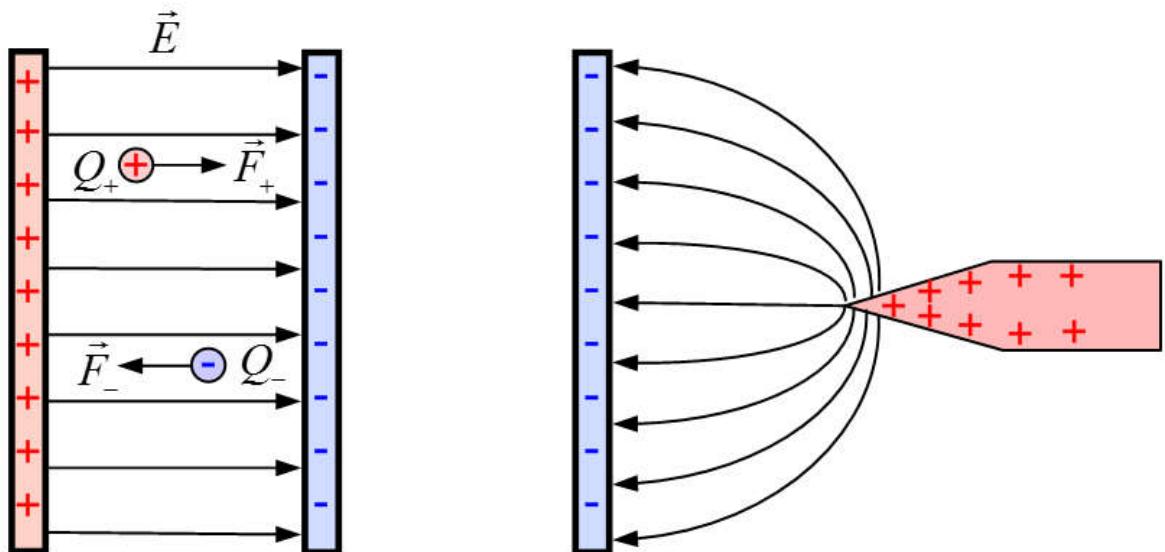


Ljubomir Malešević

# OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I



STUDIJI ELEKTRONIKE I ELEKTROENERGETIKE

SPLIT, 2018.

# SADRŽAJ

---

1. dio – ELEKROSTATIKA

2. dio – ISTOSMJERNE STRUJE

3. dio – ELEKTROMAGNETIZAM

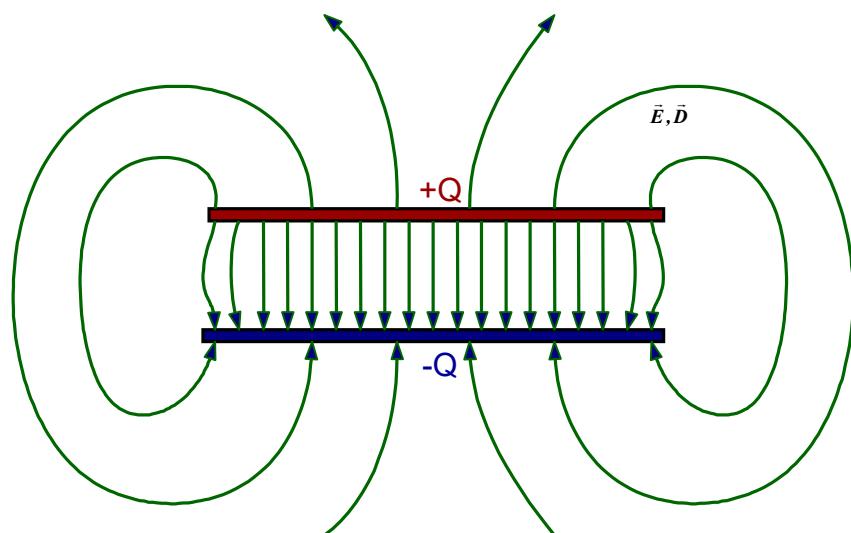
Literatura

Prilozi



Ljubomir Malešević

# OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I



## 1. dio: ELEKTROSTATIKA

STUDIJI ELEKTRONIKE I ELEKTROENERGETIKE

Split, 2018.





## PREDGOVOR

Prvi dio kolegija Osnove elektrotehnike I nastavni je materijal koji pokriva područje elektrostatike. Izrađen je za studente stručnog studija elektroenergetike i elektronike na Odsjeku za elektrotehniku Sveučilišnog odjela za stručne studije Sveučilišta u Splitu.

Svrha je predmeta razvitak elektrotehničkog načina mišljenja polazeći od usvojenih znanja iz fizike i matematike te izučavanje temeljnih teorijskih znanja iz elektrotehnike u području elektrostatičkih interakcija nabijenih tijela. Glavni je cilj osposobljavanje studenata za olakšano praćenje i savladavanje ostalih stručnih i specijalističkih kolegija. Kako bi se zorno prikazao značaj primjene usvojenih znanja u praksi, dan je velik broj praktičnih primjera i navedena su tipična područja primjene.

U prvim četirima poglavljima detaljno su analizirane temeljne veličine u elektrostatici i njihove međuvisnosti – sila, električno polje, potencijal i potencijalna energija polja te metode njihova izračuna za različite raspodjele naboja u homogenom i nehomogenom polju primjenom temeljnih zakona u elektrostatici (Coulombov zakon, Gaussov zakon).

Peto i šesto poglavlje obrađuju analizu ponašanja vodiča i dielektrika u elektrostatičkom polju – pojave električne influencije i električne polarizacije.

U sedmom poglavlju analizirana je električna kapacitivnost kondenzatora – određivanje kapacitivnosti za tipične vrste kondenzatora, rješavanje krugova s kondenzatorima i definiranje uvjeta na granici u spojevima s višeslojnim dielektricima.

Osmo poglavlje sadrži postupak određivanja energije i sile u elektrostatičkom polju.

U posljednjem poglavlju naveden je niz primjera praktične primjene zakona i pojava u elektrostatici.

Sastavni su dio ovih nastavnih materijala:

- Lj. Malešević: Slajdovi s PowerPoint prezentacijom gradiva koje se studentima iznosi na predavanjima (šest slajdova po stranici u pdf formatu), web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Kao dopuna za pripremu usmenog ispita preporučuje se:

- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s usmenih ispita iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Za pripremu kolokvija i pismenog dijela ispita studenti se mogu koristiti zbirkama:

- Lj. Malešević: *Zbirka zadataka s pismenih ispita iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s kolokvija iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Dio nastavnog gradiva iznosi se u obliku demonstracijskih vježba gdje se na praktičnim primjerima zorno prikazuju temeljne pojave u elektrostatici (nabijanje trenjem, odbojna i privlačna sila, električna influencija i polarizacija i dr.).

Molim čitatelje da me upozore na uočene propuste i pogreške te iznesu moguće primjedbe, na čemu ću im biti zahvalan.

*Split, rujna 2018.*

*AUTOR*

# SADRŽAJ

---

## 1. dio – ELEKTROSTATIKA

<b>1. ELEKTROSTATIČKA INTERAKCIJA NABIJENIH TIJELA .....</b>	<b>1</b>
1.1. COULOMBOV ZAKON .....	2
1.2. ELEKTROSTATIČKA SILA U SUSTAVU TOČKASTIH NABOJA .....	3
<b>2. ELEKTROSTATIČKO POLJE .....</b>	<b>5</b>
2.1. ELEKTROSTATIČKO POLJE TOČKASTOG NABOJA .....	5
2.2. ELEKTROSTATIČKO POLJE SUSTAVA TOČKASTIH NABOJA .....	6
2.3. SILNICE ELEKTRIČNOGA POLJA.....	7
2.4. ELEKTROSTATIČKO POLJE ZA JEDNOLIKE RASPODJELE NABOJA.....	10
2.4.1. Vrste raspodjele naboja.....	10
2.4.2. Određivanje elektrostatičkoga polja temeljem Coulombova zakona .....	11
2.4.3. Homogeno i nehomogeno elektrostatičko polje.....	12
<b>3. TOK VEKTORA ELEKTROSTATIČKOGA POLJA – GAUSSOV ZAKON .....</b>	<b>13</b>
3.1. TOK VEKTORA ELEKTROSTATIČKOGA POLJA.....	13
3.2. GAUSSOV ZAKON ZA ELEKTROSTATIKU .....	15
3.3. PRIMJERI PRIMJENE GAUSSOVA ZAKONA .....	18
3.3.1. Elektrostatičko polje točkastog naboja.....	18
3.3.2. Elektrostatičko polje nabijene vodljive kugle .....	19
3.3.3. Elektrostatičko polje kugle s prostorno raspoređenim nabojem .....	22
3.3.4. Elektrostatičko polje dugog ravnog nabijenog vodiča .....	25
3.3.5. Elektrostatičko polje dugog nabijenog vodljivog cilindra .....	27
3.3.6. Elektrostatičko polje duge nabijene ravne plohe.....	30
<b>4. POTENCIJALNA ENERGIJA I POTENCIJAL ELEKTROSTATIČKOGA POLJA....</b>	<b>33</b>
4.1. POTENCIJALNA ENERGIJA, POTENCIJAL, RAZLIKA POTENCIJALA .....	33
4.2. KONZERVATIVNOST ELEKTROSTATIČKOGA POLJA .....	35
4.3. EKVIPOTENCIJALNE LINIJE I PLOHE .....	36
4.4. PRIMJERI ODREĐIVANJA POTENCIJALA .....	37
4.4.1. Potencijal točkastog naboja i skupine točkastih naboja .....	37
4.4.2. Potencijal nabijene vodljive kugle .....	38
4.4.3. Razlika potencijala među nabijenim pločama.....	39
4.5. OVISNOST ELEKTRIČNOG POLJA I POTENCIJALA .....	40
<b>5. VODIČI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU .....</b>	<b>41</b>
5.1. NABIJENI VODIČ – UVJETI ELEKTROSTATIČKE RAVNOTEŽE .....	41
5.2. NEUTRALNI VODIČ U STRANOME ELEKTROSTATIČKOM POLJU (ELEKTRIČNA INFLUENCIJA) .....	42
5.3. VEKTOR ELEKTRIČNOG POMAKA .....	45
5.4. RASPODJELA NABOJA NA POVRŠINI VODIČA .....	47
5.4.1. Ovisnost o geometrijskom obliku površine vodiča.....	47
5.4.2. Ovisnost o načinu elektriziranja.....	49
<b>6. DIELEKTRICI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU.....</b>	<b>52</b>
6.1. ELEKTRIČNA POLARIZACIJA .....	52
6.1.1. Inducirani dipoli .....	52
6.1.2. Permanentni dipoli .....	53

6.1.3.	Dielektričnost dielektrika.....	54
6.2.	MAXWELLOV POSTULAT .....	56
<b>7.</b>	<b>ELEKTRIČNA KAPACITIVNOST I KONDENZATORI.....</b>	<b>57</b>
7.1.	KONSTRUKCIJA, SVOJSTVA I OZNAKE KONDENZATORA.....	57
7.1.1.	Vrste kondenzatora .....	59
7.2.	ODREĐIVANJE KAPACITIVNOSTI KONDENZATORA .....	59
7.2.1.	Kapacitivnost pločastog kondenzatora.....	60
7.2.2.	Kapacitivnost osamljene kugle .....	60
7.2.3.	Kapacitivnost cilindričnog kondenzatora.....	61
7.3.	KRUGOVI S KONDENZATORIMA .....	62
7.3.1.	Serijski spoj.....	62
7.3.2.	Paralelni spoj.....	63
7.3.3.	Mješoviti spojevi.....	64
7.4.	SPOJEVI S VIŠESLOJNIM DIELEKTRICIMA – UVJETI NA GRANICI .....	64
7.4.1.	Poprečni spoj.....	65
7.4.2.	Uzdužni spoj .....	66
7.4.3.	Kosi spoj .....	68
7.5.	Nabijanje i izbijanje kondenzatora – prijelazne pojave .....	69
7.5.1.	Nabijanje kondenzatora.....	70
7.5.2.	Izbijanje kondenzatora .....	71
7.5.3.	RC derivator i RC integrator.....	74
<b>8.</b>	<b>ENERGIJA I SILA U ELEKTROSTATIČKOME POLJU .....</b>	<b>77</b>
8.1.	ENERGIJA U ELEKTROSTATIČKOME POLJU.....	77
8.2.	SILA U ELEKTROSTATIČKOME POLJU .....	79
<b>9.</b>	<b>PRAKTIČNA PRIMJENA ZAKONA I POJAVA U ELEKTROSTATICI.....</b>	<b>81</b>

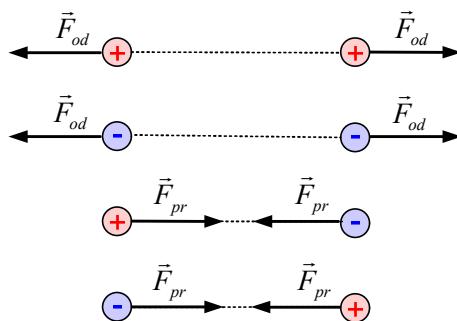
## 1. ELEKTROSTATIČKA INTERAKCIJA NABIJENIH TIJELA

Jednostavnim eksperimentom može se pokazati da kao rezultat međusobnog trljanja (trenja) neki materijali pokazuju svojstvo koje se naziva *elektricitet*. Naziv potječe od grčke riječi ἥλεκτρον (elektron = jantar). Ako primjerice trljamo štapić od jantara (plemenita smola) vunenom krpom, natrljani štapić pokazuje svojstvo privlačenja sitnih predmeta kao što su komadići papira. Sličan fenomen iskazivanja privlačne sile pokazuje i stakleni štap natrljan svilenom krpom. Kao rezultat trenja javlja se električna interakcija, tj. električna sila koja može nadvladati silu gravitacije. Za razliku od sile gravitacije koja je uvijek privlačna, rezultat električne interakcije nanelektriziranih tijela može biti privlačna ili odbojna sila. Primjerice, dva prethodno natrljana staklena štapa međusobno se odbijaju. Temeljem spomenutih eksperimenata može se zaključiti kako postoje dvije vrste elektriziranja. Američki fizičar B. Franklin<sup>1</sup> smatrao je elektricitet jedinstvenim fluidom koji je imantan svakoj materiji i koji onda može prelaziti s jednog tijela na drugo. S obzirom na tadašnja znanja zaključak je bio logičan, ali kako se kasnije pokazalo, neispravan. Ne radi se o fluidu, nego je stvarni uzrok stvaranja statičkog elektriciteta trenjem u unutarnjoj strukturi materije. Franklina ovdje spominjemo jer je uveo pojmove pozitivnog i negativnog elektriciteta. Pri tomu je smatrao kako je tijelo pozitivno elektrizirano ako mu je količina elektriciteta veća od normalne, odnosno negativno za količinu elektriciteta manju od normalne.

*Eksperimentalno je utvrđeno:*

- rezultat interakcije dvaju tijela s istom vrstom elektriziranja (oba pozitivna ili oba negativna) jest odbojna sila  $\vec{F}$ ;
- rezultat interakcije dvaju tijela s različitom vrstom elektriziranja (jedno tijelo pozitivno, a drugo negativno) jest privlačna sila  $\vec{F}$ .

Shematski se navedeni slučajevi mogu prikazati kao na *Slici 1.1*:



*Slika 1.1 – Sila kao rezultat interakcije nabijenih tijela*

### *Električni naboј*

Pri opisivanju međudjelovanja u gravitacijskom polju svakom tijelu pridružuje se odgovarajuća masa. Tako i vrstu elektriziranja nekog tijela, pozitivnu ili negativnu, opisujemo pridruživanjem pripadne „električne mase“, koju nazivamo električni naboј ili jednostavnije naboј. Svaki komad materije ili bilo koji njezin dio karakteriziraju dva nezavisna, ali fundamentalna svojstva: mase i naboјa.

Naboј se označuje sa:

$Q$  – statički naboј (naboј u stanju mirovanja),

<sup>1</sup> Benjamin Franklin (1706. – 1790.)

*q* – dinamički naboј (naboј u stanju gibanja).

Jedinica električnog naboјa 1 C (kulon) izražena preko temeljnih jedinica SI sustava: 1 C = 1 As. Razlog pozitivnog ili negativnog elektriziranja nekog tijela je pozitivni ili negativni naboј raspoređen po površini ili obujmu toga tijela. Tijelo koje ima jednaku množinu pozitivnog i negativnog naboјa naziva se neutralnim tijelom.

Za pojednostavljivanje analize odnosa među naboјima uvodi se pojam točkastog naboјa. *Točkasti naboјi* su nabijena sitna tijela (kuglice) čije se dimenzije mogu zanemariti i za koje se može smatrati kako je sav naboј koncentriran u jednoj točki.

### ***Elektrostatika***

U svim procesima u prirodi ukupni naboј izoliranog sustava<sup>2</sup> ostaje konstantan – nepromijenjen, tj. ukupni naboј se ne mijenja za bilo koji proces koji se zbiva unutar izoliranog sustava. Manifestacije međudjelovanja električnih naboјa u stanju mirovanja sasvim su različite u odnosu na slučajevе kada se naboјi gibaju.

Područje elektrotehnike koje proučava međudjelovanje električnih naboјa u mirovanju jest *elektrostatika*.

## **1.1. COULOMBOV ZAKON**

Elektrostatika se temelji na eksperimentalno utvrđenom inverznom kvadratnom zakonu. Do tog je zakona došao 1785. godine, nakon niza eksperimenata, francuski fizičar Coulomb.<sup>3</sup> U radu se koristio posebnim uređajem, tzv. torzijskom vagom. Kasnije je uporabom sličnog uređaja Cavendish odredio gravitacijsku konstantu *g*. Coulomb je vršio pokuse s nabijenim tijelima mijenjajući količinu naboјa *Q*<sub>1</sub> i *Q*<sub>2</sub> na njima i postavljajući ih na različite međusobne udaljenosti *r*.

Došao je do konačnog oblika Coulombova zakona za elektrostatiku, čija je definicija:

*Elektrostaticka sila *F<sub>e</sub>* između dvaju nabijenih tijela (čestica) upravno je proporcionalna umnošku njihovih naboјa *Q<sub>1</sub>* i *Q<sub>2</sub>*, a obrnuto je proporcionalna kvadratu udaljenosti *r*<sup>2</sup> među njima.*

Matematički izražen zakon glasi:

$$F_e = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \text{ N}, \quad (1-1)$$

gdje je *K* konstanta proporcionalnosti iznosa:

$$K \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}. \quad (1-2)$$

Sila je odbojna za naboјe istog predznaka, a privlačna za naboјe suprotnog predznaka, kako je to već prikazano na Sl. 1.1. Gornji izraz odnosi se na dva nabijena tijela koja se nalaze u vakuumu, ali se uz dovoljno dobro približenje može primijeniti i za tijela okružena zrakom. Zakon vrijedi samo za točkaste naboјe, odnosno za naboјe koji se mogu smatrati točkastima. Za elektrostaticku silu rabi se i naziv Coulombova sila, a slična je po obliku izrazu za gravitacijsku silu.

Coulombova sila je, kao i svaka sila, vektorska veličina koja osim apsolutnog iznosa ima i odgovarajući pravac i smjer djelovanja. Pravac djelovanja sile je uzduž spojnica naboјa, a smjer ovisi o polaritetu naboјa. Vektorski izražena Coulombova sila je:

<sup>2</sup> Sustav u koji se ništa ne unosi niti se išta iznosi.

<sup>3</sup> Charles Augustin de Coulomb (1736. – 1806.)

$$\vec{F}_e = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_0 \ N, \quad (1-3)$$

gdje je  $\vec{r}_0$  jedinični vektor (ort). Odbojna sila odgovara smjeru jediničnoga vektora, a smjer privlačne sile je suprotan smjeru jediničnoga vektora.

Za praktične proračune prikladnije je konstantu  $K$  prikazati u obliku:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1-4)$$

gdje je  $\epsilon_0$  dielektrična konstanta vakuuma koja predstavlja propustljivost (permitivnost) vakuuma. Iznos joj je:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}. \quad (1-5)$$

Coulombov zakon može se tada pisati u obliku:

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_0 \ N. \quad (1-6)$$

Ako se naboji ne nalaze u zraku (vakuumu), nego u nekoj materijalnoj sredini, potrebno je uvesti apsolutnu dielektričnu konstantu  $\epsilon$  koja je umnožak relativne  $\epsilon_r$  i dielektrične konstante vakuuma:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (1-7)$$

## 1.2. ELEKTROSTATIČKA SILA U SUSTAVU TOČKASTIH NABOJA

Ekperimentalno je potvrđeno kako se za Coulombovu silu može primijeniti teorem *superpozicije*. To je fizikalni princip nezavisnog djelovanja sila, po kojem se parcijalna sila između bilo kojih dvaju naboja može izračunati neovisno o prisutnosti ostalih naboja.

Prepostavimo da se u okolišu naboja  $Q$  nalazi  $n$  naboja ( $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ) koji silom djeluju na naboju  $Q$ . Tada je ukupna sila  $\vec{F}_{uk}$  jednaka vektorskoj sumi pojedinih sila kojima naboji  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  djeluju na naboju  $Q$ . Ukupna sila koju trpi naboju  $Q$  je, dakle, superpozicija sila kojima pojedini naboji djeluju na razmatrani naboju  $Q$ :

$$\vec{F}_{uk} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{QQ_1}{r_1^2} \vec{r}_{0_1} + \frac{QQ_2}{r_2^2} \vec{r}_{0_2} + \dots + \frac{QQ_n}{r_n^2} \vec{r}_{0_n} \right). \quad (1-8)$$

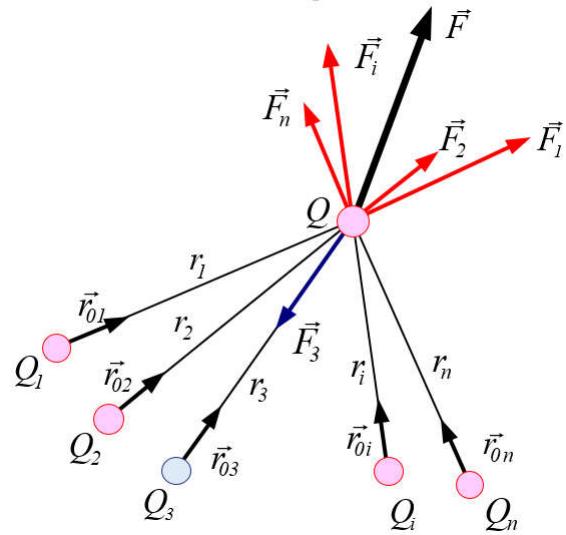
Gornja relacija izražena u zatvorenom obliku algebarske sume od  $n$  pribrojnika dana je izrazom:

$$\vec{F}_{uk} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{QQ_i}{r_i^2} \vec{r}_{0_i} \quad (1-9)$$

gdje je  $i=1,2,3,\dots,n$ .

Na *Slici 1.2* prikazan je sustav od  $n$  naboja koji silama djeluju na naboju  $Q$ . U primjeru na slici svi

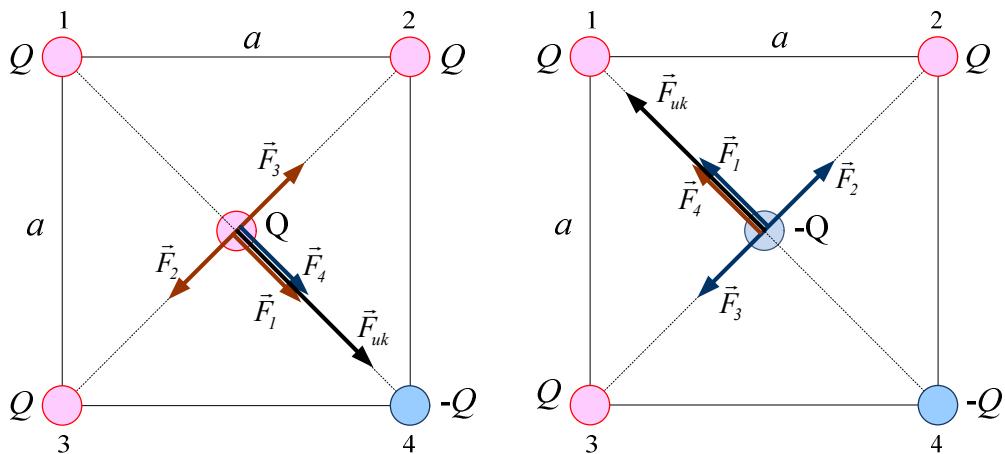
naboji su pozitivni osim  $Q_3$ , koji je negativan. Zbroj svih vektora daje za rezultat ukupnu силу. Vektori se zbrajaju suglasno poznatome pravilu paralelograma sila.



Slika 1.2 – Određivanje ukupne sile u sustavu od  $n$  naboja

Primjer 1.1: Četiri jednaka točkasta naboja  $Q$  (tri pozitivna, jedan negativan) nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Potrebno je odrediti vektor ukupne sile (iznos i smjer) koja djeluje na naboj u središtu kvadrata. Kako se mijenja iznos i smjer vektora ukupne sile ako je u središtu kvadrata naboj  $-Q$ ?

Rješenje:



$$r = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$$

$$F_2 + F_3 = 0 ; F_1 + F_4 = 2F_1$$

$$F_{uk} = 2F_1$$

$$F_{uk} = 2 \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 \frac{a^2}{2}} = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 a^2}$$

## 2. ELEKTROSTATIČKO POLJE

Poznato je da masa „osjeća“ gravitacijsku silu. Uzrok je prisutnost Zemljina magnetskog polja. Kada se naboј dovede u blizinu nekog drugog naboјa, na njega djeluje Coulombova električna sila, pa tvrdimo kako je djelovanje te sile posljedica činjenice da se naboј nalazi u električnom polju. *Električno polje* je prostor u kojem naboј osjeća djelovanje sile i vektorska je veličina. U širem značenju električno polje je funkcija prostornih koordinata i vremena. Sljedeću analizu ograničit ćemo samo na poseban slučaj električnoga polja koje ovisi samo o prostornim koordinatama – *elektrostatičko polje*. Također radi jednostavnosti pretpostavka je da se proučava djelovanje naboјa koji se nalaze u vakuumu, odnosno zraku. Kasnije će se analiza proširiti i na prisutnost naboјa u materijalnoj sredini (dielektriku).

Za određivanje iznosa i smjera elektrostatičkog polja primjenjuje se *pokusni naboј* ( $Q_0$ ). To je dovoljno malen točkasti naboј koji svojim iznosom ne remeti polje koje se proučava, tj. slika polja se zbog prisutnosti pokusnog naboјa ne deformira. Pokusni naboј se zbog jednoznačnog tretiranja polja uvijek uzima pozitivnim. Proučavanje elektrostatičkog polja svodi se na ispitivanje sile koja djeluje na pokusni naboј kada ga smještamo u različite točke polja. Ako na pokusni naboј djeluje sila, tada u toj točki prostora postoji elektrostatičko polje.

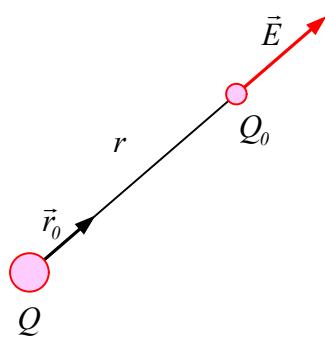
*Jakost (intenzitet) elektrostatičkog polja*  $\vec{E}$  u nekoj točki polja definira se kao sila koja djeluje na pozitivni pokusni naboј smješten u toj točki polja, tj.:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \quad (2-1)$$

Brojčano (po iznosu) elektrostatičko polje je jednako sili koja djeluje na jedinični pokusni naboј. Smjer vektora elektrostatičkog polja je smjer vektora sile koja djeluje na pozitivni pokusni naboј.

### 2.1. ELEKTROSTATIČKO POLJE TOČKASTOG NABOJA

Analiziramo izolirani točkasti naboј  $Q$  zbog kojega se u okolnom prostoru formira elektrostatičko polje kao na *Slici 2.1*.



Slika 2.1 – Polje točkastog naboja  $Q$

Jakost elektrostatičkog polja u bilo kojoj točki  $T$  na udaljenosti  $r$  od naboјa  $Q$  dobije se tako da se  
Osnove elektrotehnike I 1. dio: ELEKTROSTATIKA

u točku  $T$  postavi pokusni naboј  $Q_0$ . Na pokusni naboј sada djeluje odbojna sila. Primijeni li se izraz za Coulombovu silu, među naboјima  $Q$  i  $Q_0$  slijedi:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} \vec{r}_0 \cdot \frac{1}{Q_0}, \quad (2-2)$$

pa je elektrostatičko polje točkastog naboјa na mjestu gdje se nalazi pokusni naboј:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \quad \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (2-3)$$

U proučavanjima koja slijede određivat će se jakost elektrostatičkog polja u nekoј točki podrazumijevajući pri tomu kako se u toj točki nalazi pokusni naboј.

Iz gornje relacije može se zaključiti:

- jakost elektrostatičkoga polja proporcionalna je naboju  $Q$  koji je i uzrok nastajanja polja, a opada s kvadratom udaljenosti promatrane točke od naboja  $Q$ ;
- polje točkastog naboјa jednako je u svim točkama koje su jednako udaljene od naboja, tj. polje je radijalno (centralno simetrično);
- sve točke na nekoј koncentričnoj sfernoj površini kojoj je  $Q$  središte imaju jednak iznos elektrostatičkoga polja. To su tzv. *ekvipotencijalne plohe*.

## 2.2. ELEKTROSTATIČKO POLJE SUSTAVA TOČKASTIH NABOJA

Razmatra li se skupina od  $n$  naboјa  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , proizvoljno smještenih u prostoru, ukupno elektrostatičko polje u nekoј točki  $T$  dobije se primjenom načela superpozicije. U točku  $T$  postavi se pokusni naboј  $Q_0$  i odredi ukupna sila, kao što je već opisano u prethodnom poglavljiju. Primijeni li se na dobivenu silu relacija za elektrostatičko polje, dobije se:

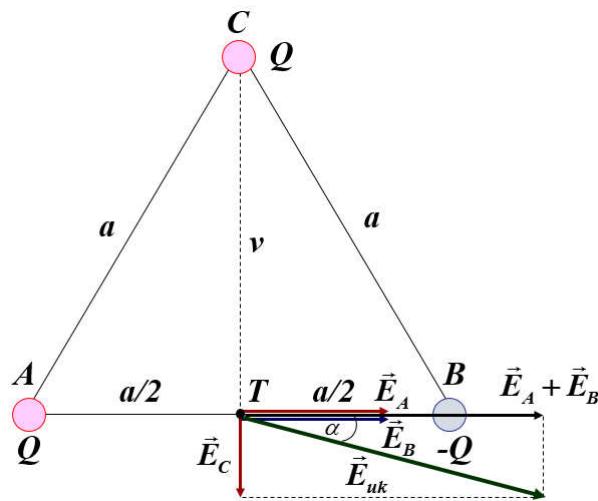
$$\vec{E}_{uk} = \frac{F_{uk}}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_0 Q_1}{r_1^2} \vec{r}_{0_1} + \frac{Q_0 Q_2}{r_2^2} \vec{r}_{0_2} + \dots + \frac{Q_0 Q_n}{r_n^2} \vec{r}_{0_n} \right) \cdot \frac{1}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1^2} \vec{r}_{0_1} + \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{r}_{0_2} + \dots + \frac{Q_n}{r_n^2} \vec{r}_{0_n} \right) \quad (2-4)$$

odnosno:

$$\vec{E}_{uk} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_{0_i}. \quad (2-5)$$

Primjer 2.1: U vrhovima  $A, B, C$  istostraničnog trokuta stranice  $a$  smješteni su naboјi:

$Q_A = Q, Q_B = -Q, Q_C = Q$ . Odredite vektor elektrostatičkog polja u točki koja je smještena na polovištu stranice  $AB$ .



Rješenje:

$$r_A = r_B = \frac{a}{2} \Rightarrow E_A = E_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \frac{a^2}{4}} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \quad r_C = v = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$E_{AB} = E_A + E_B = \frac{2Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \quad E_C = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \frac{3a^2}{4}} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$E_{uk} = \sqrt{E_{AB}^2 + E_C^2} = \sqrt{\left(\frac{2Q}{\pi\epsilon_0 a^2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}Q}{3\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_C}{E_{AB}} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{E_C}{E_{AB}}$$

Izravna primjena Coulombove sile za određivanje polja moguća je u jednostavnom slučaju točkastih naboja, gdje je sav naboj koncentriran u jednoj točki. Ako je naboj na određen način raspoređen u prostoru (pravčasti, plošni ili prostorni naboj), dobije se složeno elektrostatičko polje koje se proračunava drugim metodama (vidi sljedeće poglavlje).

## 2.3. SILNICE ELEKTRIČNOGA POLJA

U nastojanju da predoči („učini vidljivim“) električno polje, M. Faraday<sup>4</sup> je u svojim eksperimentalnim istraživanjima uveo pojam *električne silnice*. To su imaginarni putovi – crte, nacrtane na način da je njihov smjer u bilo kojoj točki istovremeno i smjer električnog polja u toj točki. Svojstva električnih silnica jesu:

- silnice izlaze iz pozitivnih i završavaju u negativnim nabojima – pozitivni naboji su *izvori*, a negativni naboji *ponori* silnica;
- silnice se ne mogu sjeći međusobno;
- električno polje je tangencijalno usmjereno na svaku točku na silnici;

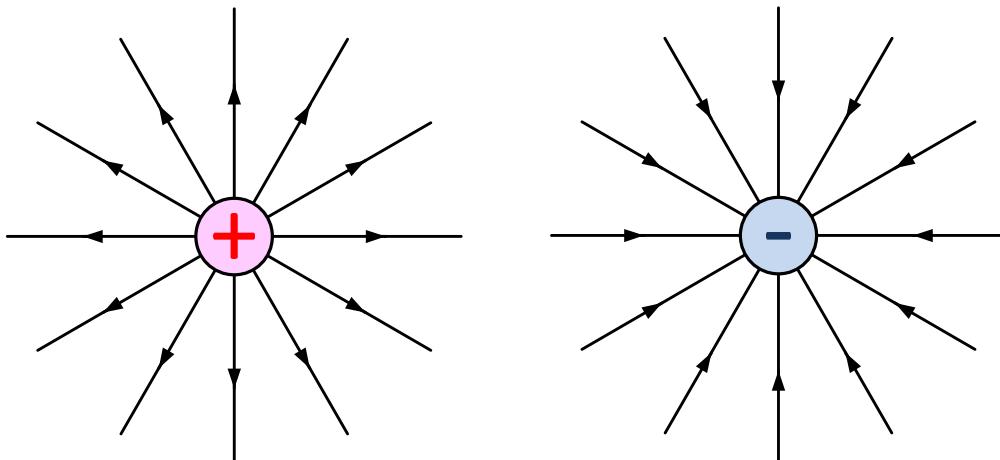
<sup>4</sup> Michael Faraday (1791. – 1867.)

