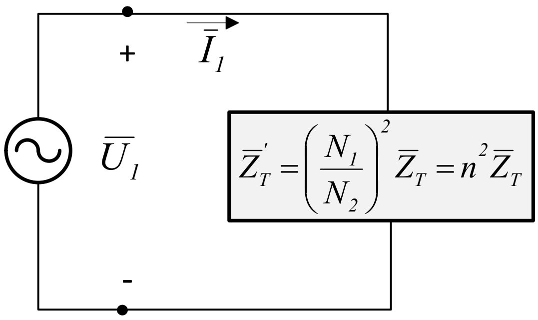


Slika 8.7 – Krug s idealnim transformatorom i trošilom



Slika 8.8 – Redukcija impedancije trošila na primar transformatora

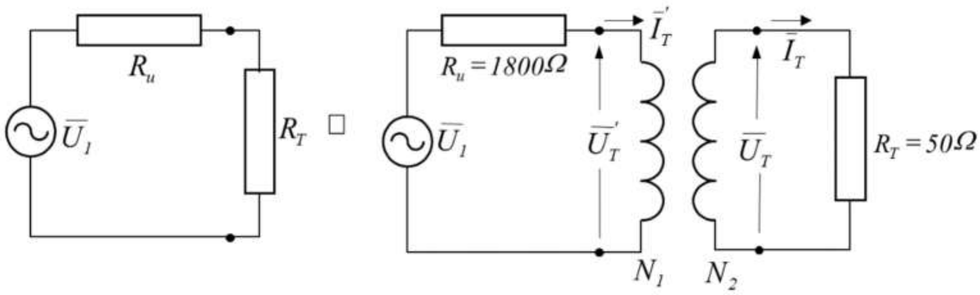
Budući da je transformator idealan, konačna nadomjesna shema izgleda kao na *Slici 8.9*.



Slika 8.9 – Nadomjesni krug s impedancijom trošila reduciranom na primar

Transformacija impedancija vrlo je korisna za prilagodbu otpora trošila na dani izvor u svrhu maksimalnog prijenosa snage.

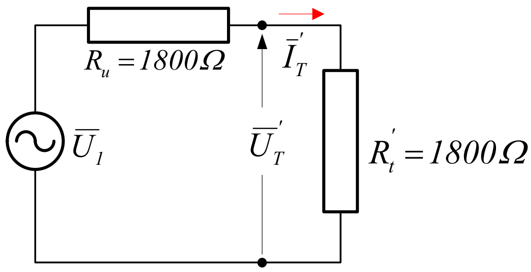
Primjer: Potrebno je odrediti prijenosni omjer idealnog trafa kojim će se trošilo R_T = 50 Ω prilagoditi na izvor unutarnjeg otpora R_u = 1800 Ω (*Slika 8.10*).



Slika 8.10 – Primjer prilagodbe pomoću transformatora

Iz uvjeta prilagodbe dobije se: $R_T' = R_u \quad \Rightarrow \quad R_T' = n^2 R_T = 50n^2 = 1800 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad n = 6$.

Na *Slici 8.11* prikazan je nadomjesni krug transformiran na primar.



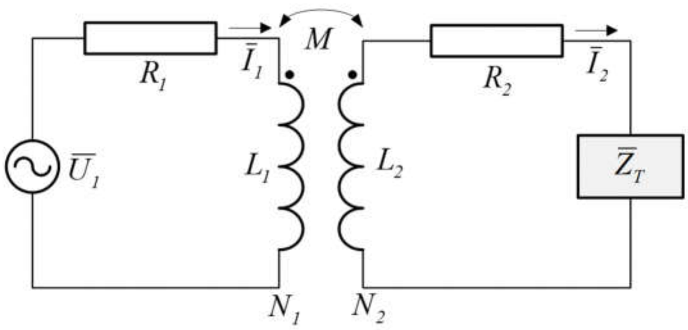
Slika 8.11 – Nadomjesni krug nakon prilagodbe

U jednadžbama kojima se definiraju nadomjesne sheme realnih transformatora vrši se redukcija svih sekundarnih veličina na primarnu stranu – redukcija na primar. Analogno se može izvesti i redukcija primarnih veličina na sekundarnu stranu – redukcija na sekundar.

Značaj transformacije napona posebno se očituje u činjenici da prenesena snaga raste s kvadratom napona $(P = U^2/R)$, pa transformacija na više napone omogućuje i veći prijenos snage uz smanjene gubitke na otporu vodova $(P_v = I^2R_v)$. Prije nego se snaga preda trošilima napon se transformacijom na niže vrijednosti prilagođuje potrebama trošila.

8.2. Zračni transformator

U analizi polazimo od zračnog ili linearnog transformatora. Takvi tipovi transformatora nemaju gotovo nikakvu primjenu u praksi kod niskih frekvencija, ali se mogu egzaktno matematički tretirati. Samom činjenicom da nema magnetske jezgre otklanjaju se i sve komplikacije zbog nelinearnosti krivulje magnetiziranja i zbog gubitaka izazvanih pojavama histereze i vrtložnih struja. Kod linearnog transformatora lakše se uočavaju opće karakteristike mehanizma transformacije, koje se onda, uz korekcije uvjetovane prisutnošću jezgre, mogu primijeniti i na transformatore s magnetskom jezgrom. Shema zračnog transformatora dana je na *Slici 8.12*. Osnovna nadomjesna shema sadrži otpore R_1, R_2 i induktivnosti L_1, L_2 primarnog i sekundarnog svitka. Sekundar je opterećen trošilom $\overline{Z}_T$.



Slika 8.12 – Shema zračnog transformatora

Međuinduktivnost svitaka je M, a zadane su točkice na svitcima pomoću kojih se definiraju smjerovi magnetskih tokova i induciranih napona. Tokovi se međusobno slabe (I_1 ulazi, a I_2 izlazi iz markirane točke). Jednadžbe primarnog i sekundarnog kruga su:

$$\overline{U}_1 = \overline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \overline{I}_1 - j\omega M \overline{I}_2$$

$$-\overline{U}_2 = -\overline{I}_2 \overline{Z}_T = \overline{I}_2 R_2 + j\omega L_2 \overline{I}_2 - j\omega M \overline{I}_1 . \tag{8-24}$$

Iako su primar i sekundar međusobno izolirani, trafo se u svrhu analize može prikazati preko nadomjesne mreže dvjema konturama koje se postavljaju za primarni i sekundarni krug i koje su električki vodljivo povezane u mrežu. Kako bi se to postiglo, potrebno je naći električni ekvivalent za magnetski dio kruga.

8.2.1. Nadomjesni magnetski krug trafa

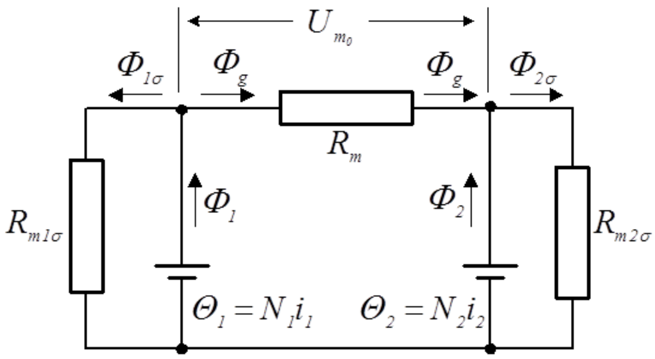
Iz slike magnetskih tokova trafa mogu se posebno odrediti ukupni tokovi ϕ_1 i ϕ_2 ulančeni primarom, odnosno sekundarom:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{21} \quad , \quad \Phi_2 = \Phi_{22} - \Phi_{12} \,. \tag{8-25}$$

Kako je $\Phi_{11} = \Phi_{12} + \Phi_{1\sigma}$, $\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{2\sigma}$, $\Phi_g = \Phi_{12} - \Phi_{21}$, dobije se:

$$\Phi_1 = \Phi_{1\sigma} + \Phi_g \quad , \quad \Phi_2 = \Phi_{2\sigma} - \Phi_g \,. \tag{8-26}$$

Temeljem tih izraza može se postaviti nadomjesna shema magnetskog kruga prikazana na *Slici 8.13*.



Slika 8.13 – Nadomjesni magnetski krug zračnog transformatora

Pad magnetskog napona U_{mo} na putu glavnog magnetskog (nerasutog) toka jednak je MMS-u potrebnom da potjera taj tok, što je vidljivo i iz nadomjesne sheme, tj.:

$$U_{m_0} = \Phi_g R_m = \Theta_1 - \Theta_2 = N_1 i_1 - N_2 i_2 \,. \tag{8-27}$$

Primarni svitak mora iz mreže povući neku fiktivnu struju i_0, koja će na namotajima primara N_1 stvoriti protjecanje $N_1 i_0$, potrebno da potjera glavni magnetski tok. Struja i_0 je fiktivna, jer se ne zatvara kroz realni električni krug, a sadržana je u primarnoj struji. Potrebna je za stvaranje glavnoga magnetskog toka, tj. za magnetiziranje, pa se zove *struja magnetiziranja* ili *uzbudna struja* (engl. *excitation current*). Preostali dio struje primara je struja i_2, kojom se napaja trošilo. Iz gornjeg izraza dobije se:

$$i_0 N_1 = N_1 i_1 - N_2 i_2 \quad \Rightarrow \quad i_0 = i_1 - \frac{N_2}{N_1} i_2 \,, \tag{8-28}$$

odnosno u simboličkom obliku:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 - \frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 \,. \tag{8-29}$$

To je jednadžba čvora koji izravno spaja primar i sekundar u nadomjesnoj shemi transformatora.

Zračni transformator kao T četveropol

Uvrštavanjem struje magnetiziranja u prethodno navedene transformatorske jednadžbe dobiju se ulazna i izlazna petlja nadomjesne sheme trafa koje su električki vodljivo povezane u mrežu.

Iz jednadžbe primarnog kruga eliminira se sekundarna struja, pa je:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 - j\omega M\left(\frac{N_1}{N_2}\bar{I}_1 - \frac{N_1}{N_2}\bar{I}_0\right), \tag{8-30}$$

odnosno:

$$\bar{U}_1 = \bar{I}_1 R_1 + j\omega\left(L_1 - \frac{N_1}{N_2}M\right)\bar{I}_1 + j\omega M\frac{N_1}{N_2}\bar{I}_0 . \tag{8-31}$$

U jednadžbi sekundarnog kruga eliminira se primarna struja:

$$-\bar{U}_2 = \bar{I}_2 R_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 - j\omega M\left(\frac{N_2}{N_1}\bar{I}_2 + \bar{I}_0\right). \tag{8-32}$$

Slijedi:

$$-\bar{U}_2 = \bar{I}_2 R_2 + j\omega\left(L_2 - \frac{N_2}{N_1}M\right)\bar{I}_2 - j\omega M\bar{I}_0 . \tag{8-33}$$

Izrazi u zagradama u jednadžbama primara i sekundara rasipne su induktivnosti $L_{1\sigma}$ odnosno $L_{2\sigma}$. Jednadžbe ulazne i izlazne petlje, uz prethodno određenu jednadžbu čvora, jesu:

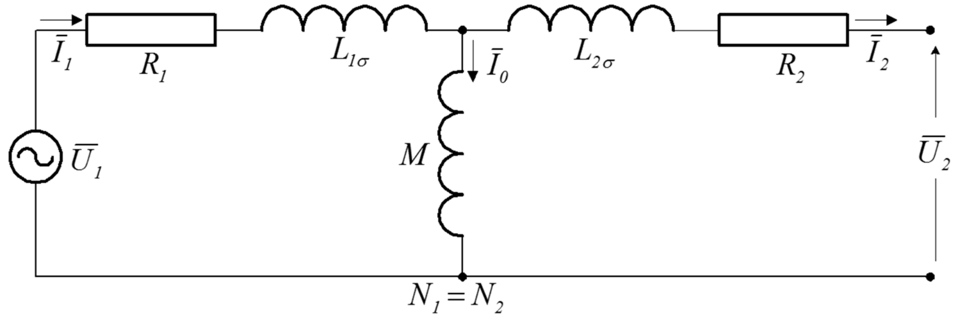
$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{I}_1 R_1 + j\omega L_{1\sigma}\bar{I}_1 + j\omega M\frac{N_1}{N_2}\bar{I}_0 \\ -\bar{U}_2 &= \bar{I}_2 R_2 + j\omega L_{2\sigma}\bar{I}_2 - j\omega M\bar{I}_0 \\ \bar{I}_1 &= \bar{I}_0 + \frac{N_2}{N_1}\bar{I}_2 \ . \end{aligned} \tag{8-34}$$

Inducirani EMS na primaru i sekundaru je:

$$\bar{E}_1 = j\omega M\frac{N_1}{N_2}\bar{I}_0 \quad , \quad \bar{E}_2 = j\omega M\bar{I}_0 , \tag{8-35}$$

pa je omjer EMS-a jednak omjeru broja namotaja, kako je već prethodno pokazano.

Iz gornjih jednadžbi trafa može se izravno nacrtati nadomjesna shema kao na *Slici 8.14* za slučaj kada je $N_1 = N_2$.



Slika 8.14 – Nadomjesna shema zračnog transformatora za $N_1 = N_2$

Kako je, osim u slučaju izolacijskog trafa, općenito $N_1 \neq N_2$, jednadžbe se preuređuju tako da se veličine trafa reduciraju na primarni ili sekundarni broj namotaja. Uz uporabu reduciranih veličina proračun se vrši kao da je broj namotaja primara i sekundara jednak. Time se dobije bolja preglednost fazorskih dijagrama i omogućuje crtanje nadomjesnih shema.

8.2.2. Redukcija na primar

Kako bi primarna naponska veličina ostala nepromijenjena, sekundarna se mora pomnožiti prijenosnim omjerom *n*, želi li se trafo svesti na jedinični prijenosni omjer:

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{nE_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2'} = 1 \ . \tag{8-36}$$

Dakle: $E_2' = nE_2$. Analogno je $U_2' = nU_2$. Reducirana snaga sekundara mora ostati nepromijenjena, $P_2' = P_2$, pa je reducirana sekundarna struja:

$$U_2'I_2' = U_2I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2' = \frac{U_2}{U_2'} I_2 = \frac{1}{n} I_2 \ . \tag{8-37}$$

Već je prije pokazano da se impedancije reduciraju na primarnu stranu s kvadratom prijenosnog omjera:

$$Z_2' = \frac{U_2'}{I_2'} = \frac{nU_2}{\frac{1}{n}I_2} = n^2 \frac{U_2}{I_2} = n^2 Z_2 . \tag{8-38}$$

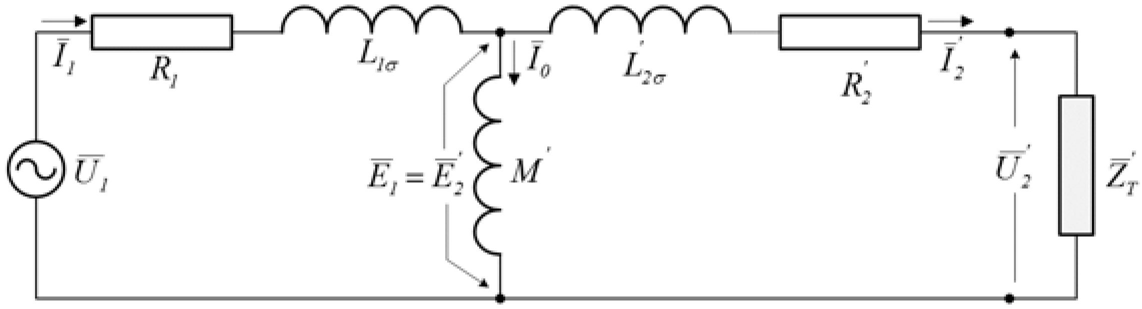
Analogno je:

$$\begin{aligned} &R_2' = n^2 R_2 \quad , \quad X_2' = n^2 X_2 \quad , \quad L_2' = n^2 L_2 \quad , \quad L_{2\sigma}' = n^2 L_{2\sigma} = L_2' - M' \quad , \\ &M' = nM \quad , \quad Z_T' = n^2 Z_T \ . \end{aligned} \tag{8-39}$$

Uvrste li se reducirane vrijednosti u jednadžbe transformatora, dobije se:

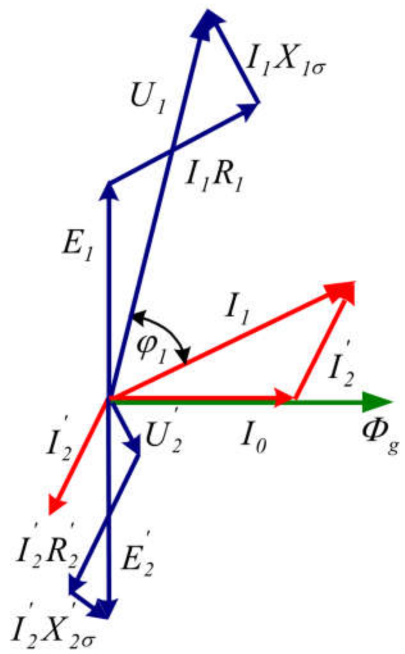
$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{I}_1 R_1 + j\omega L_{1\sigma} \overline{I}_1 + j\omega M' \overline{I}_0 \\ -\overline{U}_2' &= \overline{I}_2' R_2' + j\omega L_{2\sigma}' \overline{I}_2' - j\omega M' \overline{I}_0 \\ \overline{I}_1 &= \overline{I}_0 + \overline{I}_2' \ . \end{aligned} \tag{8-40}$$

Pripadna nadomjesna shema transformatora kao *T* četveropola reduciranoga na primarnu stranu prikazana je na *Slici 8.15*.



Slika 8.15 – Nadomjesna shema zračnog transformatora kao T četveropola reduciranoga na primar

Fazorski dijagram za slučaj trošila induktivnog karaktera dobije se pretvaranjem napona i struja iz gornjih triju jednadžba u odgovarajuće fazore, kao na *Slici 8.16*.



Slika 8.16 – Fazorski dijagram transformatora za induktivno trošilo

8.2.3. Redukcija na sekundar

Kako bi sekundarna naponska veličina ostala nepromijenjena, primarna se mora podijeliti prijenosnim omjerom n, ako se trafo želi svesti na jedinični prijenosni omjer:

$$\frac{E_1}{E_2} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{E_1}{n}}{E_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1^{''}}{E_2} = 1 \ . \tag{8-41}$$

Dakle: $E_1^{''} = \frac{1}{n}E_1$, odnosno $U_1^{''} = \frac{1}{n}U_1$. Reducirana snaga primara mora ostati nepromijenjena, $P_1^{''} = P_1$, pa je reducirana primarna struja:

$$U_1^{''}I_1^{''} = U_1I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1^{''} = \frac{U_1}{U_1^{''}}I_1 = nI_1 \ . \tag{8-42}$$

Isto tako je $I_0^{''} = nI_0$, jer je I_0 primarna veličina.

Impedancije se reduciraju na sekundarnu stranu:

$$Z_1^{''} = \frac{U_1^{''}}{I_1^{''}} = \frac{\frac{1}{n}U_1}{nI_1} = \frac{1}{n^2}\frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{n^2}Z_1 \, . \tag{8-43}$$

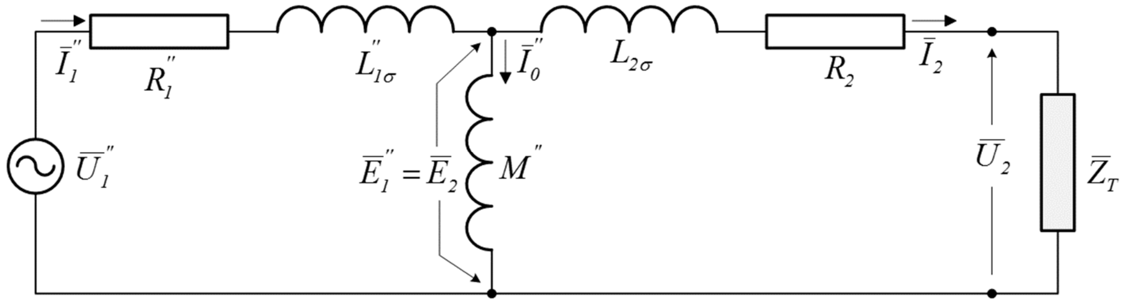
Analogno su:

$$\begin{gathered} R_1^{''} = \frac{1}{n^2}R_1 \quad , \quad X_1^{''} = \frac{1}{n^2}X_1 \quad , \quad L_1^{''} = \frac{1}{n^2}L_1 \quad , \\ L_{1\sigma}^{''} = \frac{1}{n^2}L_{1\sigma} = L_1^{''} - M^{''} \quad , \quad M^{''} = \frac{1}{n}M \ . \end{gathered} \tag{8-44}$$

Uvrste li se reducirane vrijednosti u jednadžbe transformatora, dobije se:

$$\overline{U}_1'' = \overline{I}_1'' R_1'' + j\omega L_{1\sigma}'' \overline{I}_1'' + j\omega M'' \overline{I}_0''$$
$$-\overline{U}_2 = \overline{I}_2 R_2 + j\omega L_{2\sigma} \overline{I}_2 - j\omega M'' \overline{I}_0'' \qquad (8\text{-}45)$$
$$\overline{I}_1'' = \overline{I}_0'' + \overline{I}_2 \ .$$

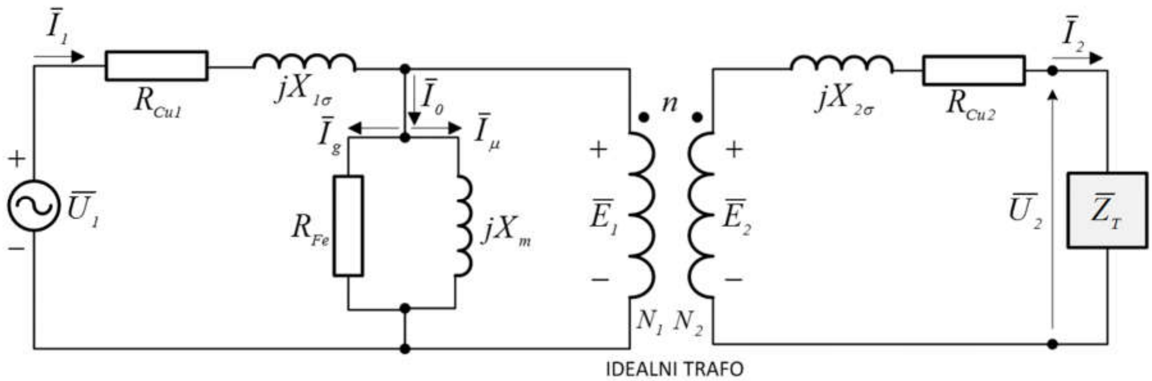
Pripadna nadomjesna shema transformatora kao *T* četveropola reduciranoga na sekundarnu stranu prikazana je na *Slici 8.17*.



Slika 8.17 – Nadomjesna shema transformatora kao T četveropola reduciranoga na sekundar

8.3. Transformator s feromagnetskom jezgrom

Ako se objedine shema svitka s feromagnetskom jezgrom i idealnog trafa te uključe parametri sekundarnog svitka, može se nadomjesna shema trafa prikazati kao na *Slici 8.18*.



Slika 8.18 – Nadomjesna shema transformatora s feromagnetskom jezgrom

Veličine na slici su:

$\overline{E}_1, \overline{E}_2$	inducirani naponi na primaru i sekundaru
$\overline{U}_1, \overline{U}_2$	naponi primarnih i sekundarnih stezaljka
$\overline{I}_1, \overline{I}_2$	ulazna i izlazna struja
n	omjer broja namotaja N_1/N_2
$\overline{I}_0$	struja magnetiziranja (uzbudna struja)
R_{Cu1}, R_{Cu2}	otpor namotaja primarnog i sekundarnog svitka

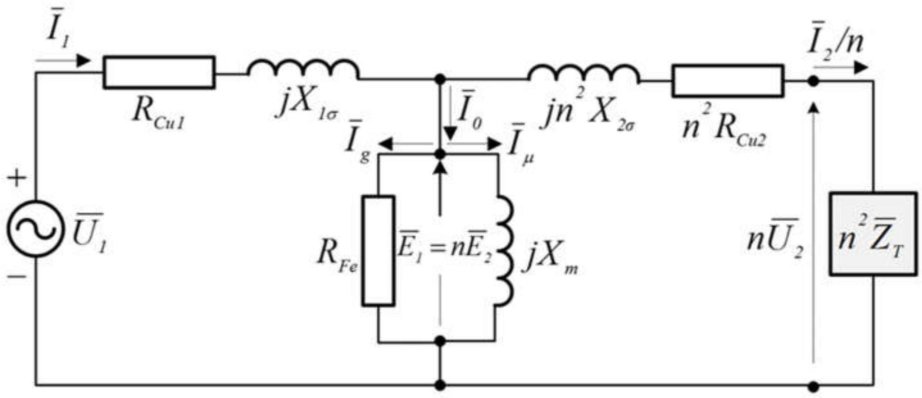
$X_{1\sigma}, X_{2\sigma}$	rasipne induktivnosti primara i sekundara
$\bar{I}_g, \bar{I}_\mu$	struja gubitaka i čista struja magnetiziranja
R_{Fe}, X_m	otpor gubitaka u jezgri i reaktancija jezgre
$\bar{Z}_T$	impedancija trošila.

Distribuirane kapacitivnosti uzduž svitaka i između njih su zanemarene jer one dolaze do izražaja samo pri višim frekvencijama.

Kako je već opisano u slučaju zračnog trafa, puno je prikladnije prikazati nadomjesni krug reduciran na primar ili na sekundar uporabom relacija koje vrijede za idealni trafo. Time se eliminira prisutnost idealnog trafa u nadomjesnoj shemi.