- cijeli prostor oko naboja ispunjen je silnicama;
- gustoća silnica je mjera jakosti polja.

Iz svega se može zaključiti kako su silnice crte po kojima bi se pokušni naboje kretao u električnom polju od pozitivnoga prema negativnog naboju.

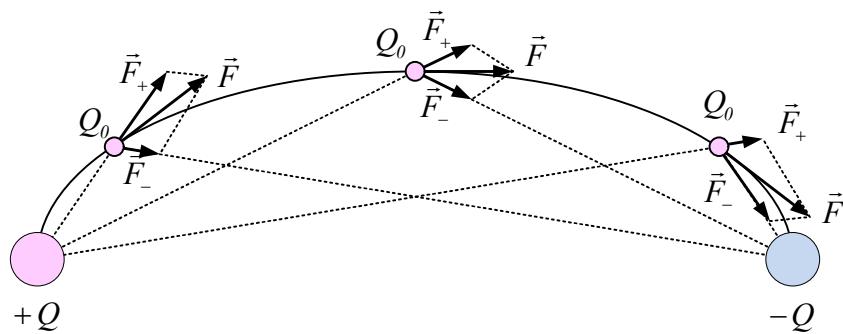
Za izolirani pozitivni naboje  $+Q$  pokušni bi se naboje pod utjecajem sile udaljavati radijalno po pravcu. U slučaju izoliranoga negativnog naboja na isti bi se način pokušni naboje približavati uzročniku polja, naboju  $-Q$ .

Slika elektrostatičkog polja izoliranih naboja  $+Q$  i  $-Q$  ilustrirana električnim silnicama prikazana je na *Slici 2.2*.



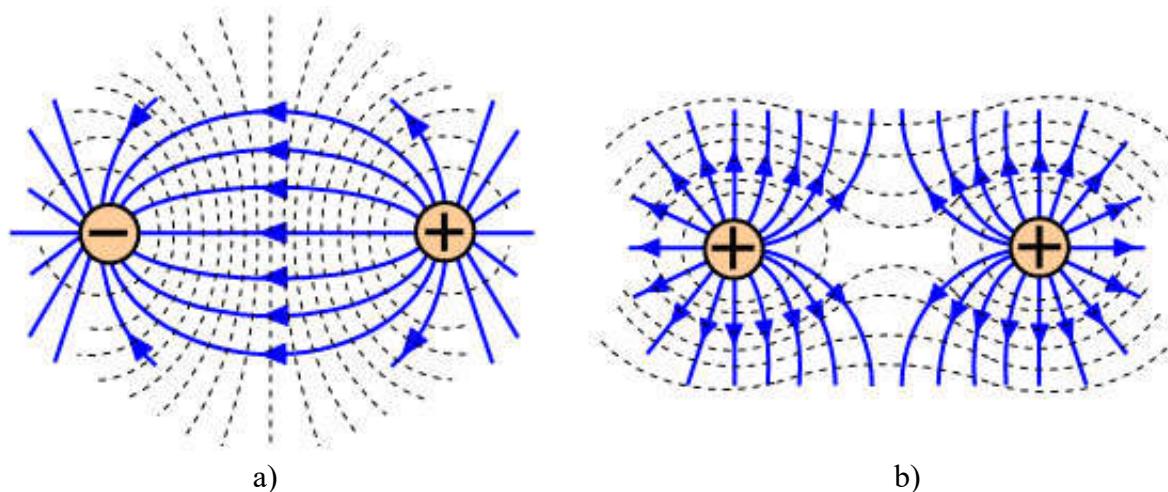
*Slika 2.2 – Silnice pozitivnog i negativnog točkastog naboja*

Slika polja postaje znatno složenija čim se razmatra polje sustava naboja. Na *Slici 2.3* prikazana je jedna od mogućih putanja pokušnog naboja u sustavu dvaju jednakih naboja suprotnog predznaka.



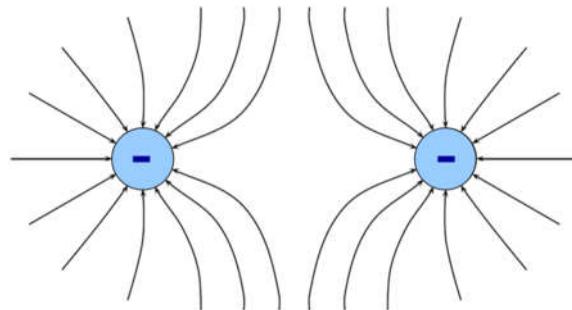
*Slika 2.3 – Jedna od putanja pokušnog naboja u sustavu naboja  $+Q$  i  $-Q$*

Pokušni naboje izvodi složeno gibanje. Na njega djeluju dvije sile,  $\vec{F}_+$  i  $\vec{F}_-$ , zbog djelovanja pozitivnoga, odnosno negativnoga naboja, a ukupna sila u svakoj točki tangencijalna je u odnosu na putanju pokušnog naboja. Na isti se način mogu odrediti putanje (silnice) za bilo koje položaje pokušnog naboja u prostoru. Potpun prikaz polja silnicama za gornji slučaj, kao i za slučaj sustava dvaju naboja jednaka (pozitivnog) predznaka, dan je na *Slici 2.4*. Na slici su ucrtane i odgovarajuće ekvipotencijalne plohe, koje će biti naknadno opisane i analizirane.



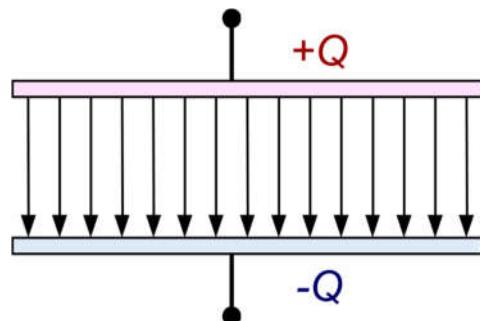
Slika 2.4 – Silnice u sustavu naboja različita predznaka (a) i jednaka pozitivnog predznaka (b) s pripadnim ekvipotencijalnim linijama

Na Slici 2.5 prikazana je raspodjela silnica za sustav dvaju naboja jednaka negativnog predznaka:



Slika 2.5 – Silnice elektrostatičkog polja za sustav dvaju jednakih naboja  $-Q$

Stvaranje homogenoga elektrostatičkog polja prikazano je na primjeru sustava paralelnih ploča nabijenih nabojima suprotnog predznaka (pločasti kondenzator) – Slika 2.6.



Slika 2.6 – Silnice elektrostatičkoga polja dviju ploča nabijenih nabojima suprotnog predznaka

Na gornjem i donjem kraju ploča dolazi do manjih izobličenja polja zbog rubnih efekata. Za dovoljno malen razmak između ploča elektrostatičko polje može se smatrati homogenim.

## 2.4. ELEKTROSTATIČKO POLJE ZA JEDNOLIKE RASPODJELE NABOJA

Do sada smo proučavali sile i elektrostatička polja točkastih naboja. To su najjednostavniji primjeri naboja koji zauzimaju zanemarivi prostor. U nizu slučajeva naboje se ne može smatrati točkastim, jer je kontinuirano raspoređen unutar nekog prostora. Nejednoliku raspodjelu naboja razmatrat ćemo samo u nekim posebnim slučajevima koji su praktične naravi (primjerice raspodjela naboja u ovisnosti o geometrijskom obliku površine – efekt šiljka i dr.).

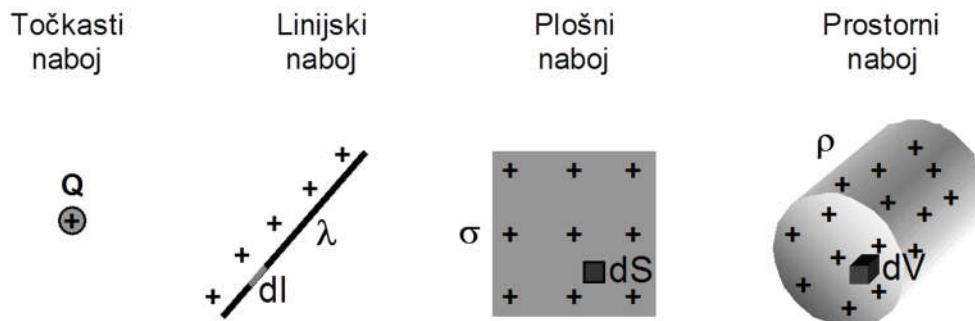
### 2.4.1. Vrste raspodjele naboja

Naboj općenito može biti raspoređen uzduž crte, na površini ili unutar obujma neke nabijene krivulje, plohe, odnosno tijela. U tom je slučaju prikladno definirati odgovarajuću gustoću naboja. S obzirom na raspodijeljenost u prostoru ona može biti:

- prostorna gustoća naboja  $\rho$ ,
- plošna gustoća naboja  $\sigma$ ,
- linijska gustoća naboja  $\lambda$ .

Analizirat ćemo samo slučajeve *jednolike (uniformne)* raspodjele naboja u jednoj, dvjema ili trima dimenzijama.

Primjer svih spomenutih raspodjela naboja prikazan je na *Slici 2.7*.



*Slika 2.7 – Primjer razlicitih raspodjela naboja*

Na slici su naznačeni elementi duljine  $dl$ , plohe  $dS$  i obujma  $dV$ , koji pripadaju odgovarajućim gustoćama naboja. Oni moraju biti dovoljno maleni kako bi pripadna gustoća u svakom od njih bila konstantna, ali istovremeno i dovoljno veliki kako bi bili jednoliko ispunjeni nabojem.

#### Prostorna gustoća naboja

Ako odaberemo diferencijalno mali element obujma  $dV$  ( $dV \rightarrow 0$ ) što sadrži količinu naboja  $dQ$ , prostorna gustoća naboja definirana je izrazom:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{As} \quad \frac{\text{m}^3}{\text{m}^3}. \quad (2-6)$$

Ukupni naboj dobije se zbrajanjem svih doprinosa  $dQ$  dok se ne obuhvati cijeli naboje  $Q$ :

$$Q = \int_0^{\rho} dQ. \quad (2-7)$$

Kako je element naboja  $dQ = \rho dV$ , ukupni se naboje u prostoru obujma  $V$  može izraziti preko prostornog integrala protegnutoga po cijelom obujmu  $V$ . Vrijedi, dakle:

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (2-8)$$

#### Plošna gustoća naboja

Ako se razmatraju nabijena vodljiva tijela, u elektrostatičkim uvjetima sav naboje raspoređen je uvijek na njihovoj površini. Potrebno je odrediti dovoljno mali element plohe  $dS$  na kojem je gustoća naboja konstantna, a koji sadrži količinu naboja  $dQ$ . Plošna gustoća naboja jest:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \quad \text{As/m}^2. \quad (2-9)$$

Budući da je element naboja  $dQ = \sigma dS$ , ukupni se plošni naboje dobije kao plošni integral po plohi površine  $S$ :

$$Q = \int_S \sigma dS. \quad (2-10)$$

#### Linijska (pravčasta) gustoća naboja

Naboje može biti raspoređeni po nekoj geometrijskoj crti (krivulji)  $L$ . Takav raspored naboja ima primjerice komad tankoga nabijenog bakrenog vodiča. Za odabranu dovoljno malu duljinu  $dl$  na kojoj je jednoliko raspoređena količina naboja  $dQ$  linijska gustoća naboja određena je izrazom:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \quad \text{As/m}. \quad (2-11)$$

Sumiranjem elemenata naboja  $dQ = \lambda dl$  dobije se ukupni linijski naboje kao linijski integral po krivulji  $L$ , tj.:

$$Q = \int_L \lambda dl. \quad (2-12)$$

### 2.4.2. Određivanje elektrostatičkoga polja temeljem Coulombova zakona

Jednoliko raspoređen naboje može se podijeliti na velik broj točkastih naboja (kvazitočkasti naboje), čiji zbroj predstavlja ukupni naboje. Pri tomu možemo uporabiti izraz za polje točkastog naboja dobiven iz Coulombova zakona. Elektrostatičko polje za svaku od navedenih raspodjela naboja može se odrediti kao zbroj (integral) doprinosa elemenata polja niza točkastih naboja koji tvore razmatranu raspodjelu naboja:

$$\vec{E} = \int_V \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \quad \text{za prostorni naboje} \quad (2-13)$$

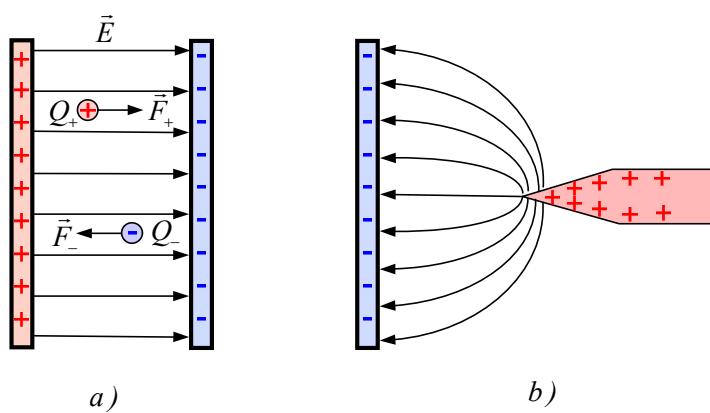
$$\vec{E} = \int_S \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 = \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \quad \text{za plošni naboje} \quad (2-14)$$

$$\vec{E} = \int_L \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 = \int_L \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0 \quad \text{za linijski nabo} . \quad (2-15)$$

Vrijednosti  $r^2$  i  $\vec{r}_0$  mijenjaju se za svaku od gornjih triju relacija. Navedene formule primjenjuju se na određivanje elektrostatičkog polja specifičnih raspodjela naboja, primjerice: polja nabijenog štapa, ravne plohe, polja u centru i osi nabijenog prstena i nabijenog diska, polja dvaju nabijenih vodiča i dr. Rješavanje je matematički relativno složeno i prelazi zahtjeve stručnoga studija, pa će biti izostavljeno.

Veza između elektrostatičkog polja i naboja kao uzročnika polja može se izraziti i temeljem jednostavnog a vrlo uporabljivog zakona, posebice za slučajeve kada postoji određena vrsta simetričnosti polja. To je Gaussov zakon, koji će biti prikazan u integralnoj formi.

### 2.4.3. Homogeno i nehomogeno elektrostatičko polje



Slika 2.8 – Homogeno (a) i nehomogeno (b) elektrostatičko polje

Na *Slici 2.8.a)* prikazano je *homogeno* elektrostatičko polje. Takvo polje stvara se između dugih, paralelnih, blisko postavljenih elektroda – vodljivih tijela izoliranih od okoline. Polje počinje na pozitivnim, a završava na negativnim nabojima smještenima na površini elektroda. U svakoj točki polje ima jednaku jakost i smjer. Silnice prolaze paralelno i jednako su razmaknute. Sila na pozitivni nabo  $+Q$ , unesen u homogeno elektrostatičko polje, u smjeru je polja, a sila na negativni nabo  $-Q$  suprotna je smjeru polja. Uneseni naboji stvaraju vlastito elektrostatičko polje, ali redovito se pretpostavlja kako je iznos toga naboja malen, pa je njegovo djelovanje zanemarivo.

Ako silnice nisu paralelne, polje nije jednolično, ono je *nehomogeno*. Primjeri nehomogenih polja već su prikazani na slikama polja točkastih nabojia i sustava točkastih nabojia. Električne silnice svojom gustoćom u svakoj točki predočuju intenzitet polja. Na *Slici 2.8.b)* dan je primjer nehomogenoga polja koje se stvara između šiljka i radne elektrode.

### 3. TOK VEKTORA ELEKTROSTATIČKOGA POLJA – GAUSSOV ZAKON

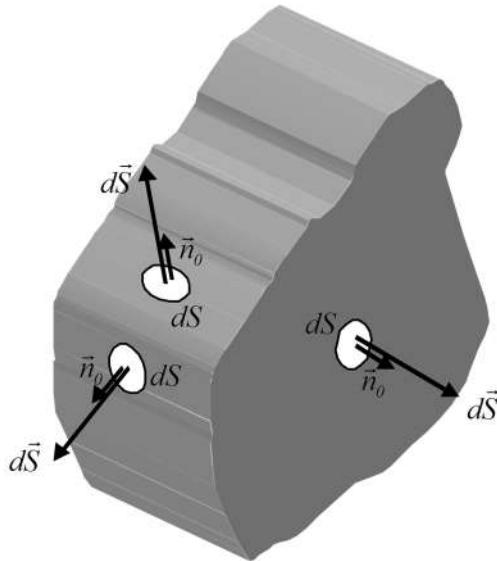
Za razumijevanje Gaussova zakona potrebno je predznanje o matematičkoj interpretaciji određenih fizikalnih veličina i pojava. U tom smislu potrebno je razjasniti na koji se način ploha interpretira kao vektor i kako se određuje tok vektora nekog polja.

#### 3.1. TOK VEKTORA ELEKTROSTATIČKOGA POLJA

Ploha u prostoru može imati bilo koji položaj, orijentaciju i veličinu. Radi prikladnije matematičke interpretacije ploha se definira pripadnim vektorom. Iznos vektora jednak je iznosu površine odabranoga elementa plohe, a smjer vektora okomit je na element plohe. Samo u posebnim slučajevima jednostavnih tijela (kugla, cilindar, kocka, kvadar, ...) površine pojedinih ploha mogu se izravno izraziti jednim vektorom. Kako kod složenijih tijela to nije slučaj, potrebno je razmatranoj plohu podijeliti na diferencijalno male površine  $dS$ . Pri tomu je svaki element površine  $dS$  odabran dovoljno malenim, tako da ga se može smatrati ravnim. Smjer se definira jediničnim vektorom površine  $\vec{n}_0$ , pa je vektor elementa površine dan izrazom:

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0. \quad (3-1)$$

Na *Slici 3.1* prikazano je proizvoljno tijelo s naznačenim primjerima elemenata površine na različitim plohama tijela:



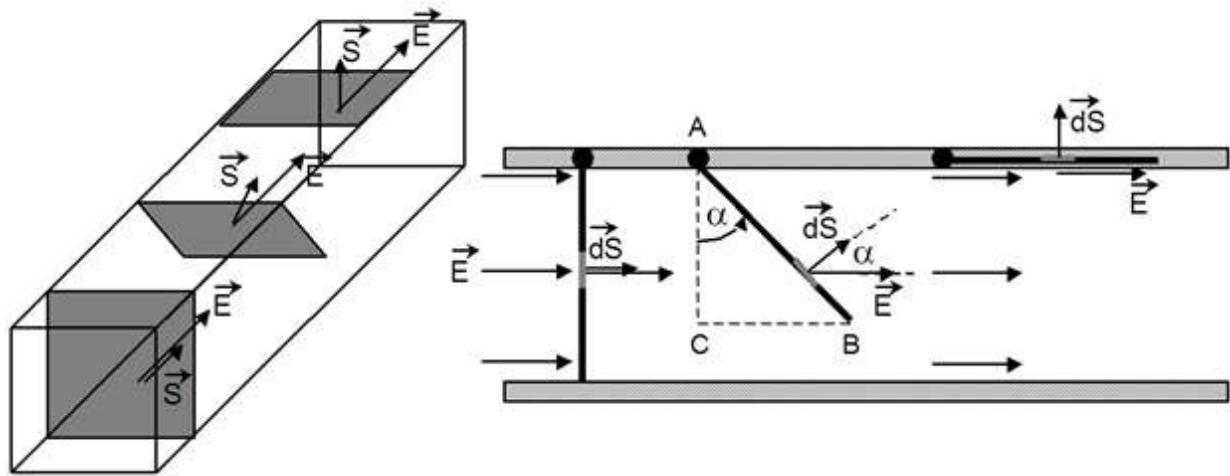
*Slika 3.1 – Primjer prikazivanja površine plohe vektorom*

Pojam toka ili protjecanja dolazi iz područja hidromehanike i ima zornu interpretaciju u protjecanju tekućine kroz cijev promjenljiva presjeka.

Za proučavanje toka elektrostatističkoga polja radi jednostavnosti razmatrat ćemo homogeno elektrostatističko polje. Takvo polje generira jednoliko nabijena ravnina, a opisano je paralelnim silnicama i konstantnog je iznosa. Prepostavimo da polje upada pod pravim kutom u cijev



presjeka  $S$ , kao na *Slici 3.2.*



*Slika 3.2 – Shematski prikaz toka vektora*

Sličnu vrstu polja generira Sunce, jer se Sunčeva svjetlost dade prikazati paralelnim zrakama svjetlosti, pa se radi zornosti prikaza može zamisliti kako se umjesto elektrostatičkog razmatra svjetlosno polje. Unutar cijevi postavljen je zastor (zastor) čija površina  $S$  odgovara poprečnom presjeku cijevi. Zastor može rotirati oko osi u točki  $A$ .

Tok vektora polja  $\psi$  je skalarna veličina, a dobije se kao umnožak polja  $E$  i efektivne površine  $S_{ef}$  u koju „ulazi“ vektor polja. Efektivna površina je promjenljiva, jer ovisi o položaju zastora. Definira se kao površina koja se dobije projekcijom površine  $S$  na površinu kroz koju tok ima maksimalan iznos. Matematički prikaz toka kojim su obuhvaćeni svi mogući položaji zastora dan je skalarnim umnoškom vektora polja  $\vec{E}$  i vektora plohe  $\vec{S}$ :

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos\alpha. \quad (3-2)$$

Razmotrimo tri karakteristična slučaja kao na gornjoj slici.

U prvom slučaju zastor je postavljen okomito na upadne zrake polja i cijela površina  $S$  osvijetljena je maksimalnim intenzitetom. Vektori polja i plohe  $S$  su kolinearni (paralelni), pa je kut  $\alpha = 0^\circ$ . Slijedi kako je:

$$\Psi = \Psi_{max} = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES. \quad (3-3)$$

U drugom primjeru zastor je zakrenut u odnosu na početni položaj za neki kut  $\alpha$ . Efektivna površina koju osvjetjava maksimalni tok je  $S_{ef} = S \cos\alpha$  (presjek AC), pa je tok:

$$\Psi = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES \cos\alpha. \quad (3-4)$$

U trećem slučaju polje je tangencijalno u odnosu na zastor, pa je zastor neosvijetljen. Ploha  $\vec{S}$  i polje  $\vec{E}$  stoje pod pravim kutom  $\alpha = 90^\circ$ , pa je tok:

$$\Psi = \Psi_{min} = \vec{E} \cdot \vec{S} = 0. \quad (3-5)$$

Razvidno je kako se svi slučajevi mogu obuhvatiti i jedinstveno matematički tretirati uporabom skalarnog umnoška.

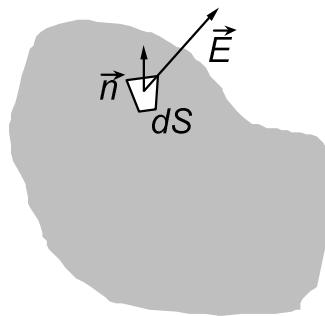
Kako je u općem slučaju ploha  $S$  promjenljiva oblika i položaja u prostoru, potrebno ju je razdijeliti na elemente površine:  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$ . Te su površine ravne i tako malene da možemo pretpostaviti kako je elektrostatičko polje konstantno u svakoj točki te površine. Doprinos toku od svake takve površine je element toka  $d\Psi$ , tj.:

$$d\Psi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \cos\alpha. \quad (3-6)$$

Ukupni tok dobije se sumiranjem djelomičnih tokova od svakog elementa plohe  $S$ . Suma se, dakle, proteže po cijeloj plohi, a matematički se takva „fina“ suma izražava integralom po plohi  $S$ :

$$\Psi = \int_S d\Psi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S EdS \cos\alpha. \quad (3-7)$$

Poseban slučaj je izračunavanje toka elektrostatičkoga polja kroz zatvorenu plohu proizvoljna oblika. Ako unutar plohe postoji elektrostatičko polje, postojat će i elektrostatički tok kroz zatvorenu plohu. Zatvorena ploha podijeli se, kako je već opisano, na vrlo male plohe površine  $dS$ . Smjer im je određen smjerom *vanjske normale* (okomice) na taj dio površine plohe. U općem slučaju vektor elektrostatičkog polja i vektor elementa zatvorene plohe nalaze se pod nekim kutom, kako je to prikazano na *Slici 3.3*.



*Slika 3.3 – Određivanje toka kroz zatvorenu plohu*

Ukupni tok vektora elektrostatičkog polja  $\vec{E}$  kroz zatvorenu površinu  $\vec{S}$  dobije se zbrajanjem umnožaka  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  za sve elemente površine  $dS$ :

$$\Psi_{el} = \oint_S d\Psi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3-8)$$

Tok elektrostatičkog polja može se povezati s brojem silnica koje prolaze kroz zatvorenu površinu. Silnice koje ulaze smatramo negativnim, a one koje izlaze iz zatvorene površine pozitivnim. Kada je broj silnica koje u površinu ulaze jednak broju silnica koje iz nje izlaze, ukupni tok jednak je nuli.

## 3.2. GAUSSOV ZAKON ZA ELEKTROSTATIKU

*Gaussov zakon*, jedan od temeljnih zakona elektrostatike, u integralnoj formi glasi:

$$\Psi_{el} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0}. \quad (3-9)$$

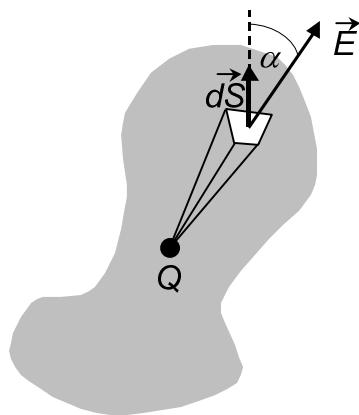


**Ukupni tok  $\Psi$ elektrostatičkoga polja  $\vec{E}$  kroz bilo koju zatvorenu plohu  $S$ , odnosno integral skalarног umnoška  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$  po toj plohi, jednak je ukupnom električnom naboju  $Q_{uk}$  obuhvaćenom tom plohom, podijeljenom s dielektričnom konstantom vakuma.**

Iz jednadžbe Gaussova zakona slijede važni zaključci:

- tok elektrostatičkog polja ovisi samo o iznosu naboja obuhvaćenoga zatvorenom plohom;
- položaj naboja unutar plohe, kao ni veličina i oblik zatvorene plohe, nemaju utjecaja na elektrostatički tok;
- ako zatvorenom plohom nije obuhvaćen nikakav naboј, tok elektrostatičkog polja jednak je nuli, dakle  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ;
- naboji izvan zatvorene plohe ne utječu na tok (broj ulaznih jednak je broju izlaznih silnica).

Kako primijeniti Gaussov zakon za određivanje elektrostatičkog polja nekog naboja? Temeljnu ideju proučit ćemo na najjednostavnijem primjeru točkastog naboja prema *Slici 3.4*:

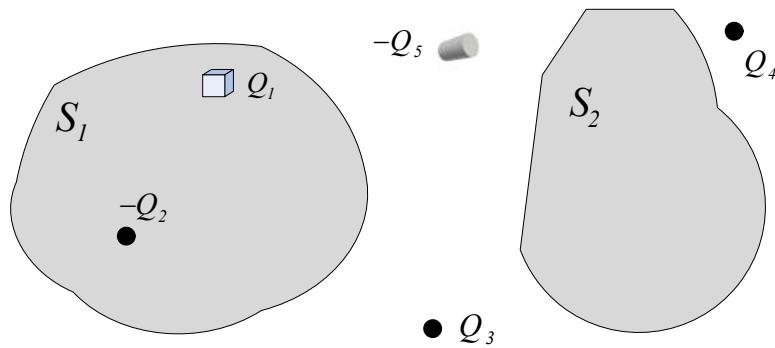


*Slika 3.4 – Primjer određivanja polja primjenom Gaussova zakona*

Postupak je sljedeći:

- oko naboja čije elektrostatičko polje želimo odrediti postavi se u općem slučaju bilo koja zatvorena ploha (kada je poznata raspodjela naboja u rješavanju je potrebno slijediti simetriju zadane raspodjele – u slučaju točkastog naboja to bi bila koncentrična kugla);
- zatvorena ploha podijeli se na vrlo male elemente plohe  $dS$  prikazane odgovarajućim vektorom usmjerenim izvan obujma obuhvaćenog plohom;
- odredi se pripadni vektor  $\vec{E}$  za odabrani element plohe  $d\vec{S}$ ;
- postavi se izraz za pripadni element toka, tj. skalarni umnožak  $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ ;
- zbrajanjem elemenata toka (integriranjem) po cijeloj zatvorenoj plohi odredi se ukupni tok;
- primjeni se Gaussov zakon – izjednači dobiveni tok s ukupno obuhvaćenim nabojem i podijeli sa  $\epsilon_0$ ;
- iz dobivene jednadžbe izrazi se elektrostatičko polje.

Gaussov zakon primjenjiv je za izračunavanje polja simetričnih raspodjela naboja. Zakon vrijedi i za nesimetrične raspodjele naboja, ali se za proračun polja ne može primijeniti. Za takve se slučajeve primjenjuje Coulombov zakon, kako je već opisano u *Pogl. 1. Valjanost Gaussova zakona i za nesimetrične raspodjele naboja*, kao i valjanost zaključaka koji slijede iz Gaussova zakona, može se pokazati primjerom kao na *Slici 3.5*:



Slika 3.5 – Prikaz primjene Gaussova zakona

Na slici su  $S_1$  i  $S_2$  zatvorene plohe. Ukupni tok koji izlazi iz plohe  $S_1$  jest:

$$\Psi_1 = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{\epsilon_0} \quad (3-10)$$

jer ovisi samo o nabojima obuhvaćenima tom plohom i neovisan je o položaju naboja  $Q_1$  i  $-Q_2$ . Tokovi od naboja  $Q_3$ ,  $Q_4$  i  $-Q_5$  „prodiru“ kroz plohu  $S_1$ , ali pojednostavljeno rečeno sav tok koji u tu plohu ulazi iz nje i izlazi, pa je doprinos naboja  $Q_3$ ,  $Q_4$  i  $-Q_5$  na ukupni tok kroz  $S_1$  jednak nuli. Na sličan način zaključuje se kako je ukupni tok kroz plohu  $S_2$  jednak nuli:

$$\Psi_2 = \oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \quad (3-11)$$

jer tom plohom nije obuhvaćen nikakav naboј, pa nema ni izvora polja unutar plohe.

Naboji unutar bilo koje zatvorene plohe mogu biti raspoređeni kao sustav od  $n$  točkastih naboja, ili u obliku pravčasto, plošno ili prostorno raspoloženih naboja. Primijene li se prethodno pokazane relacije za ukupne količine naboja, Gaussov zakon za navedene slučajevi glasi:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{I}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \quad \text{za sustav točkastih naboja} \quad (3-12)$$

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_L \lambda dl \quad \text{za linijsku raspodjelu naboja} \quad (3-13)$$

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_\sigma} \sigma dS \quad \text{za plošnu raspodjelu naboja} \quad (3-14)$$

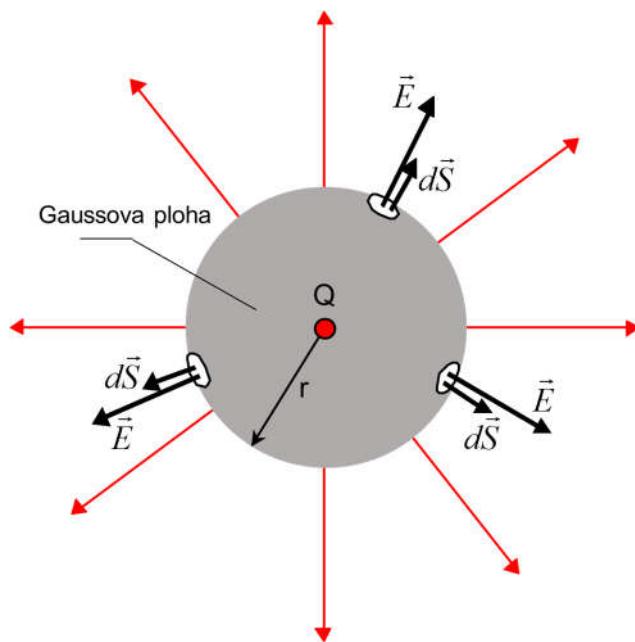
$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad \text{za prostornu raspodjelu naboja.} \quad (3-15)$$

### 3.3. PRIMJERI PRIMJENE GAUSSOVA ZAKONA

Gaussov zakon omogućuje jednostavno određivanje jakosti elektrostatičkog polja za tipične simetrične raspodjele naboja, kao u slučaju točkastog naboja, beskonačnog nabijenog vodiča, beskonačne cilindrične nabijene plohe, sferno simetrične raspodjele naboja, beskonačno duge nabijene ravnine i dr. Termin „beskonačna duljina“ (vodiča, cilindra, ravnine, ...) uzima se radi zanemarivanja rubnih efekata, a u praktičnim slučajevima ima značenje vrlo velike duljine. Kontinuirana raspodjela naboja može imati pravokutnu simetriju ako ovisi samo o varijabli  $x$  (ili  $y$  ili  $z$ ), cilindričnu simetriju ako ovisi samo o polumjeru cilindra, a sfernu simetriju ako ovisi samo o polumjeru sfere.

#### 3.3.1. Elektrostatičko polje točkastog naboja

Za određivanje polja izoliranoga točkastog naboja po iznosu i smjeru u svim točkama prostora, potrebno je postaviti odgovarajuću zatvorenu plohu – Gaussov plohu. Silnice polja radikalno izviru iz naboja, pa je polje konstantno u svim točkama udaljenima za  $r$  od naboja. Razvidno je kako je polje točkastog naboja sferno simetrično. Kugla polumjera  $r$  s nabojem  $Q$  u središtu kugle zadovoljavat će uvjete sferne simetrije, kako je to prikazano na *Slici 3.6*.



*Slika 3.6 – Gaussova ploha oko točkastog naboja*

Ukupni naboј obuhvaćen Gaussovom plohom  $S_G$  je točkasti naboј  $Q$ , pa je:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-16)$$

Vektori elektrostatičkog polja i pripadni elementi vektora Gaussove plohe kolinearni su ( $\alpha = 0$ ) u svakoj točki zatvorene plohe. Skalarni umnožak u podintegralnoj funkciji prelazi u obični umnožak, jer je  $\cos\alpha = 1$ , tj.:

$$\oint_{S_G} E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-17)$$

U svim točkama Gaussove plohe vektor elektrostatičkoga polja ima konstantan iznos i može se izvući ispred integrala:

$$E \oint_{S_G} dS = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-18)$$

Preostaje integriranje po svim elementima zatvorene plohe – kugle polumjera  $r$ . Jasno je kako rezultat integriranja mora biti površina kugle:

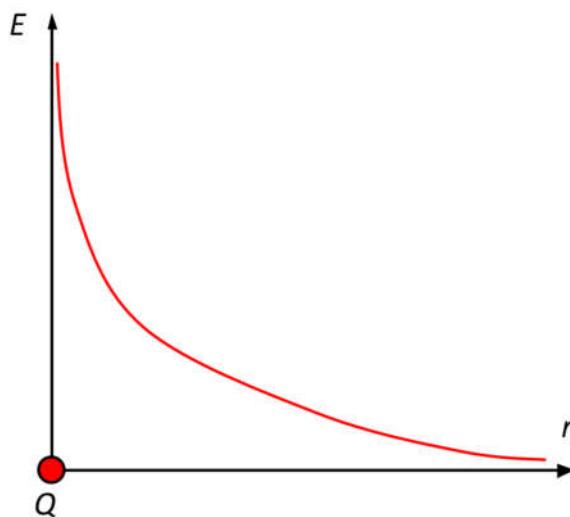
$$E \cdot 4r^2\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3-19)$$

Iznos elektrostatičkog polja točkastog naboja jest:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3-20)$$

a to je već poznati izraz dobiven uporabom Coulombova zakona.

Iznos elektrostatičkog polja opada s kvadratom udaljenosti od točkastog naboja. Vrijednost mu nije definirana jedino u polu (točki sa  $r = 0$ ) što slijedi iz zanemarivih dimenzija točkastog naboja. Grafička ovisnost polja točkastog naboja o udaljenosti  $r$  prikazana je na *Slici 3.7*.



*Slika 3.7 – Grafički prikaz elektrostatičkog polja točkastog naboja  $E=f(r)$*

### 3.3.2. Elektrostatičko polje nabijene vodljive kugle

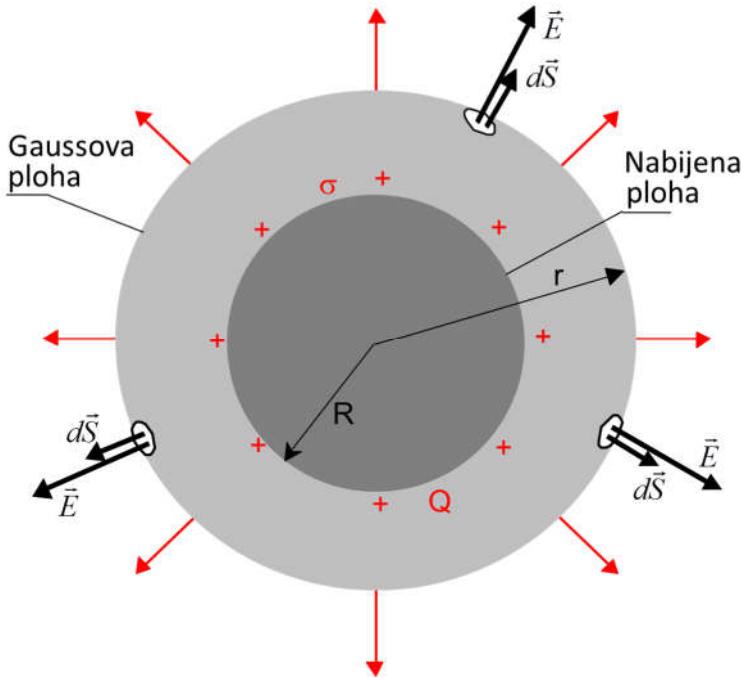
Kako bi se odredilo polje kugle u svim točkama prostora, potrebno je analizirati dva odvojena slučaja – područje izvan, odnosno unutar nabijene kugle.

a) *Elektrostatičko polje izvan kugle:  $R \leq r < \infty$*

Ako se puna vodljiva (metalna) kugla polumjera  $R$  nabije nabojem  $Q$ , isti će se ravnomjerno gusto raspodijeliti po površini kugle. Naime, zbog međusobnog odbojnog djelovanja istoimenih naboja oni zauzimaju položaje u kojima će biti maksimalno udaljeni jedni od drugih. Plošna gustoća naboja može se izravno izraziti, jer znamo ukupni naboј i površinu na kojoj je raspodijeljen:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}. \quad (3-21)$$

Iz razloga prostorne simetrije Gaussova ploha bit će kugla koncentrična nabijenoj kugli. Ta ploha (kugla) površine  $S_G$ , polumjera  $r$  postavlja se koncentrično nabijenoj kugli površine  $S_\sigma$ , kao što se to vidi na *Slici 3.8.*



*Slika 3.8 – Polje izvan nabijene vodljive kugle*

Naboj obuhvaćen zatvorenom Gaussovom plohom ukupni je naboj  $Q$  raspoređen u obliku konstantne gustoće  $\sigma$ , pa je prema Gaussovom zakonu:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{I}{\epsilon_0} \int_{S_\sigma} \sigma dS. \quad (3-22)$$

Silnice polja kugle su radikalne zrake koje izlaze iz naboja na površini kugle. Polje ima, zbog radikalnog karaktera, konstantni iznos u svim točkama Gaussove plohe, a usmjereno je okomito na nju. Vektori elementa površine kolinearni su s vektorima polja. Slijedom navedenoga može se kao i u slučaju točkastog naboja gornja relacija pisati u jednostavnijem obliku:

$$E \oint_{S_G} dS = \frac{I}{\epsilon_0} \sigma \int_{S_\sigma} dS. \quad (3-23)$$

Integrali po zatvorenim ploham  $S_G$  i  $S_\sigma$  daju za rezultat površine navedenih ploha:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{I}{\epsilon_0} \sigma 4\pi R^2. \quad (3-24)$$

Elektrostaticko polje u svim točkama izvan nabijene kugle dano je izrazom:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}. \quad (3-25)$$

Polje opada prema inverznom zakonu s kvadratom udaljenosti i iščezava na dovoljno velikim udaljenostima. Maksimalni iznos polja dobije se neposredno uz površinu kugle, tj. za  $r = R$ :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3-26)$$

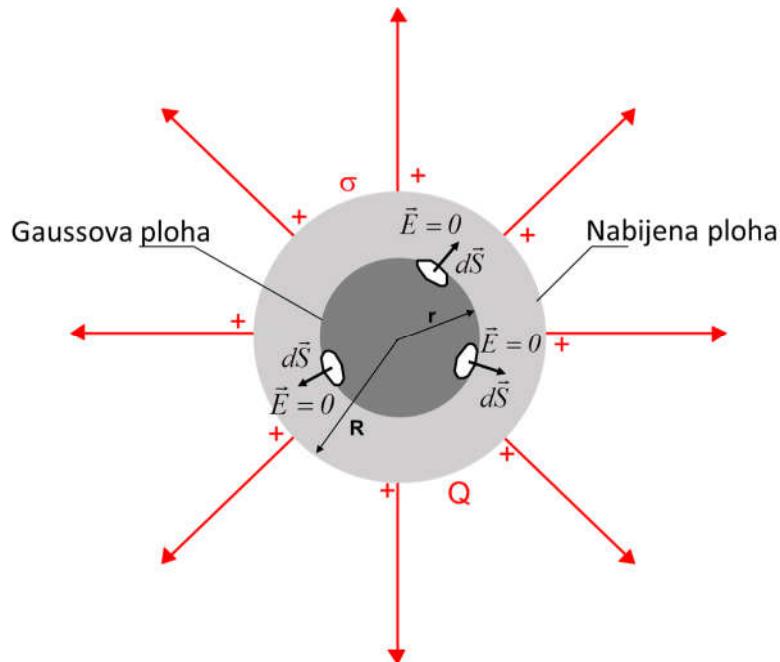
Ako se relacija za polje izvan kugle izrazi preko ukupnog naboja  $Q$  umjesto plošne gustoće  $\sigma$ , slijedi:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3-27)$$

Može se zaključiti kako polje nabijene kugle s konstantnom plošnom gustoćom naboja, u točkama izvan kugle, ima isti oblik kao polje točkastog naboja. Drugim riječima, polje u svim točkama izvan kugle jednako je polju koje bismo dobili kada bi sav nabojski kugli bio koncentriran u njezinu središtu u obliku točkastog naboja.

b) Elektrostatičko polje unutar kugle:  $0 \leq r < R$

Zatvorena Gaussova ploha je koncentrična kugla unutar nabijene kugle kao na *Slici 3.9*.



*Slika 3.9 – Polje unutar nabijene vodljive kugle*

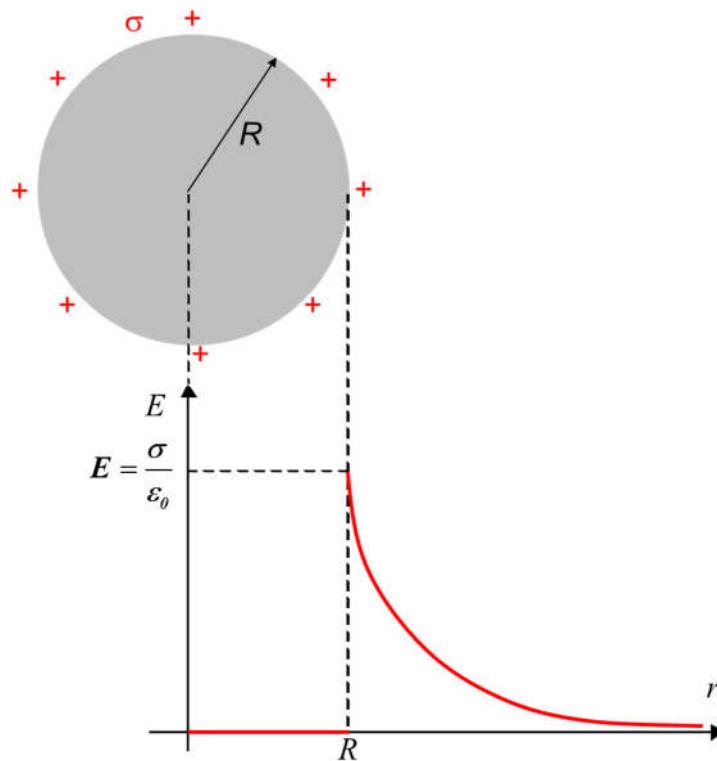
Očito je kako Gaussovom plohom nije obuhvaćen nikakav nabojski dio, pa izlazi:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3-28)$$

Budući da se Gaussova ploha može podijeliti na konačne elemente  $dS$ , gornji skalarni umnožak može biti jednak nuli samo ako je:

$$E = 0. \quad (3-29)$$

Grafički prikaz ovisnosti polja o udaljenosti  $r$  dan je na *Slici 3.10.*



*Slika 3.10 – Grafički prikaz elektrostatičkog polja nabijene vodljive kugle  $E = f(r)$*

U točki  $r = R$  polje ima diskontinuitet – skok s  $E = 0$  na  $E = \sigma/\epsilon_0$ .

### 3.3.3. Elektrostatičko polje kugle s prostorno raspoređenim nabojem

Naboj  $Q$  može biti ravnomjerno gusto raspoređen unutar kugle polumjera  $R$ , tako da je prostorna gustoća naboja:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (3-30)$$

Kao i u slučaju vodljive kugle potrebno je analizirati dva odvojena slučaja – područje izvan, odnosno unutar nabijene kugle.

a) *Elektrostatičko polje izvan kugle:  $R \leq r < \infty$*

Kako je raspodjela naboja sferno simetrična, Gaussova ploha je koncentrična kuglina ploha s  $r > R$ .

Naboj obuhvaćen zatvorenom Gaussovom plohom je ukupni naboj  $Q$  raspoređen u obliku prostorne gustoće  $\rho$ , pa je prema Gaussovom zakonu:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{I}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (3-31)$$

Elektrostatičko polje je radijalno i ima konstantni iznos u svim točkama Gaussove plohe, a usmjeren je okomito na nju. Vektori elementa površine kolinearni su s vektorima polja (kao na *Slici 3.8*). Kako je i gustoća  $\rho$  konstanatna, dobije se:

$$E \oint_{S_G} dS = \frac{I}{\epsilon_0} \rho \int_V dV. \quad (3-32)$$

Integral na lijevoj strani daje površinu Gaussove plohe  $S_G$ . Integral na desnoj strani dobije se zbrajanjem doprinosa elemenata obujma kugle  $dV$ . Rezultat je obujam kugle ispunjene nabojem gustoće  $\rho$ . Uvrstimo li rješenja obaju integrala, slijedi:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{I}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (3-33)$$

Elektrostatičko polje izvan kugle je:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}. \quad (3-34)$$

Maksimalni iznos polja je uz površinu kugle ( $r = R$ ):

$$E_{max} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R. \quad (3-35)$$

Ako se gustoća  $\rho$  izrazi preko ukupne količine naboja  $Q$ , dobije se:

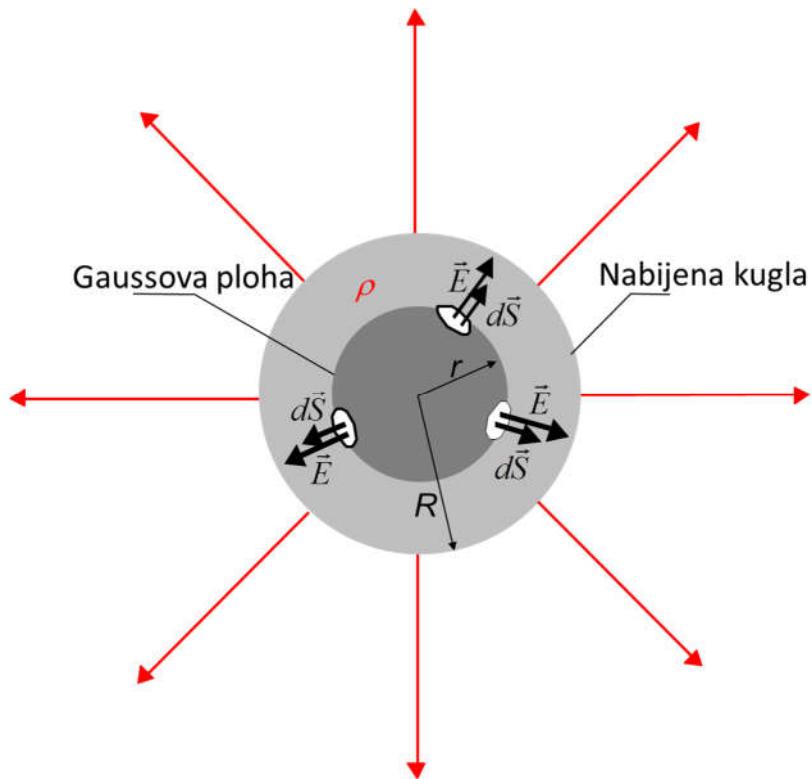
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3-36)$$

To je izraz identičan izrazu za polje izvan kugle s nabojem raspoređenim na površini kugle. Rezultat je očekivan, jer je po Gaussovom zakonu u točkama izvan nabijene kugle bitan samo obuhvaćeni naboј, a ne i način kako je on raspoređen. Polje opada s kvadratom udaljenosti na isti način kao i polje usamljenoga točkastog naboja.

b) *Elektrostatičko polje unutar kugle:  $0 \leq r < R$*

Zatvorena Gaussova ploha je koncentrična kugla unutar kugle nabijene s  $\rho$ , kao na *Slici 3.11*. Razvidno je kako je sada Gaussovom plohom polumjera  $r$  obuhvaćena ona količina naboja koja se nalazi u volumenu kugle istog polumjera. To znači da će postojati i elektrostatičko polje. Ono je kolinearno s pripadnim elementima plohe. Naboј izvan plohe nema utjecaja na polje. Primijeni li se Gaussov zakon, dobije se:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{I}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (3-37)$$



Slika 3.11 – Polje unutar kugle nabijene prostornim nabojem

Elektrostatičko polje unutar kugle nabijene konstantnom prostornom gustoćom naboja jest:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0}r. \quad (3-38)$$

Polje raste proporcionalno s udaljenošću točke promatranja od središta kugle.

Do istog se rezultata moglo doći ako se, umjesto gustoćom  $\rho$ , pripadni izrazi prikažu preko djelomičnog naboja  $Q'$  obuhvaćenoga Gaussovom plohom, a sadržanog u obujmu  $V'$ . Kako je gustoća naboja unutar volumena konstantna, vrijedi:

$$\rho = \rho' \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{V} = \frac{Q'}{V'} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3}. \quad (3-39)$$

Djelomični je naboј:

$$Q' = Q \frac{r^3}{R^3}. \quad (3-40)$$

Gaussov zakon tada je:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0}, \quad (3-41)$$

odnosno:

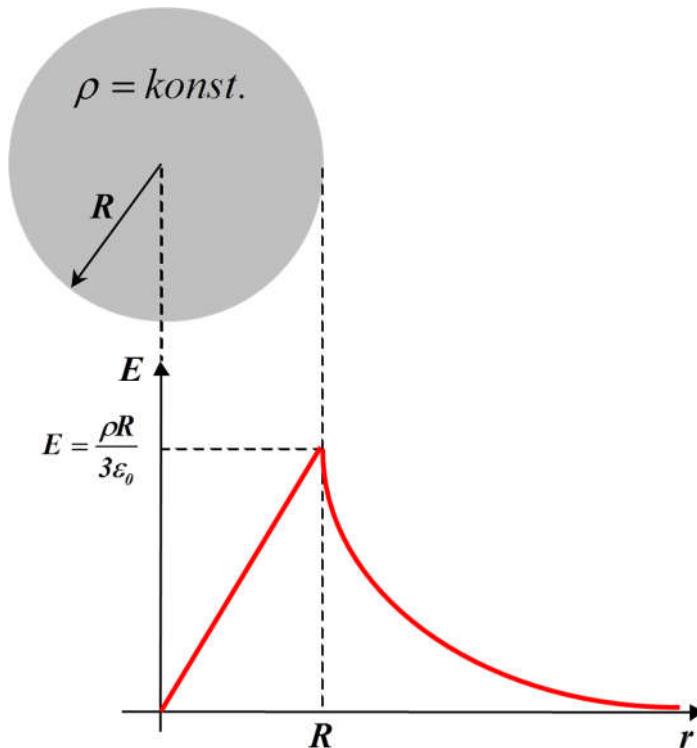
$$E \cdot 4\pi r^2 = Q \frac{r^3}{\epsilon_0 R^3}. \quad (3-42)$$

Konačno je:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot r. \quad (3-43)$$

To je izraz ekvivalentan onomu dobivenom preko gustoće  $\rho$ . Naime, uvrsti li se izraz za  $\rho$ , dobije se  $E = \rho r / 3\epsilon_0$ .

Grafički prikaz ovisnosti polja o udaljenosti  $r$  za sve točke prostora dan je na *Slici 3.12*.



*Slika 3.12 – Grafički prikaz elektrostatičkog polja kugle nabijene prostornim nabojem:  $E = f(r)$*

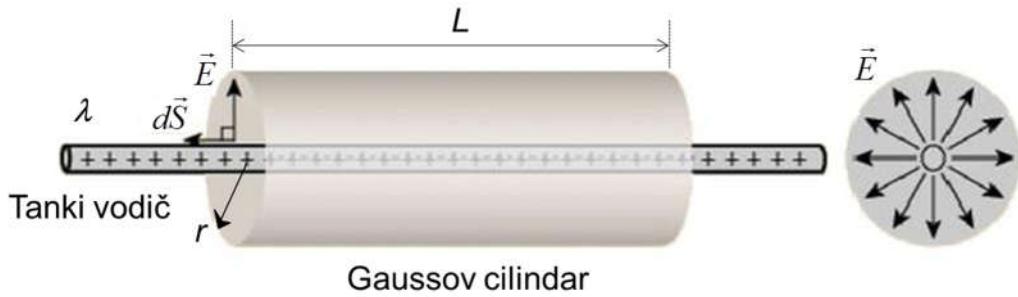
U središtu kugle polje je jednako nuli, a dalje polje linearno raste do  $r = R$ , gdje postiže maksimalnu vrijednost ( $\rho R / 3\epsilon_0$ ). Izvan kugle polje opada s kvadratom udaljenosti.

### 3.3.4. Elektrostatičko polje dugog ravnog nabijenog vodiča

Proučit ćemo određivanje elektrostatičkog polja vrlo dugog ravnog vodiča zanemariva poprečnog presjeka nabijenog nabojem  $Q$  po jedinici duljine. Vodič je nabijen konstantnom linijskom gustoćom naboja:

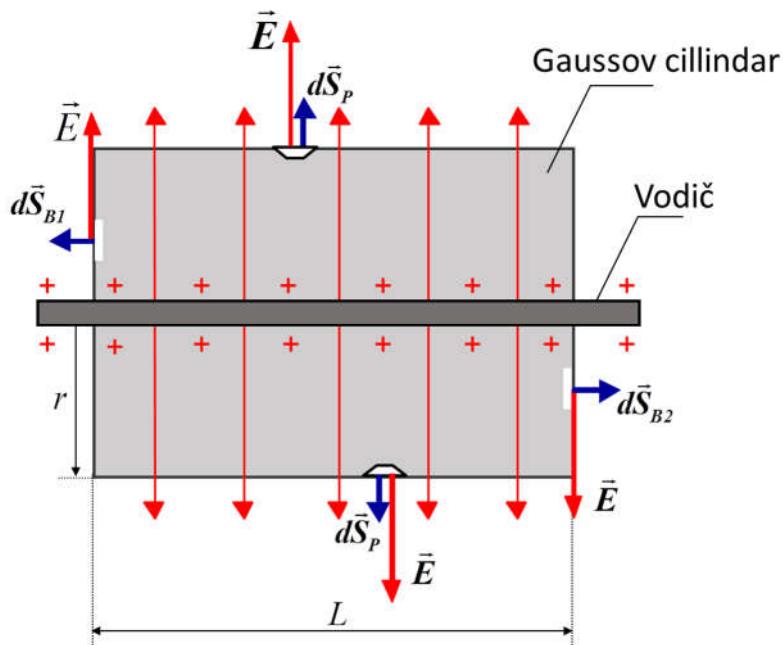
$$\lambda = \frac{Q}{L}. \quad (3-44)$$

Polje je aksijalno simetrično u odnosu na os vodiča – silnice su radijalne zrake s ishodištem u osi nabijenog vodiča, kao na *Slici 3.13*.



Slika 3.13 – Gaussova zatvorena ploha oko nabijenog vodiča

Izvor polja je u naboju raspoređenome ravnomjerno po vodiču u obliku linijske gustoće naboja  $\lambda$ . Uvažavajući simetriju, Gaussova ploha je valjkasta ploha, odnosno koncentrični cilindar koji u potpunosti obuhvaća vodič. Duljina plohe je  $L$ , a polumjer  $r$ . Os cilindra i nabijenog pravčastog vodiča poklapaju se, a baze su cilindra okomite na vodič, kao na Slici 3.14.



Slika 3.14 – Primjena Gaussova zakona na određivanje polja dugog ravnog vodiča

Polazimo od Gaussova zakona, pri čemu je naboј izražen preko pripadne linijske gustoće raspoređene po duljini vodiča:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{I}{\epsilon_0} \int_L \lambda dl . \quad (3-45)$$

Ukupni se tok kroz zatvorenu plohu može razložiti na tokove kroz baze ( $B_1$ ,  $B_2$ ) i plašt ( $P$ ) valjkaste plohe:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B_1} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B_2} + \int_P \vec{E} \cdot d\vec{S}_P . \quad (3-46)$$

Kako se vidi na gornjoj slici, vektori elemenata površine objiju baza,  $d\vec{S}_{B_1}$  i  $d\vec{S}_{B_2}$ , okomiti su na vektor polja  $\vec{E}$ . Silnice polja tangiraju baze, pa u njih tok ne ulazi niti iz njih izlazi. Doprinos toka

kroz obje baze jednak je nuli, što matematički potvrđuje i rezultat skalarnog umnoška u prvom i drugom integralu ( $\cos\alpha \Big|_{d\vec{S}} = 0$ ). Gornja jednadžba svodi se na:

$$\int_P \vec{E} \cdot d\vec{S}_P = \frac{1}{\epsilon_0} \int_L \lambda dl. \quad (3-47)$$

Polje  $\vec{E}$  i element površine plašta  $d\vec{S}_P$  kolinearni su u svakoj točki plašta ( $\cos\alpha = 1$ ). Uz to je polje plašta konstantnog iznosa, pa se može izvući ispred integrala. Kako je i gustoća  $\lambda$  konstantna, vrijedi:

$$E \int_P dS_P = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \int_L dl. \quad (3-48)$$

Integracijom elemenata plašta  $dS_P$  dobije se površina plašta  $2r\pi L$ , a integracijom elemenata duljine  $dl$  ukupna duljina vodiča  $L$ , pa je:

$$E \cdot 2r\pi L = \frac{\lambda}{\epsilon_0} L. \quad (3-49)$$

Polje vrlo dugog ravnog nabijenog vodiča je:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (3-50)$$

ili izraženo preko ukupnog naboja  $Q$ :

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}. \quad (3-51)$$

Polje je razmjerno recipročnoj vrijednosti udaljenosti od vodiča. Smjer polja je radijalno usmjeren u odnosu na vodič i to od vodiča za  $+\lambda$ , odnosno prema vodiču za  $-\lambda$ .

### 3.3.5. Elektrostatičko polje dugog nabijenog vodljivog cilindra

Prethodno provedeni postupak može se primijeniti i na određivanje elektrostatičkoga polja vrlo dugog cilindra nabijenog nabojem  $Q$  koji je ravnomjerno raspoređen po plaštu cilindra s plošnom gustoćom:

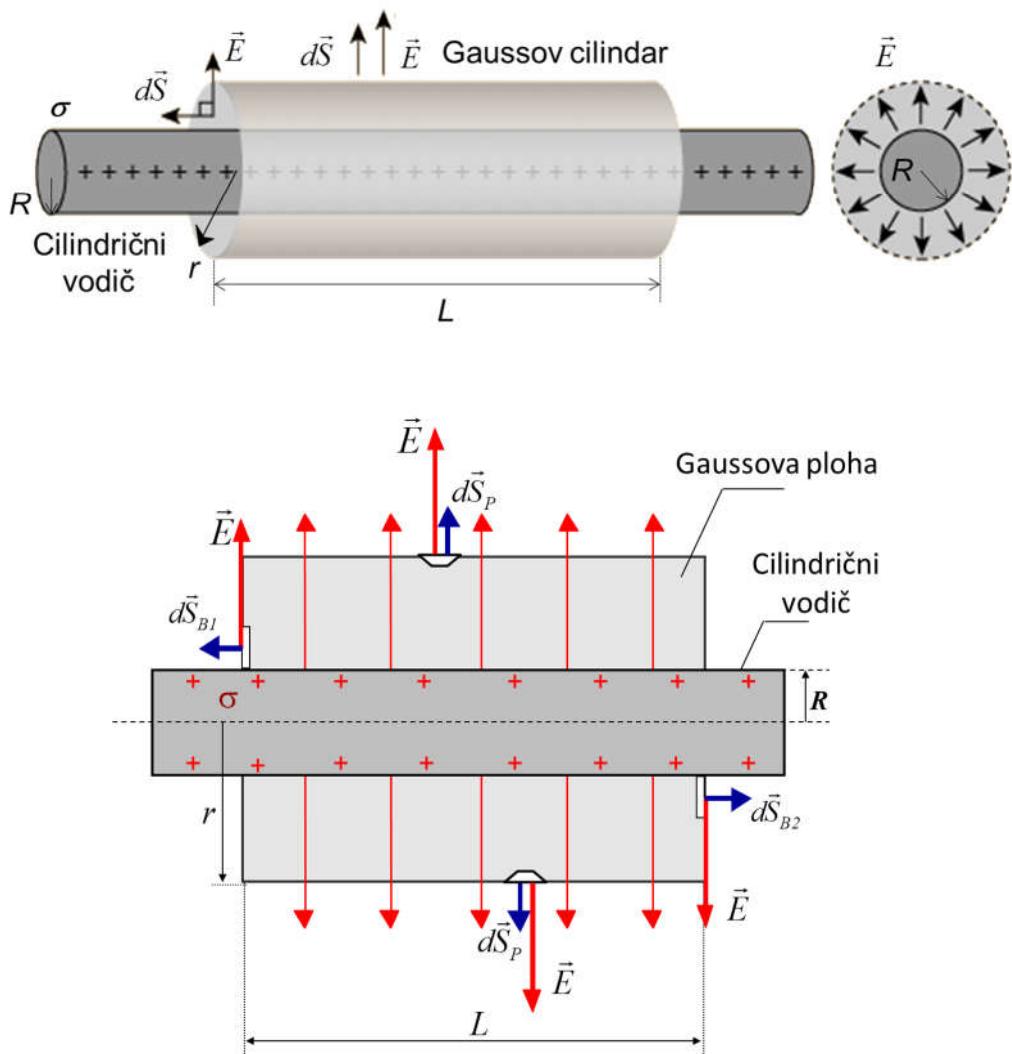
$$\sigma = \frac{Q}{2\pi RL}, \quad (3-52)$$

gdje je  $R$  polumjer, a  $L$  duljina cilindra.

Silnice polja su radikalne zrake koje izlaze s površine cilindra. Gaussova ploha je valjkasta ploha koja obuhvaća nabijeni cilindar. Osi Gaussova cilindra i nabijenog cilindra poklapaju se, a baze su cilindra okomite na vodič, kao na *Slici 3.15*.

Gaussov zakon za određivanje polja uzrokovanog plošnom gustoćom naboja jest:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{I}{\epsilon_0} \int_{S_\sigma} \sigma dS. \quad (3-53)$$



Slika 3.15 – Primjena Gaussova zakona na nabijeni cilindar

Ukupni se tok kroz zatvorenu plohu može razložiti na tokove kroz baze ( $B_1, B_2$ ) i plašt ( $P$ ) Gaussove plohe. Doprinos toka kroz obje baze, kako je već pokazano, jednak je nuli. Preostaje samo tok kroz plašt:

$$\int_P \vec{E} \cdot d\vec{S}_P = \frac{I}{\epsilon_0} \int_{S_\sigma} \sigma dS. \quad (3-54)$$

Polje  $\vec{E}$  i element površine plašta  $d\vec{S}_P$  kolinearni su u svakoj točki plašta. Budući da su polje plašta i gustoća  $\sigma$  konstantnoga iznosa, gornja jednadžba prelazi u:

$$E \int_P dS_P = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{S_\sigma} dS. \quad (3-55)$$

Integracijom elemenata plašta  $dS_P$  dobije se površina plašta  $2r\pi L$ , a integracijom elemenata površine cilindra  $dS$  ukupna površina vodljivog cilindra  $2\pi RL$ . Slijedi:

$$E \cdot 2r\pi L = \frac{\sigma}{\epsilon_0} 2\pi RL. \quad (3-56)$$

Polje vrlo dugog ravnog nabijenog cilindričnog vodiča jest:

$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}. \quad (3-57)$$

Polje opada obrnuto proporcionalno porastu udaljenosti, a maksimalni mu je iznos na površini cilindra za  $r = R$ :

$$E_{max} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3-58)$$

Ako se, umjesto  $\sigma$ , uvrsti ukupni naboј  $Q$ , dobije se:

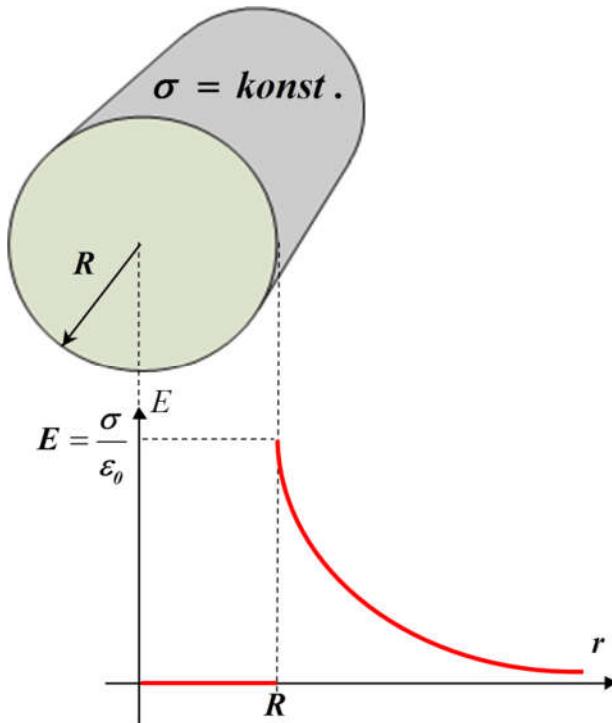
$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}, \quad (3-59)$$

što je izraz jednak onomu za nabijeni vodič. To znači da se za proračun polja izvan cilindra može smatrati kako je naboј plošne gustoće zamijenjen ekvivalentnim naboјem u osi cilindra.