8.3.1. Nadomjesna shema transformatora s Fe jezgrom reduciranoga na primar

Uvrštavanjem veličina iz jednadžbi za transformaciju sekundarnih veličina na primarnu stranu (*Pogl. 8.2.2.*) može se postaviti nadomjesna shema na sekundar reduciranog transformatora s feromagnetskom jezgrom, kao na *Slici 8.19*.

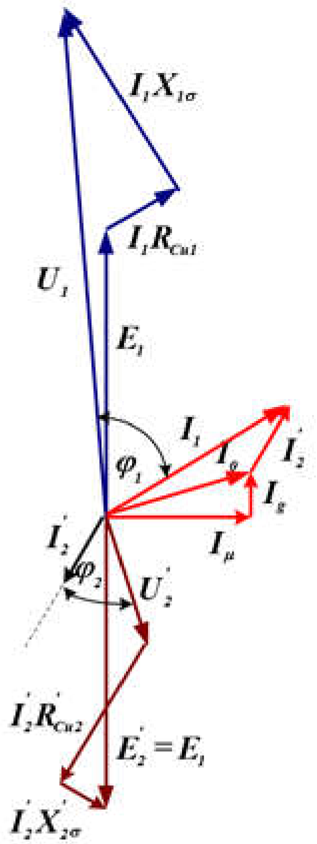


Slika 8.19 – Nadomjesna shema transformatora s feromagnetskom jezgrom reduciranoga na primar

Jednadžbe ulaznog i izlaznog kruga su:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{I}_1(R_{Cu1} + jX_{1\sigma}) + \bar{E}_1 \\ -\bar{U}_2' &= \bar{I}_2'(R_{Cu2}' + jX_{2\sigma}') - E_2' \\ \bar{I}_1 &= \bar{I}_0 + \bar{I}_2'. \end{aligned} \tag{8-46}$$

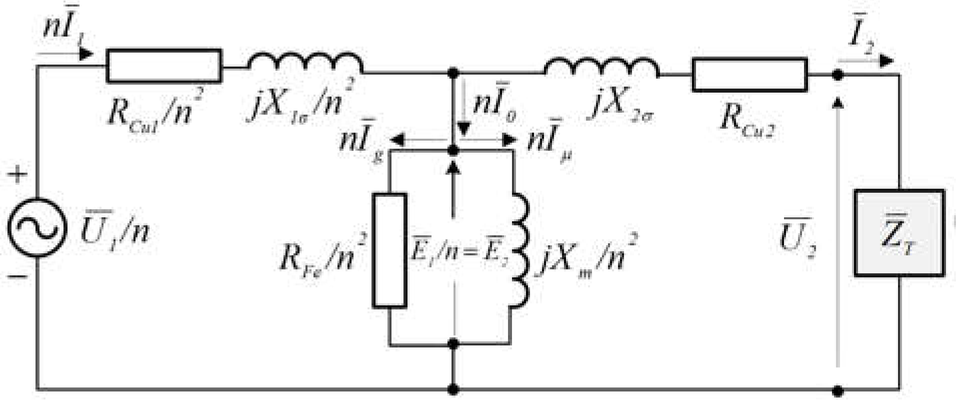
Slika 8.20 prikazuje odgovarajući fazorski dijagram za induktivno trošilo.



Slika 8.20 – Fazorski dijagram transformatora s Fe jezgrom za induktivno trošilo

8.3.2. Nadomjesna shema transformatora s Fe jezgrom reduciranoga na sekundar

Uvrštavanjem veličina iz jednadžbi za transformaciju primarnih veličina na sekundarnu stranu (*Pogl. 8.2.3.*) može se postaviti nadomjesna shema na sekundar reduciranog transformatora s feromagnetskom jezgrom, kao na *Slici 8.21*.

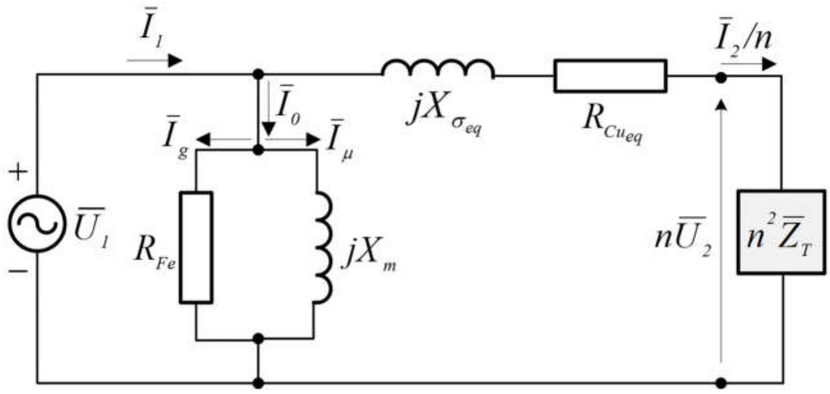


Slika 8.21 – Nadomjesna shema transformatora s Fe jezgrom reduciranoga na sekundar

U praksi se osim temeljne *T* nadomjesne sheme trafa rabe i druge modificirane i pojednostavljene sheme. Navest ćemo nekoliko aproksimativnih shema koje su prikladne za analizu transformatora snage konstantne frekvencije za slučaj redukcije na primar trafa.

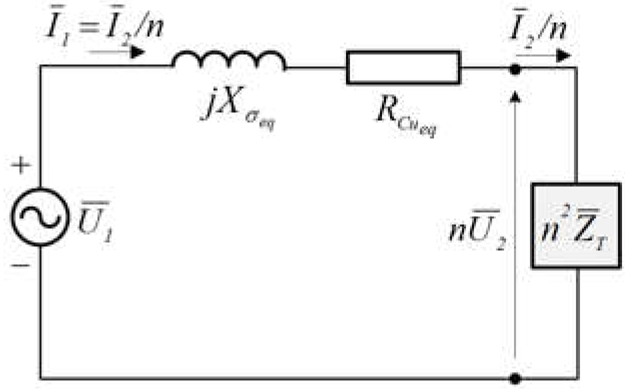
Nadomjesna *Γ shema* dobije se pomicanjem paralelne R_{Fe}, X_m kombinacije iz sredine nalijevo, kao na *Slici 8.22*. Time se bitno olakšava proračun uz minimalnu pogrešku. Serijske impedancije primara i sekundara udružuju se u nadomjesnu serijsku impedanciju:

$$\overline{Z}_{eq} = R_{Cu_{eq}} + jX_{\sigma_{eq}} \quad gdje\ je \quad R_{Cu_{eq}} = R_{Cu1} + n^2 R_{Cu2} \ , \ X_{\sigma_{eq}} = X_{1\sigma} + n^2 X_{2\sigma} \ . \qquad (8\text{-}47)$$



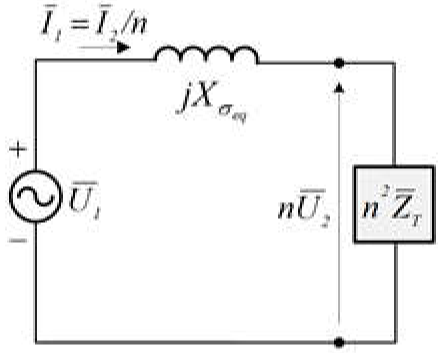
Slika 8.22 – Nadomjesna Γ shema trafa s Fe jezgrom

Zanemarivanjem ukupne struje magnetiziranja dolazi se do još jednostavnijeg modela trafa, određenoga samo ekvivalentnom serijskom impedancijom, kao na *Slici 8.23*.



Slika 8.23 – Nadomjesna shema trafa sa zanemarivom strujom magnetiziranja

Kada je R_{Cueq} malen u odnosu na $X_{\sigma eq}$, kao što je to slučaj kod velikih energetskih transformatora snage, u analizi sustava često se R_{Cueq} može zanemariti. Model transformatora tada sadrži samo serijsku reaktanciju $X_{\sigma eq}$, kao na *Slici 8.24*.



Slika 8.24 – Nadomjesna shema sa zanemarivim gubitcima

Ta približna nadomjesna shema vrijedi i za rad transformatora pri visokim frekvencijama.

8.3.3. Svojstva transformatora

Bitna obilježja transformatora, posebno u području elektroenergetike, jesu regulacija napona i korisnost.

Regulacija napona

Ako je primarni napon trafa ugođen tako da se osigura puno opterećenje trošila, sekundarni napon tada je nazivni napon (nominalni, pogonski). Kada se trošilo odspoji, trafo je neopterećen, odnosno radi u uvjetima praznog hoda. Sekundarni napon mijenja se zbog promjene pada napona na otporima svitaka i rasipnim reaktancijama. Od interesa je odrediti mjeru promjene sekundarnog napona između dvaju graničnih slučajeva, neopterećenog i potpuno opterećenog trafa, uz zadržanu fiksnu vrijednost primarnog napona. Ta se mjera izražava u postotcima i zove se regulacija napona *RU* (%). Dana je izrazom:

$$RU(\%) = \frac{U_{2_{Ph}} - U_{2_n}}{U_{2_n}} \times 100\,, \tag{8-48}$$

gdje su U_{2n} i U_{2Ph} nazivni, odnosno napon praznog hoda na sekundaru. Gornja relacija za aproksimativne nadomjesne krugove reducirane na primarnu i sekundarnu stranu jest:

$$RU(\%) = \frac{U_{1n} - nU_{2n}}{nU_{2n}} \times 100 \quad , \quad RU(\%) = \frac{\dfrac{U_{1n}}{n} - U_{2n}}{U_{2n}} \times 100\,, \tag{8-49}$$

gdje su U_{1n} i U_{2n} nazivni naponi primara i sekundara ($n \neq U_1/U_2$ zbog gubitaka u trafu).

Vrijednost *RU* idealnog trafa jednaka je nuli. Općenito se želi postići što manji iznos regulacije napona.

Korisnost

Općenito je korisnost $\eta = P_{iz}/P_{ul}$. Pri prijenosu snage s primara na sekundar nastaju gubitci u bakru i u željezu (histereza + vrtložne struje), pa se korisnost može izraziti izrazom:

$$\eta = \frac{P_{iz}}{P_{iz} + P_{cu} + P_{Fe}}\,. \tag{8-50}$$

Za neki magnetski tok i radnu frekvenciju gubitci zbog vrtložnih struja bitno se reduciraju lameliranjem jezgre. Gubitci histereze ovise o odabranom materijalu, odnosno magnetskoj karakteristici. Magnetiziranje jezgre izvrši se već pri maloj struji, pa magnetski tok u jezgri ostaje praktički konstantan za sve uvjete opterećenja trafa u normalnoj eksploataciji. Dakle, gubitci u jezgri u biti su konstantni i zovu se fiksni gubitci.

Gubitci u bakru ovise o kvadratu struja kroz primarni i sekundarni svitak ($P_{Cu} = I_1^2 R_{Cu_1} + I_2^2 R_{Cu_2}$). Njihov iznos raste s porastom opterećenja trafa, pa predstavljaju promjenljive gubitke. Za primjer Γ nadomjesne sheme dani su izrazom: $P_{Cu} = \left(I_2/n\right)^2 R_{Cu_{eq}} = I_2'^2 R_{Cu_{eq}}$.

Izlazna snaga trafa reduciranoga na primar je $P_{iz} = U_2' I_2' \cos\varphi$, pa je:

$$\eta = \frac{U_2' I_2' \cos\varphi}{U_2' I_2' \cos\varphi + I_2'^2 R_{Cu_{eq}} + P_{Fe}}\,. \tag{8-51}$$

Za zadanu impedanciju trošila jedina varijabla u gornjoj relaciji jest struja trošila reducirana na primar. Za definiranje maksimalne korisnosti potrebno je derivaciju $d\eta / dI_2'$ izjednačiti s nulom. Kao rezultat dobije se uvjet: $I_2'^2 R_{Cu_{eq}} = P_{Fe}$.

Korisnost će biti maksimalna kada su gubitci u bakru jednaki gubitcima u željezu.

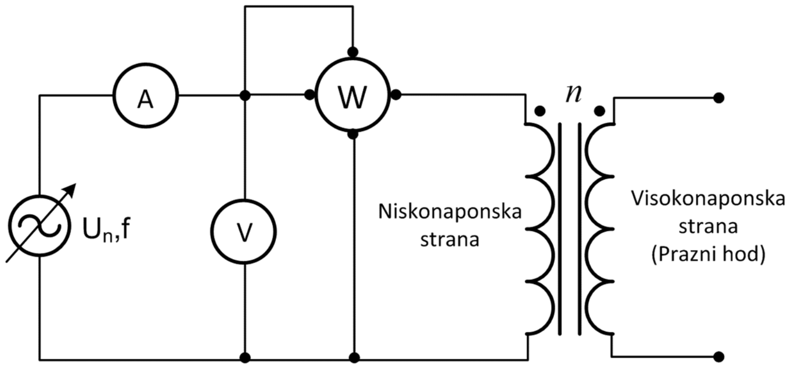
8.3.4. Određivanje parametara

Nadomjesni parametri trafa s Fe jezgrom određuju se izvođenjem pokusa praznog hoda i kratkog spoja.

Pokus praznog hoda:

Izvodi se tako da se jedan svitak ostavi s otvorenim stezaljkama, a na drugi se narine nazivni napon nazivne frekvencije. U načelu, uzbuda se može spojiti na bilo koji svitak, ali je sigurnije da to bude na niskonaponskoj strani. Osim toga, niskonaponski izvor lakše je dostupan.

Shema kruga koji omogućuje određivanje parametara iz podataka izmjerenih u pokusu praznog hoda prikazana je na *Slici 8.25*.

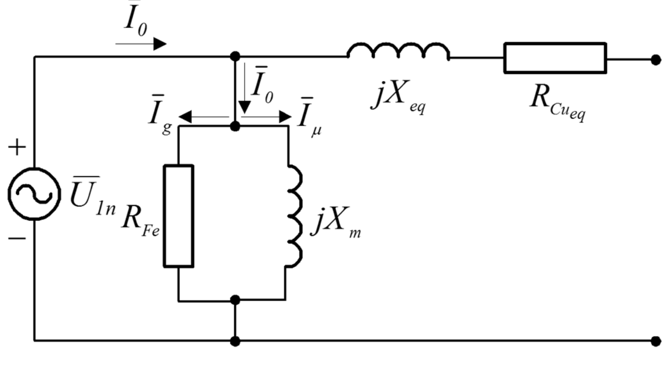


Slika 8.25 – Shema mjerenja u pokusu praznog hoda

Napon primarne niskonaponske strane ugodi se na nazivnu vrijednost. Kako je zbog otvorenog sekundara primarna struja malog iznosa, mogu se zanemariti gubitci na primarnom svitku.

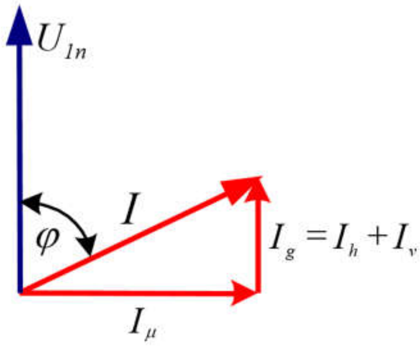
$$I_{2_{PH}} = 0 \;\Rightarrow\; I_{1_{PH}} = I_0 << I_{1n} \;\Rightarrow\; P_{Cu_{PH}} = I_{1PH}^2 R_{Cu_1} << P_{Cu_n} \;\Rightarrow\; P_{Cu_{PH}} \approx 0 \;\Rightarrow\; P_{PH} \approx P_{Fe} \qquad (8\text{-}52)$$

Pripadna nadomjesna shema prikazana je na *Slici 8.26*.



Slika 8.26 – Nadomjesna shema trafa u pokusu praznog hoda

Slika 8.27 prikazuje fazorski dijagram trafa u praznom hodu.



Slika 8.27 – Fazorski dijagram trafa u praznom hodu

Očito je kako je primarna struja jednaka struji magnetiziranja. Gubitci nastaju samo u jezgri, pa vatmetar mjeri ukupne gubitke u feromagnetskoj jezgri trafa. Ampermetar mjeri ukupnu struju magnetiziranja, a voltmetar primarni nazivni napon: $U_V = U_{1n}$, $I_A = I_0$, $P_W = P_{Fe}$.

Iz izmjerenih vrijednosti mogu se odrediti:

- ukupna snaga i faktor snage:

$$S_{PH} = U_{1n} I_0 \quad , \quad cos\varphi = \frac{P_{PH}}{S_{PH}} \tag{8-53}$$

- struja magnetiziranja i njezine komponente:

$$I_0 = \sqrt{I_g^2 + I_\mu^2} \qquad I_g = I_0 cos\varphi \quad , \quad I_\mu = I_0 sin\varphi \tag{8-54}$$

- parametri nadomjesne sheme:

$$R_{Fe} = \frac{U_{1n}}{I_g} = \frac{U_{1n}^2}{P_{PH}} \quad , \quad X_m = \frac{U_{1n}}{I_\mu} = \frac{U_{1n}^2}{Q_{PH}} \, , \tag{8-55}$$

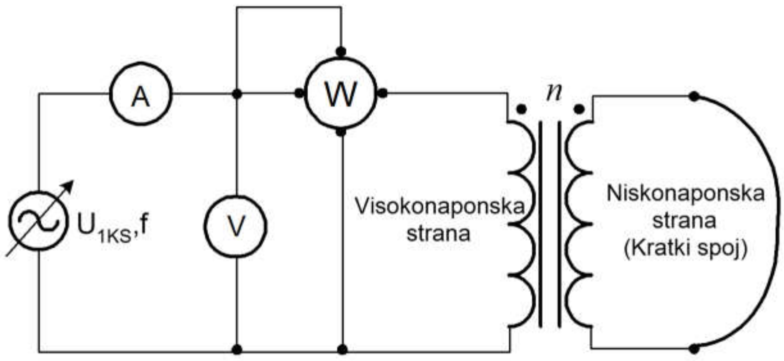
gdje je: $Q_{PH} = \sqrt{S_{PH}^2 - P_{PH}^2}$.

<u>Pokus kratkog spoja</u>:

Izvodi se kratkim spajanjem jednog svitka i postavljanjem uzbude iz izmjeničnog izvora nazivne frekvencije na drugom svitku. Omogućuje određivanje otpora svitaka i rasipnih reaktancija.

Ulazni napon pažljivo se ugađa dok struje obaju svitaka ne postignu nazivne vrijednosti. Ugađanje na nazivne struje svitaka omogućuje ispravnu simulaciju njihovih rasipnih tokova. Kako je zbog kratkog spoja djelatna snaga na izlazu jednaka nuli, ulazna snaga mora biti vrlo mala. To znači da pri ulaznoj struji nazivne vrijednosti narinuti napon mora biti samo mali dio nazivne vrijednosti ulaznog napona. Ugađanje u pokusu kratkog spoja stoga se mora izvoditi vrlo oprezno.

Zbog mjerenja u uvjetima protjecanja nazivne struje iz sigurnosnih je razloga preporučljivo pokus izvoditi s ulazom na visokonaponskoj strani. Shema mjernog kruga za izvođenje pokusa kratkog spoja prikazana je na *Slici 8.28*.

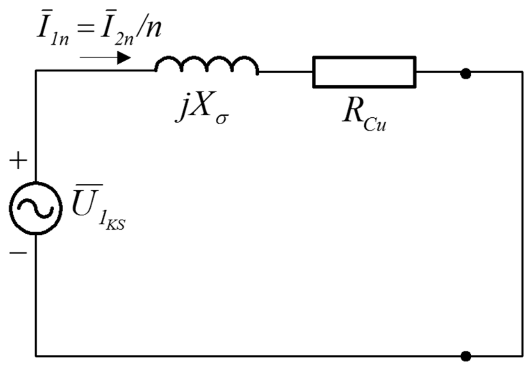


Slika 8.28 – Shema mjerenja u pokusu kratkog spoja

Zbog vrlo malog ulaznog napona struja magnetiziranja i gubitci u magnetskoj jezgri su zanemarivi.

$$I_{1_{KS}} = I_{1n} = I_{2n}^{'} \;\; ; \; U_{1_{KS}} << U_{1n} \;\Rightarrow\; I_{0_{KS}} \approx 0 \, ; R_{Fe_{KS}} \approx 0 \, ; X_{m_{KS}} \approx 0 \;\; ; P_{Fe_{KS}} \approx 0 \;\Rightarrow\; P_{KS} \approx P_{Cu} \;\; , \qquad (8\text{-}56)$$

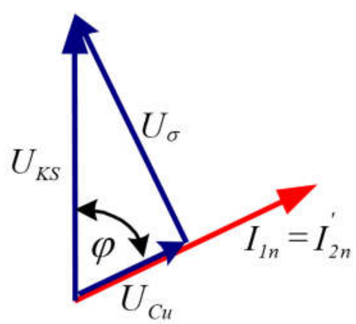
Pripadna nadomjesna shema prikazana je na *Slici 8.29*.



Slika 8.29 – Nadomjesna shema trafa u pokusu kratkog spoja

gdje su: $R_{Cu} = R_{Cu_1} + n^2 R_{Cu_2}$, $X_{\sigma} = X_{\sigma_1} + n^2 X_{\sigma_2}$.

Fazorski dijagram trafa u kratkom spoju prikazan je na *Slici 8.30*.



Slika 8.30 – Fazorski dijagram trafa u uvjetima kratkog spoja

Zbog zanemarive struje magnetiziranja gubitci nastaju samo na namotajima svitaka. Vatmetar mjeri ukupne gubitke u bakru koji bi nastali pri punom opterećenju trafa, jer kroz svitke teku nazivne struje. Ampermetar mjeri nazivnu struju primara, a voltmetar primarni napon kratkog spoja:

$$U_V = U_{1KS} \quad , \quad I_A = I_{1n} = I'_{2n} \quad , \quad P_W = P_{Cu} \quad . \tag{8-57}$$

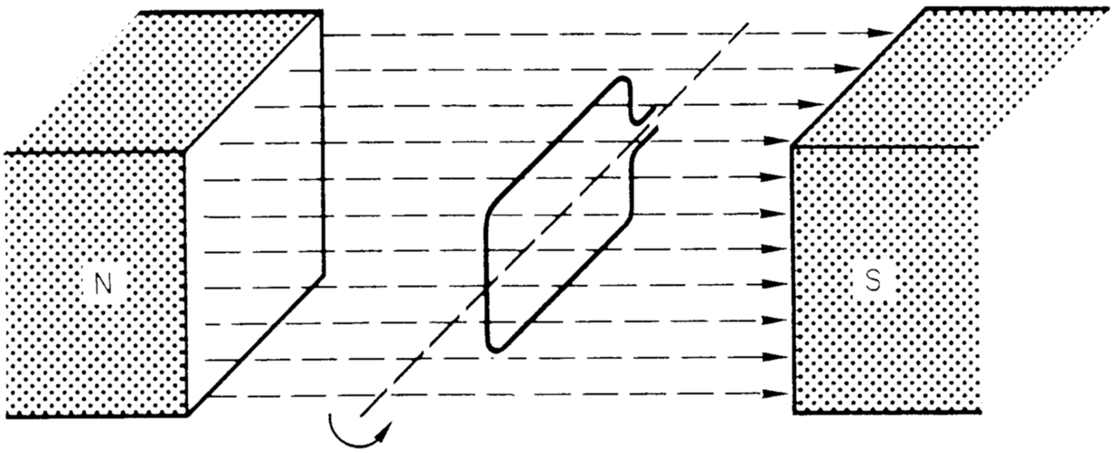
Iz očitanja instrumenata mogu se odrediti parametri nadomjesne sheme:

$$R_{Cu} = \frac{P_{KS}}{I_{1n}^2} \quad , \quad Z_{KS} = \frac{U_{1_{KS}}}{I_{1n}} \quad , \quad X_\sigma = \sqrt{Z_{KS}^2 - R_{Cu}^2} \, . \tag{8-58}$$

9. TROFAZNI SUSTAVI

Kada bi energetski sustav bio temeljen na istosmjernoj energiji, izvori bi morali biti u neposrednoj blizini trošila, jer s povećanjem udaljenosti znatno rastu gubitci na prijenosnim vodovima. Protjecanje istosmjerne struje prati konstantno magnetsko polje, pa nema mogućnosti transformacije napona. Tek u uvjetima kada bi supravodljivi vodiči bili komercijalno isplativi, moglo bi se razmišljati i o prijenosu većih količina istosmjerne energije. Za prijenos električne energije s mjesta gdje se ona proizvede (električna centrala) do konzumnog područja gdje se ona eksploatira, uglavnom se upotrebljava izmjenična struja. Vremenski promjenljivo magnetsko polje omogućuje transformaciju napona. Jednaka količina snage može se prenijeti ako se struja smanji onoliko puta koliko se poveća napon. Manja struja izaziva i manje gubitke na vodovima (I^2R_v).

Do sada su razmatrani jednofazni izmjenični izvori. Oni se mogu realizirati rotiranjem vodljive petlje konstantnom kutnom brzinom u homogenom magnetskom polju, kao na *Slici 9.1*.



Slika 9.1 – Princip generiranja jednofaznog EMS-a

Međutim, električna se energija može proizvoditi i u višefaznim simetričnim sustavima. To su sustavi koji se sastoje od nekoliko izmjeničnih elektromotornih sila jednakih frekvencija i amplituda, koje su jedna u odnosu na drugu fazno pomaknute za kut:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}, \tag{9-1}$$

gdje je n broj faza.

Višefazni sustav EMS može se dobiti ako se na statoru generatora razmjesti nekoliko jednakih izoliranih namotaja, koji su međusobno pomaknuti za jednaki kut α. Pri okretanju rotora njegovo magnetsko polje presijeca namotaje statora i u njima inducira izmjenični EMS. Ako se u jednom namotaju inducira EMS $e_1 = E_m \sin\omega t$, onda će se u svakom sljedećem namotaju zbog njihova geometrijskog rasporeda inducirati EMS-i koji su fazno pomaknuti za kut α, 2α... Primjerice u drugom po redu namotaju (s obzirom na smjer rotacije) zakonitost promjene EMS-a bit će dana izrazom:

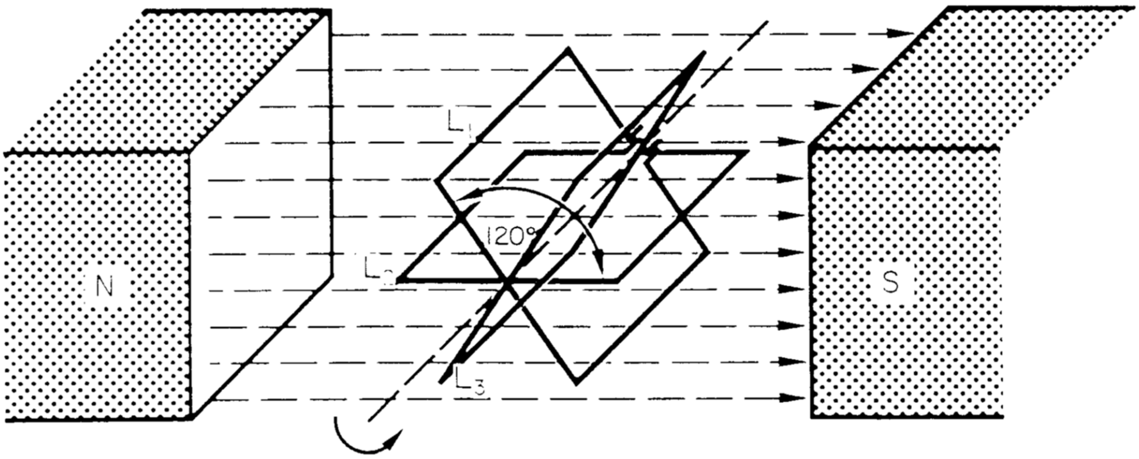
$$e_2 = E_m sin\left(\omega t + \alpha\right). \tag{9-2}$$

Sustav je simetričan ako su svi dobiveni naponi međusobno pomaknuti za jednaki kut. Pojedini namotaji višefaznog sustava nazivaju se fazama. Općenito se može rabiti bilo koji broj faza, ali od praktična su značenja trofazni sustavi.

Trofazni je sustav onaj sustav u kojem djeluju tri elektromotorne sile jednake po amplitudi i frekvenciji, a fazno su pomaknute za kut:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^0. \tag{9-3}$$

Za generiranje trofaznog sustava može se primijeniti sličan princip koji je vrijedio i za jednofazni sustav – *Slika 9.2*.



Slika 9.2 – Princip generiranja trofaznog EMS-a

Razlika je ta što sada tri vodljive petlje *(L_1, L_2, L_3)* rotiraju konstantnom kutnom brzinom oko iste osi u jednolikom magnetskom polju. Geometrijski su petlje razmaknute međusobno za 120° i uvijek zadržavaju taj razmak. Budući da se jedan puni okretaj (360°) izvede u vremenu jednog perioda *T*, tri inducirana napona kasne vremenski za trećinu perioda, odnosno fazno za 120° jedan u odnosu na drugi. Trenutačne vrijednosti generiranih napona tada su:

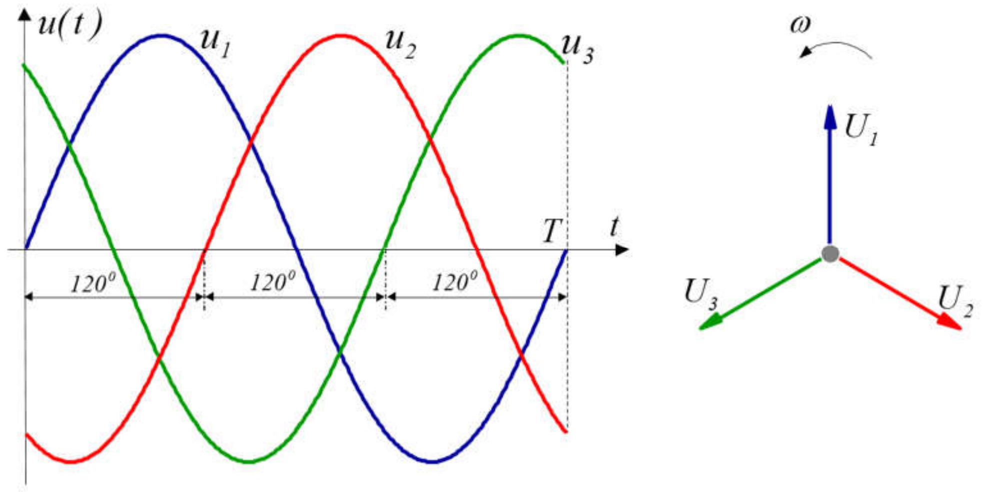
$$\begin{aligned} u_1 &= U_m sin\,\omega t \\ u_2 &= U_m sin\left(\omega t - 120^0\right) \\ u_3 &= U_m sin\left(\omega t - 240^0\right) = U_m sin\left(\omega t + 120^0\right). \end{aligned} \tag{9-4}$$

Ti se naponi osim brojčano označuju i na drugi način: *A-B-C*, *R-S-T* ili *L1-L2-L3*.

Valni i pripadni fazorski dijagram trofaznog sustava napona za spoj generatora u zvijezdu prikazani su na *Slici 9.3*.

Dobivanje sinusoidnog EMS-a vrtnjom petlje konstantnom brzinom u homogenom magnetskom polju ne primjenjuje se u praksi za proizvodnju izmjeničnih struja. Naime, teško je ostvariti homogeno magnetsko polje u dovoljno velikom prostornom području.

Stvarni industrijski tip generatora pravi se tako da aktivni dio vodiča statora „siječe“ magnetske silnice nejednolikoga magnetskog polja pod konstantnim kutom od 90°. Silnice magnetskog polja prožimaju zračni raspor između rotora i statora i usmjerene su radijalno na površinu rotora. Gustoća magnetskog toka B u zračnom rasporu sinusoidno je distribuirana po periferiji rotora. Takva se distribucija postiže odgovarajućom selekcijom oblika polova.



Slika 9.3 – Valni i fazorski dijagram trofaznog sustava napona

Prednosti su trofaznih sustava nad jednofaznima mnogostruke. Spomenimo neke od njih:

- omogućuju ekonomičniji prijenos energije s manjim toplinskim gubitcima i uštedom materijala za vodove (pri prenošenju jednakih snaga), tj. isporučuju više vata po kilogramu težine vodiča nego odgovarajući jednofazni sustav;
- generiraju obrtno magnetsko polje što je temeljni zahtjev za rad većine modernih rotacijskih strojeva, primjerice trofaznog indukcijskog motora;
- trenutačna snaga simetričnog trofaznog trošila konstantna je bez obzira na vrstu spoja. To primjerice omogućuje mirniji i pouzdaniji rad trofaznih motora;
- trofazni uređaji su jednostavni, robusni i ekonomični. Trofazni motori imaju bolje startne karakteristike i podnose veća opterećenja, a transformatori imaju fleksibilnije mogućnosti spajanja;
- glavni i operativni troškovi prijenosnih i distribucijskih trofaznih sustava puno su manji nego što bi bili u odvojenim jednofaznim sustavima.

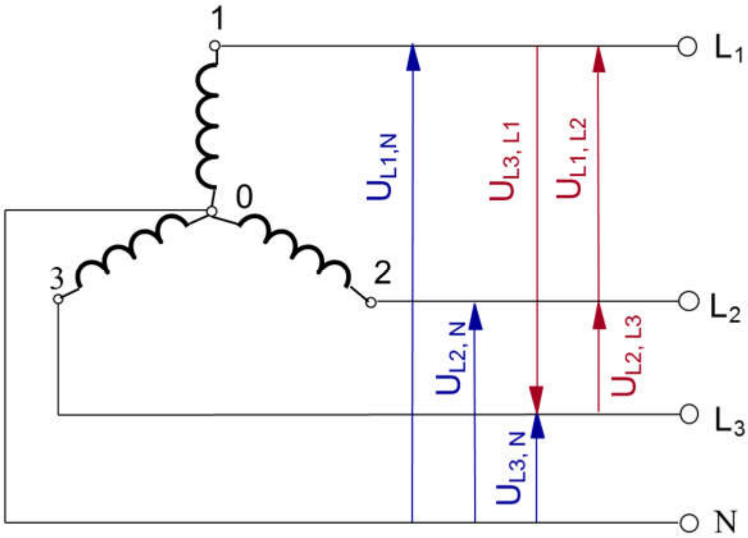
Dva su temeljna načina spajanja namotaja trofaznog generatora, ali i trofaznog trošila, primjerice motora. To su spoj u zvijezdu i spoj u trokut.

9.1. Spoj namotaja trofaznog generatora u zvijezdu

Spoj u zvijezdu dobije se ako se krajevi svakog namotaja spoje međusobno u zajedničku točku. Spojna točka – zvjezdište naziva se još i nultom točkom ili kraće nulom. Vodovi koji idu od početaka namotaja generatora ka trošilu nazivaju se linijskim, a vod izveden iz nulte točke nulti je ili neutralni vod. Veza generatora i trošila može biti trovodna (bez nultog voda) ili četverovodna (s nultim vodom).

Na *Slici 9.4* prikazan je generator s nultim vodom u zvijezda spoju s naznačenim karakterističnim naponima.

Napon između jednog linijskog voda i nultog voda naziva se *faznim naponom*. Efektivne vrijednosti faznih napona označit ćemo, s obzirom na izlazne točke svitaka generatora, s $U_{L1,N} = U_1$, $U_{L2,N} = U_2$, $U_{L3,N} = U_3$. Ako se zanemare padovi napona na samim namotajima generatora, može se smatrati kako su fazni naponi jednaki faznim EMS-ima: E_1, E_2, E_3. Fazni su naponi jednaki i fazno su pomaknuti za 120°.

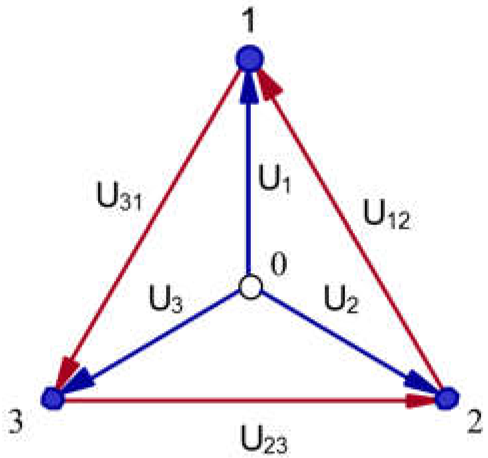


Slika 9.4 – Spoj trofaznog generatora u zvijezdu

Zbroj faznih napona jednak je nuli. Naime, spoj u zvijezdu je tzv. serijski protuspoj, u kojem su fazori napona tako usmjereni da njihova suma počinje i završava u istoj točki.

Linijski naponi su naponi između bilo koja dva linijska voda. Na slici trofaznog generatora označeni su s $U_{L1,L2}$, $U_{L2,L3}$, $U_{L3,L1}$. Kao i fazne napone, zapisat ćemo ih u kraćem obliku kao U_{12}, U_{23}, U_{31}.

Združeni fazorski dijagram faznih i linijskih napona prikazan je na *Slici 9.5*.



Slika 9.5 – Fazorski dijagram faznih i linijskih napona

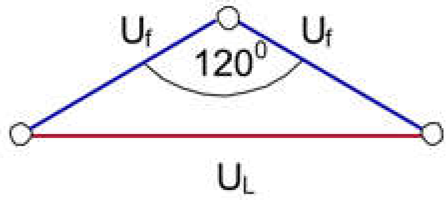
Zbroj linijskih napona je kao i zbroj faznih napona jednak nuli, jer obilaze trokut u istom smjeru. Sva tri linijska napona jednaka su po iznosu i svaki je pomaknut prema svom referentnom naponu za 30^o. Odnos efektivnih vrijednosti linijskih i faznih napona može se odrediti ako se izdvojeno promatra bilo koji od istokračnih trokuta koji povezuje dva fazna s odgovarajućim linijskim naponom, kao na *Slici 9.6*. Neka je to primjerice trokut s vrhovima *0-2-3*. Temeljem kosinusova poučka ili dijeljenjem istokračnog na dva pravokutna trokuta dobije se:

$$\frac{U_L}{2} = U_f \cos 30^0 , \qquad (9\text{-}5)$$

odnosno:

$$U_L = \sqrt{3} U_f \,. \tag{9-6}$$

Za spoj u zvijezdu linijski naponi su za 1,73 puta veći od faznih napona. Niskonaponske električne mreže obično se rade s linijskim naponima od 380 V za koje su fazni naponi 220 V.



Slika 9.6 – Odnos faznog i linijskog napona

U zvijezda spoju kraj faznog namotaja neposredno je spojen s linijskim vodom koji se spaja na trošilo, pa je očito kako je fazna struja I_f istovremeno i linijska struja I_L, odnosno: $I_f = I_L$.

Fazorski (kompleksni) prikaz napona

- *Fazni naponi:*

$$\begin{aligned} \overline{U}_1 &= U_f e^{j0^0} = U_f \\ \overline{U}_2 &= U_f e^{-j120^0} = U_f \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \overline{U}_3 &= U_f e^{j120^0} = U_f \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \tag{9-7}$$

Vidi se da je $\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \overline{U}_3 = 0$.

- *Linijski naponi:*

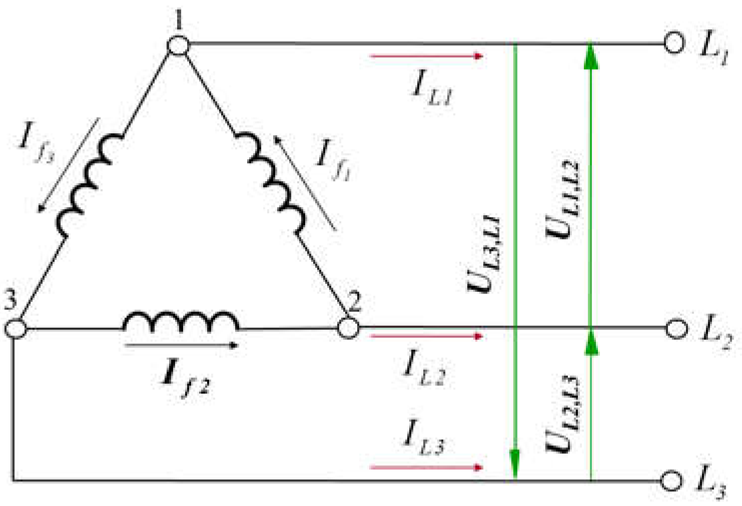
$$\begin{aligned} \overline{U}_{12} &= \overline{U}_1 - \overline{U}_2 = \sqrt{3}\overline{U}_1 e^{j30^0} = \sqrt{3} U_f e^{j30^0} = U_L e^{j30^0} \\ \overline{U}_{23} &= \overline{U}_2 - \overline{U}_3 = \sqrt{3}\overline{U}_2 e^{j30^0} = \sqrt{3} U_f e^{-j120^0} e^{j30^0} = U_L e^{-j90^0} \\ \overline{U}_{31} &= \overline{U}_3 - \overline{U}_1 = \sqrt{3}\overline{U}_3 e^{j30^0} = \sqrt{3} U_f e^{j120^0} e^{j30^0} = U_L e^{j150^0} \end{aligned} \tag{9-8}$$

Vrijedi također: $\overline{U}_{12} + \overline{U}_{23} + \overline{U}_{31} = 0$.

9.2. Spoj namotaja trofaznog generatora u trokut

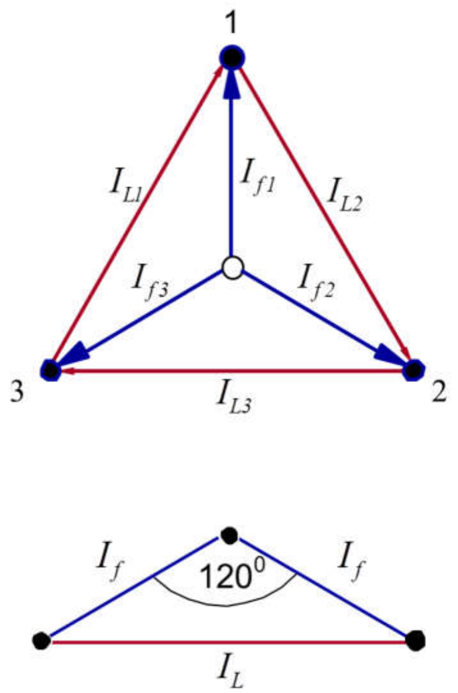
Ako se kraj prvog spoji na početak drugog namotaja, kraj drugog na početak trećeg, a kraj trećeg na početak prvog namotaja, dobije se spoj u trokut trofaznog generatora kao na *Slici 9.7*.

Naponi na namotajima (fazama) generatora su fazni naponi: $U_{12} = U_{L1,L2}$, $U_{31} = U_{L3,L1}$, $U_{23} = U_{L2,L3}$. Namotaji generatora tvore zatvoreni serijski krug. U uvjetima praznog hoda generatora (bez priključenog trošila) izgledalo bi da su namotaji kratko spojeni. Međutim stvarnoga kratkog spoja nema, jer je zbroj elektromotornih sila koje djeluju u ovom zatvorenom krugu u svakom trenutku jednak nuli. Kada bi se omaškom zamijenili krajevi jednog namotaja (reverzija faznog napona za 180°), rezultirajući napon unutar trokuta bio bi jednak dvostrukoj veličini faznog napona i generator bi se našao u kratkom spoju.



Slika 9.7 – Spoj trofaznog generatora u trokut

Linijski vodovi kod spoja u trokut vode od spojnih točaka prema trošilu. Vidljivo je na gornjoj slici kako je napon između linijskih vodova jednak naponu svake pojedine faze, pa za spoj u trokut vrijedi: $U_L = U_f$. Fazne struje u namotajima generatora I_{f1}, I_{f2}, I_{f3} su, kao i naponi na namotajima, jednake po iznosu i fazno razmaknute za 120°. Linijske struje I_{L1}, I_{L2}, I_{L3} vode od čvorova *1*, *2*, *3* prema trošilu. Odnos faznih i linijskih struja dan je jednadžbama triju čvorova, a može se razlučiti iz fazorskog dijagrama prema *Slici 9.8*.



Slika 9.8 – Odnos faznih i linijskih struja

Analogno razmatranju odnosa napona u zvijezda spoju, za spoj u trokut odnos struja je $I_L = \sqrt{3} I_f$.

U spoju u trokut linijske su struje za 1,73 puta veće od faznih struja.

Fazorski (kompleksni) prikaz struja

Fazne struje imaju, općenito, u odnosu na odgovarajuće fazne napone neki fazni kut φ:

$$\bar{I}_{f1} = I_f e^{j\varphi} \quad , \quad \bar{I}_{f2} = I_f e^{j(\varphi - 120^0)} \quad , \quad \bar{I}_{f3} = I_f e^{j(\varphi + 120^0)}. \qquad (9\text{-}9)$$

Linijske struje što bi tekle prema trošilu su:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_{L1} &= \bar{I}_{f1} - \bar{I}_{f3} = \sqrt{3}\bar{I}_{f1} e^{-j30^0} = \sqrt{3} I_f e^{j\varphi} e^{-j30^0} = \sqrt{3} I_f e^{j(\varphi - 30^0)} \\
\bar{I}_{L2} &= \bar{I}_{f2} - \bar{I}_{f1} = \sqrt{3}\bar{I}_{f2} e^{-j30^0} = \sqrt{3} I_f e^{j(\varphi - j120^0)} e^{-j30^0} = \sqrt{3} I_f e^{j(\varphi - 150^0)} \\
\bar{I}_{L3} &= \bar{I}_{f3} - \bar{I}_{f2} = \sqrt{3}\bar{I}_{f3} e^{-j30^0} = \sqrt{3} I_f e^{j(\varphi + 120^0)} e^{-j30^0} = \sqrt{3} I_f e^{j(\varphi + 90^0)},
\end{aligned} \qquad (9\text{-}10)$$

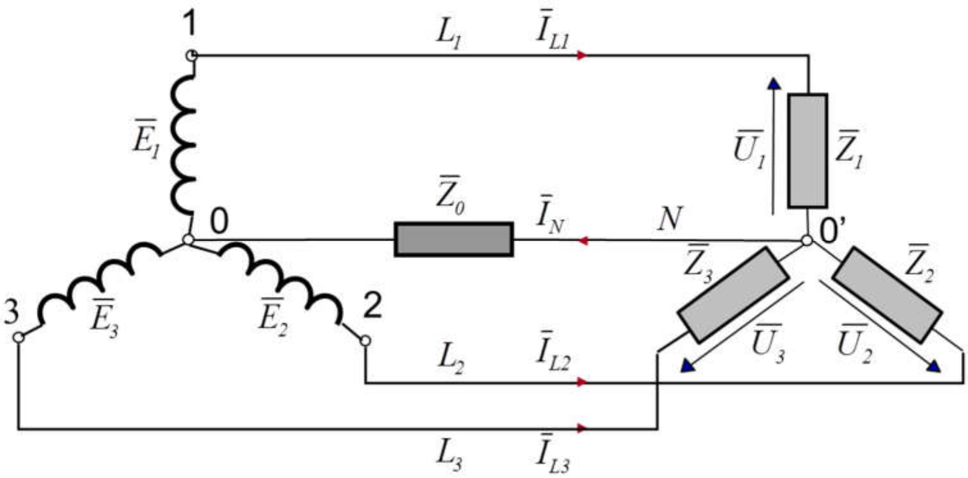
pri čemu je uvijek: $\bar{I}_{L1} + \bar{I}_{L2} + \bar{I}_{L3} = 0$.

Usporede li se spoj u zvijezdu i spoj u trokut, može se zaključiti sljedeće:

- U zvijezda spoju povisuje se napon između linijskih vodova za 1,73 puta u odnosu na napon pojedine faze, ali su zato, pri jednakom opterećenju, manje linijske struje. Prednost ovog spoja je postojanje zajedničke nulte točke. Ako je i trošilo spojeno u zvijezdu, mogu se povezati nulte točke generatora i trošila zajedničkim nultim vodom. Time izbjegavamo poteškoće koje mogu nastati zbog nesimetrije sustava. Uz zanemariv pad napona na nultom vodu sustav napona na trošilu ostaje simetričan bez obzira na nesimetriju trošila.
- U trokut spoju nema mogućnosti izvođenja nultog voda, što može izazvati znatne neugodnosti pri neravnomjernom opterećenju faza. Zato su u razvodima niskonaponskih mreža sekundarni namotaji mrežnih transformatora u pravilu vezani u zvijezdu.

9.3. Trošilo u zvijezda spoju

Trošila se također mogu spajati u zvijezdu ili u trokut. Trofazno trošilo spojeno u zvijezdu i priključeno na simetrični trofazni generator u zvijezda spoju prikazano je na *Slici 9.9*.



Slika 9.9 – Trošilo u zvijezda spoju

Međusobni spoj može biti izveden tročičnim ili četveročičnim vodom (s nultim vodom ili bez njega). Veličine na slici su:

E_1, E_2, E_3 - EMS generatora

U_1, U_2, U_3 - fazni naponi na trošilu
Z_1, Z_2, Z_3 - impedancije u fazama trošila
$0, 0'$ - zvjezdišta generatora, odnosno trošila
N, Z_0 - nulti vod i impedancija nultog voda
$L_1, L_2, L_3,$ - linijski vodovi
I_{L1}, I_{L2}, I_{L3} - linijske struje
$I_N\,(I_0)$ - struja u nultom vodu.

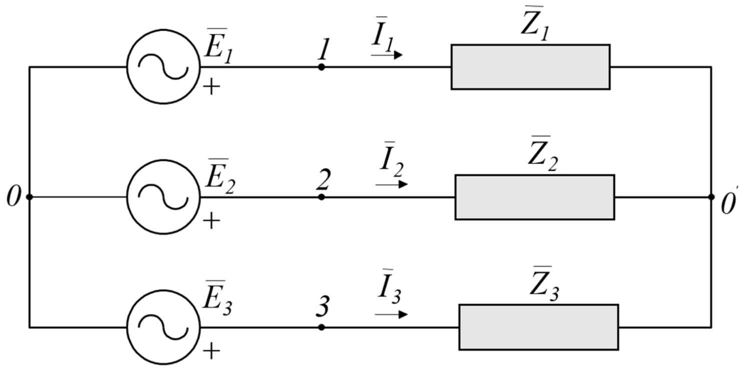
9.3.1. Nesimetrično trošilo

Impedancije u pojedinim fazama trošila su u općem slučaju različite, pa je takvo trofazno trošilo *nesimetrično trošilo*, odnosno na simetrični trofazni generator priključeno je nesimetrično opterećenje. Da bi trošilo bilo nesimetrično, dovoljno je da se bilo koja impedancija razlikuje po veličini i/ili fazi od ostalih.

Analizirat ćemo nekoliko slučajeva. Nesimetrično trošilo spojeno na sustav:

a) bez nultog voda

Shema trofaznog nesimetričnog trošila u sustavu bez nultog voda dana je na *Slici 9.10*.