Polje unutar cilindra jednako je nuli. Naime, Gaussova valjkasta ploha postavljena unutar vodljivog cilindra ne obuhvaća nikakav naboј, jer je naboј raspoređen po površini cilindra:

$$0 \leq r < R \Rightarrow E = 0. \quad (3-60)$$

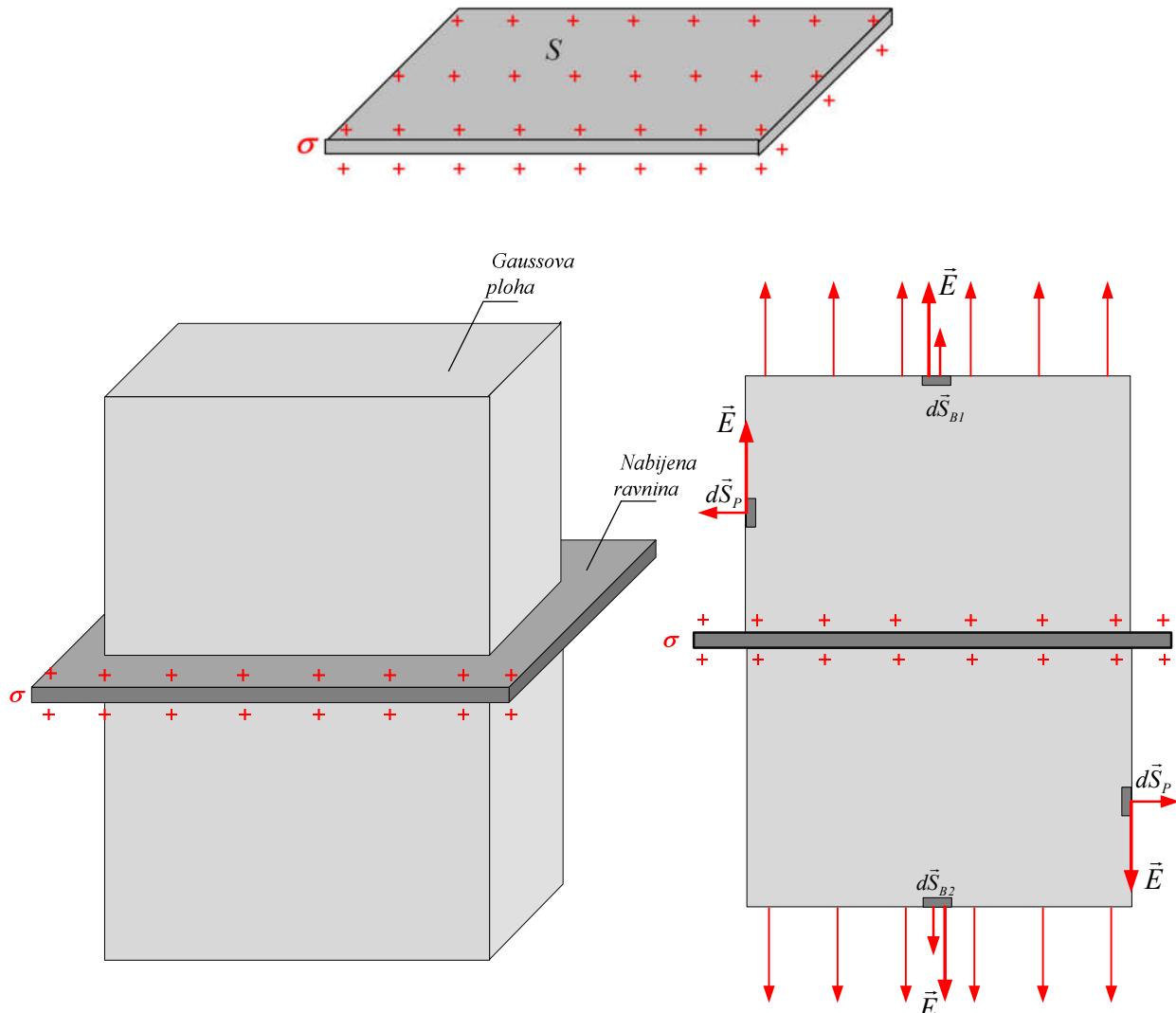
Grafički prikaz ovisnosti polja nabijenog cilindra o udaljenosti  $r$  dan je na *Slici 3.16*.



*Slika 3.16 – Ovisnost polja nabijenog vodljivog cilindra o udaljenosti*

### 3.3.6. Elektrostatičko polje duge nabijene ravne plohe

Vrlo velika ravna ploha površine  $S$  kao na *Slici 3.17* nabijena je pozitivnom plošnom gustoćom naboja. Potrebno je uporabom Gaussova zakona odrediti elektrostatičko polje u svim točkama prostora.



*Slika 3.17 – Primjena Gaussova zakona na beskonačnu nabijenu ravnu plohu*

Silnice polja izviru okomito s nabijene plohe s obiju strana plohe. Gaussov plohu možemo birati u obliku cilindra čije su baze paralelne s ravnom plohom. Isto tako Gaussov ploha može biti i simetrično postavljeni kvadar čije su baze površine  $S$  paralelne s nabijenom plohom, a sve pobočke okomite na nju.

Početni oblik Gaussova zakona:

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS \quad (3-61)$$

može se bitno pojednostaviti. Ukupni tok kroz zatvorenu plohu potrebno je razložiti na tokove kroz baze ( $B_1, B_2$ ) i četiri pobočke ( $p$ ) Gaussova kvadra. Doprinos toka kroz sve pobočke jednak je nuli, jer su vektori polja i pripadnih elemenata Gaussove plohe međusobno okomiti (vidi gornju sliku). Preostaje samo tok kroz obje baze kvadra:

$$\int_{B1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B1} + \int_{B2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{B2} = \frac{I}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS. \quad (3-62)$$

Polje  $\vec{E}$  i elementi površine obiju baza,  $d\vec{S}_{B1}$  i  $d\vec{S}_{B2}$ , kolinearni su u svakoj točki plašta. Budući da su polje plašta i gustoća  $\sigma$  konstantnog iznosa, gornja jednadžba postaje:

$$E \int_{B1} dS_{B1} + E \int_{B2} dS_{B2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_S dS. \quad (3-63)$$

Integracijom elemenata površine nabijene ravnine  $dS$  dobije se površina  $S$ , a integracijom elemenata površine obiju baza,  $d\vec{S}_{B1}$  i  $d\vec{S}_{B2}$ , također ukupna površina  $S$  za svaku od baza, jer Gaussova ploha mora u potpunosti obuhvaćati nabijenu plohu. Slijedi:

$$E \cdot S + E \cdot S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S. \quad (3-64)$$

Polje vrlo velike nabijene ravnine jest:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3-65)$$

Polje ne ovisi o udaljenosti od nabijene plohe, već samo o plošnoj gustoći naboja i sredstvu u kojem se ravnina nalazi.

Na sličan se način može odrediti polje između dviju ravnina nabijenih plošnom gustoćom  $\pm\sigma$ . Silnice polja negativne ploče usmjerene su u negativnu ploču. Ukupno polje dobije se superpozicijom polja pozitivne i negativne ploče. Iznosi jakosti polja obiju ploča su jednaki:

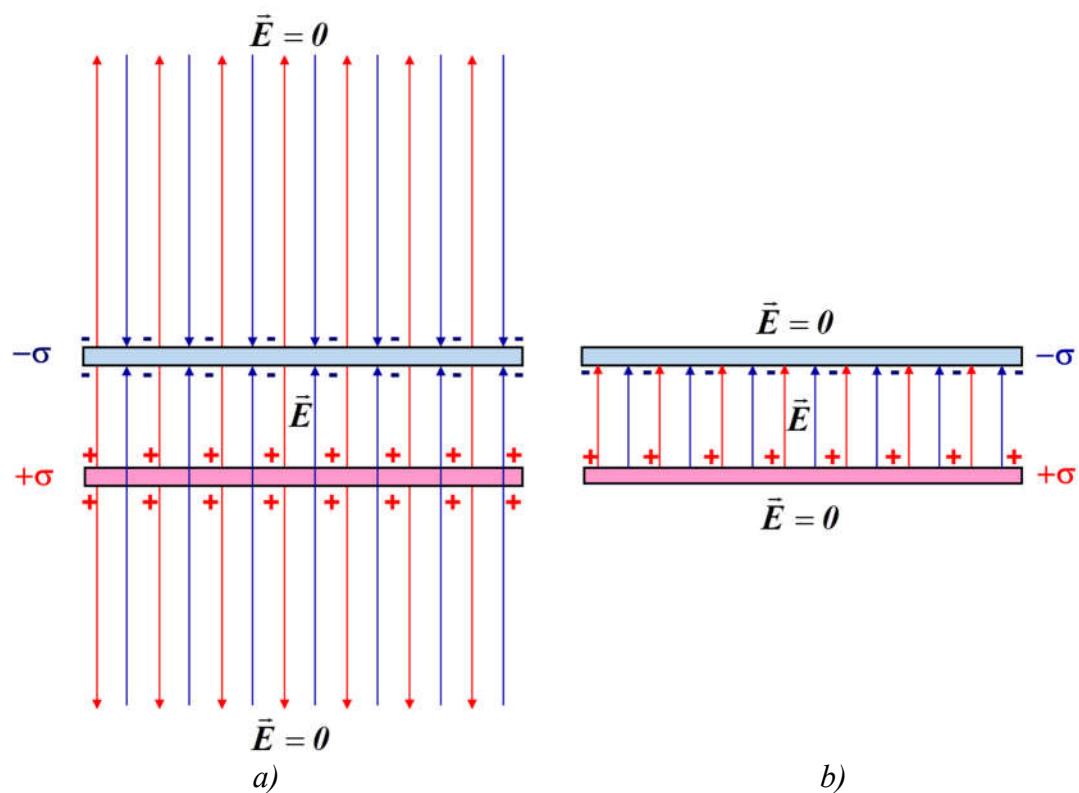
$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3-66)$$

Raspored silnica pozitivne i negativne ploče prikazan je na *Slici 3.18.a*). Vidi se kako se polja između ploča zbrajaju. Izvan ploča ukupno polje jednako je nuli, jer su polja suprotno usmjerena, a pokazali smo kako im jakost ne ovisi o udaljenosti. Slika ukupnog polja prikazana je na *Slici 3.18.b*).

Iznos ukupnog polja je:

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (3-67)$$

Polje postoji samo između ploča, homogeno je i usmjereno od pozitivne k negativnoj ploči. Striktno gledajući, gornji izraz vrijedi samo za neizmjerno velike ploče. Međutim, može se primijeniti i na ploče ograničenih dimenzija ako je udaljenost ploča vrlo mala u odnosu na njihove dimenzije. Odstupanja, odnosno izobličenja polja nastaju samo u blizini rubova ploča.



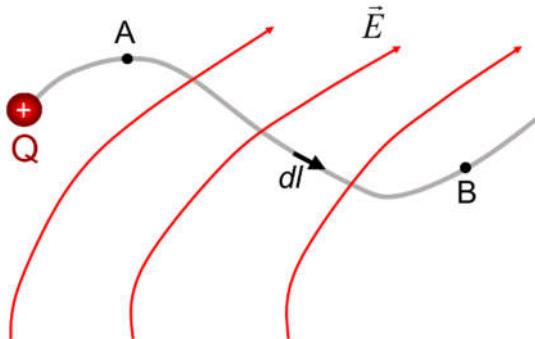
Slika 3.18 – Polje dviju ravnih ploha nabijenih s  $\pm\sigma$

## 4. POTENCIJALNA ENERGIJA I POTENCIJAL ELEKTROSTATIČKOGA POLJA

Prema razmatranjima iz prethodnih poglavlja jakost elektrostatičkoga polja može se općenito odrediti iz Coulombova zakona ili temeljem Gaussova zakona za slučaj simetrične raspodjele naboja. Elektrostatičko se polje može odrediti i pomoću *električnog potencijala*  $\varphi$ . Električni potencijal je skalarna veličina, pa je određivanje vektora polja jednostavnije (radi se sa skalarima umjesto s vektorima).

### 4.1. POTENCIJALNA ENERGIJA, POTENCIJAL, RAZLIKA POTENCIJALA

Prepostavimo kako se naboj  $Q$  kreće u stranom električnom polju  $\vec{E}$  od točke  $A$  do točke  $B$ , kao što je prikazano na *Slici 4.1.*



*Slika 4.1 – Kretanje naboja  $Q$  u elektrostatičkome polju  $\vec{E}$*

Električno polje prikazano je pripadnim silnicama. Prema Coulombovu zakonu sila na točkasti naboj  $Q$  dana je izrazom:

$$\vec{F}_e = Q\vec{E}. \quad (4-1)$$

Kao što je poznato, djelovanje neke sile  $\vec{F}$  na određenom putu  $\vec{s}$  predstavlja uloženi rad:  $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ . Vanjska sila  $\vec{F}_v$  kojom djelujemo na naboj jednaka je po iznosu, a suprotna po smjeru elektrostatičkoj sili  $\vec{F}_e$ , pa će element rada izvršen pomicanjem naboja za udaljenost  $d\vec{l}$  biti:

$$dA = \vec{F}_v \cdot d\vec{l} = -\vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -Q\vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (4-2)$$

Svaka električki nabijena čestica koja se nalazi u stranom elektrostatičkome polju ima potencijalnu energiju  $W$ , koja je posljedica rada uloženog na pomicanje čestice nasuprot sili elektrostatičkoga polja. Ukupno uloženi rad po iznosu je jednak potencijalnoj energiji. Uloženim radom neke vanjske sile povećava se potencijalna energija, a ako rad obavljaju sile elektrostatičkoga polja, potencijalna energija se smanjuje. Vrijedi dakle:

$$dW = -dA. \quad (4-3)$$

Ukupan rad, odnosno potencijalna energija, dobije se sumiranjem djelomičnih radova na elementima  $d\vec{l}$  pri pomicanju naboja od  $A$  do  $B$ :

$$W = Q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (4-4)$$

Dijeljenjem  $W$  s nabojem  $Q$  dobije se potencijalna energija po jediničnom naboju. Dobivena veličina  $U_{AB}$  je *razlika potencijala ili električni napon* između točaka  $A$  i  $B$ :

$$U_{AB} = \frac{W}{Q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (4-5)$$

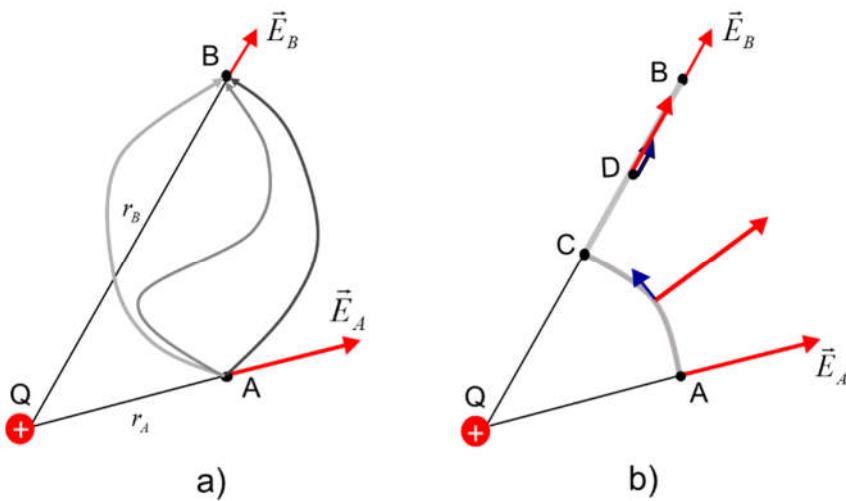
Bitno je uočiti:

- pri određivanju  $U_{AB}$  početna točka je  $A$ , a završna točka je  $B$ ;
- negativna vrijednost  $U_{AB}$  podrazumijeva gubitak potencijalne energije pri kretanju od  $A$  do  $B$  (rad je izvršen od strane električnoga polja), a pozitivna vrijednost  $U_{AB}$  znači kako je pri kretanju naboja došlo do povećanja potencijalne energije (rad je izvršila neka vanjska sila);
- razlika potencijala mjeri se u voltima V:

$$\frac{J}{Q} = \frac{VAs}{As} = V; \quad (4-6)$$

- razlika potencijala  $U_{AB}$ , odnosno razlika potencijalnih energija između početne i krajnje točke, neovisna je o putanji kretanja naboja od  $A$  do  $B$ .

Posljednja tvrdnja zahtijeva obrazloženje. Prepostavimo kako se u elektrostatickome polju točkastog naboja  $Q$  kreće točkasti pokušni naboj  $Q_0$  i to od točke  $A$  prema točki  $B$ . Poznato je kako je polje točkastoga naboja radijalno i konstantno je u svim točkama koje su jednako udaljene od naboja  $Q$ . Potrebno je odgovoriti na pitanje: Kako potencijalna energija ovisi o izboru putanje pokušnog naboja? Na *Slici 4.2.a)* prikazano je nekoliko različitih putanja kretanja naboja.



*Slika 4.2 – Neovisnost potencijalne energije o izboru puta*

Od posebna je interesa putanja prikazana na *Slici 4.2.b)*. Pokušni naboj kreće se po luku  $\overarc{AC}$

(nalazi se na ekvipotencijalnoj plohi) i zatim radijalno uzduž silnice polja od  $C$  do  $B$ . Promjena potencijalne energije pri premeštanju naboja  $Q_0$  iz točke  $A$  u točku  $B$  jest:

$$W = Q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_0 \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + Q_0 \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_0 \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (4-7)$$

Naime, za svaku točku uzduž luka  $\overline{AC}$  vektori  $\vec{E}$  i  $d\vec{l}$  međusobno su okomiti ( $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ ), pa je doprinos prvog integrala u gornjoj jednadžbi jednak nuli – sve točke na luku  $AC$  nalaze se na ekvipotencijalnoj plohi. Zaključujemo kako je bitan samo početni i krajnji položaj pokusnog naboja. Drugim riječima, potencijalna energija, odnosno uloženi rad u elektrostatičkome polju ne ovisi o putu koji je prevaljen od točke  $A$  do točke  $B$ , već samo o udaljenosti početne  $r_A$  i krajnje točke  $r_B$  od naboja  $Q$ . Promjena se zbiva samo u radijalnom smjeru – smjeru prirasta ili pada radivektora  $dr$ , pa skalarni umnožak prelazi u obični umnožak:

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl \cos \alpha_{|\vec{E}}^{d\vec{l}} = Edr. \quad (4-8)$$

Potencijalna energija je:

$$W = Q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = Q_0 \int_{r_A}^{r_B} Edr. \quad (4-9)$$

Razlika potencijala  $U_{AB}$  između dviju točaka elektrostatičkoga polja točkastoga naboja dobije se uvrštavanjem izraza za polje točkastoga naboja:

$$\begin{aligned} U_{AB} &= \frac{W}{Q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} Edr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \varphi_A - \varphi_B \end{aligned} \quad (4-10)$$

gdje su:

$$\varphi_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A}, \quad \varphi_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \quad (4-11)$$

potencijali u točkama  $A$  i  $B$ .

## 4.2. KONZERVATIVNOST ELEKTROSTATIČKOGA POLJA

Utvrđili smo kako razlika potencijala između dviju točaka ne ovisi o odabranom putu, pa vrijedi također:

$$U_{AB} = -U_{BA} \Rightarrow U_{AB} + U_{BA} = 0 \quad (4-12)$$

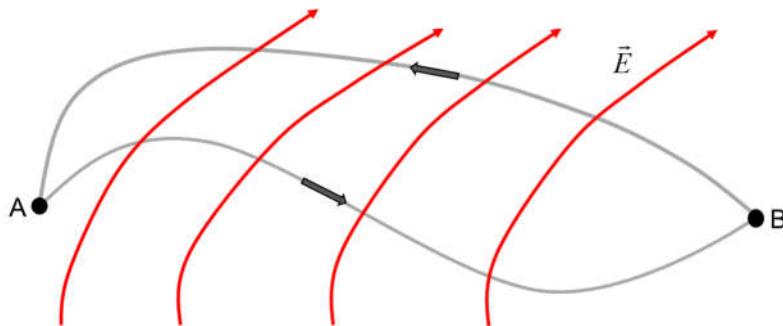
odnosno:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_k \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4-13)$$

Naime, ako se pokusni naboј kreće u elektrostatičkome polju po nekom putu od točke  $A$  do točke



$B$  i natrag od točke  $B$  do početne točke  $A$  po nekom drugom putu, ukupno kretanje naboja odvija se po nekoj zatvorenoj krivulji  $k$ , kao na *Slici 4.3*.



*Slika 4.3 – Kretanje pokusnog naboja po zatvorenoj krivulji*

Linijski integral elektrostatickoga polja po zatvorenoj krivulji mora biti jednak nuli. Fizikalno predočeno, to znači kako se pri kretanju naboja po zatvorenoj krivulji – putu u elektrostatickome polju, ne vrši nikakav rad.

Elektrostaticko je polje kao i gravitacijsko polje *konzervativno polje*. Zajednička karakteristika svih konzervativnih polja, pored dokazane tvrdnje da im povećanje ili smanjenje potencijalne energije ne ovisi o putu, je i činjenica kako je ukupni rad po zatvorenoj krivulji jednak nuli.

### 4.3. EKVIPOTENCIJALNE LINIJE I PLOHE

Razmotrimo prethodno iznesenu tvrdnju kako se sve točke luka  $\overline{AC}$  (*Slika 4.2*) nalaze na ekvipotencijalnoj plohi. Pokazano je kako nema promjene potencijalne energije pri kretanju naboja od točke  $A$  do točke  $C$ , tj.:

$$W_{(A-C)} = Q_0 \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (4-14)$$

Iz te se jednadžbe dade zaključiti kako u ravnini postoje dijelovi puta – linije na kojima se kretanjem naboja ne obavlja nikakav rad, odnosno nema povećanja/smanjenja potencijalne energije. Takve linije konstantnog potencijala zovu se *ekvipotencijalne linije*. Isto tako bilo koja ploha na kojoj je potencijal konstantan jest *ekvipotencijalna ploha*. Ekvipotencijalna linija je sjecište ekvipotencijalne plohe i ravnine.

Općenito ekvipotencijalne plohe/linije definirane su izrazom:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (4-15)$$

pri čemu se integral proteže između bilo kojih dviju točaka na ekvipotencijalnoj plohi/liniji.

Iz prethodne se relacije može zaključiti kako su silnice električnog polja uvijek okomite na ekvipotencijalnu plohu – skalarni umnožak jednak je nuli samo ako su vektori  $\vec{E}$  i  $d\vec{l}$  međusobno okomiti.

## 4.4. PRIMJERI ODREĐIVANJA POTENCIJALA

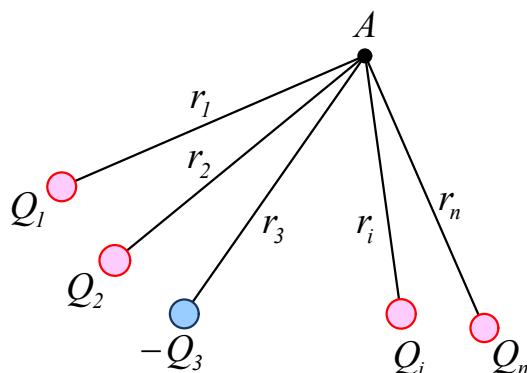
Razlika potencijala između dviju točaka ne ovisi o izboru referentne točke, pa je možemo odabratи bilo gdje. Međutim, za određivanje potencijalne energije (ili potencijala) naboja u nekoj točki polja, potrebno je odrediti referentnu točku prema kojoj se iskazuje ta energija. Iz praktičnih razloga najjednostavnije je za referentnu točku uzeti onu u kojoj je potencijalna energija (i potencijal) jednaka nuli. Obično se bira beskonačno udaljena točka u kojoj polje isčezava (Napomena: U praksi se Zemlja uzima za referentnu točku – „masu“ i njoj se pridjeljuje vrijednost nultog potencijala).

### 4.4.1. Potencijal točkastog naboja i skupine točkastih naboja

Ako prepostavimo kako je referentna točka u beskonačnosti – točka  $B$  ( $r_B \rightarrow \infty$ ), tada je  $\varphi_B = 0$ . Razlika potencijala u odnosu na referentnu točku je potencijal u točki  $A$ . Dakle, za potencijal bilo koje točke koja je za  $r$  udaljena od točkastog naboja  $Q$  vrijedi:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (4-16)$$

Prepostavimo kako je u prostoru razmješteno  $n$  slobodnih točkastih naboja kao na *Slici 4.4.*



*Slika 4.4 – Potencijal skupine točkastih naboja*

U točki promatranja  $T$  ukupni će potencijal biti algebarski zbroj potencijala (potencijal je skalar) pojedinih naboja. To je bitno pojednostavljenje u proračunu u odnosu na elektrostaticko polje, gdje je ukupno polje vektorski zbroj pojedinačnih polja. Princip superpozicije primijenjen za ukupno elektrostaticko polje može se uporabiti i za ukupni potencijal:

$$\varphi_{uk} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \dots + \frac{Q_n}{r_n} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{Q_i}{r_i} . \quad (4-17)$$

U gornjoj jednadžbi treba se uzeti u obzir predznak naboja.

Budući da se bilo koja jednolika raspodjela naboja može razmatrati kao odgovarajuća skupina kvazitočkastih naboja  $dQ$ , možemo uporabiti izraz za potencijal točkastog naboja:

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (4-18)$$

Potencijal pojedinih raspodjela naboja može se odrediti kao zbroj (integral) doprinosa elemenata potencijala kvazitočkastih naboja koji tvore razmatranu raspodjelu naboja:

$$\varphi = \int_V \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad \text{za prostorni naboј} \quad (4-19)$$

$$\varphi = \int_S \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r} \quad \text{za plošni naboј} \quad (4-20)$$

$$\varphi = \int_L \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda dl}{r} \quad \text{za linijski naboј.} \quad (4-21)$$

#### 4.4.2. Potencijal nabijene vodljive kugle

Elektrostatičko polje u svim točkama izvan kugle polumjera  $R$ , nabijene plošnom gustoćom naboja  $\sigma$ , dano je izrazom:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}. \quad (4-22)$$

Maksimalni iznos polja je za  $r=R$ :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (4-23)$$

Polje je radijalno (promjena u smjeru  $r$ ), pa je potencijal izvan kugle:

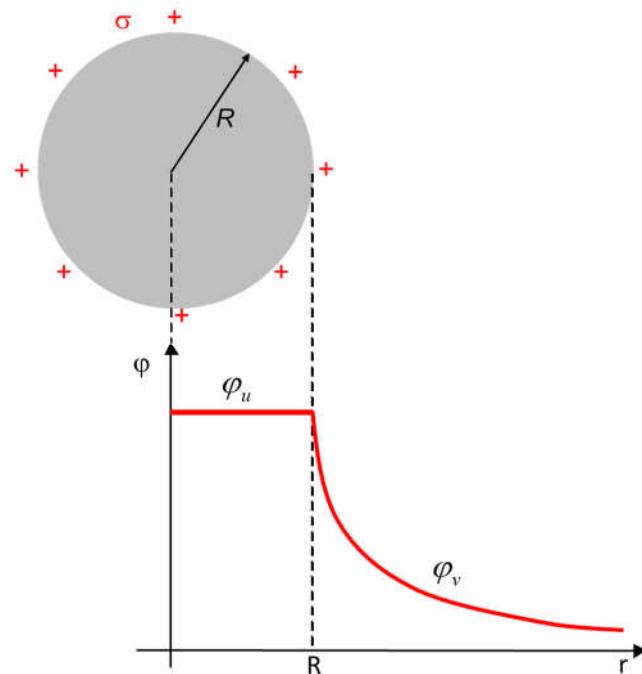
$$\varphi_v = - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (4-24)$$

Polje u točkama izvan kugle ima isti oblik kao polje točkastog naboja, pa i potencijal ima jednak izraz kao i potencijal točkastog naboja.

Naboj je raspoređen na površini kugle i elektrostatičko polje unutar nje jednako je nuli. Cijela kugla je ekvipotencijalna ploha konstantnog potencijala koji je jednak potencijalu na površini kugle:

$$\varphi_u = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (4-25)$$

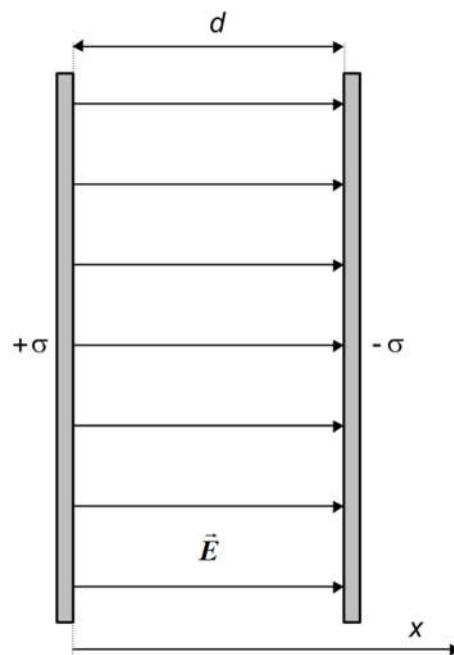
Grafički prikaz ovisnosti potencijala nabijene vodljive kugle o udaljenosti dan je na *Slici 4.5*.



Slika 4.5 – Ovisnost potencijala o udaljenosti za nabijenu vodljivu kuglu

#### 4.4.3. Razlika potencijala među nabijenim pločama

Na Slici 4.6 prikazane su dvije paralelne ploče međusobno razmagnute na udaljenost  $d$  i nabijene plošnom gustoćom naboja  $\pm\sigma$  (pločasti kondenzator).



Slika 4.6 – Nabijene paralelne vodljive ploče

Kako je pokazano temeljem Gaussova teorema, elektrostaticko polje između ploča je konstantno i iznosi:  $E = \sigma/\epsilon_0$ , a usmjeren je u smjeru osi  $x$ . Razlika potencijala među pločama je:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{X=0}^{X=d} E dx = E \int_0^d dx = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d . \quad (4-26)$$

Pomoću gornjeg izraza kasnije ćemo odrediti kapacitet pločastog kondenzatora.

## 4.5. OVISNOST ELEKTRIČNOG POLJA I POTENCIJALA

Općenito, potencijal u bilo kojoj točki jest razlika potencijala između te točke i odabrane referentne točke u kojoj je potencijal jednak nuli. Ako se uzme da je nulli potencijal u beskonačno udaljenoj točki, tada je potencijal na nekoj udaljenosti  $r$  jednak radu koji izvrši vanjska sila kako bi naboј jediničnog iznosa dovela u promatranu točku. Opća relacija za određivanje potencijala za poznato električno polje jest:

$$\varphi = - \int_{R.T.}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} , \quad (4-27)$$

gdje je  $R.T.$  referentna točka u kojoj je potencijal jednak nuli.

Za određivanje polja iz funkcije potencijala potrebno je poznavanje pojmoveva diferencijala i parcijalne derivacije, koji su u programu predmeta Matematika.

Deriviranjem gornje jednadžbe dobije se:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_x dx - E_y dy - E_z dz . \quad (4-28)$$

Električno polje je vektor koji je razložen na tri prostorne komponente.

Matematička definicija totalnog diferencijala potencijala (oznaka  $\partial$  odnosi se na parcijalnu derivaciju) jest:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz . \quad (4-29)$$

Poredbom izraza za  $d\varphi$  dobije se:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} ; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} . \quad (4-30)$$

Negativni predznak indicira kako je smjer električnoga polja suprotan smjeru porasta potencijala.

## 5. VODIČI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

U ovom poglavlju bit će sintetizirana dosadašnja saznanja o električnom ponašanju nabijenih i neutralnih vodljivih tijela. Razmatranja ćemo proširiti na neke pojave i primjere kod kojih se zorno vidi mogućnost primjene stečenih saznanja u praktičnim slučajevima.

### 5.1. NABIJENI VODIČ – UVJETI ELEKTROSTATIČKE RAVNOTEŽE

Prepostavit ćemo kako se u prostoru nalazi usamljeno vodljivo tijelo. Ako tijelu prinesemo neki naboј  $Q$ , nastupit će vrlo kratak prijelazni period unutar kojeg se vrši raspodjela naboja po tijelu, takva da zadovolji uvjete elektrostaticke ravnoteže. Termin „usamljen“ ovdje podrazumijeva da nema drugih izvora polja koji bi remetili izvorno polje razmatranoga vodljivog tijela.

Prineseni naboji rasporedit će se po površini vodljivog tijela. Ovo „bježanje“ naboja na površinu izravna je posljedica djelovanja Coulombovih odbojnih sila između istoimenih elementarnih naboja. Posljedica je nepostojanje elektrostatickoga polja unutar vodljivog tijela, što je već dokazano na primjeru primjene Gaussova zakona na nabijenu vodljivu kuglu. Dakle:

$$\vec{E}_u = 0. \quad (5-1)$$

Kada taj uvjet ne bi bio ispunjen, zbog postojanja elektrostatickoga polja tekla bi struja slobodnih nositelja naboja u vodiču (metalu), pa vodič ne bi bio u stanju elektrostaticke ravnoteže. Naboji se na površini razmjestite tako da se pod međusobnim djelovanjem odbojnih elektrostatickih sila ne mogu pomaknuti. Iz te činjenice slijedi kako mora biti ispunjen i drugi uvjet – tangencijalna komponenta elektrostatickoga polja na površini vodiča mora biti jednaka nuli:

$$\vec{E}_t = 0. \quad (5-2)$$

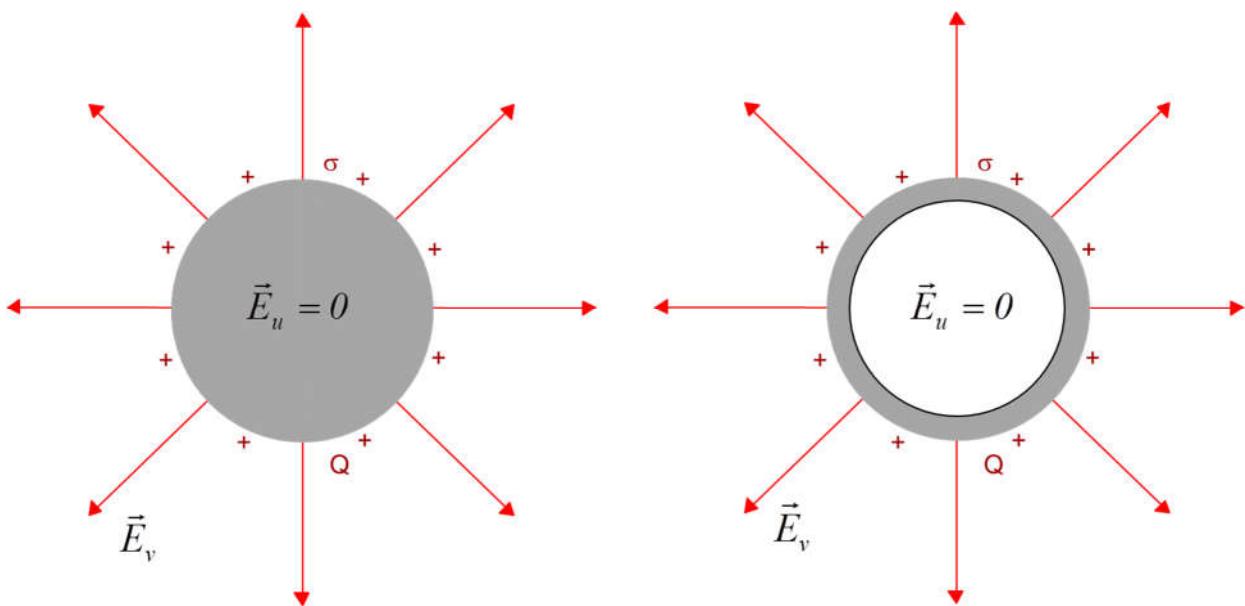
Naime, kad bi postojala tangencijalna komponenta, naboji bi se kretali po površini vodiča, pa bi opet bili narušeni uvjeti elektrostaticke ravnoteže. Elektrostaticko polje na površini može imati samo normalnu komponentu, odnosno sve točke na površini nalaze se na istom potencijalu.