Slika 9.10 – Nesimetrično trošilo u trofaznom sustavu bez nultog voda

Između zvjezdišta generatora i trošila stvara se napon nesimetrije $\overline{U}_{0'0}$. Kako se shema sastoji od triju paralelnih grana, napon nesimetrije može se odrediti uporabom Millmannova teorema:

$$\overline{U}_{0'0} = \frac{\dfrac{\overline{E}_1}{\overline{Z}_1} + \dfrac{\overline{E}_2}{\overline{Z}_2} + \dfrac{\overline{E}_3}{\overline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\overline{Z}_1} + \dfrac{1}{\overline{Z}_2} + \dfrac{1}{\overline{Z}_3}} = \frac{\overline{E}_1\overline{Y}_1 + \overline{E}_2\overline{Y}_2 + \overline{E}_3\overline{Y}_3}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} . \tag{9-11}$$

Naponi na fazama trošila su:

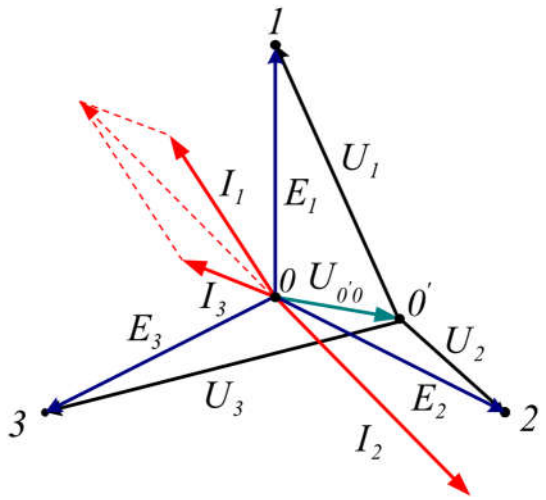
$$\overline{U}_1 = \overline{E}_1 - \overline{U}_{0'0} \quad , \quad \overline{U}_2 = \overline{E}_2 - \overline{U}_{0'0} \quad , \quad \overline{U}_3 = \overline{E}_3 - \overline{U}_{0'0} . \tag{9-12}$$

Struje kroz faze trošila:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{\overline{Z}_1} \quad , \quad \overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}_2} \quad , \quad \overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_3}{\overline{Z}_3} . \tag{9-13}$$

Vrijedi: $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0$.

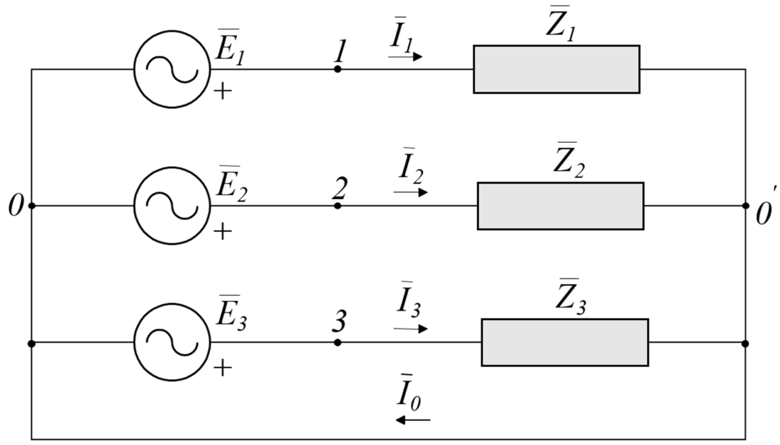
Pripadni fazorski dijagram dan je na *Slici 9.11*.



Slika 9.11 – Fazorski dijagram za sustav bez nultog voda

b) *s nultim vodom i* $\overline{Z}_0 \approx 0$

Shema trofaznog nesimetričnog trošila u sustavu s nultim vodom zanemariva otpora dana je na *Slici 9.12*.



Slika 9.12 – Nesimetrično trošilo u trofaznom sustavu s nultim vodom zanemarive impedancije

Budući da su zvjezdišta (nulte točke) generatora *0* i trošila *0′* međusobno spojene vodom zanemariva otpora, nalaze se na jednakom potencijalu, pa je $\overline{U}_{0'0} = 0$.

Zato u svakoj fazi trošila djeluje odgovarajući napon faze generatora, tj. sustav napona na trošilu je simetrični trofazni sustav napona generatora:

$$\overline{U}_1 = \overline{E}_1 \quad , \; \overline{U}_2 = \overline{E}_2 \quad , \; \overline{U}_3 = \overline{E}_3 \; . \tag{9-14}$$

Sva fazna trošila rade na naponu za koji su predviđena (nazivni, nominalni). To je ujedno najvažniji razlog postojanja nultog voda.

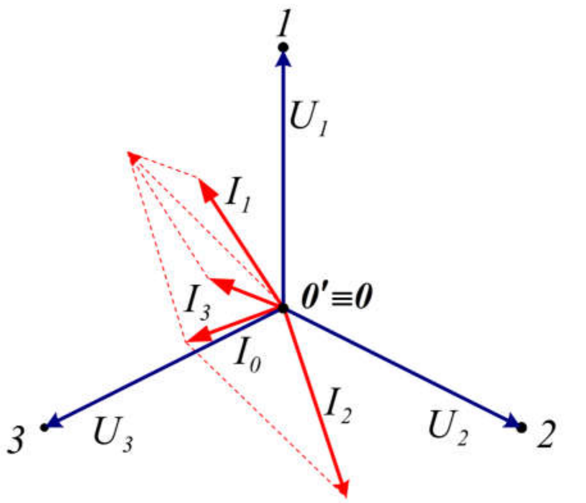
Kroz faze trošila teku fazne struje. Iako su efektivne vrijednosti faznih napona jednake, iznosi tih struja su različiti zbog nesimetrije trošila:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{Z}_1} \quad , \quad \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2} \quad , \quad \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_3}{\bar{Z}_3} \quad . \tag{9-15}$$

Različiti su i fazni kutovi između napona i struja. Također ni fazni pomaci između struja ne zadržavaju međusobni odnos od 120^0 kao što je to slučaj s faznim naponima. Struja u nultom vodu jednaka je fazorskom zbroju faznih struja:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 . \tag{9-16}$$

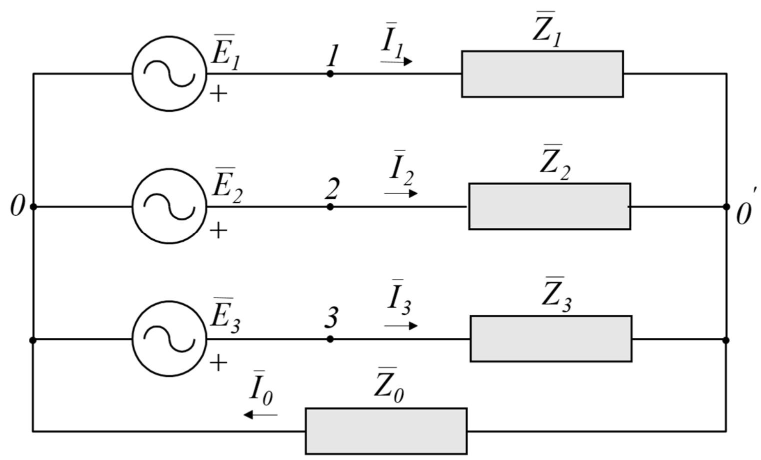
Fazorski dijagram za razmatrani slučaj dan je na *Slici 9.13*.



Slika 9.13 – Fazorski dijagram za sustav sa $\bar{Z}_0 \approx 0$

c) s nultim vodom i $\bar{Z}_0 \neq 0$

Shema trofaznog nesimetričnog trošila u sustavu s nultim vodom nezanemariva otpora dana je na *Slici 9.14*.



Slika 9.14 – Nesimetrično trošilo u trofaznom sustavu s nultim vodom nezanemarive impedancije

Između zvjezdišta generatora i trošila postoji napon nesimetrije $\overline{U}_{0'0}$. Po iznosu nije velik jer se stvara na maloj impedanciji nultog voda. Prema Millmannovu teoremu je:

$$\overline{U}_{0'0} = \frac{\overline{E}_1\overline{Y}_1 + \overline{E}_2\overline{Y}_2 + \overline{E}_3\overline{Y}_3}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3 + \overline{Y}_0} . \qquad (9\text{-}17)$$

Naponi na fazama trošila su:

$$\overline{U}_1 = \overline{E}_1 - \overline{U}_{0'0} \quad , \quad \overline{U}_2 = \overline{E}_2 - \overline{U}_{0'0} \quad , \quad \overline{U}_3 = \overline{E}_3 - \overline{U}_{0'0} . \qquad (9\text{-}18)$$

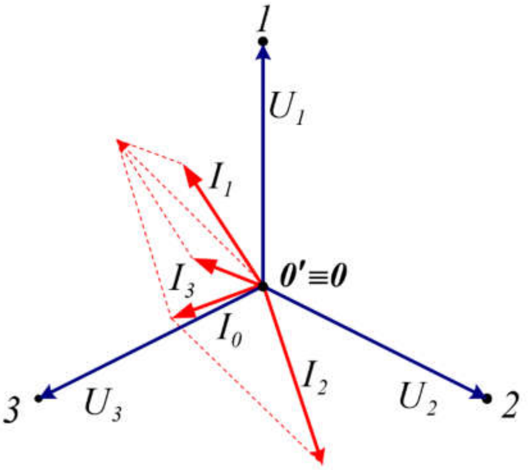
Struje kroz faze trošila:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{\overline{Z}_1} \quad , \quad \overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}_2} \quad , \quad \overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_3}{\overline{Z}_3} . \qquad (9\text{-}19)$$

Struja nultog voda:

$$\overline{I}_0 = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \quad ili \quad \overline{I}_0 = \frac{\overline{U}_{0'0}}{\overline{Z}_0} . \qquad (9\text{-}20)$$

Pripadni fazorski dijagram dan je na *Slici 9.15*.



Slika 9.15 – Fazorski dijagram za sustav sa $\overline{Z}_0 \neq 0$

Ukupna djelatna snaga nesimetričnog trošila jednaka je sumi djelatnih snaga u svakoj fazi trošila:

$$P_{uk} = P_1 + P_2 + P_3 . \qquad (9\text{-}21)$$

Isto vrijedi i za jalovu *(Q)*, odnosno prividnu *(S)* snagu:

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$S_{uk} = S_1 + S_2 + S_3 . \qquad (9\text{-}22)$$

9.3.2. Simetrično trošilo

Razmatrajmo sada poseban slučaj kada su impedancije u svim fazama jednake po iznosu i po fazi:

$$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = \overline{Z}_f . \qquad (9\text{-}23)$$

Takvo trofazno trošilo je *simetrično trošilo.* Budući da su sve faze ravnomjerno opterećene, nema nesimetrije u sustavu. Nulte točke generatora *0* i trošila *0′* nalaze se na jednakom potencijalu, pa je $\overline{U}_{0'0} = 0$. To se vidi i iz izraza:

$$\overline{U}_{0'0} = \frac{\overline{E}_1\overline{Y} + \overline{E}_2\overline{Y} + \overline{E}_3\overline{Y}}{3\overline{Y}} = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3}_{=0} \right) = 0 . \qquad (9\text{-}24)$$

Na trošilu je simetrični trofazni sustav napona generatora:

$$\overline{U}_1 = \overline{E}_1 \quad , \quad \overline{U}_2 = \overline{E}_2 \quad , \quad \overline{U}_3 = \overline{E}_3 \ . \qquad (9\text{-}25)$$

Fazne će struje imati jednake efektivne vrijednosti i u odnosu na pripadne fazne napone bit će pomaknute za isti kut φ određen karakterom impedancije:

$$\bar{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{\overline{Z}_f} \quad , \quad \bar{I}_2 = \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}_f} \quad , \quad \bar{I}_3 = \frac{\overline{U}_3}{\overline{Z}_f} \ . \qquad (9\text{-}26)$$

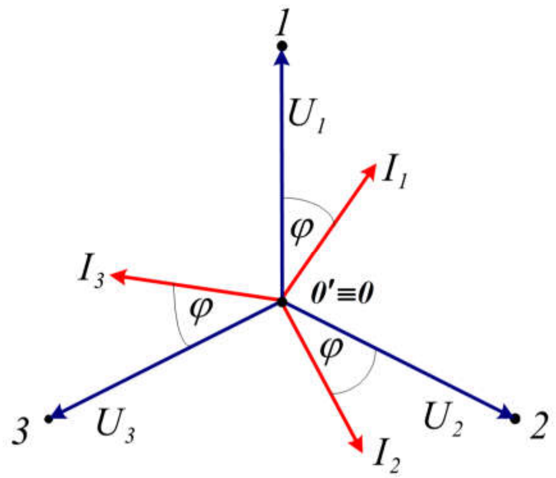
Fazni pomaci između struja zadržavaju međusobni odnos od 120^0 kao što je to slučaj s faznim naponima. Zbroj struja jednak je nuli:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 . \qquad (9\text{-}27)$$

Nulti vod u razmatranom slučaju nije potreban, jer bi i u slučaju postojanja nultog voda sve navedene veličine zadržale iste vrijednosti.

Dakle, kod simetričnog trošila, kao što je primjerice trofazni motor, nema ni potrebe za spajanjem nultog voda, jer struja ne teče kroz nulti vod. Međutim, na mrežu je uvijek uključeno više različitih trošila, pa je globalno gledano sustav uvijek nesimetričan.

Fazorski dijagram za simetrično trošilo dan je na *Slici 9.16*.



Slika 9.16 – Fazorski dijagram simetričnoga trofaznog trošila

Djelatne snage u fazama simetričnog trošila su jednake: $P_1 = P_2 = P_3 = P$, pa je ukupna djelatna snaga zbroj triju faznih snaga:

$$P_{uk} = 3P = 3U_f I_f \cos\varphi = 3\frac{U_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi . \qquad (9\text{-}28)$$

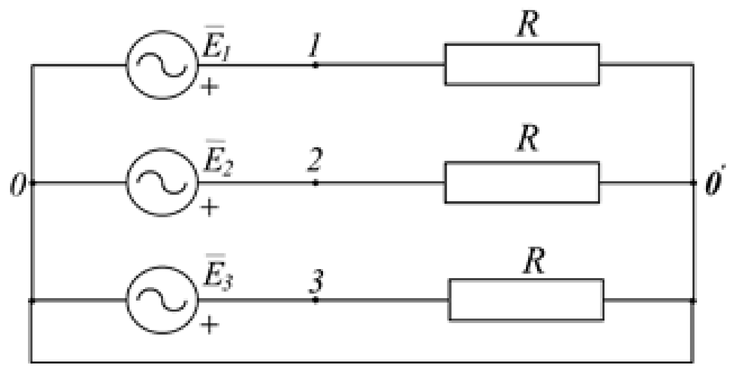
Jalova i prividna snaga dane su izrazom:

$$Q_{uk} = 3Q = 3U_f I_f \sin\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi$$

$$S_{uk} = 3S = 3U_f I_f = \sqrt{3} U_L I_L \,. \qquad (9\text{-}29)$$

9.3.3. Poremećeni trofazni zvijezda spojevi

U trofaznom sustavu mogu se dogoditi slučajni poremećaji ili kvarovi koji uzrokuju promjenu prijma snage na trošilu P u odnosu na izvornu (početnu) snagu P_o. Pokazat ćemo to na nekoliko primjera neregularnih uvjeta rada simetričnog trofaznog trošila s djelatnim otporima R ($\cos\varphi = 1$). Razmatrat ćemo što se događa kada se pojave poremećaji u odnosu na izvornu shemu prema *Slici 9.17*.



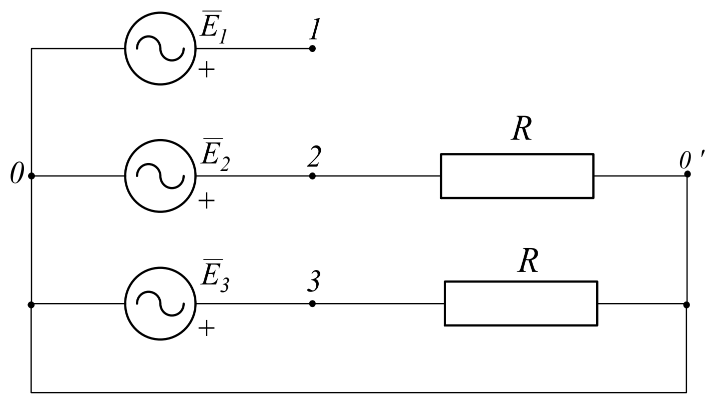
Slika 9.17 – Simetrično trofazno trošilo s djelatnim otporima (spoj u zvijezdu)

Ukupna djelatna snaga u normalnim uvjetima, tj. izvorna (početna) snaga, jest:

$$P_0 = 3U_f I_f = 3\frac{U_f^2}{R} = 3I_f^2 R \,. \qquad (9\text{-}30)$$

<u>Primjeri poremećenih spojeva:</u>

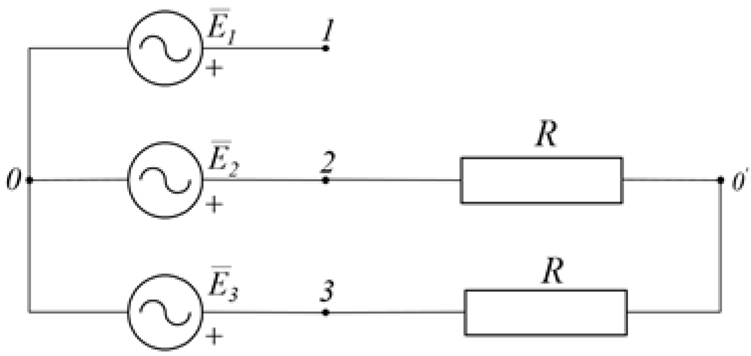
➢*Ispad (prekid) jednoga vanjskog vodiča ili jedne faze trošila – Slika 9.18*



Slika 9.18 – Ispad (prekid) jednoga vanjskog vodiča ili jedne faze trošila

Snaga se predaje u dvije faze, koje su ostale u nepromijenjenim uvjetima napona i struja: $P = 2U_f I_f = \frac{2}{3} P_0$.

➢*Ispad jednoga vanjskog vodiča ili jedne faze i nultog vodiča – Slika 9.19*



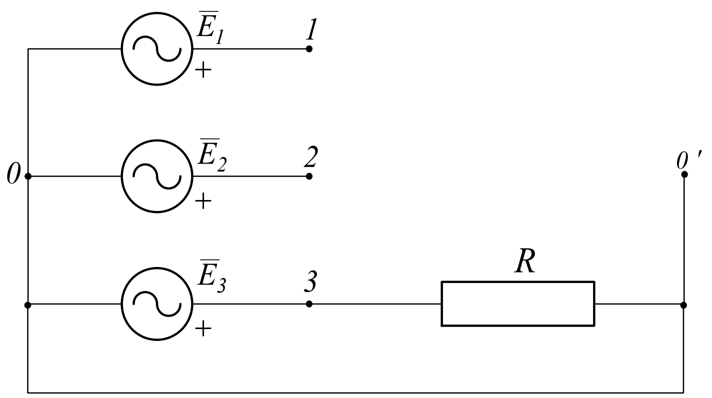
Slika 9.19 – Ispad jednoga vanjskog vodiča ili jedne faze i nultog vodiča

Zbog prekida jedne faze na ostale dvije faze rasporedi se po polovica linijskog napona, pa trošilo radi na 86 % nominalnog napona. Dakle, impedancije u preostalim dvjema fazama u serijskom su spoju i priključene su na linijski napon, pa je:

$$P = \frac{U_L^2}{2R} = \frac{3U_f^2}{2R} = \frac{1}{2} P_0 .$$

Zadatak: Nacrtajte pripadni fazorski dijagram napona i struja. Iz dijagrama izračunajte napon na mjestu prekida $U_{10'}$.

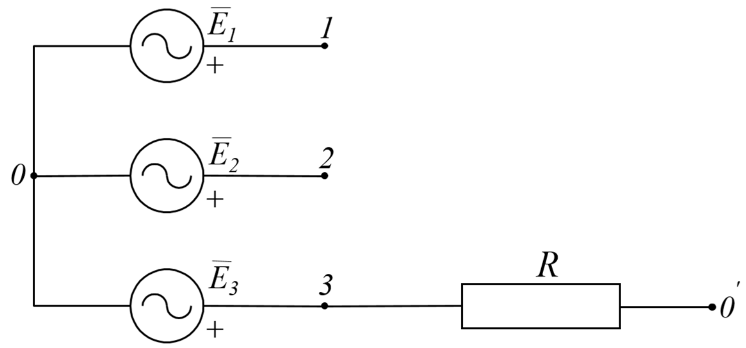
➢*Ispad dvaju vanjskih vodiča ili dvije faze – Slika 9.20*



Slika 9.20 – Ispad dvaju vanjskih vodiča ili dvije faze

Snaga se predaje jedinoj preostaloj fazi, koja je ostala u nepromijenjenim uvjetima napona i struja: $P = U_f I_f = \frac{1}{3} P_0$.

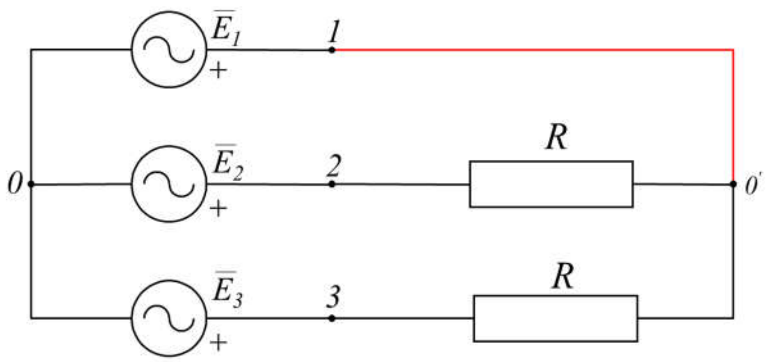
➢*Ispad dvaju vanjskih vodiča ili dvije faze i nultog vodiča – Slika 9.21*



Slika 9.21 – Ispad dvaju vanjskih vodiča ili dvije faze i nultog vodiča

Struja ne teče kroz faze trošila i ne predaje se snaga: $P = 0$.

➢*Kratki spoj u jednoj fazi u sustavu bez nultog vodiča – Slika 9.22*



Slika 9.22 – Kratki spoj u jednoj fazi u sustavu bez nultog vodiča

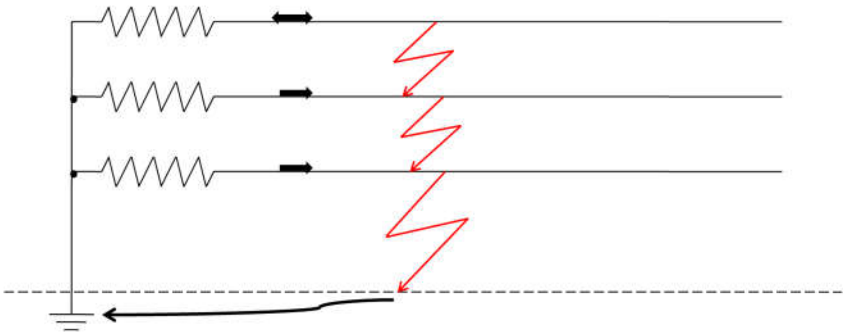
Preostale dvije faze priključene su na linijski napon, tj. trošilo radi na 173 % svog nominalnog napona. Predana snaga je $P = \frac{2U_L^2}{R} = \frac{6U_f^2}{R} = 2P_0$.

<u>Zadatak</u>: Nacrtajte pripadni fazorski dijagram napona. Koliki je napon nesimetrije i fazne struje?

Iz gornjih se primjera vidi kako trošila u fazama koje ostaju uključene rade u normalnim uvjetima, ako postoji neutralni vodič. Kod poremećenih uvjeta na simetričnom trošilu mijenja se predana snaga, ali trošila ostaju u nominalnim uvjetima. Problemi mogu nastati u slučaju prekida nultog voda i nesimetričnog opterećenja po fazama. Suma faznih struja mora biti jednaka nuli. Stoga se zbog različitih struja i različitih impedancija po fazama moraju mijenjati i fazni naponi. Ti naponi mogu se znatno razlikovati od faznih napona generatora, odnosno nazivnih napona na kojima trošila rade u normalnim uvjetima. Očito bi u ovakvim slučajevima došlo do kvarova ili uništavanja sklopova i uređaja, što razvidno upućuje na neophodnost postojanja nultog voda. Stoga se uglavnom sve razvodne trofazne mreže izvode s nultim vodom.

Primjer – kvarovi prijenosne mreže prema broju faza obuhvaćenih kvarom (*Slika 9.23*):

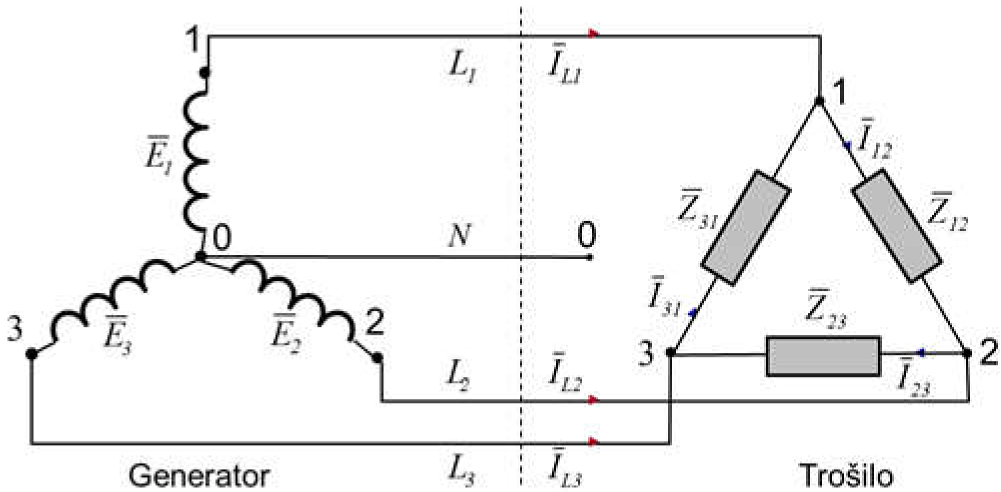
- međufazni KS (dvopolni KS (K2), tropolni (K3))
- dozemni KS (K1, K2Z)



Slika 9.23 – Vrste kvarova u trofaznoj prijenosnoj mreži

9.4. Trošilo u trokut spoju

Trofazno trošilo spojeno u trokut i priključeno na simetrični trofazni generator u zvijezda spoju prikazano je na *Slici 9.24*.



Slika 9.24 – Trošilo u trokut spoju

U takvu sustavu svaka faza trošila spojena je na odgovarajući linijski napon generatora (U_{12}, U_{23}, U_{31}) koji je istovremeno i fazni napon trošila u trokut spoju *($U_L = U_f$)*.

9.4.1. Nesimetrično trošilo

Fazne struje su:

$$\bar{I}_{12}=\frac{\bar{U}_{12}}{\bar{Z}_{12}} \quad , \quad \bar{I}_{23}=\frac{\bar{U}_{23}}{\bar{Z}_{23}} \quad , \quad \bar{I}_{31}=\frac{\bar{U}_{31}}{\bar{Z}_{31}} \quad . \qquad (9\text{-}31)$$

Zbroj faznih struja ne mora biti jednak nuli, jer mogu kružiti unutar trokuta.

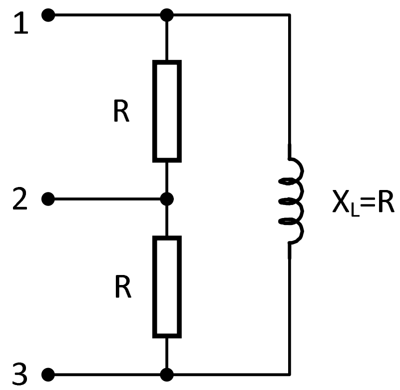
Linijske struje I_{L1}, I_{L2}, I_{L3} dobiju se iz jednadžbi čvorova *1*, *2* i *3*. Te su struje za nesimetrično trošilo različite po iznosu i/ili fazi:

$$\bar{I}_{L1}=\bar{I}_{12}-\bar{I}_{31} \; , \quad \bar{I}_{L2}=\bar{I}_{23}-\bar{I}_{12} \; , \quad \bar{I}_{L3}=\bar{I}_{31}-\bar{I}_{23} . \qquad (9\text{-}32)$$

Pri tomu je $\bar{I}_{L1}+\bar{I}_{L2}+\bar{I}_{L3}=0$.

Ako samo faza jedne impedancije naruši simetriju trošila, odraz na iznose i faze linijskih struja vrlo je značajan. Provjerite tvrdnju na sljedećem zadatku!

<u>Zadatak</u>: Za nesimetrično trošilo u trokut spoju prema slici nacrtajte fazorski dijagram napona te faznih i linijskih struja. Uočite da je zbroj faznih struja različit od nule, a zbroj linijskih struja jednak nuli.



Ukupna djelatna snaga nesimetričnog trošila jednaka je sumi djelatnih snaga u svakoj fazi trošila:

$$P_{uk}=P_1+P_2+P_3 . \qquad (9\text{-}33)$$

Isto vrijedi i za jalovu, odnosno prividnu snagu:

$$Q_{uk}=Q_1+Q_2+Q_3$$

$$S_{uk}=S_1+S_2+S_3 . \qquad (9\text{-}34)$$

9.4.2. Simetrično trošilo

Simetrično u trokut spojeno trošilo ima impedancije u svim fazama jednake po iznosu i po fazi: $\bar{Z}_{12}=\bar{Z}_{23}=\bar{Z}_{31}=\bar{Z}_f$. Budući da su sve faze ravnomjerno opterećene, fazne će struje imati jednake vrijednosti i u odnosu na pripadne linijske napone bit će pomaknute za isti kut φ određen karakterom impedancije:

$$I_{12}=I_{23}=I_{31}=\frac{U_L}{Z_f} \qquad (9\text{-}35)$$

$$\varphi=arccos\frac{R}{Z} . \qquad (9\text{-}36)$$

Zbog simetrije trošila međusobni fazni pomak struja je 120°, a suma im je jednaka nuli. Linijske struje tvore također simetričan sustav struja. Odnos faznih i linijskih struja pokazan je na primjeru generatora u trokut spoju: $I_L = \sqrt{3} I_f$.

Linijske struje pomaknute su u fazi za 30° u odnosu na odgovarajuće fazne struje.

Ukupna djelatna snaga simetričnog trošila u trokut spoju je zbroj triju jednakih faznih snaga:

$$P_{uk} = 3P = 3U_f I_f \cos\varphi = 3U_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi . \tag{9-37}$$

Vidi se da je ukupna djelatna snaga bez obzira na vrstu spoja (trokut ili zvijezda) dana istom relacijom. U analizi trofaznih trošila i uređaja bolje je raditi s faznim vrijednostima. Međutim, kada je riječ o mjerenju, prikladnije su linijske vrijednosti jer su dostupne na bilo kojoj poziciji u trofaznom sustavu.

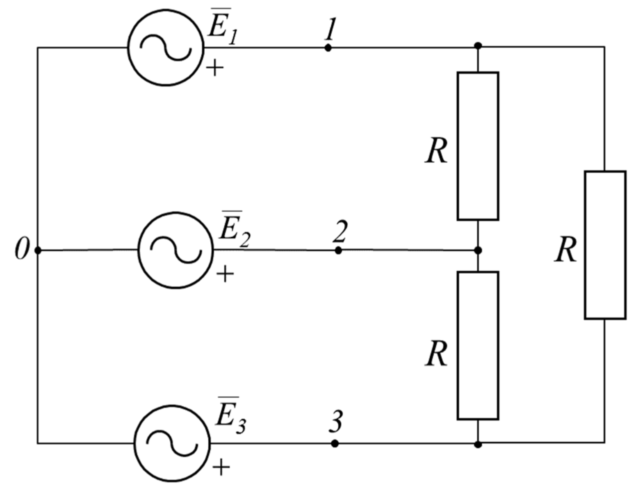
Analogno vrijedi i za jalovu i prividnu snagu:

$$\begin{aligned} Q_{uk} &= 3Q = 3U_f I_f \sin\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi \\ S_{uk} &= 3S = 3U_f I_f = \sqrt{3} U_L I_L . \end{aligned} \tag{9-38}$$

9.4.3. Poremećeni trofazni trokut spojevi

Ako nastupe slučajni poremećaji u sustavu trošila ili u linijskim vodovima, promijenit će se snaga na trošilu P u odnosu na izvornu (početnu) snagu P_o.

Razmatrat ćemo primjere neregularnih uvjeta rada simetričnoga trofaznog trošila s djelatnim otporima R ($\cos\varphi = 1$) u odnosu na izvornu shemu prema *Slici 9.25*.



Slika 9.25 – Simetrično trofazno trošilo s djelatnim otporima (spoj u trokut)

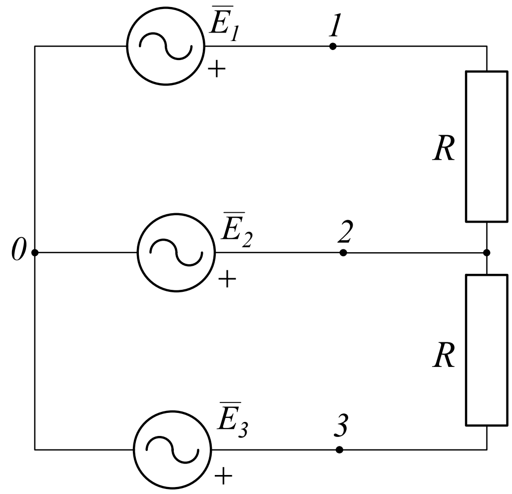
Ukupna djelatna snaga u normalnim uvjetima je:

$$P_0 = 3U_f I_f = 3\frac{U_f^2}{R} = 3I_f^2 R . \tag{9-39}$$

<u>Napomena</u>: Fazni naponi trošila jednaki su linijskim naponima generatora.

Primjeri poremećenih spojeva:

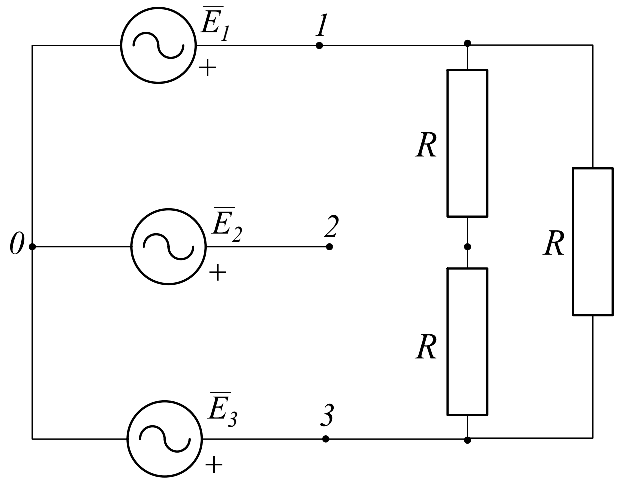
- *Ispad (prekid) jedne faze trošila – Slika 9.26*



Slika 9.26 – Ispad (prekid) jedne faze trošila

Snaga se predaje u dvije faze, koje su ostale u nepromijenjenim uvjetima napona i struja: $P = 2U_f I_f = \frac{2}{3} P_0$.

- *Ispad jednoga vanjskog (linijskog) vodiča – Slika 9.27*

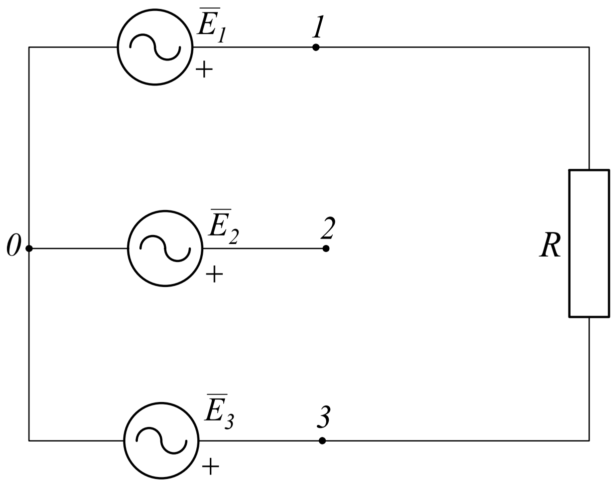


Slika 9.27 – Ispad jednoga vanjskog (linijskog) vodiča

Stanje se jedne faze ne mijenja, a u preostalim dvjema fazama otpori su u serijskom spoju. Na otpore u serijskom spoju otpada po pola linijskog napona generatora, odnosno faznog napona trošila, pa je $P = \frac{U_f^2}{R} + \frac{U_f^2}{2R} = \frac{3U_f^2}{2R} = \frac{1}{2} P_0$.

- *Ispad dviju faza – Slika 9.28*

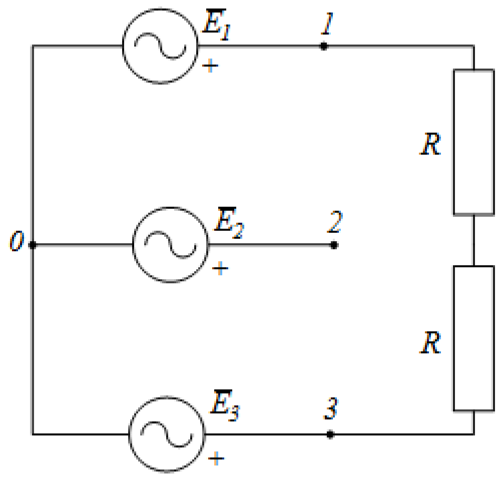
Snaga se predaje jedinoj preostaloj fazi, koja je ostala u nepromijenjenim uvjetima napona i struja: $P = U_f I_f = \frac{1}{3} P_0$.



Slika 9.28 – Ispad dviju faza

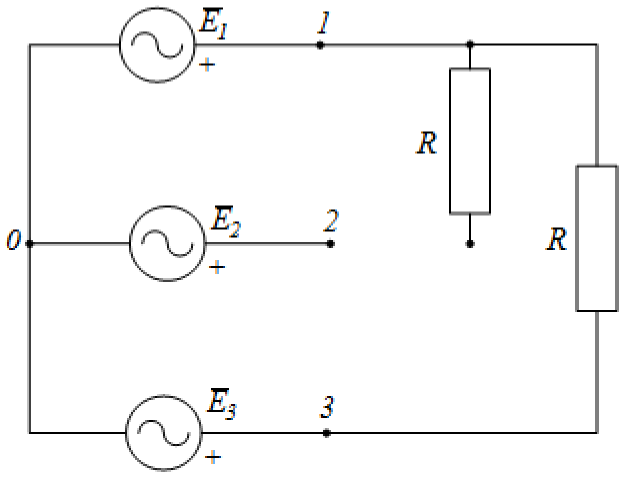
➢ *Ispad jednoga vanjskog (linijskog) vodiča i nasuprotne faze – Slika 9.29*

Otpori u dvjema preostalim fazama spojeni su serijski i na njima je fazni napon, pa je snaga: $P = \dfrac{U_f^2}{2R} = \dfrac{1}{6} P_0$.



Slika 9.29 – Ispad jednoga vanjskog (linijskog) vodiča i nasuprotne faze

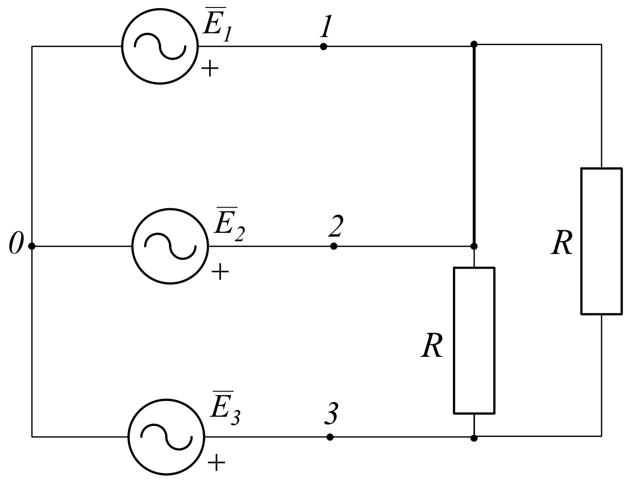
➢*Ispad jednoga vanjskog (linijskog) vodiča i susjedne faze – Slika 9.30*



Slika 9.30 – Ispad jednoga vanjskog (linijskog) vodiča i susjedne faze

U ovakvim uvjetima iz sustava ispada i druga faza vezana na čvor prekinutog linijskog vodiča, pa se snaga predaje jedinoj preostaloj fazi, koja je ostala u nepromijenjenim uvjetima napona i struja: $P = U_f I_f = \frac{1}{3} P_0$.

➢*Kratki spoj u jednom faznom vodu – Slika 9.31*



Slika 9.31 – Kratki spoj u jednom faznom vodu

Otpori u ostalim dvjema fazama spojeni su paralelno, pa je $P = \frac{U_f^2}{\frac{R}{2}} = \frac{2U_f^2}{R} = \frac{2}{3} P_0$.

9.5. Analiza odnosa veličina trofaznoga sustava i ekonomski aspekti trofaznog prijenosa snage

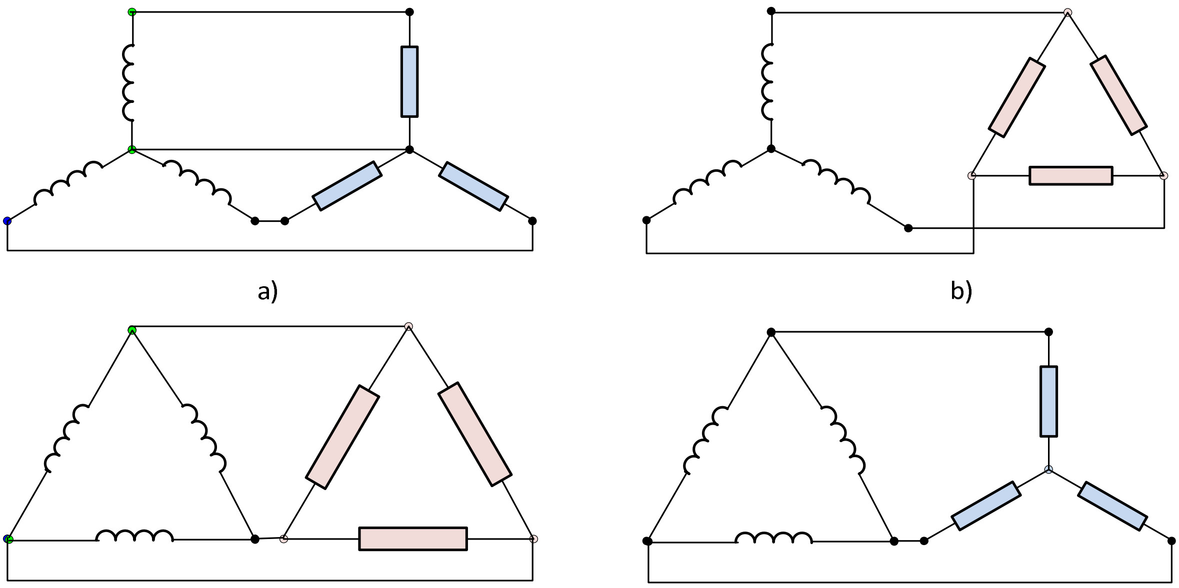
Zvijezda i trokut spojevi imaju široku primjenu u praksi i u „zdravom“ energetskom sustavu su u približnoj ravnoteži. U kućanstvima su pretežno zastupljena jednofazna trošila, ali se opskrba isto izvodi s četverožičnim trofaznim vodovima. Trošila su približno jednako raspoređena po svakom linijskom vodu, tako da globalno predstavljaju više-manje simetrično trošilo spojeno u zvijezdu. Rezultirajuća struja u neutralnom vodiču stoga je približno jednaka nuli, iako su za svako pojedino trošilo linijska struja i struja u nultom vodu naravno jednake. Potrošnja energije u industriji temelji se na trošilima velikih snaga, kao što su primjerice izmjenični motori. Takva trošila projektirana su kao trofazna, zbog svojstava trofazne struje u pogledu konstantne trenutačne snage i rotirajućeg magnetskog polja, o čemu će poslije biti riječi. Osim toga, značajan broj jednofaznih trošila velike snage nepovoljno bi se odrazio na uravnoteženost energetskog sustava.

Spojevi generatora i trošila

Budući da generator i/ili trošilo mogu biti spojeni u zvijezdu i/ili trokut, moguća su četiri različita spoja generatora na trošilo, kao na *Slici 9.32*:

- zvijezda-zvijezda (s nultim vodom i bez njega) – sva trošila su na faznom naponu za sustav simetričnih trošila bez nultog voda. Za sustav nesimetričnih trošila potreban je nulti vod da se na fazama zadrže simetrični fazni naponi. U protivnom bi svaki par trošila bio spojen na linijski napon, koji bi se rasporedio u ovisnosti o njihovim impedancijama. Stoga je nulti vodič neophodan i na njega se ne smije priključiti nikakav osigurač;

- zvijezda-trokut – na svaku fazu trošila priključen je linijski napon, neovisno o impedanciji trošila;
- trokut-trokut – fazni napon priključen je na impedancije trošila, neovisno o njihovu iznosu;
- trokut-zvijezda – napon na fazama trošila je $U_f/\sqrt{3}$.



Slika 9.32 – Vrste spojeva generatora i trošila

Usporedba spoja u zvijezdu i trokut s motrišta struja i snaga

Sažet prikaz odnosa linijskih i faznih napona i struja spoja u zvijezdu i u trokut:

$$\begin{aligned} &Zvijezda: \quad U_{Lz} = \sqrt{3}U_{fz} \quad , \quad I_{Lz} = I_{fz} \\ &Trokut: \quad U_{L\Delta} = U_{f\Delta} \quad , \quad I_{L\Delta} = \sqrt{3}I_{f\Delta} \end{aligned} .$$

Kada se općenito govori o naponima i strujama u trofaznome sustavu, podrazumijevaju se obično linijske veličine. Naime, radi se o uvijek mjerljivim vrijednostima, jer linijski vodovi moraju biti pristupačni. To nije slučaj s faznim vrijednostima, jer vrsta spoja izvora ili trošila može biti nepoznata. Iako su linijski napon i struja temeljne vrijednosti višefaznih sustava, njihov međusobni omjer (U_L/I_L) ne predstavlja niti jednu stvarnu impedanciju, neovisno o vrsti spoja. U zvijezda spoju razlikuje se napon, a u trokut spoju struja. Zbog toga je u analizi svojstava nekog trošila ili uređaja povoljnije raditi s faznim veličinama. Primjerice, impedancija faze trošila uvijek je U_f/I_f, neovisno o vrsti spoja.

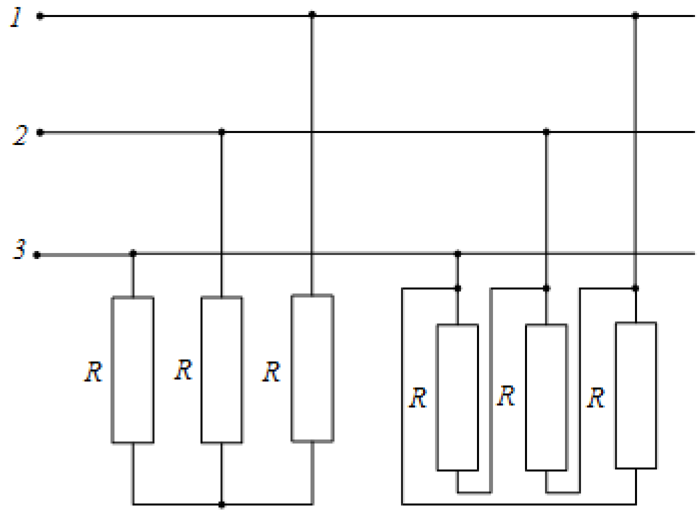
Od interesa je usporedba linijskih struja za trošilo jednakih impedancija Z u svim trima fazama zvijezde, odnosno trokuta:

$$\text{zvijezda:} \quad I_{Lz} = I_{fz} = \frac{U_f}{Z} = \frac{U_L}{\sqrt{3}Z} = \frac{\sqrt{3}U_L}{3Z}$$

$$\text{trokut:} \quad I_{L\Delta} = \sqrt{3}I_{f\Delta} = \sqrt{3}\frac{U_L}{Z} = 3I_{Lz} .$$

Dakle, tri jednake impedancije *Z* spojene u trokut uzimaju trostruko veću struju nego kad su te iste impedancije spojene u zvijezdu. Također se može zaključiti kako je spoj u zvijezdu triju jednakih impedancija *Z* ekvivalentan spoju u trokut triju jednakih impedancija *3 Z*, što je u skladu s poznatim zvijezda-trokut pretvorbama.

U svrhu usporedbe djelatnih snaga razmatrat ćemo primjer dvaju simetričnih trošila jednakih otpora *R* spojenih u zvijezdu, odnosno u trokut, i priključenih na jednake linijske napone, kao na *Slici 9.33*.



Slika 9.33 – Simetrična trošila (zvijezda i trokut) spojena na mrežu linijskih napona

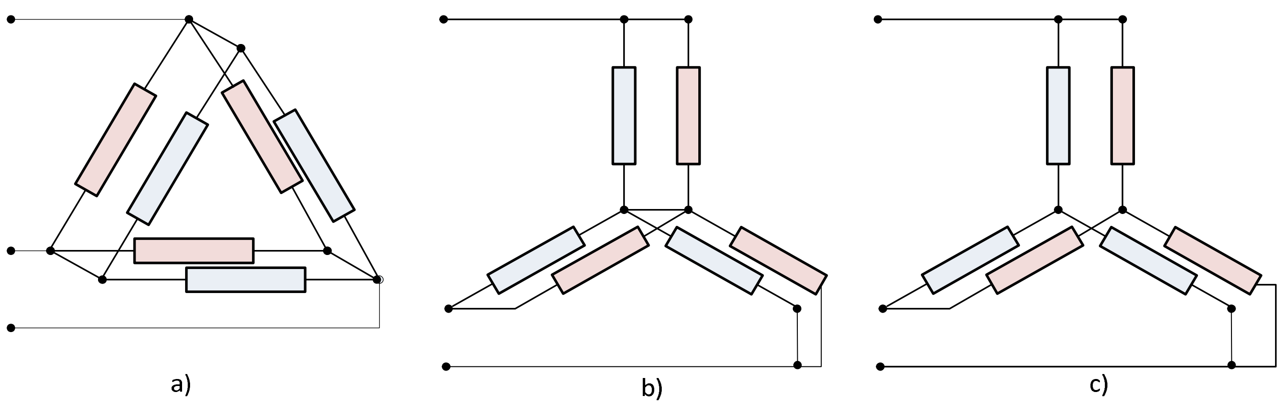
Djelatne su im snage: $P_z = 3\frac{U_f^2}{R}$, $P_\Delta = 3\frac{U_L^2}{R} = 9\frac{U_f^2}{R}$,

pa je omjer snaga $\frac{P_z}{P_\Delta} = \frac{1}{3}$. Dakle, pri jednakim otporima u fazama trošila, spoj u trokut uzima trostruko veću snagu od spoja u zvijezdu.

Paralelni spojevi trofaznih trošila

U trofaznim se sustavima mogu primijeniti i poznate relacije za određivanje nadomjesnih paralelnih spojeva različitih pasivnih trošila spojenih na iste linijske vodove. Isto vrijedi i za paralelno spajanje izvora uz uvjet jednakosti frekvencija, linijskih napona i faza.