Slijedom svega navedenoga može se zaključiti:

*Elektrostaticko polje mora biti normalno (okomito) na površinu nabijenog vodiča i postoji samo izvan vodiča. Sve točke vodiča u stanju ravnoteže moraju biti na istom potencijalu – površina vodiča je ekvipotencijalna ploha. Potencijal u unutrašnjosti vodiča je konstantan i jednak potencijalu površine vodiča.*

*Polje nabijenog vodiča u svim točkama prostora neće se promijeniti ako puni masivni vodič zamijenimo šupljim vodičem jednaka oblika, kao što je to prikazano na primjeru vodljive kugle prema Slici 5.1.*

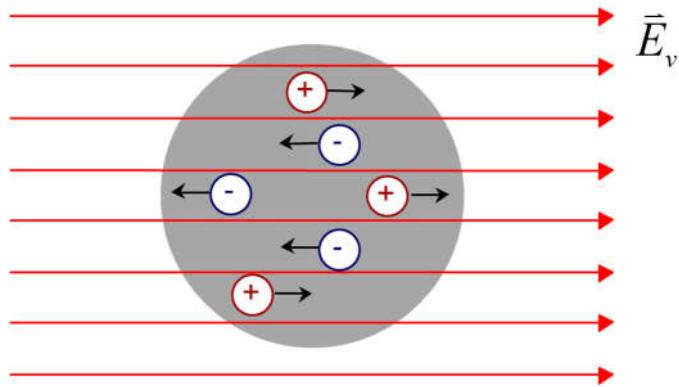
Posljednja tvrdnja bitna je za provođenje postupka zaštite elektrostatickim oklapanjem – Faradayev kavez, o čemu će biti riječi u sljedećim poglavljima.



Slika 5.1 – Zamjena punog vodiča šupljim vodičem

## 5.2. NEUTRALNI VODIČ U STRANOME ELEKTROSTATIČKOM POLJU (ELEKTRIČNA INFLUENCIJA)

Razmatrat ćemo pojavu koja nastaje kada se neutralni (nenabijeni) vodič unese u elektrostatičko polje uzrokovano nekim nabijenim tijelom. Prepostavit ćemo kako je strano polje homogeno polje, kakvo je primjerice polje pozitivno nabijene ravnine, a neutralni vodič metalna kugla kao na Slici 5.2.



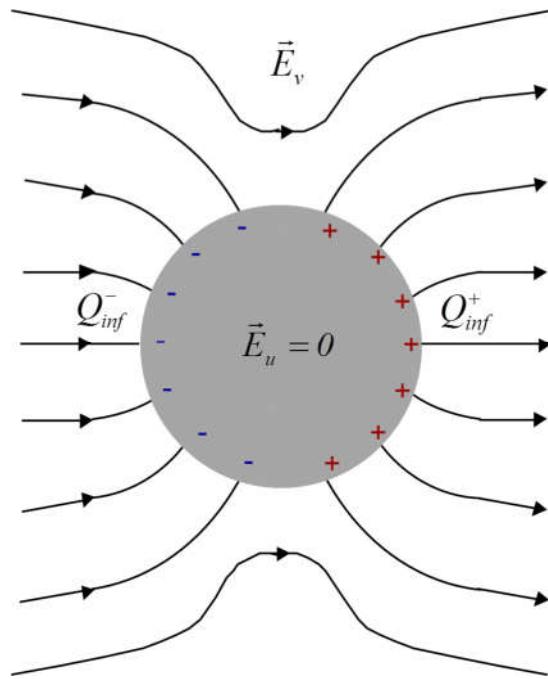
Slika 5.2 – Neutralna vodljiva kugla u homogenom elektrostatičkom polju

Neutralno nevodljivo tijelo (izolator – dielektrik) u stranome polju ne bi izazvalo izobličenje postojećeg polja. Međutim, za vodljivo tijelo moraju biti zadovoljeni uvjeti elektrostatičke ravnoteže. Premda se cijela kugla naizgled nalazi u polju, unutar nje ne može postojati polje.

Što se događa u zanemarivo kratkom prijelaznom periodu do uspostave novog ravnotežnog stanja? Slobodni nositelji naboja – elektroni u vodljivom tijelu kreću se u smjeru izvora polja (pozitivno nabijena ravnina). Krajnja granica njihova gibanja je površina vodiča, jer je okolni prostor nevodljiv, pa se elektroni grupiraju (gomilaju) na lijevoj površini kugle. Istovremeno se na desnoj strani stvara odgovarajući manjak elektrona, odnosno višak pozitivnog naboja. Dakle, pod djelovanjem vanjskoga elektrostatičkoga polja dolazi do pojave razdvajanja naboja. Ta se pojava

naziva *električna influencija*, a razdvojeni negativni i pozitivni naboji predstavljaju *influencirani naboje*. Influencijom razdvojeni naboje stvaraju vlastito polje suprotno usmjereni vanjskom polju. Preraspodjela naboja mora biti upravo takva da polje stvoreno djelovanjem influenciranih naboja u potpunosti poništi vanjsko polje unutar vodljivog tijela. Očito je kako će jače polje uzrokovati i veću količinu influenciranih naboja.

Približan izgled rezultirajućeg polja prikazan je na *Slici 5.3*.



*Slika 5.3 – Rezultirajuće polje za slučaj neutralne vodljive kugle u vanjskom polju*

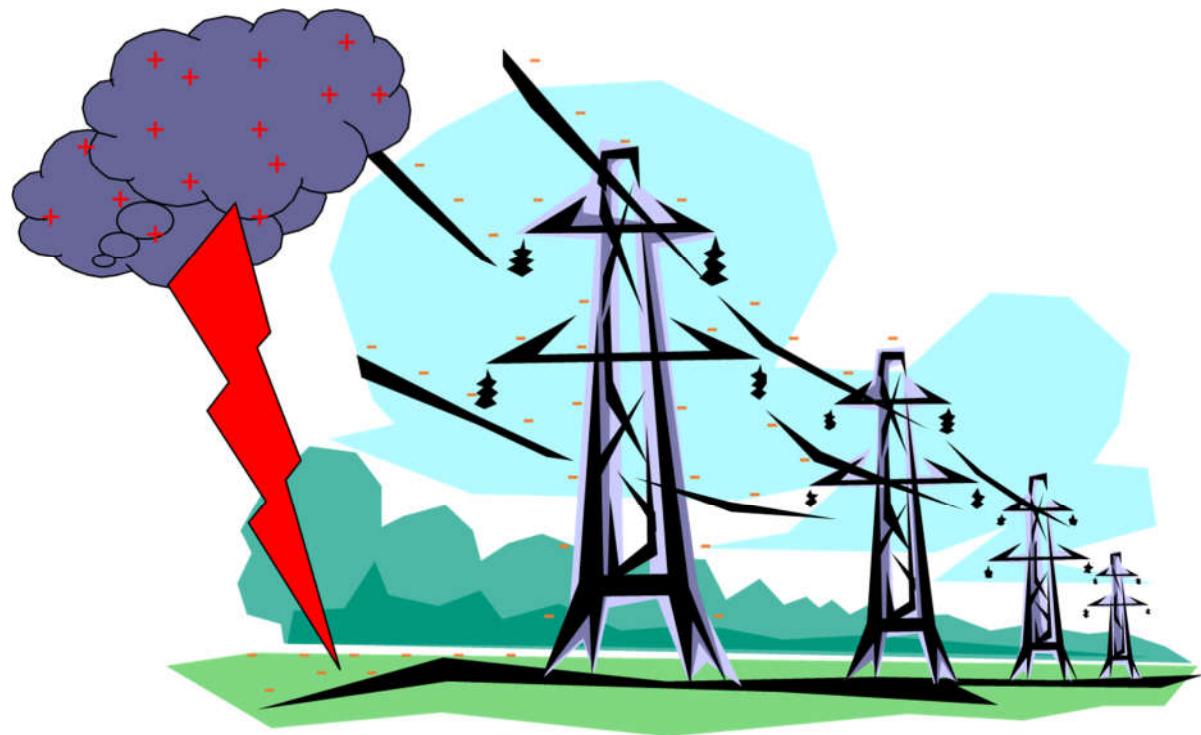
Za pojavu električne influencije vrijedi:

- prije unošenja u primarno (vanjsko) polje vodljivo tijelo je neutralno, pa ukupno influencirani naboje i poslije unošenja mora biti jednak nuli:

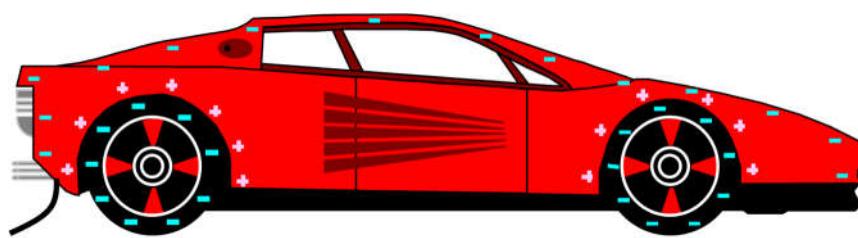
$$Q_{inf}^+ + Q_{inf}^- = 0; \quad (5-3)$$

- po prestanku djelovanja vanjskog polja influencirani naboje se kompenziraju (ponište) i vodljivo tijelo ostaje neutralno;
- rezultirajuće polje deformira primarno polje, jer moraju biti zadovoljeni uvjeti elektrostatičke ravnoteže:  $\vec{E}_u = 0$  – raspored influenciranih naboja je takav da stvoreno polje poništava primarno polje u unutrašnjosti vodiča i  $\vec{E}_t = 0$  – rezultirajući vektori polja moraju biti okomiti na površinu vodiča – ekvipotencijalnu plohu;
- bez obzira na grupiranje influenciranih naboja suprotnog polariteta na dijelovima vodljivog tijela među njima nema razlike potencijala – razlika potencijala uvjetovala bi postojanje polja, a polje bi izazvalo gibanje naboja (elektrona), a time i narušavanje elektrostatičke ravnoteže;
- količina influenciranog naboja proporcionalna je iznosu polja koje je izazvalo pojavu influencije.

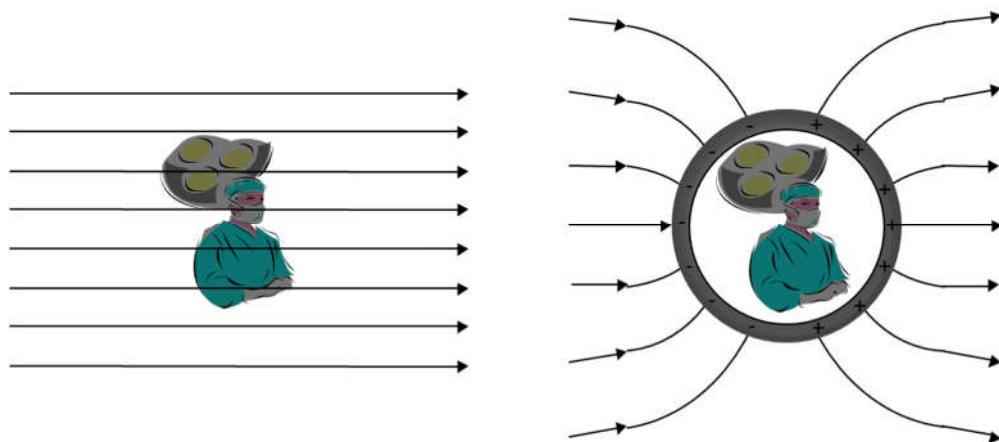
Primjeri ponašanja vodiča u elektrostatičkom polju prikazani su na *Slici 5.4*, *Slici 5.5* i *Slici 5.6*.



Slika 5.4 – Pojava putujućeg vala na dalekovodu zbog udara groma



Slika 5.5 – Stvaranje polja u kabini automobila zbog statičkog elektriciteta i influencije

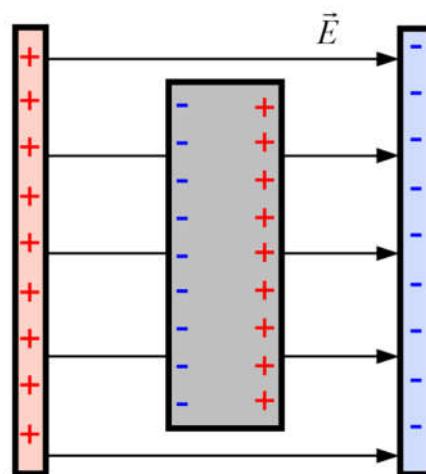


Slika 5.6 – Oklapanje operacijske sale Faradayevim kavezom

### 5.3. VEKTOR ELEKTRIČNOG POMAKA

Električno polje definirali smo kao djelovanje sile na probni naboj u nekoj točki tog polja. U ovom poglavlju uvodimo još jednu fizikalnu veličinu koja omogućuje potpunije sagledavanje svojstava električnoga polja.

Ako se električki neutralno tijelo bilo koje vrste, vodič ili izolator, unese u elektrostatičko polje, uvijek nastaje odgovarajuća promjena položaja naboja. Prvo ćemo razmotriti primjer unošenja vodiča – metalne pločice u elektrostatičko polje stvoreno između nabijenih paralelnih ploča (zračni pločasti kondenzator) kao na Slici 5.7.

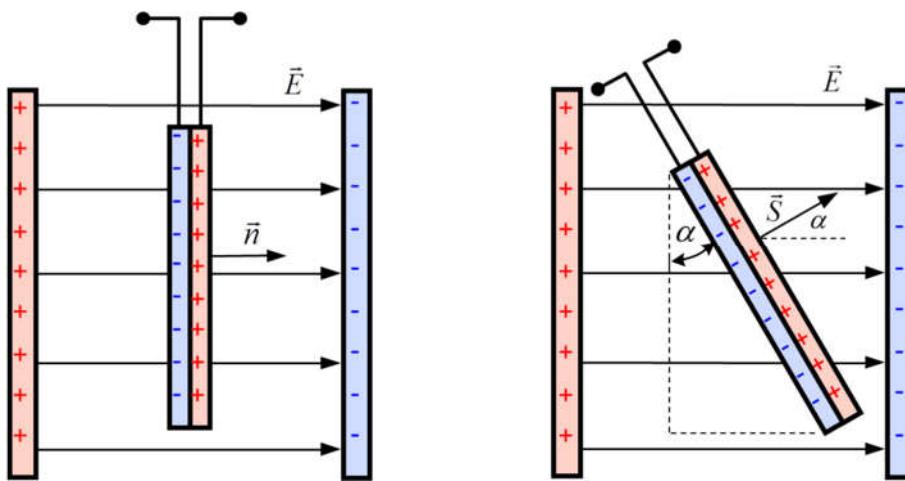


Slika 5.7 – Influencijsko djelovanje elektrostatičkoga polja



Na slobodne elektrone u metalnoj pločici djeluje sila koja uzrokuje njihovo gibanje suprotno smjeru polja. Elektroni se prikupljaju na dijelu pločice okrenutom prema pozitivno nabijenoj ploči. Druga strana pločice postaje pozitivno nabijena. To je primjer električne influencije na vodičima u elektrostatickome polju, što je detaljno opisano u prethodnom poglavlju.

Razmotrit ćemo kako se može ispitati influencijsko djelovanje polja. Pokusom ćemo to djelovanje opisati temeljem gustoće influenciranog naboja. Upotrijebit ćemo dvije vrlo tanke, okrugle metalne pločice s drškom od izolatora – Maxwellove dvoploče. Ako se međusobno prirubljene i pažljivo ispolirane dvoploče unesu u elektrostaticko polje kao na *Slici 5.8.a)*, na pločama će se influencirati električni naboji suprotnog predznaka.



*Slika 5.8 – Pokus s Maxwellovim dvopločama*

Kada se dvoploče rastave dok su još u polju, pa zatim izvade iz polja, na svakoj od njih zadržava se nagomilani naboј nastao influencijom. Količina toga naboja može se izmjeriti primjerice pomoću balističkog galvanometra ili elektroskopa. Rezultati mjerjenja pokazuju: količina influenciranog naboja na svakoj od pločica jednaka je, suprotnog je predznaka, maksimalna je kada su dvoploče paralelne s nabijenim pločama kao na *Slici 5.8.a)* i raste s porastom površine pločica.

Ako se metalne pločice postave u polje pod kutom  $\alpha$  kao na *Slici 5.8.b)* i zatim ponovi eksperiment s izvlačenjem iz polja, količina influenciranog naboja je manja. Primjerice za kut  $\alpha=45^\circ$  svaka će pločica primiti otprilike 71 % naboja u odnosu na pokus a). Zaključujemo kako je influencija orijentirana u prostoru, pa se kao njezina mjera uvodi *gustoća influenciranog naboja* koja ima vektorski karakter, a označuje se sa  $\vec{D}$ . Naziva se *vektor električnog pomaka* (engl. Electric **Displacement Vector**) jer se influencija iskazuje kao pomak naboja. U literaturi se javljaju i drugi nazivi za vektor  $\vec{D}$ : vektor električne indukcije, vektor gustoće električnog pomaka, vektor gustoće električnog toka. Iznos vektora električnog pomaka jest:

$$D = \frac{Q_{i\max}}{S} \quad As/m^2, \quad (5-4)$$

gdje je:

$Q_{i\max}$  – maksimalni influencirani naboј,

$S$  – površina na kojoj se taj naboј influencijom prikupio.

Smjer vektora  $\vec{D}$  određen je smjerom normale  $\vec{n}$  na pozitivnu dvoploču ( $\vec{D} = D \vec{n}$ ) kad je ona orijentirana tako da se na njoj dobije maksimalna gustoća influenciranog naboja.

Influencirani naboј za bilo koji položaj Maxwellovih dvoploča (*Slika 5.8.b)* određen je umnoškom

vektora  $\vec{D}$  i efektivne površine dvoploče  $S_{ef} = S \cos \alpha$ , što se može zapisati u obliku skalarnog umnoška:

$$Q = \vec{D} \cdot \vec{S} \quad (5-5)$$

Eksperimentalno je dokazano kako se jačanjem polja između ploča povećava i influencijsko djelovanje polja, tj.  $\vec{D}$  je izravno proporcionalan s  $\vec{E}$ . Faktor proporcionalnosti jednak je dielektričnoj konstanti vakuma/zraka  $\epsilon_0$ . To možemo i dokazati temeljem saznanja iz Pogl. 3.3.6. Elektrostatičko polje između dviju ravnih nabijenih ploča jest:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5-6)$$

Kako je jakost polja vektor, slijedi da je i gustoća naboja vektorskog karaktera, a to je upravo vektor električnog pomaka:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}. \quad (5-7)$$

Slično kao što smo elektrostatičko polje prikazivali  $E$ -silnicama, možemo i vektor  $\vec{D}$  prikazati  $D$ -silnicama. Kada je između nabijenih ploča vakuum/zrak,  $E$  i  $D$  linije se podudaraju, pa se ne vidi izravni smisao uvođenja vektora  $\vec{D}$ . Međutim za proračune u nehomogenim i višeslojnim dielektricima, te u određivanju zakona loma na granici između dielektrika, vektor  $\vec{D}$  pokazao se korisnim.

U Pogl. 6. analizu ćemo proširiti na slučajeve s dielektrikom/dielektricima umetnutim između nabijenih ploča.

## 5.4. RASPOĐELA NABOJA NA POVRŠINI VODIČA

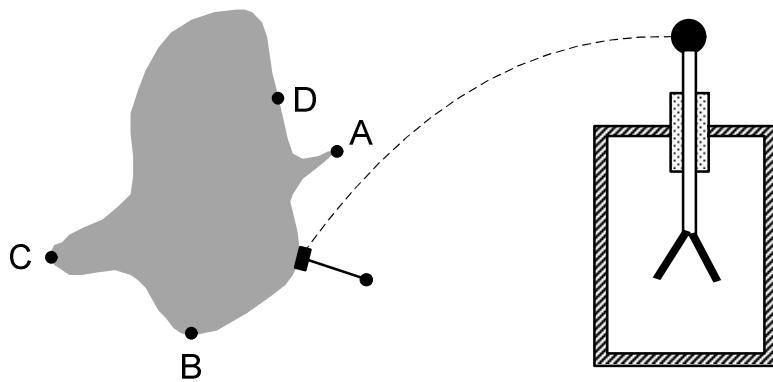
Tvrđnja da se naboji uvijek raspoređuju na površini vodiča neovisno o načinu elektriziranja, može se dalje produbiti. Naime, raspodjela naboja na površini – površinska gustoća naboja  $\sigma$  ovisi o geometrijskom obliku površine vodiča, kao i o načinu elektriziranja vodiča: nabijanjem ili influencijom.

### 5.4.1. Ovisnost o geometrijskom obliku površine vodiča

Gustoća naboja i jakost elektrostatičkog polja to su veći što je veća zakrivljenost površine vodiča - elektrode, odnosno što je manji radius zakrivljenosti površine. Maksimalne vrijednosti postižu se na šiljcima, pa otuda naziv *efekt šiljka*. Tvrđnja se može provjeriti eksperimentalno i teorijski.

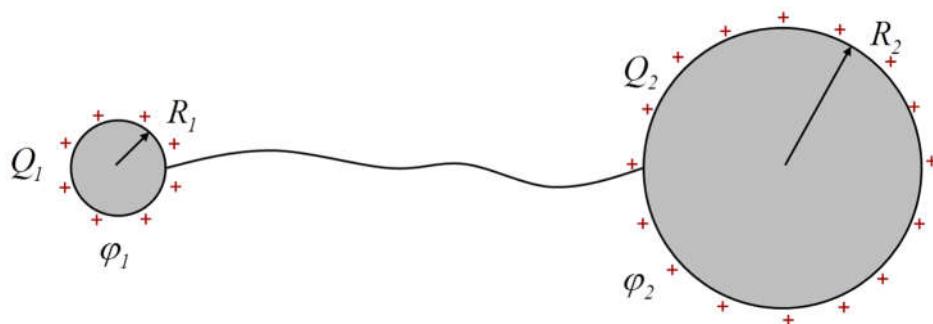
Proučimo nabijeno vodljivo tijelo proizvoljnog oblika kao na *Slici 5.7.*

Ako metalnom pločicom dodirnemo određenu točku na površini vodiča, na istu će prijeći količina naboja proporcionalna površinskoj gustoći naboja na tom mjestu. Pločicu s uzorkom naboja prinesemo elektroskopu dotaknuvši metalnu kuglu elektroskopa. Listići elektroskopa razmaknut će se proporcionalno količini donesenog naboja. Postupak se može ponoviti uzimanjem uzorka naboja s više različitih točaka na vodljivom tijelu. Prema očekivanju, temeljem gore iznesene tvrdnje, najveći otklon elektroskopa bit će u točki  $A$ , a najmanji u točki  $D$ .



Slika 5.7 – Pokus određivanja plošne gustoće naboja nabijenog vodljivog tijela

Za teorijski dokaz razmatrat ćemo dvije kugle polumjera  $R_1$  i  $R_2$  pri čemu je  $R_1 < R_2$  kao na Slici 5.8.



Slika 5.8 – Ovisnost jakosti polja i gustoće naboja o radijusu zakrivljenosti plohe

Prepostavka je da su kugle međusobno vrlo udaljene ( $d \gg R_1, R_2$ ), pa je doprinos potencijala jedne kugle na drugu kuglu zanemariv. Ako kugle nabijemo nabojem  $Q$  i povežemo tankom metalnom žicom, cijeli je sustav na jednakom potencijalu:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi . \quad (5-8)$$

Dovedeni naboje rasporedi se na kuglama ( $Q_1, Q_2$ ), jer je količina naboja na žici zanemarivo malena.

Za potencijale kugla vrijedi:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} ; \quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} . \quad (5-9)$$

Izjednačavanjem potencijala dobije se:

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} . \quad (5-10)$$

Ako se naboji izraze temeljem pripadnih plošnih gustoća i površine kugla ( $Q = \sigma S$ ), slijedi:

$$\frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{\sigma_2 4\pi R_2^2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} . \quad (5-11)$$

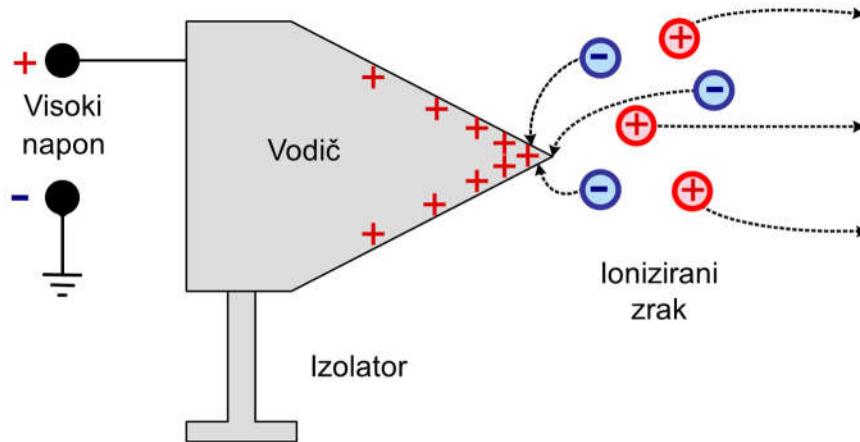
Dakle, plošna je gustoća naboja obrnuto proporcionalna radijusu zakrivljenosti vodiča. Isto vrijedi i za odnos jakosti elektrostatičkog polja i polumjera zakrivljenosti. Polje na površini vodljive kugle jest:  $E = \sigma/\epsilon_0$ , pa je:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}}{\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} . \quad (5-12)$$

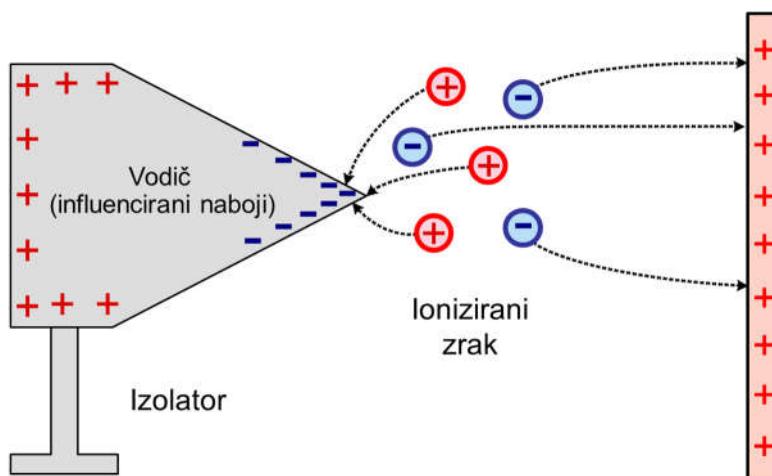
Minimalni radijus zakrivljenosti je na površini oblika šiljka, pa će na šiljku biti najveća plošna gustoća naboja, odnosno najveći intenzitet polja. Taj je efekt iskorišten kod gromobrana, koji predstavlja uzemljeni šiljak pomoću kojega utječemo na mjesto mogućega električnog probora.

#### 5.4.2. Ovisnost o načinu elektriziranja

U elektrostatičkim generatorima za dobivanje vrlo visokih napona iskorištava se efekt šiljka za stvaranje procesa „istjecanja“ odnosno „usisavanja“ naboja, kao što je prikazano na Slikama 5.9 i 5.10.



Slika 5.9 – Istjecanje naboja sa šiljka



Slika 5.10 – Usisavanje naboja

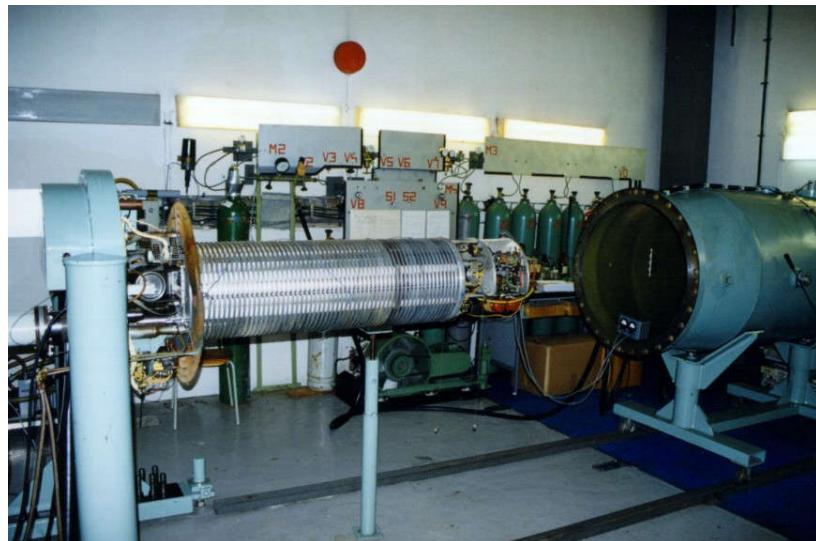


Na *Slici 5.9.a)* vodič se nabija pomoću generatora visokog napona. Pozitivni naboji gomilaju se na šiljku i stvaraju vrlo snažno električno polje u okolišu šiljka. Kada jakost polja prijeđe neku graničnu vrijednost, počinje proces ionizacije okolnoga zraka, odnosno stvaranje pozitivnih i negativnih iona. Negativni ioni kompenziraju se pozitivnim nabojima na šiljku, a pozitivni se ioni udaljavaju od šiljka u okolni prostor. Ukupno gledano stvara se dojam kao da pozitivni naboji „istječu“ iz šiljka.

Taj efekt iskorišten je u napravi koja se zove ionizator zraka. Ionizator je izrađen tako da obogaćuje zrak negativnim ionima koji su neophodni za apsorpciju kisika u plućnim alveolama. Služi za uklanjanje napetosti, malaksalosti, glavobolja, depresije i sl. Otklanja tegobe uzrokovane statičkim elektricitetom.

Na *Slici 5.9.b)* neutralni šiljasti vodič doveden je u blizinu nabijene ravnine. U ovom slučaju do nabijanja vodiča dolazi zbog pojave influencije. Negativni influencirani naboji grupiraju se na šiljku, a pozitivni naboji na suprotnom kraju vodiča. Naboji na šiljku mogu stvoriti dovoljno jako polje koje će ionizirati okolni zrak. Pozitivni se ioni usmjeravaju prema šiljku, a negativni prema nabijenoj ravni. Ukupni proces izgleda kao da šiljak „usisava“ pozitivne naboje s ravnine. Pri tomu se ravnina rasterećuje, a šiljak nabija.

Oba opisana procesa primjenjuju se u elektrostatičkom generatoru – *Slika 5.11.*

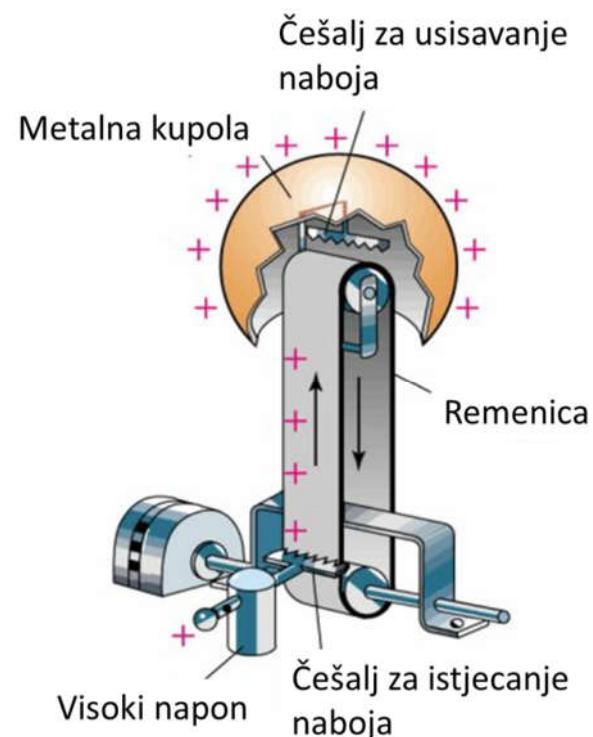


*Slika 5.101 – Van de Graaffov generator*

Van de Graaffov generator<sup>5</sup> je elektrostatički generator koji omogućuje stvaranje ekstremno visokih statičkih električnih potencijala. Princip rada prikazan je na *Slici 5.12.*

Pokretnu traku pogoni remenica smještena na uzemljenom (donjem) kraju uređaja. Druga remenica smještena je unutar velike visokonaponske kupole prema slici. Traka se nabija preko donjeg češlja s oštrim iglicama čiji su šiljci u neposrednoj blizini trake. Češljaj je spojen na izvor koji generira napon od nekoliko desetaka kV. Formira se snažno električno polje koje u blizini vrhova igala ionizira okolni plin. Ioni stvoreni izbijanjem prskaju na prijenosnu traku od izolacijskog materijala (gumirano platno ili sl.) koja ih brzo transportira prema kupoli. Drugi igličasti češljaj prikuplja (usisava) donesene naboje i prebacuje ih na vanjsku površinu kupole. Uređaj je obično izoliran dušikom pod tlakom od 10 do 20 atmosfera radi reduciranja mogućeg iskrenja. Dobro projektiran van de Graaffov generator može se nabiti na potencijal od oko 20 MV.

<sup>5</sup> Robert van de Graaff – američki fizičar (1901. – 1967.)



Slika 5.112 – Princip rada van de Graaffova generatora

## 6. DIELEKTRICI U ELEKTROSTATIČKOM POLJU

Do sada smo proučavali elektrostatička polja slobodnih naboja u vakuumu, odnosno zraku. Međutim ako polje djeluje u materijalnoj sredini, onda se, osim u vodičima, ne može govoriti o slobodnim nabojima. U tim se slučajevima uvodi pojam električnog toka pomaka zbog efekta pomicanja naboja u materijalnoj sredini pod djelovanjem elektrostatičkog polja. Pomak naboja u materijalnoj sredini sazdan je od atoma i molekula pojava je koju nazivamo *električna polarizacija*.