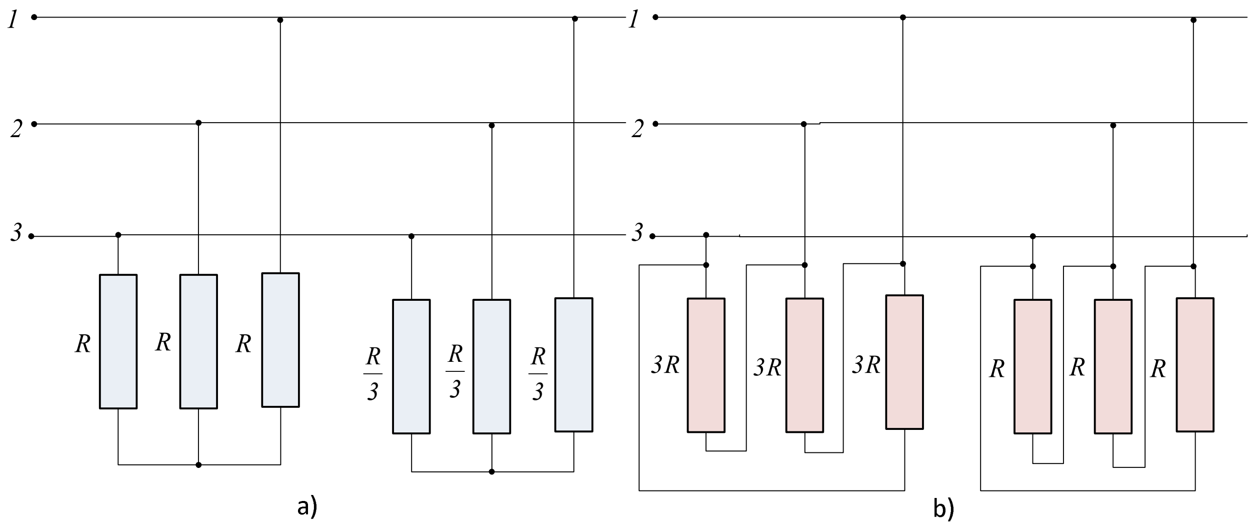
Primjeri paralelnih spojeva prikazani su na *Slici 9.34*.



Slika 9.34 – Paralelni spojevi trofaznih trošila

Za spoj u trokut (*a*) i spoj u zvijezdu sa zajedničkim zvjezdištem (*b*) određuje se nadomjesna impedancija za svaku fazu kao paralelni spoj pripadnih dvaju otpora u istoj fazi, neovisno o tomu jesu li trošila simetrična ili nesimetrična. Ako zvjezdišta nisu spojena (*c*), a trošila su simetrična, vrijedi isto što i za (*b*). U protivnom se pretvorbom svake zvijezde u trokut dobije sustav kao na slici (*a*).

Ako je jedan trokut, a drugi zvijezda spoj, impedancije po fazama dobiju se pretvorbom u jedan nadomjesni trokut ili jednu zvijezdu. Za prethodni primjer na kojem su analizirani odnosi snaga dobiju se dvije kombinacije prema *Slici 9.35*.



Slika 9.35 – Odnosi otpora kod spojeva u zvijezdu i trokut

a) Otpor po fazi trošila je $R_z = R \,||\, \frac{R}{3} = \frac{R}{4}$, a pretvorbom u nadomjesni trokut dobije se $R_\Delta = 3R_z = \frac{3}{4}R$.

b) Do istog rezultata dođe se izravno određivanjem nadomjesnog otpora faze trokuta: $R_\Delta = R \,||\, 3R = \frac{3}{4}R$.

<u>Ekonomičnost trofaznog prijenosa električne energije</u>: U uvodu je spomenuta ekonomičnost prijenosa energije preko trofaznog sustava koja se očitava u manjim gubitcima i uštedi materijala za vodove. Kako bismo obrazložili tu tvrdnju, usporedit ćemo sustave trofaznog tročičnog prijenosnog voda simetričnih linijskih napona i struja $U_{\equiv}$ i $I_{\equiv}$ te jednofaznog dvožičnog prijenosnog voda napona U_{-} i struje I_{-}. Radi uočavanja karakteristika prijenosa pretpostavimo kako je potrebno prenijeti jednaku snagu (VA) u oba sustava. Tada je:

$$U_{-}I_{-} = \sqrt{3}U_{\equiv}I_{\equiv} \; . \tag{9-40}$$

Ako se uzmu jednaki naponi između vodova u oba slučaja $U_{\equiv} = U_{-}$, onda je $I_{-} = \sqrt{3}I_{\equiv}$. Neka su otpori vodiča po jedinici duljine $R_{\equiv}$ i R_{-}. Uz pretpostavku jednakih ukupnih toplinskih gubitaka snage u oba sustava dobije se:

$$2I_{-}^2R_{-} = 3I_{\equiv}^2R_{\equiv} = I_{-}^2R_{\equiv} \quad \Rightarrow \quad R_{\equiv} = 2R_{-} \; . \tag{9-41}$$

Budući da su otpori vodiča obrnuto proporcionalni pripadnim površinama poprečnog presjeka $S_{\equiv}$ i S_{-}, vrijedi: $S_{-} = 2S_{\equiv}$. Izlazi kako je omjer ukupnih volumena materijala vodiča po jedinici duljine ($V/l = S$) u oba sustava:

$$\frac{3S_{\equiv}}{2S_{-}} = \frac{3}{4} = 0{,}75 . \qquad (9\text{-}42)$$

To bi značilo da u trofaznom sustavu količina potrebnog materijala (bakra), uz pretpostavljene uvjete jednakih toplinskih gubitaka i prenesenih snaga, iznosi 75 % količine materijala korištenog u jednofaznom sustavu. U četverožičnom trofaznom sustavu ta bi se ušteda reducirala, jer je potrebno provesti neutralni vod. Međutim, ona ipak postoji, jer nultim vodom teku samo male struje nesimetrije, pa on može biti tanji (manji volumen po jedinici duljine) od linijskih vodova.

S druge strane, možemo krenuti od pretpostavke kako je u oba sustava korištena ista količina materijala:

$$2S_{-} = 3S_{\equiv} \quad \Rightarrow \quad R_{\equiv} = \frac{3}{2}R_{-} . \qquad (9\text{-}43)$$

Za jednaku prenesenu snagu ($I_{-} = \sqrt{3}I_{\equiv}$) ukupni gubitci u trofaznom sustavu su:

$$3I_{\equiv}^2 R_{\equiv} = I_{-}^2 R_{\equiv} = \frac{3}{2} I_{-}^2 R_{-} , \qquad (9\text{-}44)$$

a u jednofaznom $2I_{-}^2R_{-}$, pa je njihov omjer ponovno 0,75. Dakle, smanjenje toplinskih gubitaka u trofaznom sustavu, uz jednaki trošak na materijalu kao i u jednofaznom sustavu i istu količinu prenesene snage, iznosi 25 %. Kada bi se usporedba vršila pri odgovarajućim faznim naponima, prednost trofaznog sustava bila bi još izraženija.

9.6. Snaga i mjerenje u trofaznom sustavu

U prethodnom poglavlju dane su temeljne relacije za proračun snage u simetričnom i nesimetričnom sustavu za spoj trošila u zvijezdu i trokut te proračun snaga za tipične vrste poremećaja u sustavu. U sljedećim razmatranjima analizirat će se posebno trenutačna snaga u simetričnom sustavu, kao bitna karakteristika trofaznih sustava, te metode mjerenja snage u simetričnim i nesimetričnim trofaznim sustavima.

9.6.1. Određivanje trenutačne snage simetričnoga trofaznog trošila

<u>Tvrdnja</u>: Članovi s dvostrukom frekvencijom u izrazu za trenutačnu snagu iščezavaju, tj. trenutačna vrijednost djelatne snage simetričnog trošila nema titrajni karakter, već je konstantna.

<u>Dokaz</u>:

Razmatrajmo primjerice simetrično induktivno trošilo spojeno u zvijezdu za koje vrijedi: $U_{m1}=U_{m2}=U_{m3}=U_m$, $I_{m1}=I_{m2}=I_{m3}=I_m$.

Trenutačne vrijednosti faznih struja i napona su:

$$u_1 = U_m \sin\omega t \quad , \quad u_2 = U_m \sin\left(\omega t - 120^0\right) \quad , \quad u_3 = U_m \sin\left(\omega t + 120^0\right)$$

$$i_1 = I_m \sin\left(\omega t - \varphi\right) \quad , \quad i_2 = I_m \sin\left(\omega t - 120^0 - \varphi\right) \quad , \quad i_3 = I_m \sin\left(\omega t + 120^0 - \varphi\right) . \qquad (9\text{-}45)$$

Snaga u prvoj fazi je:

$$p_1 = u_1 i_1 = U_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = 2UI \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi). \qquad (9\text{-}46)$$

Uporabom trigonometrijske transformacije:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \qquad (9\text{-}47)$$

dobije se:

$$p_1 = UI\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right]. \qquad (9\text{-}48)$$

Analogno se odrede snage u preostalim dvjema fazama:

$$p_2 = UI\left[\cos\varphi - \cos\left(2\omega t - 240^0 - \varphi\right)\right]$$

$$p_2 = UI\left[\cos\varphi - \cos\left(2\omega t - 240^0 - \varphi\right)\right]. \qquad (9\text{-}49)$$

Ukupna trenutačna snaga je suma trenutačnih faznih snaga: $p = p_1 + p_2 + p_3$,
odnosno:

$$p = UI\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi - \cos\left(2\omega t - 240^0 - \varphi\right) + \cos\varphi - \cos\left(2\omega t + 240^0 - \varphi\right)\right].$$
(9-50)

Razvojem kosinusa razlike u članovima koji sadržavaju dvostruku frekvenciju pokazuje se kako je doprinos tih članova jednak nuli. Budući da su U i I efektivne vrijednosti faznih napona i struja, ukupna trenutačna snaga je:

$$p = 3U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi = konst. \qquad (9\text{-}51)$$

<u>Zaključak</u>: Trenutačna snaga simetričnoga trofaznog trošila bez obzira na vrstu spoja konstantna je, odnosno vremenski neovisna i jednaka izrazu za djelatnu snagu simetričnoga trofaznog trošila.

Jednofazni motor dobiva snagu koja titra u ritmu dvostruke frekvencije što stvara šum i mehaničke vibracije na osovini motora. S druge strane, ako je trofazno trošilo primjerice indukcijski motor, onda će njegova snaga, pa tako i zakretni moment na osovini, biti konstantni. To je bitna prednost trofaznih sustava. Isto se može zaključiti i za generatore.

9.6.2. Mjerenje snage

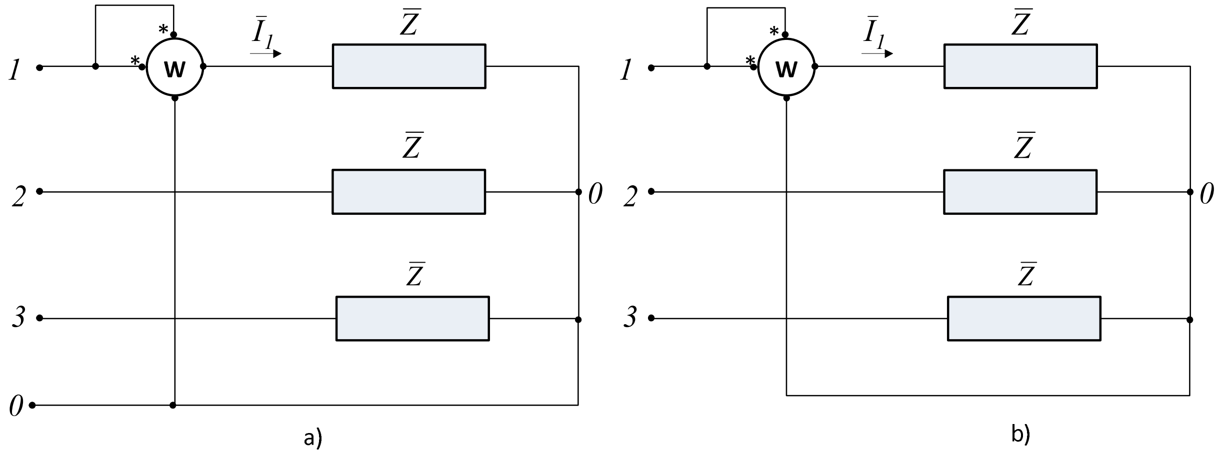
Vatmetar je instrument koji udružuje funkcije ampermetra i voltmetra. Kalibriran je za izravno očitavanje srednje izmjenične snage. Sadrži dva svitka: strujni i naponski. Svitci su smješteni tako da je otklon instrumenta proporcionalan s $UI\cos\varphi$. Pri tomu je U – efektivna vrijednost napona na stezaljkama naponskog svitka koji se vezuje paralelno mjerenom trošilu, I – efektivna vrijednost struje kroz strujni svitak koji se spaja u seriju s trošilom, φ – kut između fazora napona i struje. Polaritet naponskog (pozitivna stezaljka) i strujnog (ulazna stezaljka) svitka označuje se točkom ili zvjezdicom: • ili $*$.

Simetrično trošilo

<u>Spoj u zvijezdu</u>: Za mjerenje snage dovoljan je jedan vatmetar, kao na *Slici 9.36*. Strujne stezaljke spajaju se serijski s jednim linijskim (faznim) vodičem, a naponske stezaljke između istog voda i nultog voda (a). Ako je sustav bez nultog voda, druga naponska stezaljka spaja se sa zvjezdištem trošila (b).

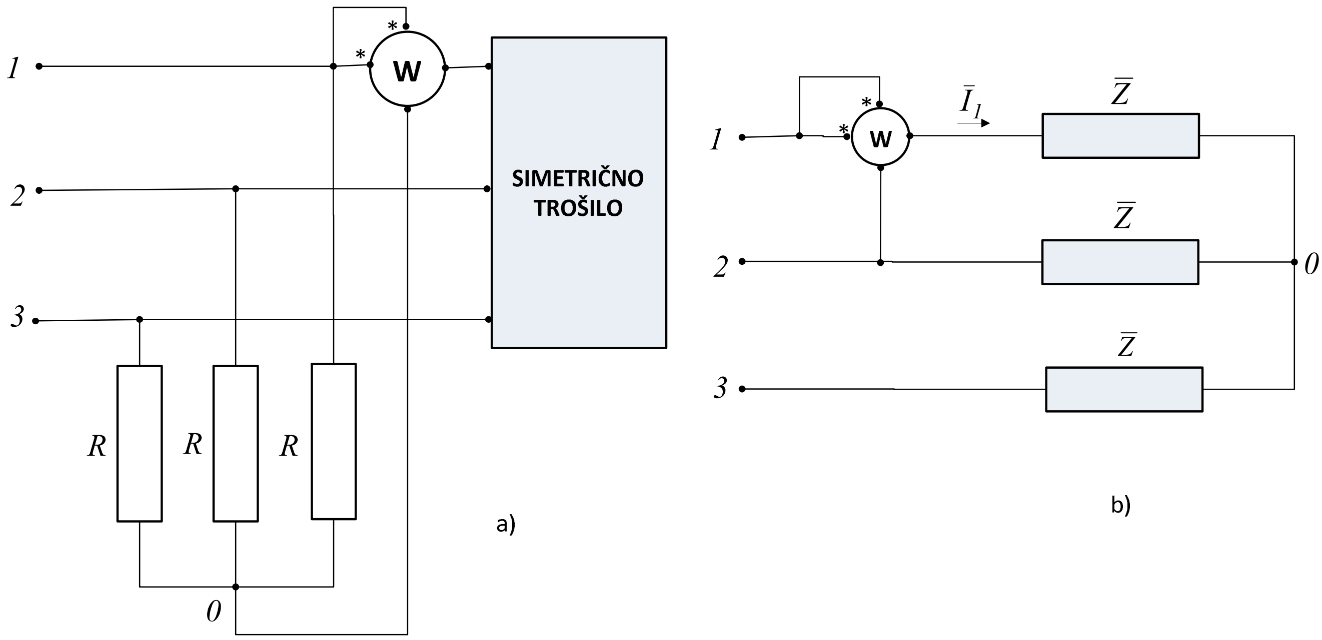
Pokazivanje vatmetra je: $P_W = Re\left(\overline{U}_1 \overline{I}_1^*\right) = U_f I_f \cos\varphi$, *(9-52)*

a ukupna djelatna snaga: $P_{uk} = 3P_W = 3U_f I_f \cos\varphi$. *(9-53)*



Slika 9.36 – Mjerenje djelatne snage simetričnog trošila – spoj u zvijezdu

Ako nema nultog voda ili je nulta točka trošila nepristupačna, može se mjerenje napona i snage izvesti i formiranjem tzv. umjetne (prividne) nule pomoću simetričnog zvijezda spoja triju jednakih otpornika R (*Slika 9.37.a)*). Druga naponska stezaljka vatmetra spaja se na umjetnu nulu. Ukupna snaga jednaka je $P_{uk} = 3P_W$.



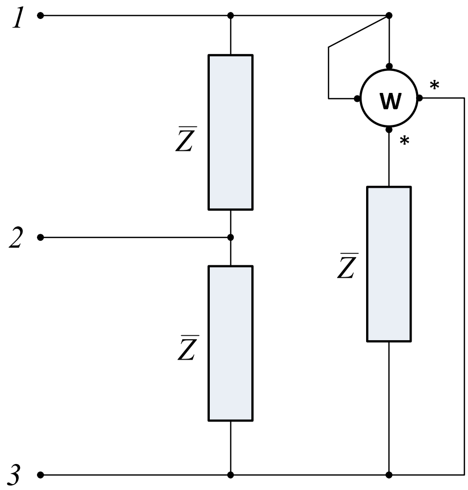
Slika 9.37 – Mjerenje u spoju s prividnom nulom i vatmetrom spojenim na linijski napon

Mjerenje se može vršiti i prema *Slici 9.37.b)*, spajanjem stezaljka vatmetra na linijski napon. Tada je:

$$P_W = Re\left(\overline{U}_{12} \overline{I}_1^*\right) = \sqrt{3} U_f I_f \cos\varphi, \quad (9\text{-}54)$$

pa je ukupna snaga $\sqrt{3}$ puta veća od očitanja vatmetra, tj. $P_{uk} = \sqrt{3} P_W$.

Spoj u trokut: Također je dovoljan jedan vatmetar. Strujne stezaljke spajaju se serijski s jednim faznim vodičem, a naponske stezaljke na krajeve istog faznog voda prema *Slici 9.38*.

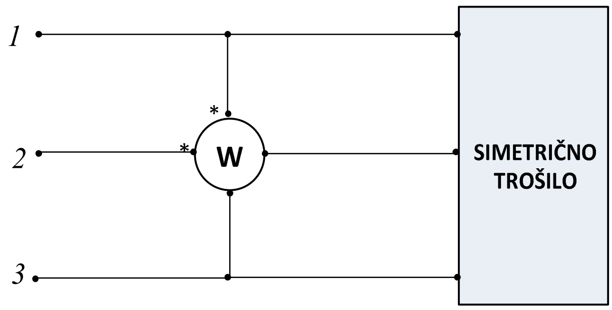


Slika 9.38 – Mjerenje djelatne snage simetričnog trošila – spoj u trokut

Vatmetar pokazuje: $P_W = Re\left(\overline{U}_{31} \overline{I}_{31}^*\right) = U_f I_f \cos\varphi$.

Ukupna djelatna snaga je $P_{uk} = 3P_W$.

Jalova snaga također se može odrediti uporabom jednog vatmetra čije su strujne stezaljke spojene na jedan linijski vod, a naponske između dvaju preostalih vodova, kao na *Slici 9.39*. Time se stvara dodatni fazni pomak napona od 90^0.



Slika 9.39 – Mjerenje jalove snage jednim vatmetrom

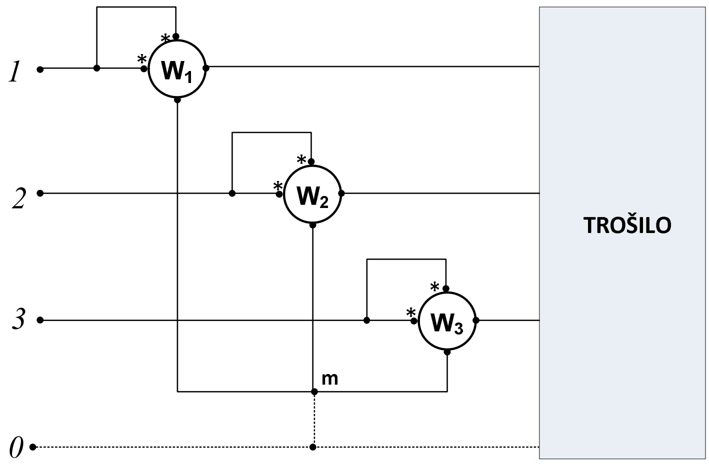
Očitanje vatmetra je:

$$P_w = Re(\overline{U}_{13} \cdot \overline{I}_2^*) = \cdots = \sqrt{3} U_f I_f \cos(90^0 - \varphi) = \sqrt{3} U_f I_f \sin\varphi, \qquad (9\text{-}55)$$

pa je ukupna jalova snaga: $Q_{uk} = \sqrt{3} P_W$.

Nesimetrično trošilo

Uporabom triju jednofaznih vatmetara za mjerenje djelatnih snaga svake pojedine faze može se dobiti ukupna djelatna snaga trofaznog sustava kao zbroj očitanja triju vatmetara. Spoj je prikladan za određivanje ukupne i pojedinačnih faznih snaga kada su izvor i trošilo u zvijezda spoju. Tada se strujni svitak spoji serijski s fazom trošila, a naponski paralelno na fazu trošila. U praksi ponekad nije moguće primijeniti gore navedeni način spajanja vatmetara. Razlog može biti nedostupnost nulte točke trošila ili su faze u trokut spoju. Ako je zvjezdište trošila nepristupačno, strujne stezaljke mogu se ispravno spojiti, a naponske ne mogu. S druge strane, kod trošila spojenih u trokut, kao što su trofazni rotacijski strojevi, pristupačne su samo tri vanjske stezaljke trošila. Naponske stezaljke mogu se spojiti ispravno, ali ne i strujne. Budući da je uvijek omogućen pristup linijskim vodovima, može se, trima vatmetrima spojenima prema slici *9.40*, odrediti ukupna snaga trošila spojenog u zvijezdu ili trokut, kao zbroj očitanih vrijednosti.



Slika 9.40 – Mjerenje djelatne snage nesimetričnog trošila trima vatmetrima

Temeljem očitanja vatmetara ukupna djelatna snaga je:

$$P_{uk} = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} = Re\ \left(\bar{U}_1\bar{I}_1^*\right) + Re\ \left(\bar{U}_2\bar{I}_2^*\right) + Re\ \left(\bar{U}_3\bar{I}_3^*\right), \qquad (9\text{-}56)$$

odnosno:

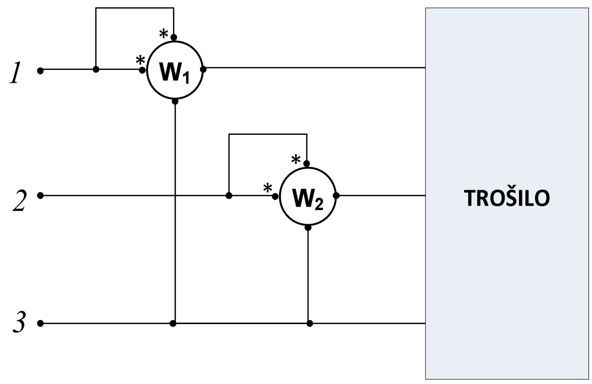
$$P_{uk} = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} = Re\ \left(\bar{U}_1\bar{I}_1^*\right) + Re\ \left(\bar{U}_2\bar{I}_2^*\right) + Re\ \left(\bar{U}_3\bar{I}_3^*\right). \qquad (9\text{-}57)$$

Ako je trošilo simetrično, vatmetri pokazuju jednake vrijednosti.

Mjerenje se može izvesti i bez spajanja zajedničkih stezaljka vatmetara na nulti vod, a i u sustavu bez nultog voda, jer sami vatmetri formiraju umjetnu nulu (vatmetri trebaju biti jednaki). Dakle, položaj zajedničke točke *m* je proizvoljan. Može se postaviti bilo gdje bez utjecaja na konačni rezultat – uvijek je suma očitanja jednaka ukupnoj snazi.

Ako točku *m* postavimo na linijski vodič (*3*), vatmetar W_3 pokazivat će nulu (nema razlike potencijala između naponskih stezaljka), što znači da je suvišan, odnosno nepotreban. Ukupnu snagu daje zbroj pokazivanja preostalih dvaju vatmetara, pa se mjerenje može obaviti samo dvama vatmetrima, kao na *Slici 9.41*. Strujni svitci spoje se na bilo koja dva linijska voda. Točka zajedničkog potencijala postavi se na preostalom linijskom vodu. Time je realiziran tzv. *Aronov spoj* odnosno *metoda dvaju vatmetara*.

Metoda se primjenjuje za mjerenje ukupne snage kada imamo pristup samo na tri linijska voda. Vrijedi za simetrična i nesimetrična trošila u zvijezda ili trokut spoju, a valjana je i u slučaju nesimetričnog izvora.



Slika 9.41 – Mjerenje djelatne snage metodom dvaju vatmetara (Aronov spoj)

Dokaz:
Ukupna trenutačna snaga je $p_{uk} = p_1 + p_2 + p_3 = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3$.
Kada nema neutralnog voda, vrijedi: $i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_3 = -i_1 - i_2$.
Slijedi:

$$p_{uk} = u_1 i_1 + u_2 i_2 - u_3 i_1 - u_3 i_2 = i_1 (u_1 - u_3) + i_2 (u_2 - u_3) = u_{13} i_1 + u_{23} i_2 . \qquad (9\text{-}58)$$

Dakle, ukupna je snaga upravo zbroj pokazivanja vatmetara:

$$P_{uk} = P_{W1} + P_{W2} = Re\left(\overline{U}_{13}\ \overline{I}_1^*\right) + Re\left(\overline{U}_{23}\ \overline{I}_2^*\right). \qquad (9\text{-}59)$$

U praksi se često uporabljuju i integrirani vatmetri (trofazni vatmetri) s dva instrumenta ugrađena u zajedničko kućište i sa zajedničkim pokazivačem. Zbrajanje snaga vrši se automatski.

Određivanje faze i jalove snage u simetričnom sustavu pomoću Aronova spoja
Iz fazorskog dijagrama faznih i linijskih napona i struja simetričnog sustava je:

$$\overline{U}_{13} = -\overline{U}_{31} = U_L e^{j150^0} \cdot e^{j180^0} = U_L e^{-j30^0} \quad , \quad \overline{U}_{23} = U_L e^{-j90^0}$$
$$\overline{I}_1 = I_L e^{j\varphi} \quad , \quad \overline{I}_2 = I_L e^{\varphi - j120^0} . \qquad (9\text{-}60)$$

Vatmetri pokazuju:

$$P_{W1} = Re\left(\overline{U}_{13}\overline{I}_1^*\right) = Re\left(U_L e^{-j30^0} \cdot I_L e^{-j\varphi}\right) = U_L I_L \cos\left(30^0 + \varphi\right)$$
$$P_{W2} = Re\left(\overline{U}_{23}\overline{I}_2^*\right) = Re\left(U_L e^{-j90^0} \cdot I_L e^{-\varphi + j120}\right) = U_L I_L \cos\left(30^0 - \varphi\right). \qquad (9\text{-}61)$$

Zbroj pokazivanja vatmetara jest:

$$P_{W1} + P_{W2} = U_L I_L \cos\left(30^0 + \varphi\right) + U_L I_L \cos\left(30^0 - \varphi\right) = \cdots = \sqrt{3} U_L I_L \cos\varphi = P_{uk} . \qquad (9\text{-}62)$$

Time smo još jednom potvrdili kako vatmetri mjere ukupnu djelatnu snagu.

Razlika pokazivanja vatmetara je:

$$P_{W2} - P_{W1} = U_L I_L \cos\left(30^0 - \varphi\right) - U_L I_L \cos\left(30^0 + \varphi\right) = \cdots = U_L I_L \sin\varphi, \tag{9-63}$$

pa je ukupna jalova snaga:

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi = \sqrt{3}(P_{W2} - P_{W1})$$

$$Q = \sqrt{3} U_L I_L \sin\varphi = \sqrt{3}(P_{W2} - P_{W1}). \tag{9-64}$$

Iz kvocijenta zbroja i razlike očitanja vatmetara može se odrediti fazni kut:

$$tg\varphi = \sqrt{3}\frac{P_{W2} - P_{W1}}{P_{W2} + P_{W1}}. \tag{9-65}$$

Iz gornjih izraza može se zaključiti:

- za djelatno trošilo ($\cos\varphi = 1,\ \varphi = 0$) pokazivanja vatmetara su pozitivna i jednaka;
- za reaktivno trošilo ($\cos\varphi = 1,\ \varphi = 90^0$) pokazivanja su jednaka, ali suprotnog predznaka, pa je ukupna djelatna snaga jednaka nuli;
- za $\cos\varphi = 0{,}5_{ind},\ \varphi = 60^0$ pokazivanje $P_{W1}=0$. Za sve induktivne faktore snage ispod $0{,}5$ očitanje vatmetra W_1 je negativno;
- za $\cos\varphi = 0{,}5_{kap},\ \varphi = -60^0$ pokazivanje $P_{W2}=0$. Za sve kapacitivne faktore snage ispod $0{,}5$ očitanje vatmetra W_2 je negativno;
- za $\cos\varphi > 0{,}5_{kap/ind}$ očitanja vatmetara su pozitivna i različita.

Elektronički vatmetri mogu indicirati negativne vrijednosti snage. Ako vatmetri ne mogu registrirati negativni otklon, potrebno je obrnuti stezaljke strujnog svitka ili promijeniti polaritet naponskog svitka.

9.7. Simetrične komponente nesimetričnoga trofaznog sustava

Elektroenergetski sustav temelji se na trofaznim mrežama i sadržava niz elemenata kao što su generatori, transformatori, prijenosni vodovi i na kraju trošila radi kojih se sustav i projektira. Trošila se ne priključuju izravno na generatore, već na mrežu. U takvoj situaciji, ovisno o pogonskom stanju, mogu u sustavu nastupiti različiti poremećaji. U slučaju normalnog pogona sustav je simetričan i može se analizirati na samo jednoj od faza, jer je stanje u ostalim fazama identično. Međutim, ako iz bilo kojeg razloga u fazama sustava poteku struje koje se razlikuju po iznosu i/ili fazi, sustav postaje nesimetričan. Uzrok nesimetrije može biti posljedica nejednakih impedancija u fazama, nejednakih EMS-a ili nekog kvara. Pored već navedenih načina rješavanja nesimetričnog sustava, na raspolaganju je i analitička metoda poznata kao *metoda simetričnih komponenata*.

Naime, bilo kakav nesimetrični sustav $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3$ može se razložiti na tri simetrična trofazna sustava čija superpozicija daje upravo razmatrani nesimetrični sustav:

- *Direktna komponenta* – $\overline{U}_{1d}, \overline{U}_{2d}, \overline{U}_{3d}$ jest simetrični trofazni sustav s istim redoslijedom faza kao i zadani nesimetrični sustav.
- *Inverzna komponenta* – $\overline{U}_{1i}, \overline{U}_{2i}, \overline{U}_{3i}$ jest simetrični trofazni sustav s obrnutim redoslijedom faza u odnosu na zadani nesimetrični sustav.

- *Nulta komponenta* – $\overline{U}_{10},\overline{U}_{20},\overline{U}_{30}$ jest sustav od triju jednakih veličina među kojima nema faznog pomaka.

Nesimetrični sustav i njegove komponente povezuju jednadžbe:

$$\overline{U}_1=\overline{U}_{1d}+\overline{U}_{1i}+\overline{U}_{10} \quad , \quad \overline{U}_2=\overline{U}_{2d}+\overline{U}_{2i}+\overline{U}_{20} \quad , \quad \overline{U}_3=\overline{U}_{3d}+\overline{U}_{3i}+\overline{U}_{30} \quad . \qquad (9\text{-}66)$$

Radi jednostavnosti uvodimo operator $a=e^{j120^0}$, čije su potencije:

$$a^0=1 \; ; \; a^1=a=e^{j120^0} \; ; \; a^2=e^{j240^0}=e^{-j120^0} \; ; \; a^3=e^{j360^0}=1 \; ; \; a^4=ae^{j360^0}=a \quad . \qquad (9\text{-}67)$$

Također je:

$$1+a+a^2=1+e^{j120^0}+e^{-j120^0}=1+2\cos 120^0=0 \; . \qquad (9\text{-}68)$$

Za pojedine simetrične komponente tada vrijedi:

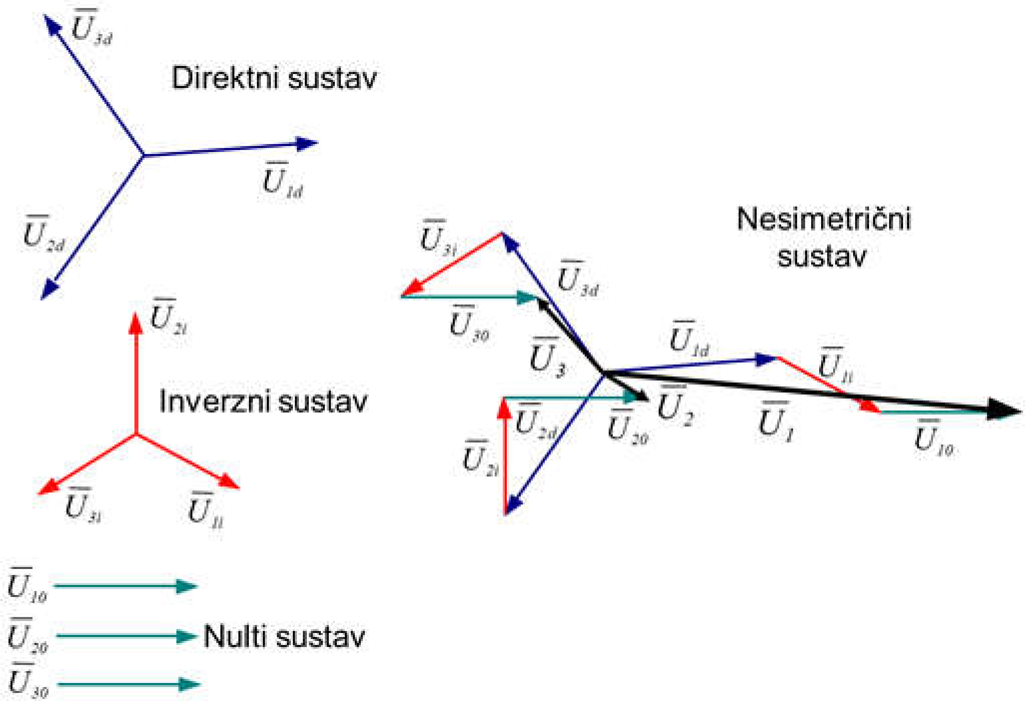
$$\begin{gathered}\overline{U}_{1d}=\overline{U}_d \;,\overline{U}_{2d}=a^2\overline{U}_d \;,\overline{U}_{3d}=a\overline{U}_d \\ \overline{U}_{1i}=\overline{U}_i \;,\overline{U}_{2i}=a\overline{U}_i \;,\overline{U}_{3i}=a^2\overline{U}_i \\ \overline{U}_{10}=\overline{U}_{20}=\overline{U}_{30}=\overline{U}_0 \quad .\end{gathered} \qquad (9\text{-}69)$$

Dakle, ako su poznate njegove simetrične komponente, nesimetrični se sustav može odrediti iz izraza:

$$\overline{U}_1=\overline{U}_d+\overline{U}_i+\overline{U}_0 \quad , \quad \overline{U}_2=a^2\overline{U}_d+a\overline{U}_i+\overline{U}_0 \quad , \quad \overline{U}_3=a\overline{U}_d+a^2\overline{U}_i+\overline{U}_0 \; . \qquad (9\text{-}70)$$

Jednadžbe *(9-70)* omogućuju i obratni postupak – određivanje simetričnih komponenata za dani nesimetrični sustav.

Grafički prikaz sustava simetričnih komponenata i pripadnog nesimetričnog sustava dan je na *Slici 9.42*.



Slika 9.42 – Zadani sustav simetričnih komponenata i pripadni nesimetrični sustav

Ako zbrojimo sve tri jednadžbe u *(9-70)*, dobije se:

$$\overline{U}_1+\overline{U}_2+\overline{U}_3=\overline{U}_d\underbrace{\left(1+a^2+a\right)}_{=0}+\overline{U}_i\underbrace{\left(1+a+a^2\right)}_{=0}+3\overline{U}_0=3\overline{U}_0 \quad , \qquad (9\text{-}71)$$

gdje je nulta komponenta:

$$\overline{U}_0=\frac{1}{3}\left(\overline{U}_1+\overline{U}_2+\overline{U}_3\right) \quad . \qquad (9\text{-}72)$$

Ako drugu jednadžbu u *(9-70)* pomnožimo s *a* (rotiramo fazore za 120°), a treću s a^2 (rotiramo fazore za -120°), dobiju se jednadžbe:

$$\begin{aligned}&\overline{U}_1=\overline{U}_d+\overline{U}_i+\overline{U}_0\\&a\,\overline{U}_2=a^3\overline{U}_d+a^2\overline{U}_i+a\overline{U}_0=U_d+a^2\overline{U}_i+a\overline{U}_0\\&a^2\;\overline{U}_3=a^3\overline{U}_d+a^4\overline{U}_i+a^2\overline{U}_0=U_d+a\overline{U}_i+a^2\overline{U}_0\;.\end{aligned} \qquad (9\text{-}73)$$

Zbroj tih triju jednadžbi daje:

$$\overline{U}_1+a\overline{U}_2+a^2\overline{U}_3=3\overline{U}_d+\overline{U}_i\underbrace{\left(1+a^2+a\right)}_{=0}+\overline{U}_0\underbrace{\left(1+a+a^2\right)}_{=0}=3\overline{U}_d \quad . \qquad (9\text{-}74)$$

Direktna komponenta je:

$$\overline{U}_d=\frac{1}{3}\left(\overline{U}_1+a\overline{U}_2+a^2\overline{U}_3\right) \quad . \qquad (9\text{-}75)$$

Konačno, ako drugu jednadžbu u *(9-70)* pomnožimo s a^2, a treću s *a*, slijedi:

$$\begin{aligned}&\overline{U}_1=\overline{U}_d+\overline{U}_i+\overline{U}_0\\&a^2\;\overline{U}_2=a^4\overline{U}_d+a^3\overline{U}_i+a^2\overline{U}_0=aU_d+\overline{U}_i+a^2\overline{U}_0\\&a\,\overline{U}_3=a^2\overline{U}_d+a^3\overline{U}_i+a\overline{U}_0=a^2U_d+\overline{U}_i+a\overline{U}_0\;.\end{aligned} \qquad (9\text{-}76)$$

Iz zbroja:

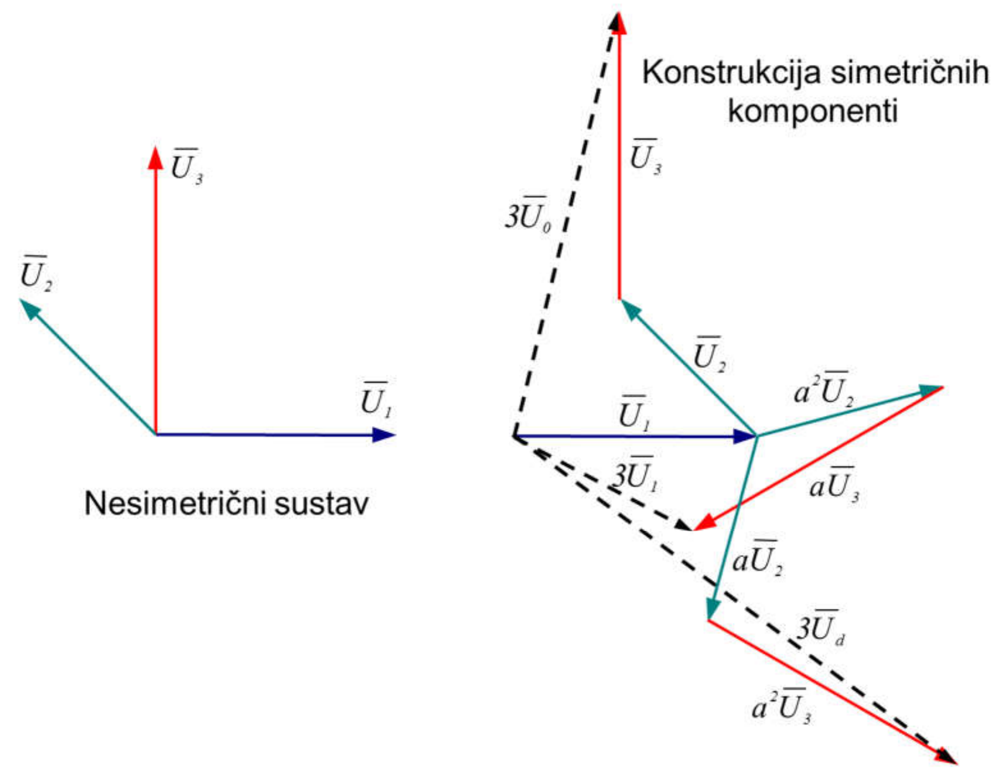
$$\overline{U}_1+a^2\overline{U}_2+a\overline{U}_3=\overline{U}_d\underbrace{\left(1+a+a^2\right)}_{=0}+3\overline{U}_i+\overline{U}_0\underbrace{\left(1+a^2+a\right)}_{=0}=3\overline{U}_i \qquad (9\text{-}77)$$

dobije se inverzna komponenta:

$$\overline{U}_i=\frac{1}{3}\left(\overline{U}_1+a^2\overline{U}_2+a\overline{U}_3\right) \quad . \qquad (9\text{-}78)$$

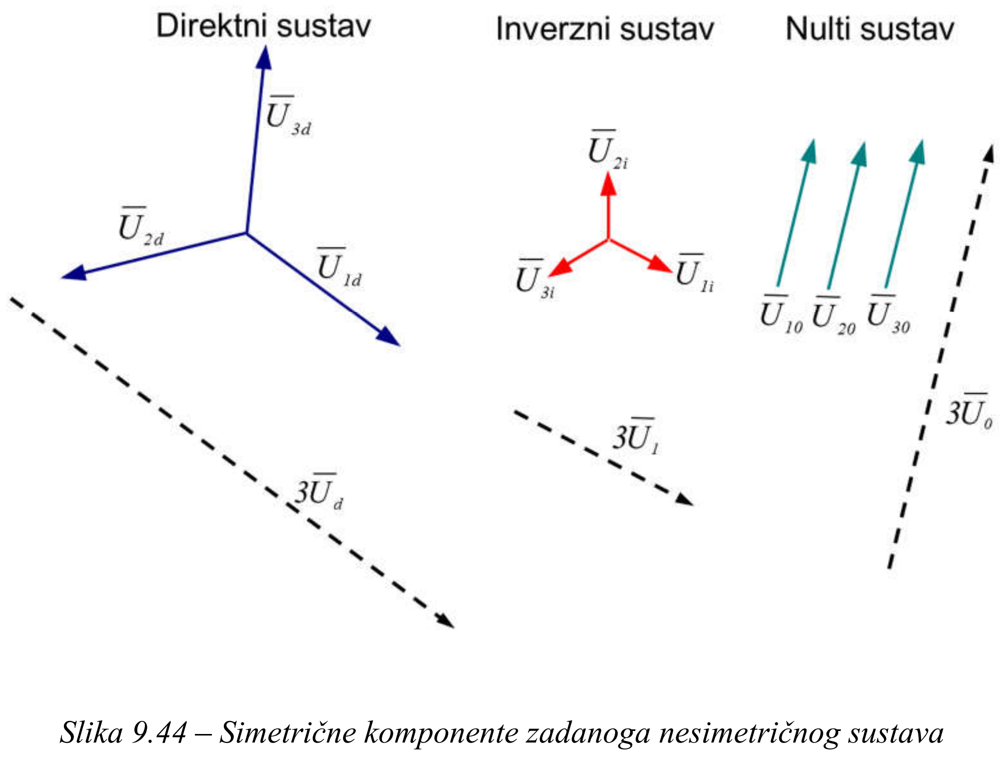
Sustav od *3 x 3* simetrične komponente jednoznačno je određen jednadžbama za $\overline{U}_d,\overline{U}_i,\overline{U}_0$ i početnim relacijama *(9-69)*.

Odgovarajući grafički prikaz dan je na *Slici 9.43*. Iz zadanoga nesimetričnog sustava (*lijeva slika*) konstruira se pripadni sustav simetričnih komponenata $3\overline{U}_0, 3\overline{U}_d, 3\overline{U}_i$ (*desna slika*) prema prethodno navedenim jednadžbama.



Slika 9.43 – Zadani nesimetrični sustav i određivanje pripadnih simetričnih komponenata

Na *Slici 9.44* prikazani su referentni fazori simetričnih komponenata $3\overline{U}_0, 3\overline{U}_d, 3\overline{U}_i$, preneseni s prethodne slike. Ako se oni podijele s *3* i uzme u obzir definicija triju simetričnih komponenata *(9-69)*, dobije se grafički prikaz direktnoga, inverznog i nultog sustava.



Slika 9.44 – Simetrične komponente zadanoga nesimetričnog sustava

Razmatrali smo stanje nesimetrije napona koje se može odnositi bilo na fazne bilo na linijske vrijednosti. Razlaganje u simetrične komponente vrijedi i za nesimetrične struje. Naime, ako su naponi simetrični, kao posljedica nesimetrije trošila stvara se nesimetrija struja. S obzirom na snagu u sustavu vrijedi:

- direktni sustav ima snagu konstantnog iznosa, što je već pokazano;
- inverzni sustav daje pulsirajuću snagu sa srednjom vrijednosti nula;
- nulti sustav ima ne samo srednju nego i trenutačnu snagu jednaku nuli.

Posljednje dvije tvrdnje mogu se dokazati na isti način kao i prva.

Mogu se navesti još neki posebni zaključci vezani za nultu komponentu, a već su dijelom poznati iz prethodne analize trofaznih sustava:

- Kako je nulta komponenta srednja vrijednost zbroja fazora originalnoga nesimetričnog sustava, bilo koja grupa fazora čiji je zbroj nula neće imati nultu komponentu. Tako primjerice u skupu linijskih napona ili struja trožičnoga sustava nema nulte komponente. Zbog toga se kod trošila spojena u trokut nulti sustav struja ne može zatvoriti u dovodnim vodovima, ali nulte struje mogu teći unutar trokuta kao kružne struje.
- Ako je trošilo spojenu u zvijezdu bez nultog vodiča, postoji nulta komponenta faznog napona (pomak zvjezdišta zbog nesimetrije trošila), ali ne mogu teći nulte struje.
- Ako postoji nulti vodič, kroz njega teku nulte struje kao zbroj linijskih struja. Pod određenim uvjetima može postojati i nulta komponenta faznih napona.

Metoda simetričnih komponenata općenito se rabi za ispitivanje utjecaja nesimetričnih impedancija, ali joj je primjena najprikladnija u ekstremnim slučajevima kada se nesimetrija javlja zbog kratkog spoja ili prekida. Najsnažnije neuravnoteženje u sustavu ne nastaje pri promjenama opterećenja, nego upravo pri navedenim tipovima kvarova. Zato je metoda naročito pogodna za analizu prijenosnih mreža, kao i rotacijskih strojeva u uvjetima kvara, kao što su primjerice jednopolni, dvopolni i tropolni kratki spoj, dozemni spoj, kratki spoj s dozemnim spojem, prekid i dr. Između pojedinih komponenata (*d*, *i*, *0*) nema međusobnog djelovanja – struje jedne komponente izazivaju na odgovarajućoj impedanciji padove napona samo te komponente. To znači da se za svaku komponentu može realizirati odvojeni nadomjesni krug, a onda se krugovi kombiniraju prema vrsti kvara i ograničenjima slučaja koji se analizira.

Rad elektroenergetskog sustava karakteriziraju vrlo velike snage. Pojava navedenih abnormalnih uvjeta može stoga biti destruktivna i izazvati velike štete, pa je njihova analiza vrlo bitna. Ovakvi su slučajevi u praksi dosta složeni jer elektroenergetski sustav sadrži veći broj generatora i transformatora u različitim izvedbama i spojevima – uzemljeni ili ne, s nultim vodom ili bez njega, spoj u zvijezdu ili u trokut, utjecaj grupe spoja transformatora. Međutim, primjenom postupaka numeričke analize na računalu metoda simetričnih komponenata dobiva svoj puni smisao. Njome se mogu odrediti struje kratkog spoja u postojećim mrežama. Isto tako metoda je važna i za planiranje mreže kako bi se odredili podatci bitni za dimenzioniranje elemenata EES-a.

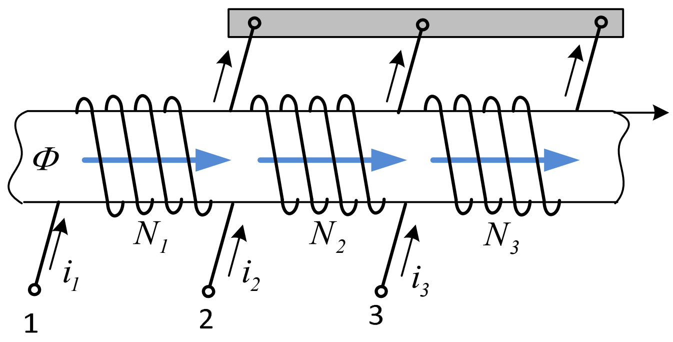
10. OBRTNO MAGNETSKO POLJE

Relativno jednostavno dobivanje obrtnoga (rotacijskoga) magnetskog polja predstavlja jednu od najvećih prednosti koje pružaju višefazni, a posebno trofazni sustavi. Ono se rabi za konstruiranje indukcijskog ili asinkronog motora, kao i drugih električnih motora i generatora. Na principu rotacijskoga polja temelji se i rad nekih instrumenata kao što su mjerači faze, brzinomjeri (tahometri) i dr. Iako se općenito može govoriti o *n*-faznom polju, od posebnog je interesa trofazno obrtno polje.

10.1. Trofazno obrtno magnetsko polje

Trofazno obrtno polje stvara se u generatoru – izvoru električne energije, a potrebno je za vrtnju asinkronog električnog stroja. Danas je više od 90 % motora temeljeno na obrtnom magnetskom polju.

Razmotrimo najprije rezultirajuće magnetsko polje za slučaj kada je trofazni namotaj tako vezan na zajedničku jezgru da se stvara zajednička magnetska os svih namotaja, kao na *Slici 10.1*.