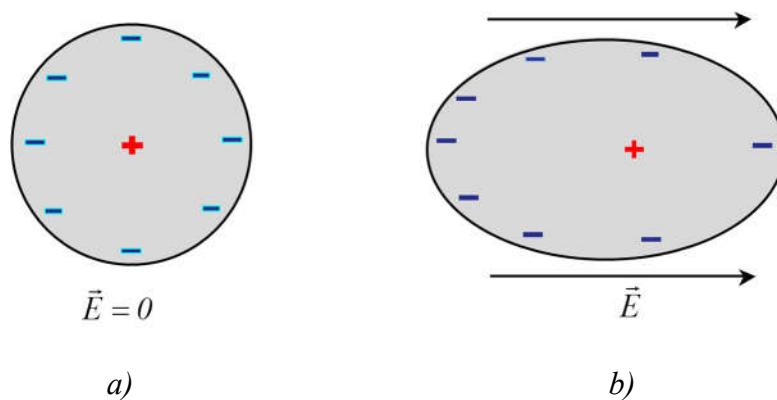
### 6.1. ELEKTRIČNA POLARIZACIJA

U nevodljivim tvarima – dielektricima nema slobodnih naboja – elektrona. Ako se takvi materijali unesu u električno polje, ne može doći do razdvajanja naboja, odnosno pojave influencije. Moguć je jedino određeni pomak u razmještaju naboja unutar atoma i/ili molekula. S obzirom na mikrostrukturu dielektrika razlikuju se dva slučaja:

- dielektrici s nepolarnim atomima/molekulama kao što su kisik, vodik, dušik, natrij, neki rijetki plinovi, ...,
- dielektrici s polarnim molekulama kao voda, klorovodična kiselina, metanol, sumporni dioksid, ugljični monoksid, amonijak, ...

#### 6.1.1. Inducirani dipoli

Materijali s nepolarnim molekulama prije unošenja u električno polje ponašaju se električki neutralno u odnosu na okolinu. Takva je većina dielektrika. Za razumijevanje efekata u dielektriku razmatrat ćemo atom dielektrika koji se sastoji od negativnog naboja (elektronski plašt ili oblak)  $-Q = -z \cdot e$  i pozitivnog naboja (jezgra)  $Q = z \cdot e$ , kao na *Slici 6.1.a*.



*Slika 6.1 – Polarizacija nepolarnog atoma ili molekule*

Pri tomu je  $z$  broj elektrona u elektronskom plaštu, tj. redni broj elementa u periodnom sustavu elemenata, a  $e$  naboj elektrona. Cijeli atom je električki neutralan zbog jednakog množine pozitivnog i negativnog naboja. Centri pozitivnog i negativnog naboja se poklapaju, pa se u prostoru izvan atoma polja pozitivne jezgre i negativnog plašta međusobno poništavaju. Slični se prikaz može primjeniti i za molekulu dielektrika: jezgru molekule tretiramo kao točkasti naboj, a

strukturu elektrona kao oblak negativnog naboja.

Promatrajmo što se događa kada se atom unese u elektrostaticko polje  $\vec{E}$  (*Slika 6.1.b*). Pozitivni naboji pomaknu se iz ravnotežnog stanja u smjeru polja pod djelovanjem sile  $F_+ = Q\vec{E}$ , a negativni naboji u suprotnom smjeru zbog sile  $F_- = Q\vec{E}$ . Nastala je elastična deformacija koja predstavlja novo ravnotežno stanje u kojem Coulombovim silama ravnotežu drže unutarnje privlačne sile naboja atoma. Kao ukupni rezultat pomaka naboja formira se *električni dipol*, a dielektrik postaje polariziran. Dipol je općenito sastavljen od dvaju točkastih naboja jednakog iznosa, a suprotnog predznaka. *Polarizacija* je proces formiranja električnih dipola usmjerenih pod djelovanjem vanjskog polja. Dipoli stvoreni od nepolarnih atoma/molekula su *inducirani dipoli*. U polariziranom stanju elektronski plašt je izobličen zbog djelovanja električnog polja. U novom ravnotežnom položaju centri pozitivnog i negativnog naboja pomaknuti su za  $\vec{d}$ . Vektor  $\vec{d}$  pokazuje iznos i orientaciju dipola u prostoru.

Deformacija raspodjele naboja proporcionalna je jakosti narinutog polja, a ekvivalentna je prema principu superpozicije zbroju izvorne raspodjele i stvorenog dipola, kao što je prikazano na *Slici 6.2.*



*Slika 6.2 – Ekvivalent polariziranog atoma ili molekule*

Karakteristike dipola određuje *električni dipolni moment*:

$$\vec{p} = Q\vec{d} \quad [As \cdot m]. \quad (6-1)$$

Stanje polarizacije može se opisati pomoću veličine nazvane *vektor polarizacije*:

$$\vec{P} = N' \vec{p} \quad [m^{-3} \cdot Cm = Cm^{-2}], \quad (6-2)$$

gdje je  $N'$  broj molekula po jedinici obujma, a  $\vec{p}$  dipolni moment jedne molekule – dipola. Vektor polarizacije ima dimenziju plošne gustoće naboja. Kao i dipolni moment razmjeran je jakosti električnog polja:

$$\vec{P} = \alpha \vec{E}, \quad (6-3)$$

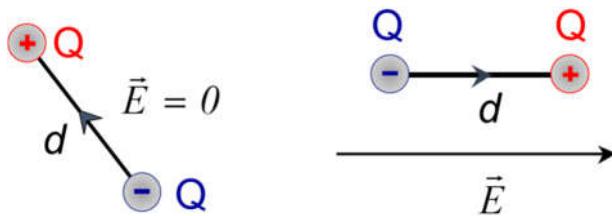
pri čemu je  $\alpha$  koeficijent polarizacije dielektrika s nepolarnim atomima/molekulama.

### 6.1.2. Permanentni dipoli

Dielektrici s polarnim molekulama imaju dipolni moment različit od nule i kad se ne nalaze u vanjskom električnom polju. Molekule same po sebi su već dipoli, pa ih nazivamo *permanentni dipoli*. Međutim, zbog termičkog gibanja, osi permanentnih dipola kaotično su raspoređene u prostoru, tako da se i takav dielektrik prema vani ponaša električki neutralno  $\sum_i \vec{p}_i = 0$ . Ako se narine vanjsko električno polje, osi dipola teže se postaviti u smjer polja. Na dipole djeluje



zakretni moment koji pozitivni naboje zakreće u smjer polja, a negativni u suprotnom smjeru. Tomu se suprotstavlja termičko gibanje molekula. Usmjeravanje u smjer polja dovoljno je veliko da zbroj dipolnih momenata bude različit od nule  $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ . Što je polje jače, to je više izraženo usmjeravanje dipola. Tek kada se dipolni moment  $\vec{p}$  postavi kolinearno s vektorom polja, prestaje zakretanje dipola, kao što je prikazano na *Slici 6.3*.



*Slika 6.3 – Polarizacija polarnih molekula s permanentnim dipolima*

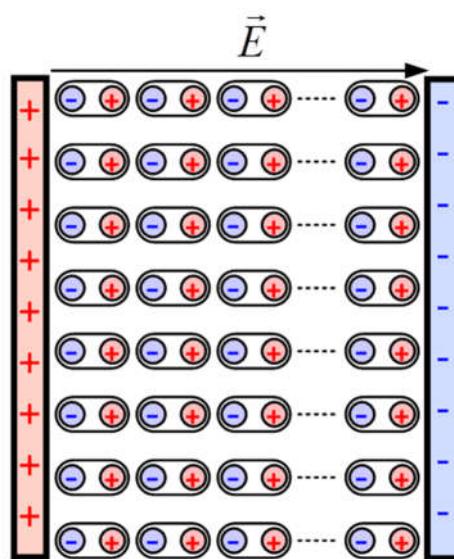
I kod dielektrika s polarnim molekulama vektor polarizacije proporcionalan je jakosti polja:

$$\vec{P} = \alpha' \vec{E}, \quad (6-4)$$

pri čemu je  $\alpha'$  koeficijent polarizacije dielektrika s polarnim atomima/molekulama.

### 6.1.3. Dielektričnost dielektrika

Statička električna polja naboja u stanju mirovanja moguća su samo u električki nevodljivim sredstvima – izolatorima. Izolatori se stoga nazivaju i dielektrici (grčki: *dia* = kroz), jer kroz njih djeluju električne sile. U njima normalno nema slobodnih naboja. Kako je već rečeno, pri unosu u električno polje dolazi do razmještaja naboja što ima za posljedicu stvaranje električnih dipola. Pojava polarizacije naboja u prostoru između dviju ravnih paralelnih ploča (pločasti kondenzator) ispunjenu nekim dielektrikom prikazana je na *Slici 6.4*.



*Slika 6.4 – Polarizacija dielektrika*

Za opisivanje polarizacije nije bitna samo jakost električnog polja, već i priroda samog dielektrika. Kako bi se obuhvatio utjecaj dielektrika, olakšalo proučavanje pojave u polju pri različitim dielektricima i odredila mjera električne deformacije materijala u električnome polju, Maxwell je uveo novu veličinu – vektor električnog pomaka. Prema pokusu s influenciranim nabojem na Maxwellovim dvopločama (*Pogl. 5.3.*) vektor  $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$  definira influencijom stvoreni naboј na jedinicu površine presjeka električnog polja u zraku/vakuumu.

Izvršimo li pokus u zraku i usporedimo ga s pokusom u nekom drugom dielektriku, primjerice u parafinu, izmjerena količina influencijom stvorenog naboja na vodljivom tijelu u parafinu bit će  $\epsilon_r$  puta veća od količine influenciranog naboja u zraku, pa vrijedi:

$$\vec{D} = \epsilon_r \vec{D}_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}, \quad (6-5)$$

gdje je  $\epsilon_r$  dielektričnost dielektrika ili *relativna dielektrična konstanta*. To je broj bez dimenzija koji je značajka pojedine tvari, tj. ovisi o vrsti dielektrika. Pokazuje koliko je puta veća gustoća električnog toka (električna indukcija) u toj tvari, nego što bi, uz istu jakost polja, bila u vakuumu. Za većinu dielektrika kreće se do vrijednosti 10, u nekim keramičkim materijalima do 100, a u specijalnim materijalima kao što je barijev titanat i više od 1000. Približne vrijednosti dielektričnosti za neke tipične materijale dane su u *Tablici 6.1*. Vrijednosti se odnose na statička polja ili polja pri niskim frekvencijama ispod 1 kHz.

Uumnožak dielektričnosti  $\epsilon_r$  i dielektrične konstante vakuma  $\epsilon_0$  je *permitivnost* (propustljivost) dielektrika ili *apsolutna dielektrična konstanta*:

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0. \quad (6-6)$$

Povećana količina induciranih naboja ponekad se, posebno u području teorijske fizike, izražava pomoću vektora polarizacije  $\vec{P}$  umjesto dielektričnosti  $\epsilon_r$ . Razlika koja postoji između vektora električnog pomaka u zraku  $\vec{D}_0$  i u nekom dielektriku  $\vec{D}$  tumači se upravo pojmom polarizacije, tj. vrijedi:

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} (\epsilon_r - 1) = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (6-7)$$

gdje je  $\chi$  električna *susceptibilnost* (osjetljivost) koja kazuje u kojoj je mjeri dielektrik osjetljiv na električno polje.

Polarizirani naboј nestaje kada se otkloni uzrok polarizacije – vanjsko polje  $\vec{E}$ . Elastična deformacija postaje nepovratna (plastična) ako se narinu veliki iznosi polja. Naime, dovoljno jako polje trga elektrone iz matičnih molekula. Dielektrik gubi dielektrična svojstva i postaje vodljiv. Kaže se da je nastao *proboj dielektrika*. Budući da ne postoji idealni dielektrik, proboj se može dogoditi u svim tipovima dielektričnih materijala – krutim, tekućim i plinovitim. Proboj ovisi o vrsti materijala, temperaturi, količini vlage, kao i o trajanju izlaganja dielektrika djelovanju električnog polja.

Minimalna jakost električnog polja na kojoj dolazi do probora dielektrika naziva se *električna čvrstoća dielektrika*. Drugim riječima, električna čvrstoća je maksimalno dopuštena jakost polja do koje dielektrik zadržava svoja svojstva.

Vrijednosti električne čvrstoće za neke tipove dielektrika dane su u *Tablici 6.1*.



Tablica 6.1 – Tipične vrijednosti dielektričnosti i električne čvrstoće raznih dielektrika

MATERIJAL	DIELEKTRIČNOST $\epsilon_r$	ELEKTRIČNA ČVRSTOĆA $E$ (V/m)
Papir	7	$12 \times 10^6$
Staklo	5–10	$35 \times 10^6$
Mika	6	$70 \times 10^6$
Bakelit	5	$20 \times 10^6$
Tvrda guma	3,1	$25 \times 10^6$
Parafin	2,2	$30 \times 10^6$
Petrolej	2,1	$12 \times 10^6$
Zrak	1	$3 \times 10^6$
Barijev titanat	1200	$7,5 \times 10^6$

## 6.2. MAXWELLOV POSTULAT

Gaussov zakon za elektrostatiku:

$$\Psi_{el} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{uk}}{\epsilon_0} \quad (6-8)$$

može se prikazati u generaliziranom obliku koji je primjenjiv i na sve vrste dielektrika. Opći oblik Gaussova zakona je:

$$\Psi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{uk}. \quad (6-9)$$

*Tok vektora električnoga pomaka kroz bilo koju zatvorenu plohu  $S$  jednak je zbroju svih naboja obuhvaćenih u dijelu prostora koji je ograničen tom zatvorenom plohom.*

Drugim riječima, tok vektora električnoga pomaka jednak je naboju koji je uzrokom toga toka. Naboji su izvori odnosno ponori električnog toka. Temeljem navedenoga postaje razvidno zašto se vektor električnog pomaka  $\vec{D}$  ponekad naziva i vektor gustoće toka.

Za gornju se relaciju rabi i izraz Maxwellov postulat, jer je Škot Maxwell<sup>6</sup> uveo pojam vektora električnog pomaka.

<sup>6</sup> James Clerk Maxwell (1831. – 1879.)

## 7. ELEKTRIČNA KAPACITIVNOST I KONDENZATORI

U analizi potencijala i potencijalne energije (Pogl. 4.) rečeno je kako naboji, odnosno raznovrsne skupine naboja, posjeduju potencijalnu energiju. Za pomicanje naboja u elektrostatičkom polju potrebno je uložiti odgovarajući rad elektrostatičkog polja (smanjenje potencijalne energije) ili neke vanjske sile (povećanje potencijalne energije). Uloženi se rad vraća kada naboji ponovno zauzmu svoje početne položaje. Elektrostatički se sustavi, dakle, mogu rabiti kao spremišta energije koja na elektrodama mogu pohraniti relativno velike količine naboja uz male potencijalne razlike. To je ujedno i najvažniji oblik njihove uporabe u području elektrotehnike.

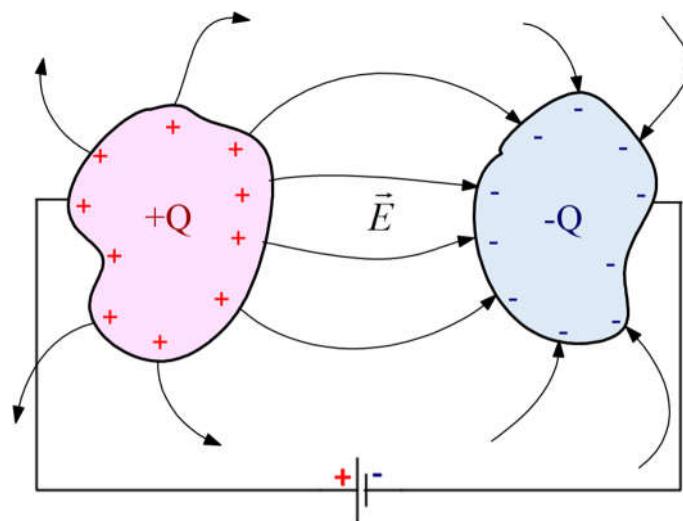
Sile među naboljima su jako velike, pa bi pri pokušaju razmještanja znatnih količina naboja moglo doći do električnog pražnjenja. To se primjerice događa za grmljavinskog nevremena. Zato je količina energije koja se može uskladištiti na ovaj način, mala. S druge strane, elektrostatički uređaji za pohranu električne energije imaju dvije bitne prednosti:

- visok stupanj korisnosti, odnosno male gubitke energije,
- veliku brzinu odziva, odnosno malu tromost.

Naime, kod mehaničkih uređaja inerciji doprinose elektroni i protoni, dok se u električnim uređajima kreću samo elektroni. U primjenama gdje su od važnosti velike brzine reakcije, primjerice reda veličine mikrosekunde, elektrostatički sustavi su nenadmašni.

### 7.1. KONSTRUKCIJA, SVOJSTVA I OZNAKE KONDENZATORA

Razmotrimo kako ćemo odrediti prikladnu konstrukciju uređaja za spremanje električne energije. Prvo se moramo opredijeliti između sustava istovrsnih ili raznovrsnih naboja. Kako su tijela općenito neutralna, jednostavnije je rabiti raznovrsne naboje. Njih može, primjerice, proizvesti električna baterija na svojim izlaznim stezalkama. Potrebno je odabrati dva ili više vodiča koji nose podjednake količine naboja suprotnog predznaka. Podrazumijeva se da sve linije toka koje izviru iz jednog vodiča moraju završiti na površini drugog vodiča, kao primjerice na *Slici 7.1.*



*Slika 7.1 – Uređaj za pohranu električne energije – kondenzator*

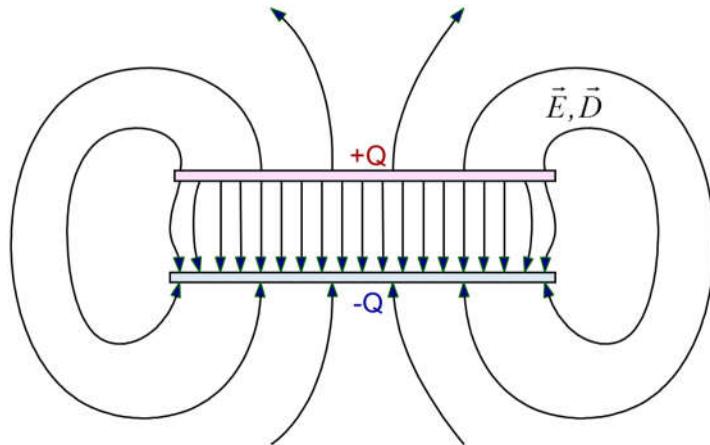
Opisani se uređaj uobičajeno naziva *kondenzator*, iako bi prikladniji naziv bio *kapacitor* zbog Osnove elektrotehnike I



njegova kapaciteta spremanja električne energije i naboja. Pozitivni i negativni vodiči predstavljaju ploče ili obloge kondenzatora. Između ploča mora biti slobodan prostor (zrak, vakuum) ili neki dielektrik.

Nadalje je potrebno odrediti oblik uređaja. Budući da je energija to veća što su naboji međusobno bliži, prikladan oblik bilo bi dvije paralelne blisko smještene metalne ravnine – ploče. Ploče se iz vanjskog izvora nabiju nabojima  $+Q$  i  $-Q$  i predstavljaju pozitivnu i negativnu elektrodu. S obzirom na oblik elektroda opisani se kondenzator naziva još i *pločasti kondenzator*. Elektrode se mogu izvesti i na druge načine (kuglasti, cilindrični kondenzator).

Slika polja pločastog kondenzatora prikazana je na *Slici 7.2*.



*Slika 7.2 – Rasподјела силница поља за пločasti kondenzator*

Polje unutar ploča približno se može smatrati homogenim, a rubni se efekti deformacije polja mogu zanemariti zbog malog razmaka između ploča.

U sljedećem koraku odredit ćemo veličinu koja omogućuje usporedbu različitih kondenzatora. Pretpostavimo da su ploče spojene na baterijski izvor koji ostvaruje razliku potencijala  $U$  između njih. Posljedica je nabijanje ploča nabojima  $+Q$  i  $-Q$ . Ako se razlika potencijala udvostruči (npr. dva serijski spojena naponska izvora), udvostručit će se i jakost električnog polja, a time i gustoća električnoga toka. Kako je gustoća toka mjeru gustoće naboja, i naboju na pločama će se udvostručiti. Slijedi kako je naboju na pločama proporcionalan razlici potencijala među njima:

$$Q = CU. \quad (7-1)$$

Faktor proporcionalnosti  $C$  omjer je naboja i napona:

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (7-2)$$

To je strukturna konstanta ovisna o dimenzijama i obliku elektroda kondenzatora, kao i o dielektriku između njih, a neovisna je o iznosima naboja i napona. Naziva se *kapacitivnost*, a predstavlja mjeru sposobnosti kondenzatora da akumulira električnu energiju. Jedinica mjeru je farad:

$$1F = \frac{\text{As}}{\text{V}}. \quad (7-3)$$

Jedan farad jednak je električnoj kapacitivnosti kondenzatora koji se nabojem od 1 C nabije na

napon od 1 V. To je vrlo velika i nepraktična jedinica, jer stvarne vrijednosti kapacitivnosti realnih kondenzatora imaju znatno manje vrijednosti ( $\mu\text{F}$ ,  $\text{nF}$ ,  $\text{pF}$ ).

Izolacijski materijal između vodljivih ploča ne dopušta protok istosmjerne struje, tj. kondenzator djeluje kao *otvorenji krug*. Međutim, ako je napon na stezalkama kondenzatora vremenski promjenljiv, mijenjat će se i količina naboja akumulirana na pločama kondenzatora, jer je stupanj polarizacije funkcija narinutog električnog polja. Tada je:

$$q(t) = Cu(t). \quad (7-4)$$

Premda struja ne teče kroz kondenzator ako je napon na njemu konstantan, vremenski promjenljiv napon uzrokovat će vremensku promjenu naboja. Kako po definiciji struja predstavlja promjenu naboja u vremenu:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (7-5)$$

može se odnos između struje i napona na kondenzatoru izraziti s:

$$i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad \text{ili} \quad u_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt. \quad (7-6)$$

Te će relacije biti potrebne kada se budu analizirale vremenski promjenljive izmjenične struje. U daljoj analizi pod terminom kondenzator razumijevat ćeemo idealni element za pohranu energije. Iako *idealni kondenzator*, striktno govoreći, ne postoji, korisno ga je smatrati „idealnim“ zbog lakšeg razumijevanja fizikalnih svojstava uređaja i krugova. U praksi se uvijek disipira dio energije koja se skladišti, tj. postoje određeni gubitci, ali se oni u cilju analize mogu zanemariti. U električnim krugovima kondenzator se prikazuje jednim od simbola na *Slici 7.3*.



*Slika 7.3 – Simboličke označke kondenzatora*

### 7.1.1. Vrste kondenzatora

Ovisno o području uporabe kondenzatori mogu biti:

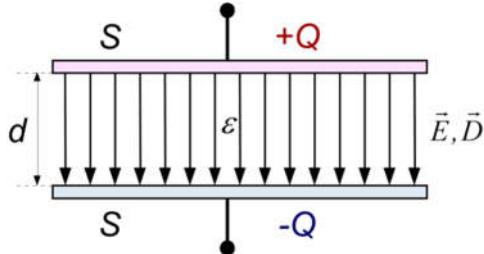
- elektrostatički kondenzatori (suhi separator) – veličine reda pikofarada do milifarada (filtriranje signala, podešavanje frekvencija, ...),
- elektrolitski kondenzatori – veličine u milifaradima i mikrofaradima (filtriranje snage, međuspremniči),
- ultrakondenzatori – veličine reda farada (automobilska i vojna industrija, razne naprave za potrošače). Rabe se i u sustavima za regenerativno kočenje. Kinetička energija kočenja pretvara se u električnu energiju punjenja kondenzatora što predstavlja dodatni izvor snage prilikom penjanja uzbrdo i pretjecanja.

## 7.2. ODREĐIVANJE KAPACITIVNOSTI KONDENZATORA

Kako je već rečeno, kapacitivnost bilo kojeg kondenzatora ovisi samo o geometrijskim dimenzijama elektroda i materiji koja ih okružuje. Odredit ćemo izraze za kapacitivnost tipičnih vrsta kondenzatora.

### 7.2.1. Kapacitivnost pločastog kondenzatora

Kondenzator tvore dvije paralelne vodljive ploče površine  $S$ , s međusobnim razmakom  $d$ . U prostoru između ploča polje je homogeno, a prostor može biti ispunjen zrakom ( $\epsilon_0$ ) ili nekim dielektrikom s  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , kao na *Slici 7.4.*



*Slika 7.4 – Pločasti kondenzator*

U *Pogl. 4.4.3.* pokazano je kako za napon među nabijenim pločama vrijedi:

$$U = Ed = \frac{D}{\epsilon} d = \frac{Q}{\epsilon S} d. \quad (7-7)$$

Kvocijent  $Q/U$  je kapacitivnost pločastog kondenzatora ispunjenog nekim dielektrikom:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon \frac{S}{d}. \quad (7-8)$$

Dakle, kapacitivnost je proporcionalna površini ploča i obrnuto proporcionalna udaljenosti između njih.

Ako je prostor između ploča ispunjen zrakom, kapacitivnost je  $C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ , pa omjer  $C/C_0$  određuje relativnu dielektričnu konstantu:  $\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r$ .

### 7.2.2. Kapacitivnost osamljene kugle

Kao primjer osamljene kugle (kugla je jedna elektroda kondenzatora, a druga je elektroda u neizmjerno udaljenoj točki) može se razmatrati planet Zemlja. Ona je u odnosu na okolni prostor okružena vakuumom ( $\epsilon_0$ ). Kako je potencijal kugle polumjera  $R$  na njezinoj površini (*Pogl. 4.4.2.*) dan izrazom:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (7-9)$$

kapacitivnost osamljene kugle je:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (7-10)$$

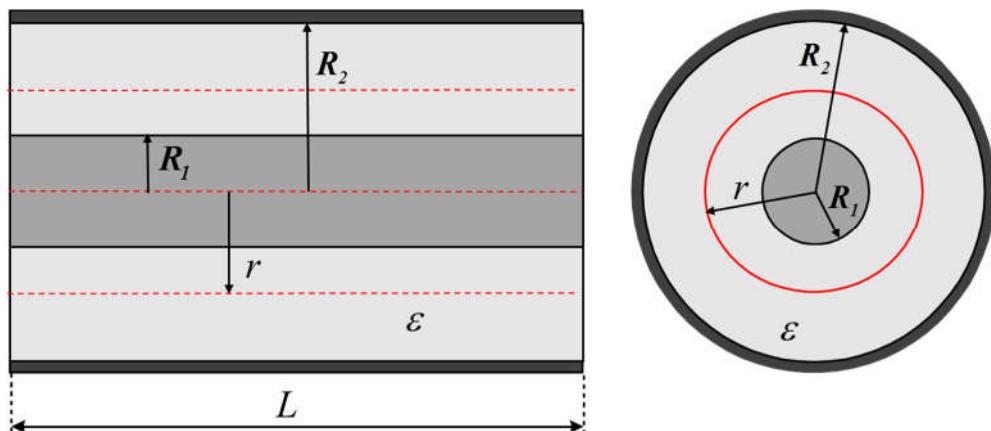
i ovisi samo o polumjeru kugle i dielektričnoj konstanti okolnoga prostora. Ako se zna da je polumjer Zemlje približno  $R = 6370$  km, dobije se za kapacitivnost Zemlje:  $C = 708\mu\text{F}$ , a to primjerice odgovara kapacitivnostima kondenzatora koji se rabe u televizijskim i radijskim prijamnicima.

### 7.2.3. Kapacitivnost cilindričnog kondenzatora

Elektrode cilindričnog kondenzatora su unutarnji vodič polumjera  $R_1$  duljine  $L$  i koaksijalno postavljeni vodljivi cilindar polumjera  $R_2$  jednake duljine, kao na *Slici 7.5*. Prostor između vodiča ispunjen je općenito nekim dielektrikom  $\epsilon$ .

Neka je unutarnji vodič nabijen na  $+Q$ , a vanjski na  $-Q$ . Prema Gaussovom teoremu jakost električnog polja na udaljenosti  $r$  je:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}. \quad (7-11)$$



*Slika 7.5 – Cilindrični kondenzator*

Razlika potencijala između pozitivne i negativne elektrode je:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (7-12)$$

pa je kapacitivnost cilindričnog kondenzatora:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (7-13)$$

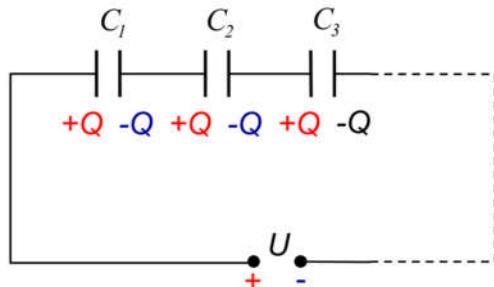
Isti izraz vrijedi i za proračun kapacitivnosti koaksijalnog voda.

Proračuni za neke druge konfiguracije kao što su kapacitivnost kuglastog kondenzatora, kapacitivnost dvožičnog voda i kapacitivnost vodiča iznad površine zemlje (rješava se metodom preslikavanja), složeniji su, pa je postupak njihova određivanja izostavljen.

## 7.3. KRUGOVI S KONDENZATORIMA

### 7.3.1. Serijski spoj

Na *Slici 7.6* prikazan je serijski spoj koji može sadržavati proizvoljni broj kondenzatora.



*Slika 7.6 – Serijski spoj kondenzatora*

Analizirat ćemo proces nabijanja kondenzatora kada ih priključimo na stezaljke izvora  $U$ . Na lijevu ploču kondenzatora  $C_1$  priveden je naboј  $+Q$ , pa je ona postala pozitivna. Zbog električne influencije doći će do razdvajanja naboja u dijelu sklopa između desne ploče prvoga i lijeve ploče drugog kondenzatora. Na desnu ploču prvog kondenzatora bit će privučen naboј  $-Q$ , pa će lijeva ploča drugog kondenzatora biti nabijena jednakom količinom naboja  $+Q$ . Proces se ponavlja sve dok i posljednji kondenzator u serijskom spoju ne primi jednaku količinu naboja. Vrijedi, dakle:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots \quad (7-14)$$

Naponi na kondenzatorima su različiti i ovise o kapacitivnostima kondenzatora. Napon izvora jednak je zbroju napona pojedinih kondenzatora:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots \quad (7-15)$$

odnosno:

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \dots = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \right). \quad (7-16)$$

Konačno je:

$$\frac{U}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (7-17)$$

Zaključak: Recipročna vrijednost ukupne kapacitivnosti skupine serijski spojenih kondenzatora jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti kapacitivnosti pojedinih kondenzatora.

Serijskim spajanjem kondenzatora kapacitivnost se smanjuje, odnosno manja je od najmanje kapacitivnosti u serijskom spoju.

Za najjednostavniji serijski spoj dvaju kondenzatora jest:

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (7-18)$$

Ako su kondenzatori jednake vrijednosti  $C_1 = C_2 = C$ , ukupna kapacitivnost je  $C_{12} = C/2$ .

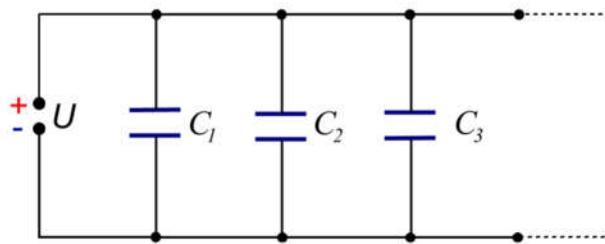
Naponi na kondenzatorima obrnuto su proporcionalni njihovim kapacitivnostima:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{Q}{C_1}}{\frac{Q}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (7-19)$$

### 7.3.2. Paralelni spoj

Na *Slici 7.7* prikazana je skupina kondenzatora spojenih paralelno na stezaljke izvora  $U$ . Svaki kondenzator spojen je između pozitivne i negativne elektrode izvora, pa je:

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \dots \quad (7-20)$$



*Slika 7.7 – Paralelni spoj kondenzatora*

Ukupni naboj koji daje izvor raspodijeli se na pojedine kondenzatore tako da je:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (7-21)$$

odnosno:

$$Q = U_1 C_1 + U_2 C_2 + U_3 C_3 + \dots = U(C_1 + C_2 + C_3 + \dots). \quad (7-22)$$

Nadomjesna kapacitivnost paralelnoga spoja je:

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (7-23)$$

Zaključak: Ukupna kapacitivnost skupine paralelno spojenih kondenzatora jednaka je zbroju kapacitivnosti pojedinih kondenzatora.

Paralelnim spajanjem kondenzatora kapacitivnost se povećava, odnosno veća je od najveće kapacitivnosti u paralelnome spoju.

Za paralelni spoj dvaju kondenzatora je:

$$C_{12} = C_1 + C_2. \quad (7-24)$$

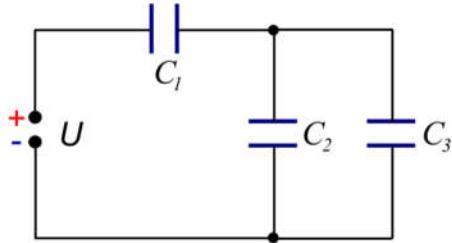
Ako su kondenzatori jednake vrijednosti  $C_1 = C_2 = C$ , ukupna kapacitivnost je  $C_{12} = 2C$ .

Naboji na kondenzatorima proporcionalni su njihovim kapacitivnostima:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{U_1 C_1}{U_2 C_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (7-25)$$

### 7.3.3. Mješoviti spojevi

Mješoviti spojevi sadrže različite kombinacije serijskih i paralelnih spojeva. Kada nije moguće krug riješiti serijsko-paralelnom redukcijom, potrebno je primijeniti pretvorbe trokut – zvijezda ili zvijezda – trokut. Primjer jednostavnog mješovitog spoja prikazan je na *Slici 9.8.*



*Slika 7.8 – Mješoviti spoj kondenzatora*

Nadomjesna kapacitivnost je:

$$C = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}. \quad (7-26)$$

Ukupni naboј je:

$$Q = CU = Q_1 = Q_{23}, \quad (7-27)$$

gdje je  $Q_{23} = Q_2 + Q_3$ .

Naponi na pojedinim kondenzatorima su:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad , \quad U_2 = U_3 = \frac{Q_{23}}{C_{23}}. \quad (7-28)$$

## 7.4. SPOJEVI S VIŠESLOJNIM DIELEKTRICIMA – UVJETI NA GRANICI

U praksi se često mogu pronaći kondenzatori s višeslojnom izolacijom, odnosno s dielektricima sastavljenima od dvaju ili više slojeva. Analizirat ćemo kondenzatore u slučajevima kada je višeslojni (kompozitni) dielektrik izведен tako da je granica između slojeva postavljena:

- paralelno s oblogama
- okomito na obloge
- pod nekim kutom u odnosu na obloge.