Slika 10.1 – Trofazni sustav spojen na zajedničku jezgru

Namotaji su spojeni u zvijezdu i protjecani su linijskim strujama i_1, i_2, i_3. Ukupni magnetski tok je:

$$\Phi = B_{uk} S = \frac{\Theta_{uk}}{R_m}, \tag{10-1}$$

a stvorila ga je magnetomotorna sila:

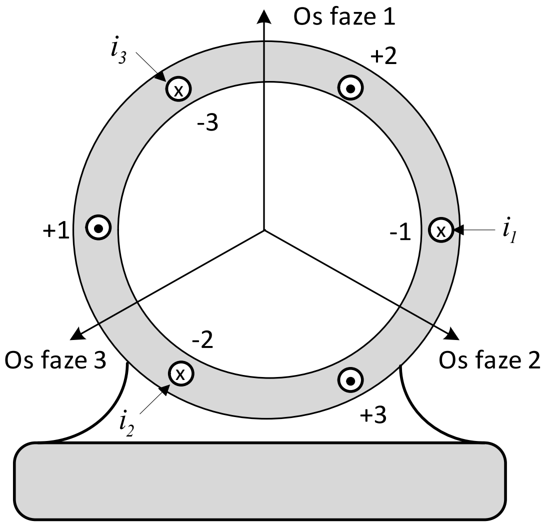
$$\Theta_{uk} = N_1 i_1 + N_2 i_2 + N_3 i_3 \,. \tag{10-2}$$

Za slučaj jednakog broja zavoja: $N_1 = N_2 = N_3 = N$ slijedi:

$$\Theta_{uk} = N \underbrace{\left(i_1 + i_2 + i_3 \right)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{uk} = 0, B_{uk} = 0 \,. \tag{10-3}$$

Budući da je suma linijskih struja jednaka nuli, za prikazani raspored faza rezultirajući magnetski tok i magnetska indukcija jednaki su nuli.

Međutim, potpuno drukčiji rezultat dobije se ako se namotaji na jezgri rasporede tako da su geometrijski pomaknuti za kut od 120º, a kroz namotaje teku struje koje su međusobno vremenski fazno pomaknute za isti taj kut. Takav smještaj svitaka karakterističan za trofazne strojeve prikazan je na *Slici 10.2*, koja prikazuje pojednostavljen presjek statora stroja.



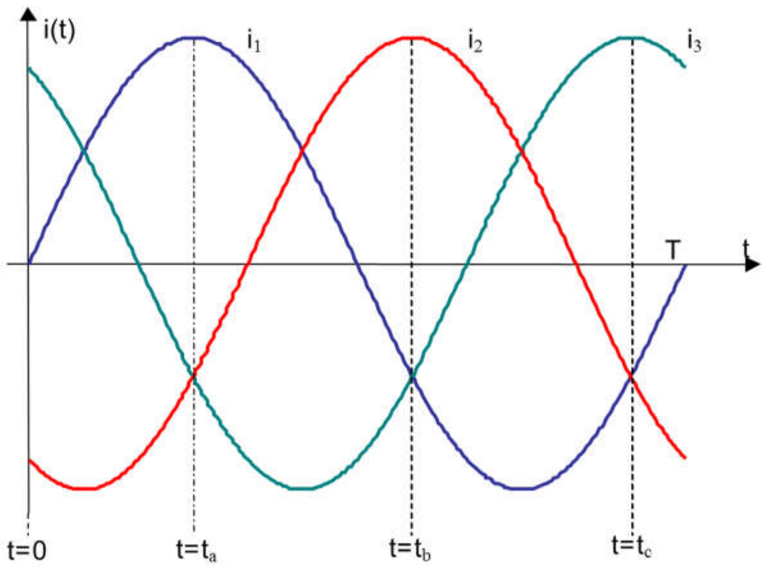
Slika 10.2 – Presjek statora stroja s pripadnim magnetskim osima

Fazna struja i_1 teče kroz prvi namotaj (ulazi u točku *-1*, a izlazi iz točke *+1*) i stvara magnetsku uzbudu prve faze čiji je smjer određen pravilom desnog vijka (os faze *1*). Preostale dvije struje raspoređene su po unutarnjem opsegu statora tako da rezultirajuće magnetske osi tvore kut od 120º (međusobno i u odnosu na os faze *1*).

Zadani simetrični trofazni sustav struja:

$$\begin{aligned} i_1 &= I_m \sin \omega t \\ i_2 &= I_m \sin\left(\omega t - 120^0\right) \\ i_3 &= I_m \sin\left(\omega t - 240^0\right) = I_m \sin\left(\omega t + 120^0\right) \end{aligned} \tag{10-4}$$

prikazan je na dijagramu valnih oblika prema *Slici 10.3*.

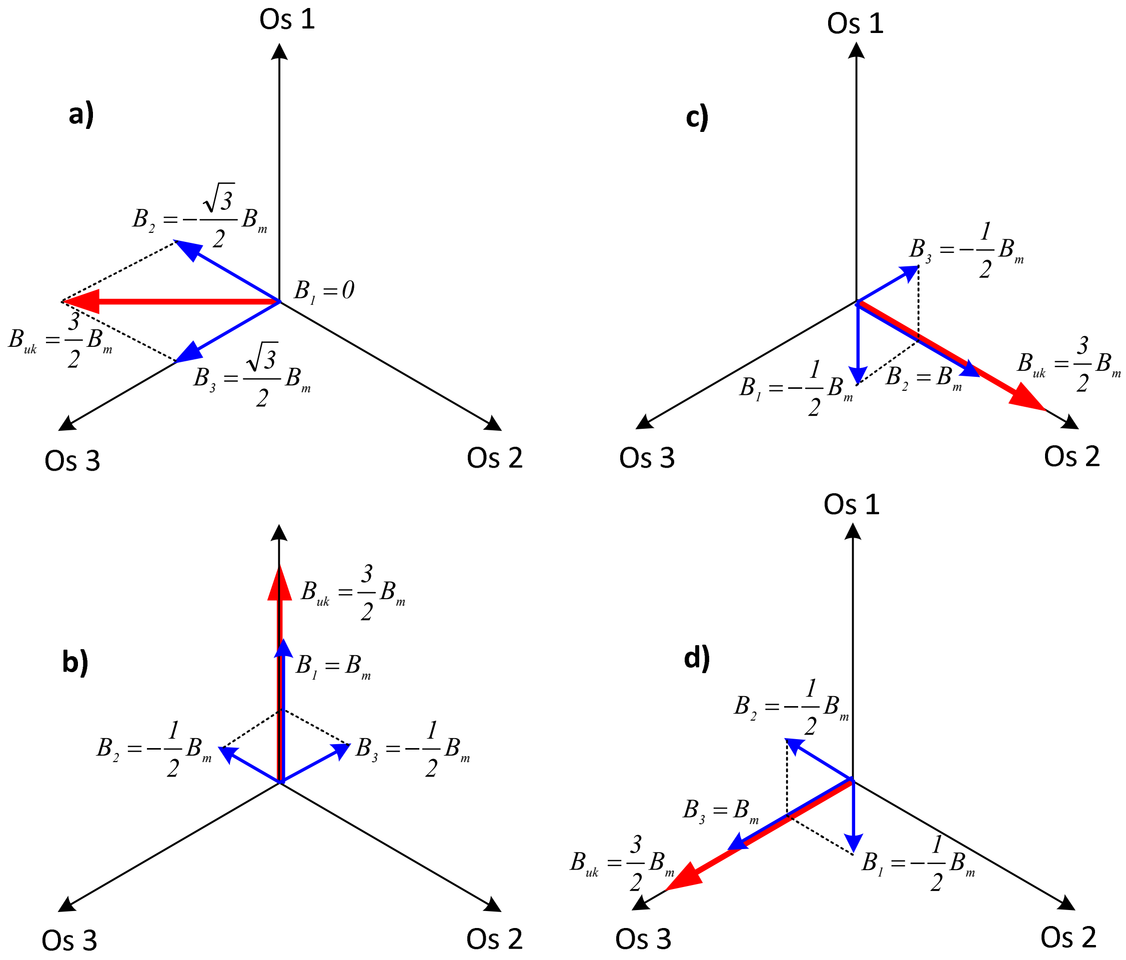


Slika 10.3 – Trofazni sustav struja s odabranim uzorcima vremena

Sustav stvara vlastite magnetomotorne sile Θ koje su proporcionalne struji koja ih je proizvela. Prema relaciji *(10-1)* stvoreni magnetski tokovi Φ, odnosno magnetske indukcije (gustoće magnetskog toka) B, bit će također proporcionalni uzbudnim strujama:

$$\begin{aligned} B_1(t) &= B_m \sin \omega t \\ B_2(t) &= B_m \sin\left(\omega t - 120^0\right) \\ B_3(t) &= B_m \sin\left(\omega t + 120^0\right). \end{aligned} \tag{10-5}$$

Razmotrit ćemo određivanje iznosa ukupnih magnetskih indukcija u trenutku t = 0 i u trenutcima kada pojedine struje imaju maksimalne vrijednosti (t_a, t_b, t_c). Grafički prikaz tih slučajeva, na kojemu se može pratiti iznos i faza ukupne indukcije, jest:



Slika 10.4 – Određivanje B_{uk} za odabrane vremenske uzorke

a) Za $t = 0\,, \omega t = 0$ je: $B_1 = 0\ ,\ B_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}B_m\ ,\ B_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}B_m$

Ukupna indukcija je:

$$B(t=0) = 0 + B_2 \cos\frac{\pi}{6} + B_3 \cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}B_m \cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}B_m\,. \tag{10-6}$$

b) Za $t = t_a\,, \omega t = \frac{\pi}{2}$ je: $B_1 = B_m\ ,\ B_2 = -\frac{1}{2}B_m\ ,\ B_3 = -\frac{1}{2}B_m$

Ukupna indukcija je:

$$B(t=t_a) = B_1 + B_2 \cos\frac{\pi}{3} + B_3 \cos\frac{\pi}{3} = B_m + \frac{1}{2}B_m = \frac{3}{2}B_m\,. \qquad (10\text{-}7)$$

c) Za $t = t_b\,,\ \omega t = \frac{7\pi}{6}$ je: $B_1 = -\frac{1}{2}B_m \quad , \ B_2 = B_m\,,\ B_3 = -\frac{1}{2}B_m$

Ukupna indukcija je:

$$B(t=t_b) = B_m + 2\frac{B_m}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}B_m\,. \qquad (10\text{-}8)$$

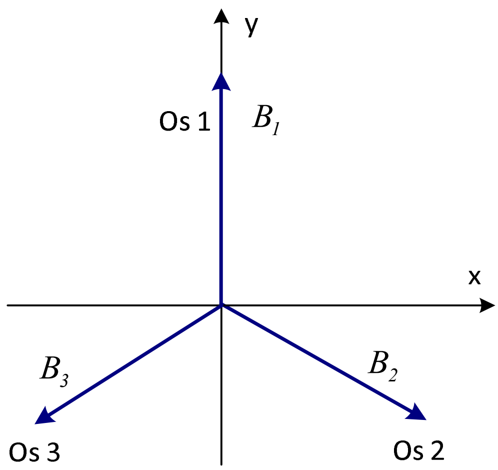
d) Za $t = t_c\,,\ \omega t = \frac{11\pi}{6}$ je: $B_1 = -\frac{1}{2}B_m \quad , \ B_2 = -\frac{1}{2}B_m\,,\ B_3 = B_m$

Ukupna indukcija je:

$$B(t=t_c) = B_m + 2\frac{B_m}{2}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}B_m\,. \qquad (10\text{-}9)$$

Očito je kako se apsolutna vrijednost ukupne indukcije ne mijenja, ali se njezin položaj u xy ravnini mijenja. Odredit ćemo opći analitički izraz za rezultantnu indukciju temeljem komponenata magnetske indukcije u xy ravnini prema *Slici 10.5*:

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} \quad , \quad B_y = B_{1y} + B_{2y} + B_{3y}\,. \qquad (10\text{-}10)$$



Slika 10.5 – Raspored osi trofaznoga magnetskog polja

Pojedine komponente su:

$$B_{1x} = 0 \qquad B_{1y} = B_m \sin\omega t$$

$$B_{2x} = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6} \qquad B_{2y} = -B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6} \qquad (10\text{-}11)$$

$$B_{3x} = -B_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6} \qquad B_{3y} = -B_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}\,.$$

Ukupna projekcija na *x* os je:

$$B_x = B_m \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = B_m \cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\omega t\right), \qquad (10\text{-}12)$$

odnosno:

$$B_x = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t . \tag{10-13}$$

Ukupna y komponenta je:

$$\begin{aligned} B_y &= B_m \sin \omega t - B_m \sin \frac{\pi}{6} \cdot \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right] = \\ &= B_m \sin \omega t - B_m \sin \frac{\pi}{6} \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{3} \sin \omega t , \end{aligned} \tag{10-14}$$

odnosno:

$$B_y = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t . \tag{10-15}$$

Ukupna indukcija vremenski je neovisna i ima konstantnu vrijednost:

$$B_{uk} = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m = konst . \tag{10-16}$$

Ako se s α označi otklon od vertikalne osi, slijedi:

$$tg\alpha = \frac{B_x}{B_y} = -\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} = -ctg\omega t = tg\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \tag{10-17}$$

Kut $\alpha = \omega t - 90^0$ jest kut rotacije ukupne indukcije.

<u>Zaključak</u>: *Tri izmjenična magnetska polja prostorno zakrenuta za 120^0 i međusobno vremenski pomaknuta za trećinu perioda stvaraju zajedničko obrtno magnetsko polje konstantne indukcije 1,5 B_m koje ravnomjerno rotira konstantnom kutnom brzinom ω.*

Analizirano magnetsko polje rotira u smjeru kazaljke na satu. Za okretanje u protivnom smjeru dovoljno je međusobno zakrenuti dvije faze. Tako se postiže promjena smjera okretanja asinkronog motora. U tu se svrhu u električni krug statora postavlja posebni prekidač za zamjenu krajeva dviju faza.

Za rotacijski stroj s p polova statora kutna brzina ω' jest: $\omega' = \frac{2}{p}\omega$.

Sinkrona brzina motora n, izražena u broju okretaja u minuti, jest: $n = \frac{120 f}{p}$ (okr/min) .

10.2. Princip rada sinkronog i asinkronog motora

U šupljini statora stvara se obrtno magnetsko polje. Ako unutar statora postavimo magnet, primjerice malu magnetsku iglu, i zavrtimo je u smjeru vrtnje polja, to će polje magnetskim silama zahvatiti iglu i održavati je dalje u rotaciji. Na tom se principu temelji rad strojeva trofazne struje.

Sinkroni motor

Približni prerez statora motora prethodno je već prikazan. Rotor je permanentni magnet ili češće elektromagnet koji ima svoje vlastito magnetsko polje. Stoga dolazi do uzajamnog djelovanja obrtnog polja statora i magnetskog polja rotora. Obrtno polje teži pokrenuti magnet, a time i rotor u smjeru svog okretanja. Često to nije moguće zbog velike inercijske mase rotora, pa se rotor pri uključivanju motora mora vanjskim silama ubrzati na broj okretaja približno jednak broju okretaja obrtnog polja.

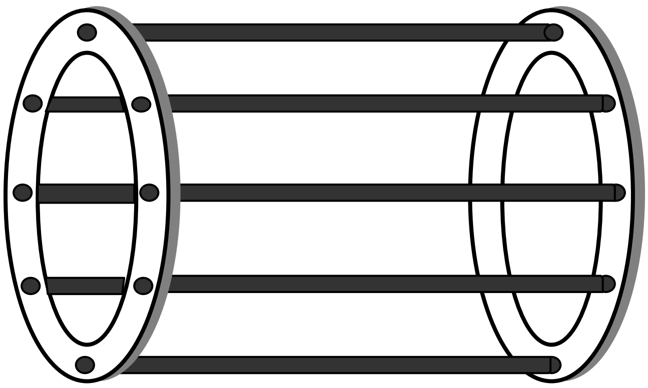
Kada se elektromagnet „veže“ (engl. *lock*) za obrtno polje, motor dalje rotira jednakom – *sinkronom* kutnom brzinom kao i obrtno polje (grčki: *sinkron = istovremen*).

Sinkroni motori pogodni su samo za velike snage, jer zahtijevaju uzbudnik. Primjenjuju se za pogon kompresora, strojeva za mljevenje rude, u papirnoj industriji, tj. u pogonima koji zahtijevaju konstantnu brzinu vrtnje. Imaju dobru korisnost. Brzina vrtnje ovisna je o frekvenciji, ali neovisna o opterećenju. Nedostatak im je što nemaju vlastiti zaletni moment. Pri velikoj promjeni mehaničkog opterećenja na osovini ispadnu iz sinkronizma i zaustave se.

Sinkroni generatori rabe se za proizvodnju trofazne struje u elektranama i kao pojedinačni električni agregati.

Asinkroni motor

Rotor je napravljen u obliku vjeveričina (hrčkova) kola. Po njegovu su obodu smješteni vodiči (rebra) koji su na objema krajevima spojeni s dva prstena kao na *Slici 10.6*.



Slika 10.6 – Rotor asinkronog motora

Obrtno magnetsko polje presijeca rebra rotora i inducira u njima EMS-e. Stvorene struje u vodičima formiraju magnetski tok rotora. Rezultat interakcije polja statora i rotora je pojava elektromagnetske sile [$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$], jer se vodiči protjecani induciranom strujom nalaze u polju statora. Sila počinje okretati rotor u smjeru obrtnog polja statora. Rotor teži da stigne magnetsko polje statora. Kada bi zaista rotor dostigao brzinu zakretanja polja statora, zbog jednakih brzina ne bi bilo promjene magnetskog toka, pa time ni induciranog EMS-a, odnosno struje. Prestalo bi djelovanje sile na rotor i on bi se počeo zaustavljati. Ponovno bi relativna razlika u brzinama polja uzrokovala pokretanje rotora. Krajnji je rezultat da je stvarna brzina rotora uvijek nešto manja od brzine okretanja magnetskog polja statora. Zbog razlike u navedenim brzinama ovakvi se motori zovu asinkronim motorima. Nazivaju se još i indukcijski, jer im se rad temelji na principu elektromagnetske indukcije.

Asinkroni motori imaju vrlo širok spektar uporabe. Primjenjuju se za pogon strojeva s velikom zamašnom masom (npr. vuča vlaka), dizalica i alatnih strojeva, ali i za pogon kućnih aparata kao što su perilice, šivaći strojevi i usisivači. Sastavni su dio i raznih vrsta ručnih alata. Motori manjih snaga u uporabi su za pogon raznovrsne mjerne i upravljačke opreme.

Izvedba asinkronih motora je jednostavna, robusni su, jednostavno se pokreću i sigurni su u pogonu, a moguće je upravljanje brojem okretaja.

LITERATURA

1. Alexander, C. K., Sadiku, M. N. O.: **Fundamentals of electric circuits**, McGraw-Hill, 2004.
2. Attia, J. O.: **Electronics and Circuit Analysis Using MATLAB**, CRC Press LLC, 1999.
3. Beaty, H. W.: S**tandard handbook for electrical engineers**, downloaded from Digital Engineering Library @ McGraw-Hill, 2006.
4. Bego, V.: **Mjerenja u elektrotehnici**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.
5. Bird, J.: **Electrical circuit Theory and Technology**, Newnes – Elsevier, 2003.
6. Bobrow, L. S.: **Fundamentals of Electrical Engineering**, Oxford University Press, 2nd Edition, 1996.
7. Bobrow, L. S.: **Instructor's Manual for Fundamentals of Electrical Engineering**, Oxford University Press, 1996.
8. Boldea, I., Nasar S. A.: **The Induction Machine Handbook**, CRC Press, 2002.
9. Booker, H. G.: **An Approach to Electrical Science**, Mc Graw Hill, New York, 1959.
10. Brechmann, G. i sur.: **Westermannov elektrotehnički priručnik**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.
11. Brookes, A. M. P.: **Advanced Electric Circuits**, The Commonwealth and International Library: Applied Electricity and Electronics Division, 1966.
12. Brookes, A. M. P.: **Basic Electric Circuits**, 2nd Edition, Pergamon Press, 1975.
13. Chen, W. K. – Editor-in-Chief: **The Electrical Engineering Handbook**, Academic Press. 2004.
14. Craver, W. L., Schroder D. C., Tarquin, A. J: **Introduction to Engineering**, Oxford University Press, 1995.
15. DeCarlo, R., A., Pen-Min Lin: **Linear Circuit Analysis: Time Domain, Phasor, and Laplace Transform Approaches**, Oxford University Press, 2001.
16. DOE Fundamentals Handbook, **Electrical science**, Volume 1-4, U.S. Department of Energy, 1992.
17. Fitzgerald, A. E., Kingsley, C. Jr., Umans, S. D.: **Electric Machinery**, Sixth Edition, McGraw-Hill, 2003.
18. Giancoli, D. C.: **Physics for Scientists & engineers with Modern Physics**, International edition, 3rd Edition, Pentice Hall International, 2000.
19. Gibilisco, S., Monk S.: **Teach Yourself Electricity and Electronics**, Sixth Edition, McGraw-Hill, 2016.
20. Guru, B. S., Hiziroglu, H. R.: **Electric Machinery and Transformers**, 3rd Edition, Oxford University Press, 2001.
21. Hambley, A. R.: **Electrical Engineering: Principles & Applications**, 7th Edition, Pearson Education, 2015.
22. Hickey, R. B.: **Electrical Engineer's Portable Handbook**, McGraw-Hill, 2002.
23. Howatson, M.: **Electrical circuits and systems - An introduction for engineers and physical scientists**, Oxford University Press, 1996.
24. Hubscher, H. i sur.: **Osnove elektrotehnike**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981.

25. Hunt, B. R., Lipsman, R. L., Rosenberg, J. M.: **A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users**, Cambridge University Press, 2001.
26. Irwin, J. D., Nelms, R. M.: **Basic Engineering Circuit Analysis**, 11th Edition, International student version, John Wiley & Sons, 2008.
27. Jajac, B.: **Teorijske osnove elektrotehnike**, svezak III, udžbenik Sveučilišta u Splitu, Graphis, 2007.
28. Jordan, D., Smith, P.: **Mathematical Techniques - An Introduction for the Engineering, Physical, and Mathematical Sciences**, Oxford University Press, New York, 2008.
29. Kemper, J. D.: **Introduction to the engineering profession**, 2nd edition, Sounders College Publishing, 1993.
30. Kraus, A. D.: **Allan's Circuits Problems**, Oxford University Press, 2001.
31. Kulkarni, S. V., Khaparde, S. A.: **Transformer Engineering Design and Practice**, Marcel Dekker, Inc., 2004.
32. Kuzmanović, B.: **Osnove elektrotehnike II**, Element, Zagreb, 2000.
33. Lyshevski, S. E.: **Engineering and Scientific Computations Using MATLAB**, John Wiley & Sons, 2003.
34. Meluzin, H.: **Elektrotehnika na lak način**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982.
35. Mohamed E. El-Hawary: **Electrical Energy Systems**, CRC Press, 2000.
36. Muller-Schwarz, W.: **Basic Electrical Theory and Practice**, Heyden & Sons, London, 1981.
37. Nahvi, M., Edminister, J. A.: **Theory and Problems of Electric Circuits**, Fourth Edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 2003.
38. O'Malley, J.: **Schaum's Outline of Theory and Problems of Basic Circuit Analysis**, Second Edition, McGraw-Hill, 1992.
39. Paschal, J. M. Jr.: **EC&M's Electrical Calculations Handbook**, McGraw-Hill, 2001.
40. Pinter, V.: **Osnove elektrotehnike II**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
41. Popović, B: **Osnove elektrotehnike II**, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.
42. Rizzoni, G., Kearns J.: **Principles and Applications of Electrical Engineering**, 6th Edition, McGraw-Hill, 2016.
43. Rosenberg P.: **Audel Questions and Answers for Electrician's Examinations**, 15th Edition, John Wiley & Sons, 2011.
44. Sarma M. S.: **Introduction to Electrical Engineering**, Oxford University Press, 2001.
45. Sarma M. S.: **Solutions manual for introduction to electrical engineering**, Oxford University Press, 2000.
46. Schwarz, S. E., Oldham, W. G.: **Electrical Engineering: An Introduction**, 2nd Edition, Oxford University Press, 1993.
47. Solymar L., Walsh, D., Syms R. A.: **Electrical Properties of Materials**, Ninth Edition, Oxford University Press, 2001.
48. Svoboda, J. A., Dorf, R. C.: **Introduction to Electric Circuits**, 9th Edition, John Wiley & Sons, 2014.
49. Thomas, R. E., Rosa, A. J., Toussaint, G. J.: **The Analysis and Design of Linear Circuits**, 7th Edition, John Wiley & Sons, 2012.
50. Tuck, D., Tuck, G.: **Electrician's Instant Answers**, McGraw-Hill, 2003.
51. Tucker, D. G.: **Elementary Electrical Network Theory**, Pergamon Press / The Macmillan Company, 1964.
52. Williams, T.: **The Circuit Designer's Companion**, Second edition, Newnes – Elsevier, 2005.
53. Wolff, I.: **Grundlagen der elektrotechnik**, band 1-4, Verlagsbuchhandlung Dr Wolff GmbH, 2003.

POPIS SLIKA

Prilozi

Trigonometrijske formule, derivacije, integrali, eksponencijalne i logaritamske funkcije

Integrali	Derivacije
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}$
$\int x^{-1} dx = \ln x + C$	$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\frac{d}{dx} e^{ax} = a\, e^{ax}$
$\int \sin x dx = -\cos + C$	$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
$\int \frac{dx}{\cos^2} dx = tg x + C$	$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -ctg x + C$	$\frac{d}{dx} \cos ax = -a \sin ax$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$	$\frac{d}{dx} tg x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} e^{ax} + C$	$\frac{d}{dx} ctg x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Trigonometrijske funkcije	Eksponencijalne i logaritamske funkcije
$sin\alpha = cos\left(\alpha - 90^0\right)$	$e^A e^B = e^{A+B}$
$cos\alpha = sin\left(\alpha + 90^0\right)$	$\frac{e^A}{e^B} = e^{A-B}$
$sin\left(\alpha \pm \beta\right) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$	$a^x a^y = a^{x+y}$
$cos\left(\alpha \pm \beta\right) = sin\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\,cos\,\alpha$	$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	$\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$
$sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - cos\,2\alpha\right)$	$ln\,AB = ln\,A + ln\,B$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\alpha$ (kosinusov poučak)	$lnA^n = n\,lnA$

Kvadrant	sin	cos	tan	cot
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-