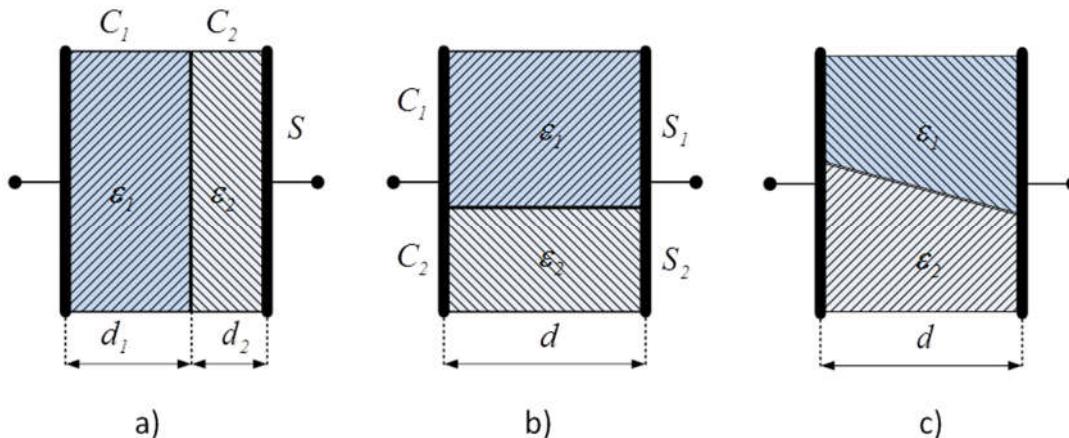
S obzirom na upadni kut vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  u odnosu na granicu slojeva, gornje se vrste spojeva određuju kao:

- poprečni spoj
- uzdužni spoj
- kosi spoj.

Radi jednostavnosti ta tri slučaja razmatramo na primjeru homogenog polja pločastog kondenzatora, kao što je prikazano na *Slici 7.9.*

Neka su obloge kondenzatora površine  $S$ , razmaka između njih  $d$ , nabijene naboјem  $\pm Q$ . U prostoru između oboga su dielektrici  $\epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0$  i  $\epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0$ . Želimo odrediti polje  $\vec{E}$ , vektor

električnog pomaka  $\vec{D}$  i nadomjesnu kapacitivnost kondenzatora.



Slika 7.9 – Spojevi kondenzatora s višeslojnim dielektricima

#### 7.4.1. Poprečni spoj

Upadni kut vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  definira se kao kut prema normali na razdjelnu površinu između dielektrika. Za slučaj poprečnoga spoja (Slika 7.10.a)) upadni je kut jednak nuli, pa navedeni vektori imaju samo normalne (okomite) komponente u oba sredstva ( $E_1 = E_{1n}$ ,  $E_2 = E_{2n}$ ,  $D_1 = D_{1n}$ ,  $D_2 = D_{2n}$ ). Nadalje, prostor između ploča nabijenog kondenzatora ispunjen je tokom  $\Psi$  čije linije izlaze iz pozitivne, a ulaze u negativnu ploču. Gustoća toka u svakom je poprečnom presjeku jednaka, pa je  $D_1 = D_2$ , odnosno:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (7-29)$$

Zaključak: Normalne komponente vektora električnog pomaka  $\vec{D}$  kroz poprečnu graničnu plohu dvaju dielektrika prolaze kontinuirano, tj. ne mijenjaju se.

Kako je općenito  $D = \epsilon E$ , slijedi:

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{2n}, \quad (7-30)$$

pa je omjer normalnih komponenata električnih polja u slojevima:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}. \quad (7-31)$$

Zaključak: Normalne komponente vektora električnog polja  $\vec{E}$  kroz poprečnu graničnu plohu dvaju dielektrika prolaze skokovito i to kao recipročna vrijednost njihovih dielektričnosti.

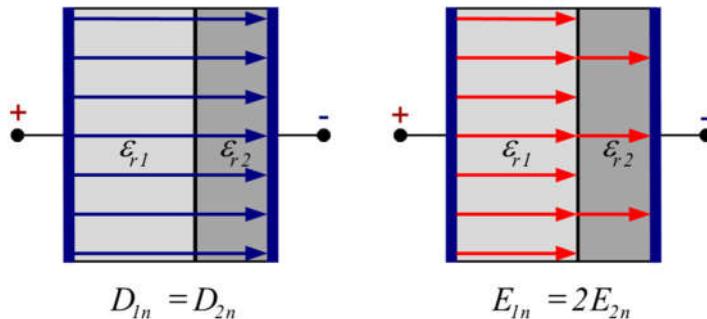
Na Slici 7.10 prikazana je raspodjela silnica za slučaj kada je dielektričnost drugog sloja dvostruko veća od dielektričnosti prvog sloja. Električno polje jače je u sredstvu manje dielektričnosti.

S obzirom na mogući probaj izolacije potrebno je analizirati napone slojeva:  $U_1 = E_{1n}d_1$  i  $U_2 = E_{2n}d_2$ . Njihov je omjer:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\epsilon_{r2}d_1}{\epsilon_{r1}d_2}. \quad (7-32)$$

Kako je  $U = U_1 + U_2$ , naponi slojeva su:

$$U_1 = U \frac{\epsilon_{r2}d_1}{\epsilon_{r2}d_1 + \epsilon_{r1}d_2} , \quad U_2 = U \frac{\epsilon_{r1}d_2}{\epsilon_{r2}d_1 + \epsilon_{r1}d_2} . \quad (7-33)$$



Slika 7.110 – Raspodjela silnica  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  kada je  $\epsilon_{r2} = 2\epsilon_{r1}$

Jednadžbe razvidno pokazuju kako se naponi slojeva mijenjaju proporcionalno debljinama slojeva, a inverzno dielektričnostima. To je važno jer se opasnost od proboja zbog prevelikih jakosti polja može izbjegći odgovarajućim izborom i rasporedom izolacijskih materijala slojeva. Razmotrimo na kraju nadomjesnu kapacitivnost kondenzatora s poprečno smještenim slojevima. Ukupni napon je:

$$U = U_1 + U_2 = Ed = E_{ln}d_1 + E_{2n}d_2 = \frac{D_{ln}}{\epsilon_1}d_1 + \frac{D_{2n}}{\epsilon_2}d_2. \quad (7-34)$$

Kako je  $D_{ln} = D_{2n} = \frac{Q}{S}$ , dobije se:

$$U = \frac{Q}{S} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \Rightarrow \frac{U}{Q} = \frac{1}{S} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right), \quad (7-35)$$

tj. nadomjesna kapacitivnost je:

$$\frac{1}{C_a} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_a = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (7-36)$$

gdje je:

$$C_1 = \epsilon_1 \frac{S}{d_1}, \quad C_2 = \epsilon_2 \frac{S}{d_2}, \quad d = d_1 + d_2. \quad (7-37)$$

Zaključak: Kada je višeslojni dielektrik postavljen paralelno oblogama kondenzatora, njegova kapacitivnost ekvivalentna je serijskome spoju kondenzatora. Broj serijski spojenih kondenzatora odgovara broju slojeva dielektrika.

#### 7.4.2. Uzdužni spoj

Za uzdužni spoj (Slika 7.12.b)) upadni kut vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  jednak je  $\pi/2$ , tj. silnice su usporedne s razdjeljom ravniom, pa ovi vektori imaju samo tangencijalne komponente u oba sredstva ( $E_1 = E_{1t}$ ,  $E_2 = E_{2t}$ ,  $D_1 = D_{1t}$ ,  $D_2 = D_{2t}$ ). Kako su oba sloja priključena na isti napon, ista je i jakost polja u oba sloja  $E_1 = E_2 = U/d$ , pa je:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (7-38)$$

Zaključak: Tangencijalne komponente vektora električnoga polja  $\vec{E}$  preko uzdužne granične plohe dvaju dielektrika prolaze kontinuirano.

U objema sredinama električno polje je jednako i homogeno. Ako gornju jednakost izrazimo preko tangencijalnih komponenata vektora pomaka, dobije se:

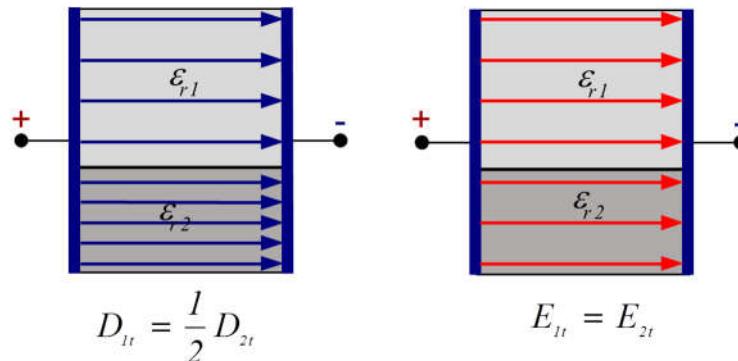
$$\frac{D_{lt}}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}. \quad (7-39)$$

Omjer tangencijalnih komponenata vektora električnoga pomaka je:

$$\frac{D_{lt}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}. \quad (7-40)$$

Zaključak: Tangencijalne komponente vektora električnoga pomaka  $\vec{D}$  preko uzdužne granične plohe dvaju dielektrika prolaze skokovito – proporcionalno omjeru njihovih dielektričnosti.

Na *Slici 7.11* prikazana je raspodjela silnica u slojevima za slučaj  $\epsilon_{r2} = 2\epsilon_{r1}$ .



*Slika 7.13 – Raspodjela silnica  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  kada je  $\epsilon_{r2} = 2\epsilon_{r1}$*

Električni pomak veći je u sredstvu veće dielektričnosti. To je izravna posljedica polarizacijom izazvane skokovite promjene plošne gustoće naboja na oblogama – veća je gustoća naboja na dijelu obloga koji pripada sredstvu s većim  $\epsilon$ .

Nadomjesna kapacitivnost kondenzatora s uzdužno postavljenim slojevima može se smatrati paralelnim spojem kondenzatora jer se obloge nalaze na jednakom naponu. Kako bi se sačuvala razlika potencijala, dolazi do preraspodjele naboja na dijelovima obloga  $S_1$  i  $S_2$ , pa je ukupni naboј:

$$Q = Q_1 + Q_2 = D_{lt}S_1 + D_{2t}S_2 = \epsilon_1 S_1 E_{lt} + \epsilon_2 S_2 E_{2t} = (\epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2) \frac{U}{d}. \quad (7-41)$$

Iz omjera  $Q/U$  dobije se nadomjesna kapacitivnost:

$$C_b = \epsilon_1 \frac{S_1}{d} + \epsilon_2 \frac{S_2}{d} = C_1 + C_2, \quad (7-42)$$

gdje je:

$$C_1 = \epsilon_1 \frac{S_1}{d} , \quad C_2 = \epsilon_2 \frac{S_2}{d} , \quad S = S_1 + S_2 . \quad (7-43)$$

Zaključak: Kada je višeslojni dielektrik postavljen okomito na obloge kondenzatora, njegova kapacitivnost ekvivalentna je paralelnomu spoju kondenzatora. Broj paralelno spojenih kondenzatora odgovara broju slojeva dielektrika.

Spojevi s višeslojnim dielektricima mogu se analizirati i u uvjetima nehomogenih polja, kao primjerice u slučaju koaksijalnog kabela s dva koaksijalna sloja izolacije. Nadomjesna kapacitivnost dobije se kao serijski spoj kapacitivnosti pojedinih dielektrika.

#### 7.4.3. Kosi spoj

Prethodna razmatranja pokazala su kako se na prijelazu preko granične plohe između slojeva mijenja normalna komponenta vektora  $\vec{E}$  i tangencijalna komponenta vektora  $\vec{D}$ . To znači da ako linije polja ulaze koso (*Slika 7.9.c*) na graničnu plohu, tada pri prijelazu iz jednoga sloja u drugi mora doći do loma silnica.

Vektori  $\vec{E}_1$  i  $\vec{D}_1$  upadaju pod kutom  $\alpha_1$  na razdjelnu plohu dielektrika. Izlazni vektori  $\vec{E}_2$  i  $\vec{D}_2$  zatvaraju kut  $\alpha_2$  s normalom razdjelne plohe. Primijenimo li prethodno izvedene zaključke, dobivamo:

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2 \quad (7-44)$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2 . \quad (7-45)$$

Podijele li se gornje dvije jednadžbe, slijedi:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_2 D_1}{E_1 D_2} = \frac{E_2 \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1}{E_1 \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} . \quad (7-46)$$

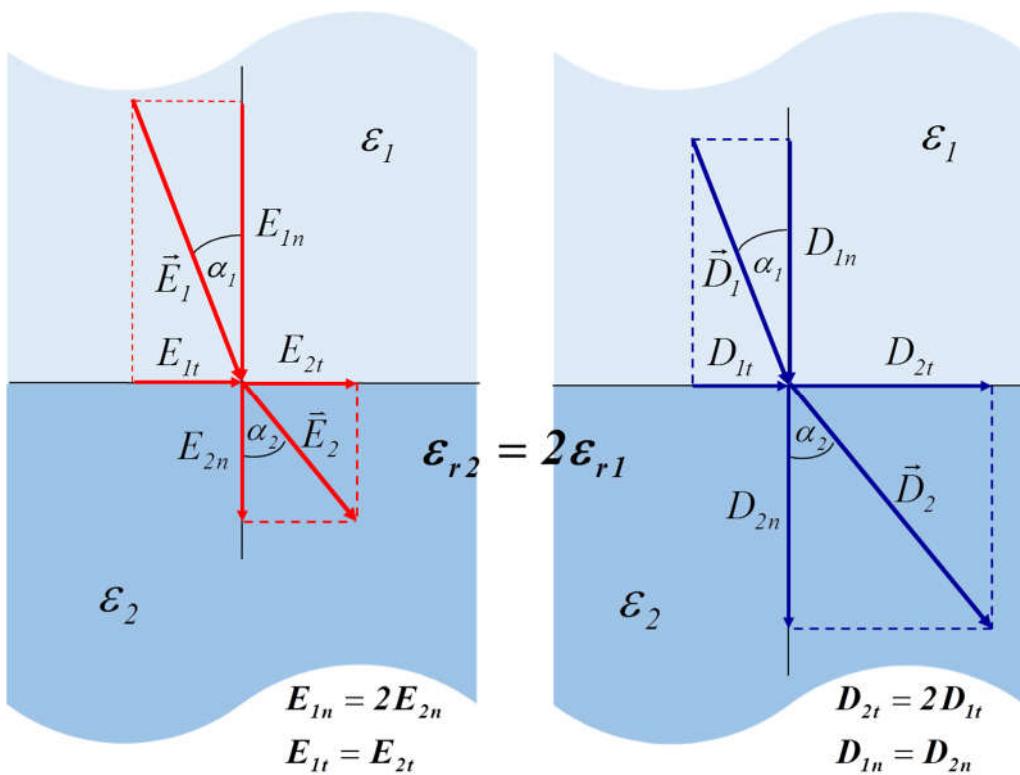
Dakle zakon loma na granici dviju dielektričnih sredina je:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} . \quad (7-47)$$

Zaključak: Omjer tangensa upadnog i tangensa izlaznog (lomljenog) kuta jednak je omjeru pripadnih dielektričnosti.

Prijelaz vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  preko granične plohe između dvaju dielektrika prikazan je na *Slici 7.12*. Na prijelazu iz sredstva manje u sredstvo veće dielektričnosti izlazni kut je veći od ulaznog kuta i obratno. Slično vrijedi i za zakon loma svjetlosti u optici, kao i u slučaju ponašanja silnica magnetskog polja pri prijelazu granice između materijala različitih magnetskih svojstava. Primjerice izlazak silnica magnetskoga polja iz feromagnetskog materijala ( $\mu_{Fe} \mu_0 > \mu_0$ ) praktično je vertikalni, odnosno kut loma je približno jednak nuli.

Određivanje nadomjesne kapacitivnosti je složeno, pa je izostavljeno.



Slika 7.14 – Prijelaz vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{D}$  preko granične plohe

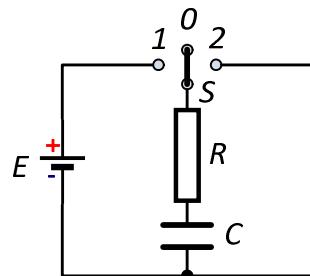
## 7.5. Nabijanje i izbijanje kondenzatora – prijelazne pojave

U ustaljenim (stacionarnim) uvjetima u istosmjernoj mreži koja se sastoji od izvora napajanja, otpora i kondenzatora, u grani gdje se nalazi kondenzator ne teče struja. Kondenzator predstavlja beskonačni otpor – prekid strujnoga kruga.

Međutim, prilikom priključivanja navedene mreže na izvor napajanja, odnosno isključivanja s izvora, vrijede drugačije prilike. U  $RC$  mreži ne dolazi do trenutačne promjene napona i struja kroz elemente mreže. To proizlazi iz činjenice kako nije moguće trenutačno promijeniti energiju nakupljenu u kondenzatoru, pa nema skokovite promjene napona/struje na kondenzatoru.

Od trenutka uključivanja kondenzatora u strujni krug ili isključivanja iz strujnoga kruga nastaje proces punjenja/praznjnenja kondenzatora. Promjene napona i struje između dvaju ustaljenih načina rada predstavljaju prijelazno ili tranzijentno stanje, a pojava je prijelazna ili tranzijentna pojava.

Opisat ćemo procese koji nastaju pri nabijanju (uklapanju, punjenju) te izbijanju (isklapanju, praznjnenju) kondenzatora. Realni kondenzator može se prikazati nadomjesnim serijskim  $RC$  krugom. Postupke nabijanja i izbijanja kondenzatora provest ćemo prema shemi na Slici 7.13.



Slika 7.153 –  $RC$  krug za analizu prijelaznih pojava na kondenzatoru



### 7.5.1. Nabijanje kondenzatora

Prebac li se sklopka  $S$  iz neutralnoga položaja „0” u položaj „1”, poteći će struja strujnim krugom. U početnom trenutku struja je maksimalna. Nenabijeni kondenzator djeluje kao kratki spoj ( $U_C = 0$ ), pa je napon na otporniku jednak naponu izvora ( $U_R = IR = E$ ). Već od sljedećeg trenutka ( $t > 0$ ) počinje punjenje kondenzatora, raste naboj  $q$  i napon  $u_C$  na njemu uz istovremeno opadanje struje  $i$  i napona na otporniku  $u_R$ . Nakon određenog vremena kondenzator se nabije na napon izvora  $E$  i struja prestaje teći. Kondenzator predstavlja prekid strujnoga kruga, pa je napon na otporniku  $R$  jednak nuli. Ukupne promjene napona i struje u tijeku punjenja kondenzatora, s vremenom kao nezavisnom varijablom, mogu se dobiti rješavanjem jednadžbe strujnoga kruga prema II. Kirchhoffovu zakonu:

$$E = iR + u_C, \quad (7-48)$$

gdje je  $i$  – trenutačna vrijednost struje, a  $u_C$  – trenutačna vrijednost napona na kondenzatoru. Kako je:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \quad (7-49)$$

dobije se:

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = \tau \frac{du_C}{dt} + u_C, \quad (7-50)$$

gdje  $\tau = RC$  ima dimenziju vremena, pa se i definira kao vremenska konstanta koja određuje brzinu nabijanja i izbijanja kondenzatora.

Gornja jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba prvoga reda s konstantnim koeficijentima. Rješava se metodom separiranja varijabli. Separiramo varijable  $t$  i  $u_C$ :

$$(E - u_C) dt = \tau du_C, \quad (7-51)$$

odnosno:

$$\frac{dt}{\tau} = \tau \frac{du_C}{E - u_C}. \quad (7-52)$$

Integriranjem (7-52) dobije se:

$$\frac{t}{\tau} = -\ln(E - u_C) + \ln K, \quad (7-53)$$

gdje je  $\ln K$  konstanta integriranja.

Nakon antilogaritmiranja slijedi:

$$e^{\frac{t}{\tau}} = \frac{K}{E - u_C}, \quad (7-54)$$

odnosno:

$$E - u_C = K e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7-55)$$

Konstanta integriranja  $K$  određuje se iz početnoga uvjeta: u trenutku  $t = 0$  kondenzator je nenabijen, tj.  $u_C = 0$ . Uvrštenjem početnoga uvjeta u (7-55) dobije se  $K = E$ .

Konačan oblik napona na kondenzatoru u slučaju nabijanja jest:

$$u_C = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (7-56)$$

Zaključak: Ako se kondenzator priključi na istosmjerni naponski izvor, napon na njemu raste po eksponencijalnom zakonu od nula (ako je kondenzator bio nenabijen) do napona izvora  $E$ . Na isti način raste i naboј  $q$  na oblogama kondenzatora od nula do konačne vrijednosti  $Q = CE$ :

$$q = Q \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (7-57)$$

Napon na otporniku  $R$  eksponencijalno opada od  $E$  do nule:

$$u_R = E - u_C = E e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7-58)$$

Struja pri nabijanju kondenzatora eksponencijalno opada od  $I = E/R$  do nule:

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7-59)$$

Dijagrami napona na kondenzatoru i otporniku te struje u krugu prema jednadžbama (7-56), (7-58) i (7-59) u procesu nabijanja kondenzatora dani su na *Slici 7.14*.

Iz dijagrama se vidi kako prijelazna pojava praktički završava nakon pet vremenskih konstanti,  $t = 5\tau$ . Za  $t = \tau$  napon na kondenzatoru poraste na 63 %, a struja opadne na 37 % od odgovarajućih maksimalnih vrijednosti.

### 7.5.2. Izbijanje kondenzatora

Prebaciti se sklopka  $S$  na *Slici 7.13* iz položaja „1“ u položaj „2“, serijski  $RC$  spoj biva kratko spojen. Jednadžba strujnoga kruga je tada:

$$u_C + iR = u_C + RC \frac{du_C}{dt} = u_C + \tau \frac{du_C}{dt} = 0. \quad (7-60)$$

Separiranjem varijabli dobije se:

$$\frac{dt}{\tau} = -\frac{du_C}{u_C}. \quad (7-61)$$

Integriranjem gornje jednadžbe dobije se:

$$\frac{t}{\tau} = -\ln u_C + \ln K, \quad (7-62)$$

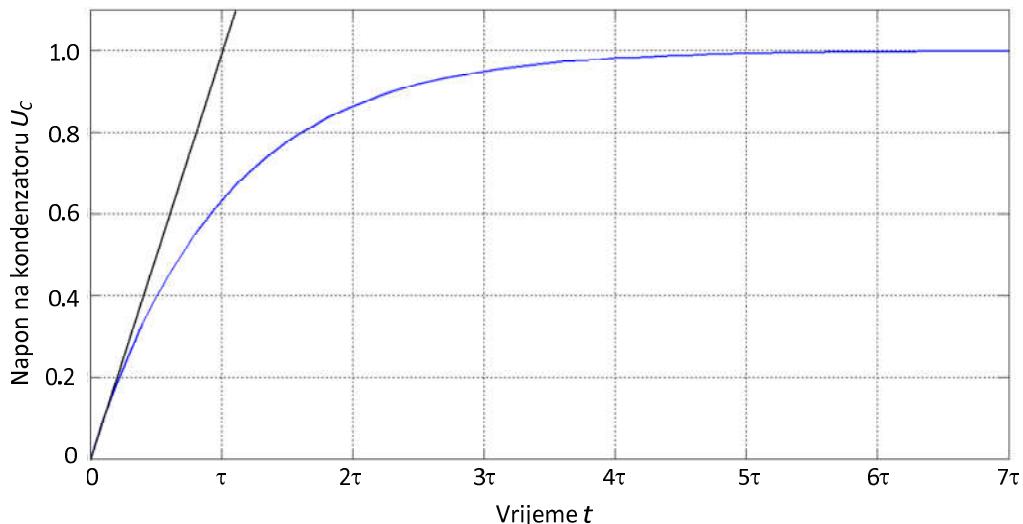
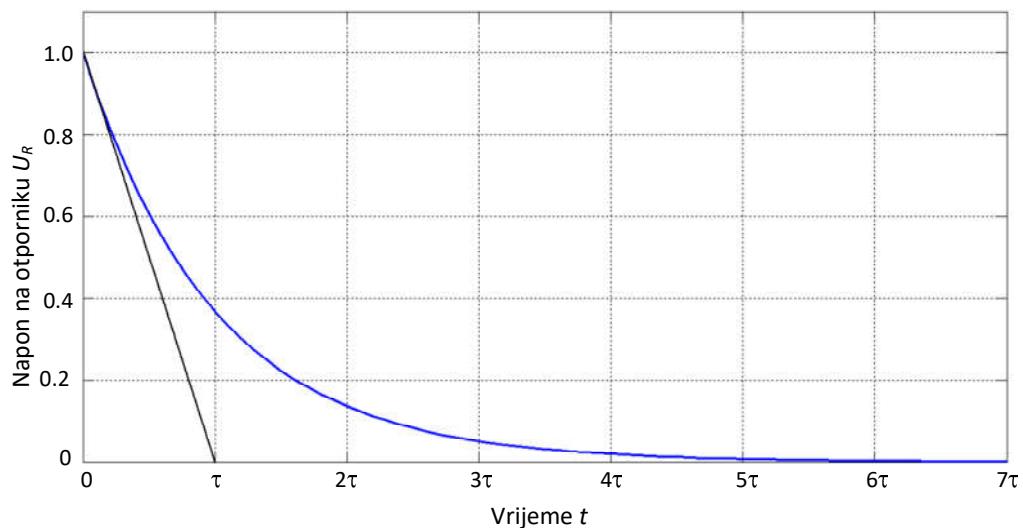
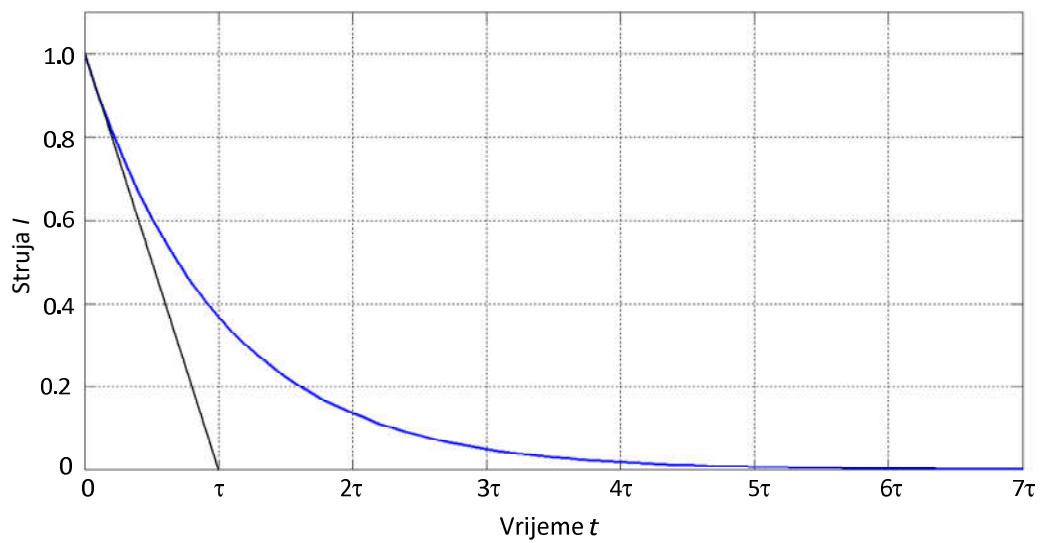
odnosno:

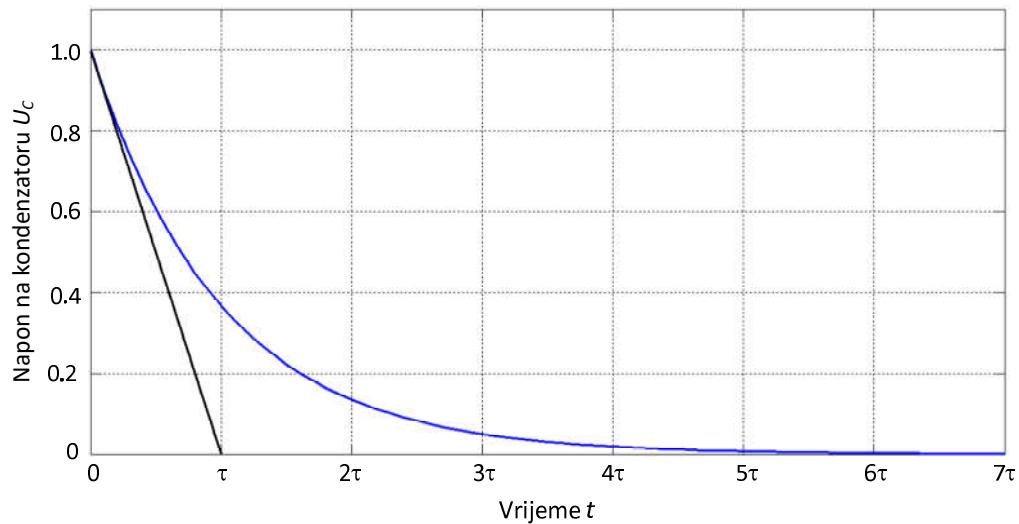
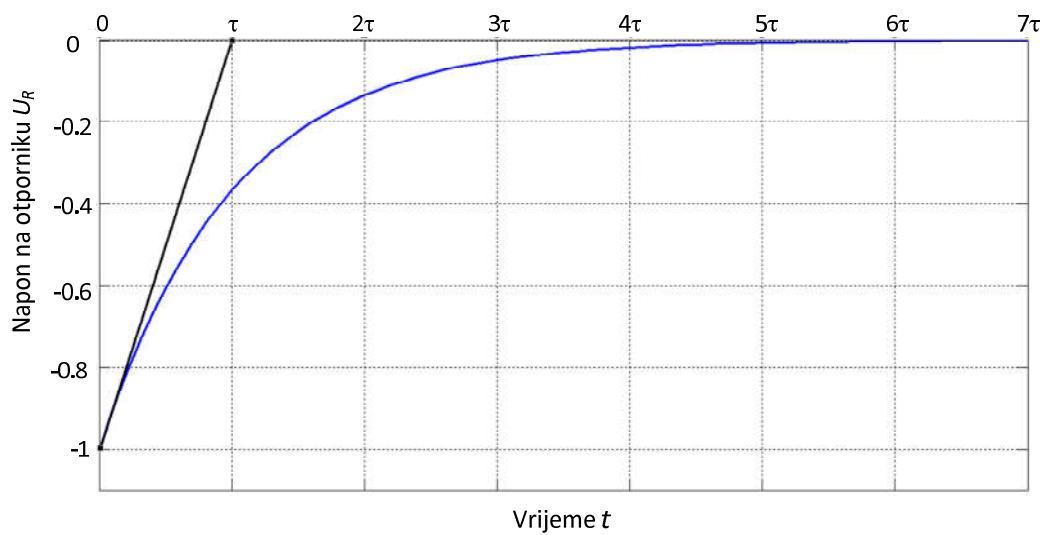
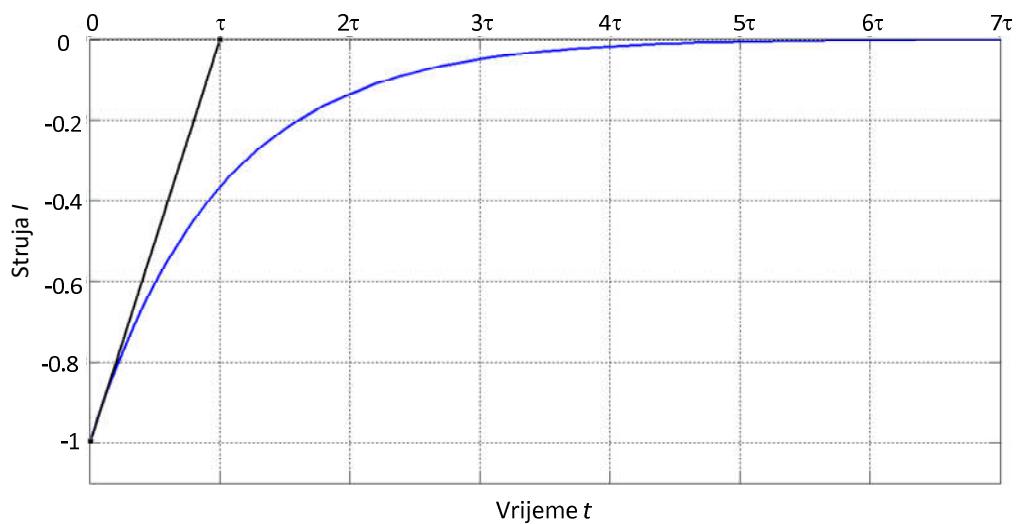
$$u_C = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (7-63)$$

gdje je  $K$  konstanta integriranja što se određuje iz početnoga uvjeta: u trenutku  $t = 0$ , tj. u trenutku prebacivanja sklopke iz položaja „1“ u položaj „2“ kondenzator je nabijen na napon  $u_C = E$ . Uvrštavanjem u (7-63) dobije se  $K = E$ .

Konačni oblik promjene napona na kondenzatoru u procesu izbijanja jest:

$$u_C = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (7-64)$$

Prijelazne pojave u  $RC$  krugu – nabijanje kondenzatoraPrijelazne pojave u  $RC$  krugu – nabijanje kondenzatoraPrijelazne pojave u  $RC$  krugu – nabijanje kondenzatoraSlika 7.164 – Nabijanje kondenzatora – odziv  $U_C$ ,  $U_R$ ,  $I$

Prijelazne pojave u  $RC$  krugu – izbijanje kondenzatoraPrijelazne pojave u  $RC$  krugu – izbijanje kondenzatoraPrijelazne pojave u  $RC$  krugu – izbijanje kondenzatoraSlika 7.175 – Izbijanje kondenzatora – odziv  $U_C$ ,  $U_R$ ,  $I$

Napon na otporniku i struja u krugu su:

$$u_R = -u_C = -E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad i = \frac{u_R}{R} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (7-65)$$

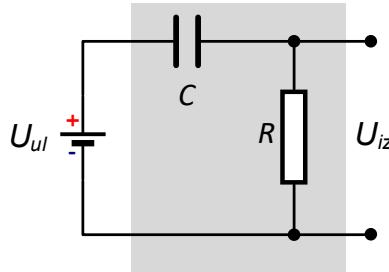
Negativan predznak upućuje na suprotan smjer napona  $U_R$  i struje  $I$  u odnosu na smjer kod nabijanja kondenzatora.

Dijagrami promjene napona i struje u krugu za slučaj izbijanja kondenzatora prikazani su na *Slici 7.15*. U trenutku  $t = \tau$  naponi i struja opadnu na 37 % od svojih maksimalnih vrijednosti.

### 7.5.3. RC derivator i RC integrator

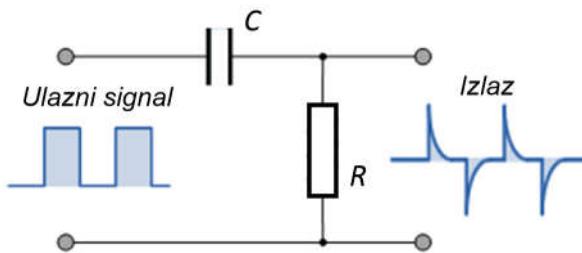
*RC skloovi* mogu se u određenim uvjetima upotrijebiti za realizaciju matematičkih funkcija deriviranja ili integriranja ulaznoga signala ovisno o izboru izlaznoga signala.

*RC derivator* je sklop koji približno vrši matematičku funkciju deriviranja. Izlazni signal upućuje na mjeru, odnosno brzinu promjene ulaznoga signala. Izlaz se preuzima s otpornika  $R$  kao na *Slici 7.16*.



*Slika 7.186 – Sklop RC derivatora*

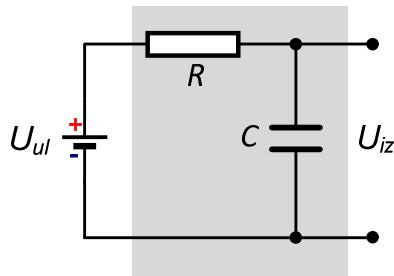
Kada je na ulazu derivatora slijed pravokutnih signala, dobije se izlaz oblika prema *Slici 7.17*.



*Slika 7.197 – Odziv RC derivatora na slijed pravokutnih signala*

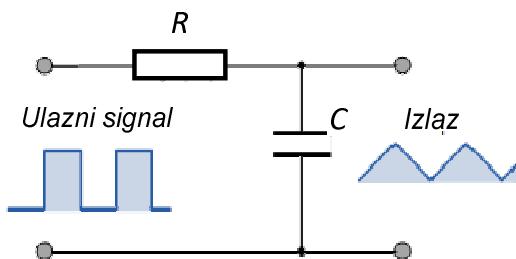
Pozitivan „šiljak“ – impuls na izlazu uzrokovani je uzlaznim rubom ulaznoga pravokutnog vala, dok je negativan „šiljak“ na izlazu posljedica silaznog ruba ulaznoga pravokutnog vala. Izlaz iz *RC derivatora* ovisi o brzini promjene ulaznog napona  $u_{ul}$ , što je efekt vrlo sličan matematičkoj operaciji deriviranja – derivacija po vremenu  $\frac{du_{ul}}{dt}$ . Kako bi se dobili što oštrenji impulsi na izlazu, krugovi *RC derivatora* realiziraju se s malom vremenskom konstantom  $\tau$ . Tada diferencijal pravokutnoga ulaznog signala  $\frac{du_{ul}}{dt}$  postaje vrlo kratki uski impuls na izlazu.

*RC integrator* je sklop koji približno obavlja matematičku funkciju integriranja – sumiranja ulaznoga signala  $u_{iz} = \int u_{ul} dt$ . Izlaz se preuzima s kapacitivnosti  $C$  kao na *Slici 7.18*.



Slika 7.18 – Sklop RC integratora

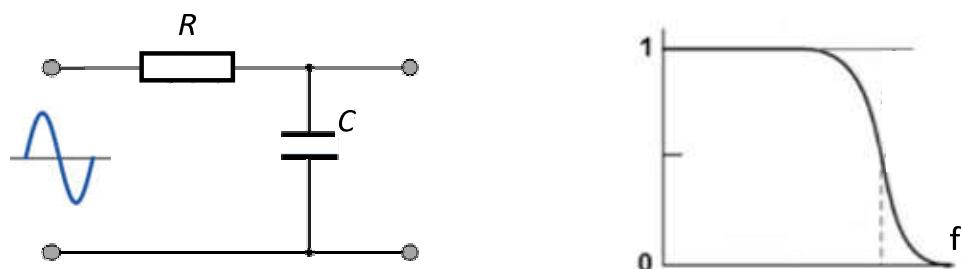
Kada se na ulaz RC integratora nazine slijed pravokutnih impulsa uz uvjet da je vremenska konstanta dovoljno velika, izlazni signal ima pilasti (zupčasti) valni oblik – integral ulaznoga signala.



Slika 7.209 – Odziv RC integratora na slijed pravokutnih signala

U uvjetima ulaznoga signala promjenljive frekvencije RC krugovi mogu se upotrijebiti kao filtri koji blokiraju signale određenih frekvencija, a druge propuštaju. To su najjednostavniji pasivni filtri.

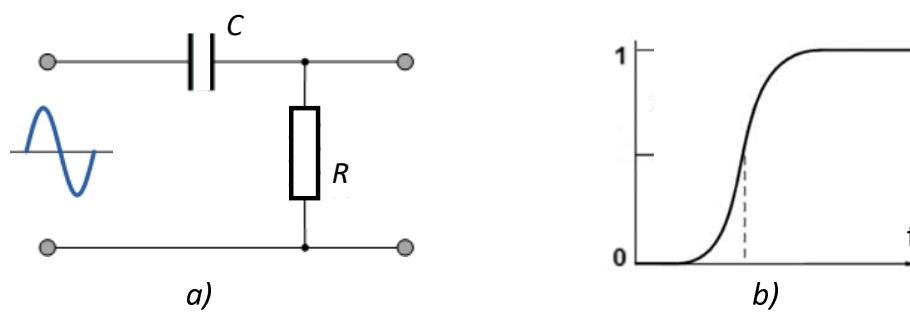
Niskopropusni filter realizira se u spoju prema Slici 7.20.a). Propušta niske, a prigušuje visoke frekvencije, kao što je prikazano na frekvencijskome dijagramu – Slika 7.20.b).



Slika 7.20 – Niskopropusni filter a) i frekvencijski odziv b)

Visokopropusni filter prikazan je na Slici 7.21.a). Propušta visoke, a prigušuje niske frekvencije, kao što je prikazano na frekvencijskome dijagramu na Slici 7.21.b).<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Detaljnije se ovo gradivo obrađuje u ostalim stručnim predmetima.



Slika 7.21 – Visokopropusni filter a) i frekvencijski odziv b)

Slična analiza prijelaznih pojava može se provesti za spojeve otpornika  $R$  i svitka induktivnosti  $L$ .  $RL$  krugovi mogu se također spajati tako da u određenim uvjetima djeluju kao integrator/derivator te u uvjetima ulaznoga signala promjenljive frekvencije imati ulogu niskopropusnoga filtra.

## 8. ENERGIJA I SILA U ELEKTROSTATIČKOME POLJU

### 8.1. ENERGIJA U ELEKTROSTATIČKOME POLJU

Naboji ili skupine različito raspoređenih naboja posjeduju odgovarajuću potencijalnu energiju. Za premještanje naboja potrebno je uložiti određeni rad, a taj se rad vraća kada se naboji vrate na svoje početne položaje. Elektrostaticki se sustavi stoga mogu upotrebljavati za pohranu energije što je u biti temelj njihove uporabe u elektrotehnici. Količina energije koja se na ovaj način može uskladištiti je malena. Razlog tomu je što su sile između naboja goleme i kada razmještamo velike količine naboja, može doći do pražnjenja, kao što se primjerice događa za grmljavine.

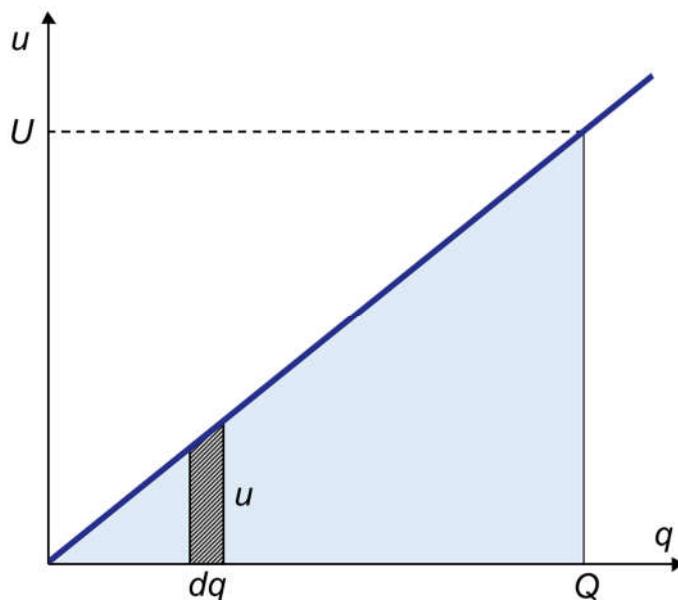
Postoje međutim dva razloga zbog kojih su elektrostaticki uređaji od prvorazrednog značaja. Prvi se ogledava u njihovoj velikoj iskoristivosti, jer su energetski gubitci vrlo maleni. Druga je prednost što imaju malu inerciju. Naime, u električnim uređajima samo elektroni čestice koje se kreću. U primjenama gdje se traže velike brzine i gdje se vrijeme mjeri u mikrosekundama, elektrostaticki su uređaji nadmoćni.

Tipičan elektrostaticki uređaj za pohranu električnog naboja i energije pločasti je kondenzator. Energija spremljena u kondenzatoru proporcionalna je naboju  $Q$  i razlici potencijala  $U$ .

Prepostavimo da nekom kondenzatoru s prethodno nenabijenim elektrodama prinosimo elementarni naboј  $dq$  s negativne na pozitivnu elektrodu. Pri prijenosu elementa naboja  $dq$  trenutačna vrijednost napona je  $u$ . Moramo uložiti neki element rada  $dA$  kako bismo svladali sile elektrostatickoga polja:

$$dA = udq. \quad (8-1)$$

Grafički prikaz odnosa između naboja i napona te odabrani element ostvarenog rada prikazani su na *Slici 8.1*.



*Slika 8.1 – Odnos između naboja i napona na kondenzatoru*

Uvrsti li se poznati linearni odnos između naboja i napona  $u = q/C$ , element rada postaje:

$$dA = \frac{q}{C} dq . \quad (8-2)$$

Ukupni rad potreban da se kondenzator nabije nekim konačnim nabojem  $Q$  dobije se sumiranjem elemenata rada:

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C} . \quad (8-3)$$

Prema zakonu o očuvanju energije izvršeni rad pretvorio se u energiju  $W$  elektrostatičkoga polja kondenzatora:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 . \quad (8-4)$$

Na *Slici 8.1* može se uočiti kako je energija jednaka površini trokuta osnovice  $Q$  i visine  $U$  ( $\frac{1}{2}QU$ ).

Akumulirana energija može se mijenjati promjenom parametara koji mijenjaju dimenzije prostora između ploča ( $S$  i  $d$ ), a time i kapacitivnost kondenzatora. U takvim uvjetima u sustavu bi bila velika inercija. Znatno jednostavnije je ostaviti ploče u fiksnom položaju, a energiju povećavati ili smanjivati promjenom količine naboja na pločama. Pri tomu se kreću samo elektroni koji čine samo mali dio ukupnog broja elektrona na pločama. U tome je tajna općeprihvaćene uporabe kondenzatora u primjenama gdje se zahtijeva velika brzina reakcije.

Gornje jednadžbe opisuju energiju kao funkciju naboja i napona, dakle veličina koje opisuju stanje elektroda kondenzatora. Energiju možemo dovesti u vezu s veličinama jakosti polja  $E$  i gustoće toka pomaka  $D$ , koje opisuju elektrostatičko polje u prostoru između obloga kondenzatora:

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} \frac{D}{\epsilon_0} S \cdot \frac{E}{V} d = \frac{1}{2} DEV , \quad (8-5)$$

gdje je  $V = Sd$  volumen prostora između obloga kondenzatora. Kako je  $D = \epsilon E$ , energija pločastog kondenzatora može se pisati i u obliku:

$$W = \frac{1}{2} DEV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V = \frac{D^2 V}{2\epsilon} . \quad (8-6)$$

Te relacije zapravo kazuju kako je energija smještena u elektrostatičkom polju koje je njezin nositelj. Volumenska gustoća energije  $w$  je:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} . \quad (8-7)$$

Prethodno smo proučavali energiju pločastog kondenzatora u kojem se formira homogeno polje. Za popočavanje izraza potrebno je razmatrati energiju sadržanu u nekom elementu obujma  $dV$ :

$$dW = \frac{1}{2} DEdV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV . \quad (8-8)$$

U općem slučaju koji vrijedi i za nehomogena polja energija je:

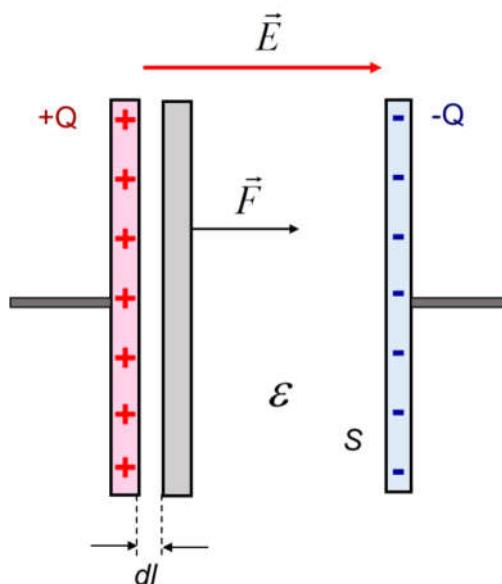
$$W = \frac{1}{2} \int_V D E dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV. \quad (8-9)$$

Volumni se integral proteže na cijeli prostor u kojem postoji električno polje.

## 8.2. SILA U ELEKTROSTATIČKOME POLJU

U *Pogl. 3.1.* proučeno je djelovanje elektrostatičke sile na točkasti naboj i u sustavu točkastih naboja. To su najjednostavniji primjeri djelovanja sile u elektrostatičkome polju, koji se rješavaju primjenom Coulombova zakona. Kada su nabijena tijela proizvoljnog oblika i međusobnog položaja, određivanje sile postaje vrlo složeno.

Sila na nabijeni vodič je, dakako, sila na naboje na njegovoj površini i uvijek je okomita na površinu vodiča. Sila uzduž površine uzrokovala bi kretanje naboja, ali kako smo već ustanovili u elektrostatičkim uvjetima nema tangencijalne komponente polja i naboji su na površini u stanju mirovanja. Dakle elektrostatička sila nastoji povući (istrgnuti) naboje s površine. U normalnim uvjetima to nije moguće, pa se sila prenosi s naboja na površini na cijeli elektrostatički uređaj. Analizirat ćemo jednostavni primjer pločastog kondenzatora, nabijenog nabojem  $\pm Q$  i odvojenog od električnog izvora, kao na *Slici 8.2.*



*Slika 8.2 – Sila između ploča kondenzatora*

Pod utjecajem homogenog polja kondenzatora nabijene ploče međusobno se privlače. Prepostavili se da je negativna ploča nepomična, na pozitivnu će ploču djelovati sila  $\vec{F}$ . To je rezultirajuća sila djelovanja svih naboja na pozitivnoj ploči. Ako se pozitivna ploča pomakne za  $dl$  u smjeru djelovanja sile, energija elektrostatičkog polja smanjuje se za dobiveni rad  $dA = Fdl$ . Pomakom za  $dl$  smanjen je volumen u kojem djeluje polje za  $dV = Sdl$ . U njemu je bila sadržana energija  $dW$ :

$$dW = \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sdl, \quad (8-10)$$

koja se pretvorila u rad polja  $dA$ , pa je:

$$\frac{1}{2}\epsilon E^2 S dl = F dl . \quad (8-11)$$

Sila koja djeluje na cijelu ploču jest:

$$F = \frac{1}{2}\epsilon E^2 S = \frac{Q^2}{2\epsilon S} = \frac{1}{2}DES . \quad (8-12)$$

Rezultat dobiven za homogeno polje može se primijeniti i na mali element površina  $dS$  u nehomogenom polju:

$$F = \frac{1}{2} \int_S DEdS . \quad (8-13)$$

Omjer  $F/S$  predstavlja silu na jedinicu površine odnosno površinski električni tlak:

$$\frac{F}{S} = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} . \quad (8-14)$$

Vidi se da su površinski tlak i volumenska gustoća energije brojčano jednaki.

Prethodno je analiziran pločasti kondenzator u uvjetima konstantnog naboja na njegovim oblogama – nabijen i odvojen od izvora. Drugi karakteristični slučaj odnosi se na kondenzator stalno priključen na izvor istosmjernog napona  $U = \text{konst}$ . Tada se sila privlačenja između obloga kondenzatora može prikazati i u obliku:

$$F = \frac{CU^2}{2d} . \quad (8-15)$$

Sile u elektrostatickome polju malog su iznosa i mogu se upotrebljavati za električna mjerena i u nekim posebnim slučajevima. Sile uvijek imaju tendenciju da pomakom elektroda smanje energiju nabijenog sustava na minimum.

## 9. PRAKTIČNA PRIMJENA ZAKONA I POJAVA U ELEKTROSTATICI

### **Ionizacija i emisija**

Proces stvaranja svjetlosti kod atmosferskih pražnjenja, uključivanja neonskih i fluorescentnih svjetiljaka te plazma kugla odvija se u dvama koracima: ionizacija i emisija.

*Ionizacija* – kada se narinu dovoljno velike razlike potencijala, negativno nabijeni elektroni ubrzavaju se prema pozitivnim nabojima. Putujući odgovarajućim fluidom, sudsaraju se s neutralnim česticama zraka/plina izbijajući iz njih elektrone. Posljedica toga je stvaranje pozitivno nabijenih čestica – iona i viška slobodnih elektrona. Procesom ionizacije se ulaganjem energije iz vanjskog izvora uklanjuju elektroni iz čestica plina.

*Emisija* – kada se izvor koji je uzrokovao razdvajanje naboja isključi ili promijeni polaritet, elektroni se rekombiniraju s pozitivnim ionima plina oslobađajući energiju u obliku svjetla i topline. Rezultat je svjetlo koje vidimo kod udara groma, uključivanja neonskih i fluorescentnih svjetiljaka, plazma kugle i dr.

### **Stvaranje plazme**

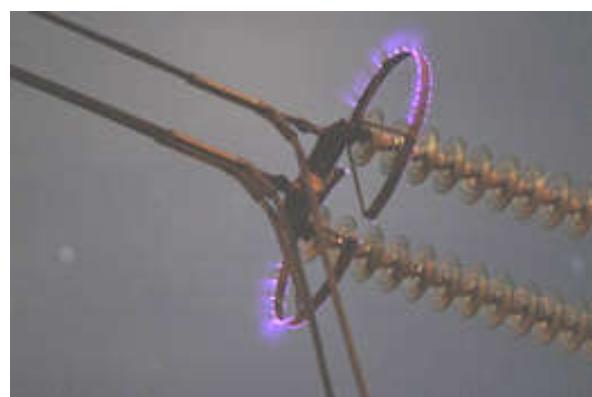
Osim poznatih stanja materije (kruto, tekuće, plinovito) često se kao četvrto stanje navodi stanje plazme – skupine ioniziranih čestica plina.

Površina Sunca sastoji se od užarenih pozitivno nabijenih čestica koje nazivamo plazmom, jer zbog visoke temperature na površini elektroni dobiju dovoljno energije da napuste matične atome. U uvjetima na Zemlji plazma čestice nemaju dovoljno topline da bi bile vidljive. Međutim, svjetlost koju vidimo u raznim napravama, primjerice u plazma kugli, stvara se zbog elektrona koji se rekombiniraju s nevidljivim pozitivnim ionima plazme. Struja elektrona neprestano stvara nove čestice plazme, ako je naprava uključena.

### **Koronarni (luminiscentni) izboj**

Korona je elektrostatički izboj koji nastaje u okolišu jako nabijenog vodiča i ionizira fluid koji se nalazi u blizini vodiča. Izboj se događa kada je jakost električnog polja oko vodiča dovoljno velika da stvari vodljivo područje, a da pri tomu ne dođe do probroja ili stvaranja električnog luka prema okolnim objektima. Obično se vidi kao plavičasta (ili neka druga boja) svjetlost u blizini šiljastih metalnih vodiča nabijenih na visoki napon. Spontani koronarni izboji nepoželjni su u energetici zbog gubitaka snage u visokonaponskim sustavima, a popratni kemijski procesi mogu stvoriti neželjene ili rizične komponente, kao što je ozon.

Kontrolirani koronarni izboji korisni su u nizu procesa i uređaja temeljenih na elektrostatičkim zakonima.



*Koronarni izboj na 500 kV dalekovodu*

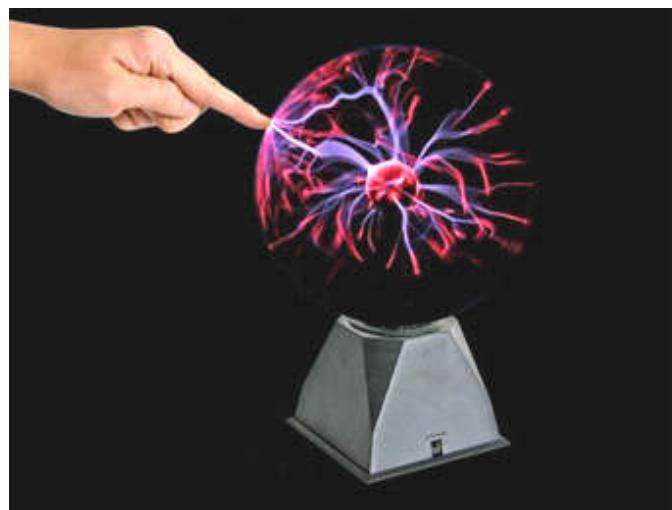
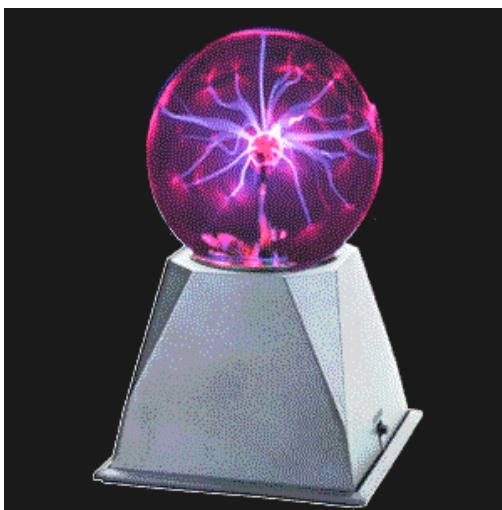


*Koronarni izboj oko visokonaponskog svitka*

## Plazma kugla

Plazma kugla je staklena kugla ispunjena plamenitim plinom s kuglastom visokonaponskom elektrodom u središtu staklene kugle. Plin je najčešće neon na približno atmosferskom tlaku, a mogu se dodavati i drugi plinovi (argon, ksenon). Za rekombinaciju pozitivnih iona i elektrona potrebno je da se razlika potencijala između elektrode i unutarnjeg zida staklene kugle kontinuirano mijenja. Izvor visokog napona mora mijenjati polaritet ili raditi u pulsirajućem režimu – uključen/isključen.

Na mrežu se kugla spaja preko niskonaponskog (12 V) istosmjernog pretvarača. Elektronički sklop vezan na elektrodu je posebni pretvarač snage. Visokonaponski transformator povezan s visokofrekvencijskim elektroničkim oscilatorom šalje na elektrodu visoki izmjenični napon (2 do 5 kV) visoke frekvencije (35 kHz). Stvorena radiofrekvencijska energija prenosi se u plin i stvara vitice plazme. Niti plazme izlaze iz unutarnje elektrode i završavaju na vanjskom staklenom izolatoru. Kretanje niti vidi se kao gibanje višestrukih vitica raznobojna svjetla. Boja emitiranog svjetla ovisi o vrsti atoma plina unutar staklene kugle. Vitice su jednaka polariteta, pa se međusobno odbijaju. Mijenjaju oblik putujući linijom najmanjeg otpora.

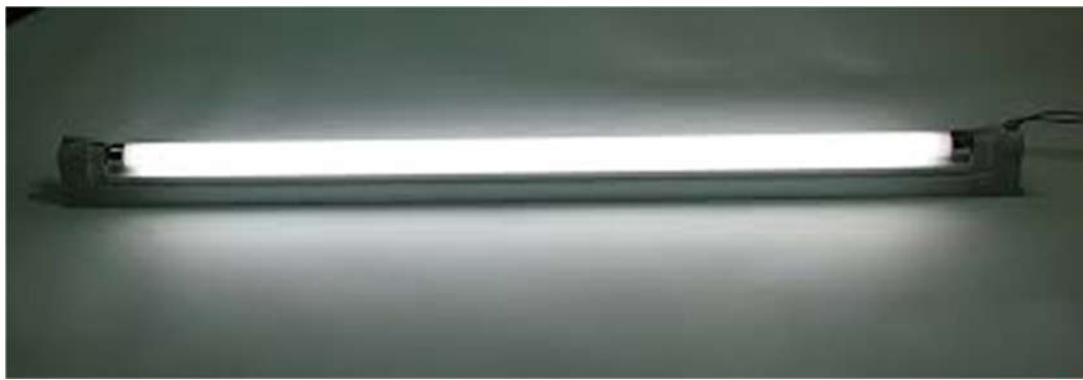


*Plazma kugla*

Kada se prstom dodirne staklo, pojavljuje se intenzivni svjetlosni odziv. Ljudsko tijelo je vodljivo (približno 1000 oma) i lakše se polarizira nego dielektrični materijal (plin) oko elektrode. Time se za pražnjenje stvara alternativna putanja manjeg otpora s viticom koja je uža i sjajnija. Staklo djeluje kao dielektrik kondenzatora što ga tvore ruka i ionizirani plin. Dodirivanje vanjske površine staklene kugle ne stvara električni udar i nije opasno. Razlog je u pojavi koja se naziva efekt kože (engl. *skin effect*). Naime, zbog visoke frekvencije oscilirajućih naboja elektroni ne prolaze kroz tijelo, nego se kreću površinom kože na mjestu dodira. Može jedino doći do zagrijavanja staklene kugle ako dodir traje dovoljno dugo.

Izumitelj plazma žarulje je Nikola Tesla. Proučavao je visokonaponske pojave eksperimentirajući s visokofrekvenčnim strujama u izoliranoj staklenoj cijevi.

### **Fluorescentna svjetiljka**



*Fluorescentna svjetiljka*

Fluorescentna svjetiljka je staklena cijev ispunjena živinim parama s dvjema elektrodama na krajevima cijevi. Unutarnja strana cijevi prekrivena je bijelim prahom što ima svojstvo fluorescencije u vidu bijelog svjetla. Uključimo li izmjenični naponski izvor, živine pare se ioniziraju. Kada napon između elektroda počne opadati, pozitivni ioni žive povrate svoje elektrone. Pri rekombinaciji se emitira nevidljivo ultraljubičasto svjetlo koje pobudi bijeli prah da emitira bijelo vidljivo svjetlo.

Kada se neonska svjetiljka približi plazma kugli okomito na kuglinu površinu, razlika potencijala između elektroda neonke može biti dovoljna da se ona upali slijedom gore opisanog procesa.



## Stvaranje munje – udar groma



*Udar groma*

Između zemlje i oblaka što su u pokretu stvara se razlika potencijala. Kada postane dovoljno velika, elektroni se ubrzavaju prema pozitivnom naboju ionizirajući pri sudarima zrak između zemlje i oblaka. Kada pozitivni ioni vrate nedostajuće elektrone, oslobađa se svjetlo i toplina.

## Ionizatori

Ionizator je električni uređaj koji ionizira okolni zrak tako da proizvodi negativne ione – anione. Koristi se prethodno opisanim procesom istjecanja naboja sa šiljka. Time neutralizira negativne utjecaje zračenja koje nastaje uporabom električnih uređaja (TV, računala, električne instalacije, mobiteli...). Čestice prašine, pelud, dim te neugodni mirisi koji se nalaze u zraku imaju pozitivan naboј. Negativni ioni vežu na sebe pozitivno nabijene čestice nečistoća koje prianjaju i lijepe se na najbližu površinu ili padaju na tlo gdje se lako mogu odstraniti.

## Generator ozona

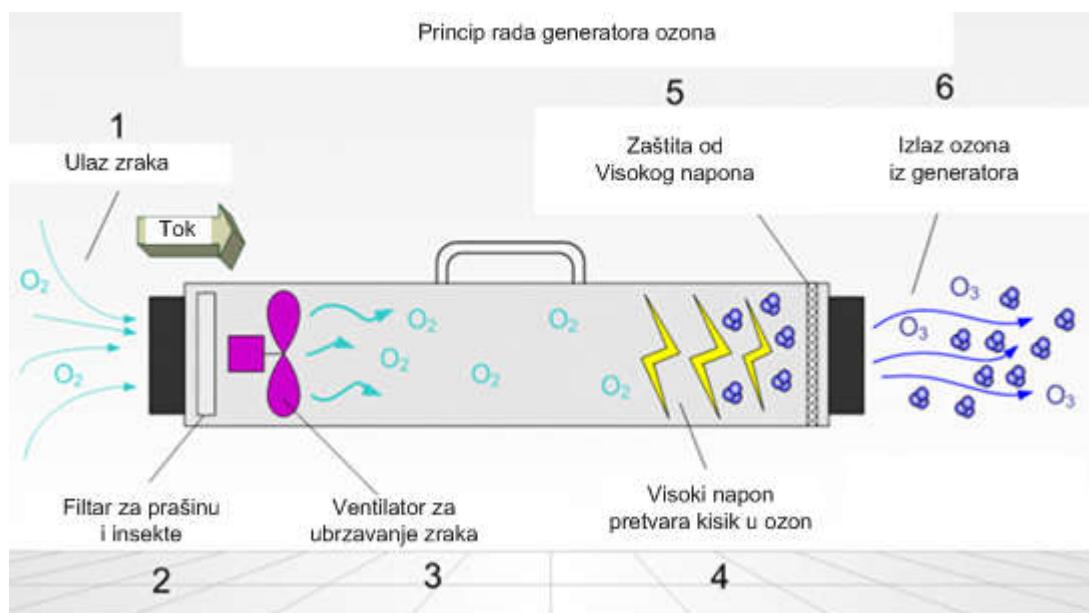
Generator ozona proizvodi ozon dodavanjem energije molekulama kisika  $O_2$ , što uzrokuje da se atomi kisika odvoje i rekombiniraju s drugim  $O_2$  molekulama stvarajući ozon  $O_3$ . Postupak se izvodi pomoću koronarnog izboja ili ultraljubičastog (ultravioletnog) zračenja.

Ne preporučuje se uporaba ozonskih generatora u stambenim prostorima u svrhu pročišćavanja zraka. Ozon je plin koji može izazvati zdravstvene probleme, kao što su iritiranje respiratornog sustava, teškoće u disanju, bol u plućima i pogoršanje stanja astmatičara.

Upotrebljava se:

- u ribljim akvarijima za sterilizaciju i dezinfekciju vode,
- za dezinfekciju i poboljšanje okusa pitke vode, mineralne vode, vode u bocama,
- za dezinfekciju vode u bazenima i toplicama – ne iritira kožu i oči kao tretman klorom...

Poseban uređaj za miješanje potreban je kako bi se ozon efikasno otopio u vodi.



*Generator ozona*

### **Ionizator zraka**

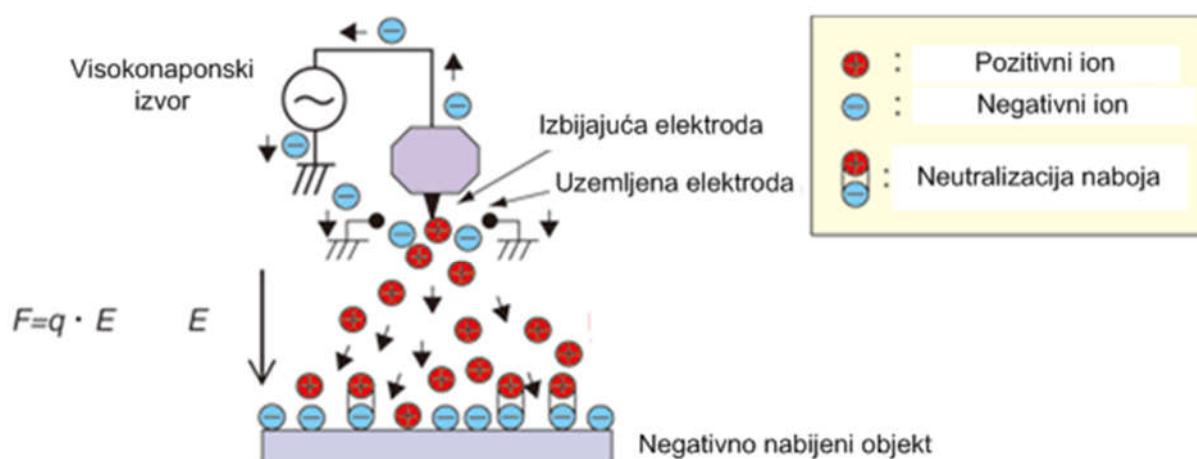
Ionizator zraka ne smije se brkati s generatorom ozona iako oba uređaja rade na istom principu. Ionizator zraka sastoji se od dviju elektrostatički nabijenih ploča koje generiraju pozitivno ili negativno nabijene ione plina, primjerice  $O_2$  ili  $N_2$ . Čestice privlači odgovarajuća elektroda prema zakonima koji vrijede za statičke naboje. Stvoreni ioni se deioniziraju usmjeravajući se prema uzemljenim vodljivim površinama kao što su stropovi i podovi.

Ionski generatori stvaraju nečiste pjege na okolnim zidovima i podu – ne odstranjuju nečistoće, nego ih lijepe na okolne površine. Kako bi se povećala efikasnost ovog procesa, neki komercijalni proizvodi sadrže takve površine unutar samog uređaja (hladnjaci, klimatizacijski uređaji, četkice za zube, perilice za rublje, pročistači zraka,...).

Ionizatori zraka upotrebljavaju se u pročistačima zraka. Većina komercijalnih pročistača zraka generira negativne ione. Zrak obogaćen negativnim ionima povoljno utječe na apsorpciju kisika u plućnim alveolama, pa može pomoći u smanjivanju napetosti, malaksalosti, glavobolja, depresije, kao i tegoba uzrokovanih statičkim elektricitetom.

Ionizatori zraka upotrebljavaju se i za eliminiranje bakterija koje mogu biti opasne za bolesnike u bolničkim ustanovama. S druge strane, mogu se upotrebljavati za neutralizaciju potencijalno opasnog statičkog naboja koji se javlja u elektroničkim krugovima na vodičima i izolatorima te općenito za neutralizaciju statičkog naboja. To je ponekad korisno kad nema uzemljenja. Neka prijenosna računala imaju ugrađene ionizatore zraka. Upotrebljavaju se za eliminiranje statičkog naboja na izolatorima, koji nastaje najčešće zbog prisutnosti vlage.

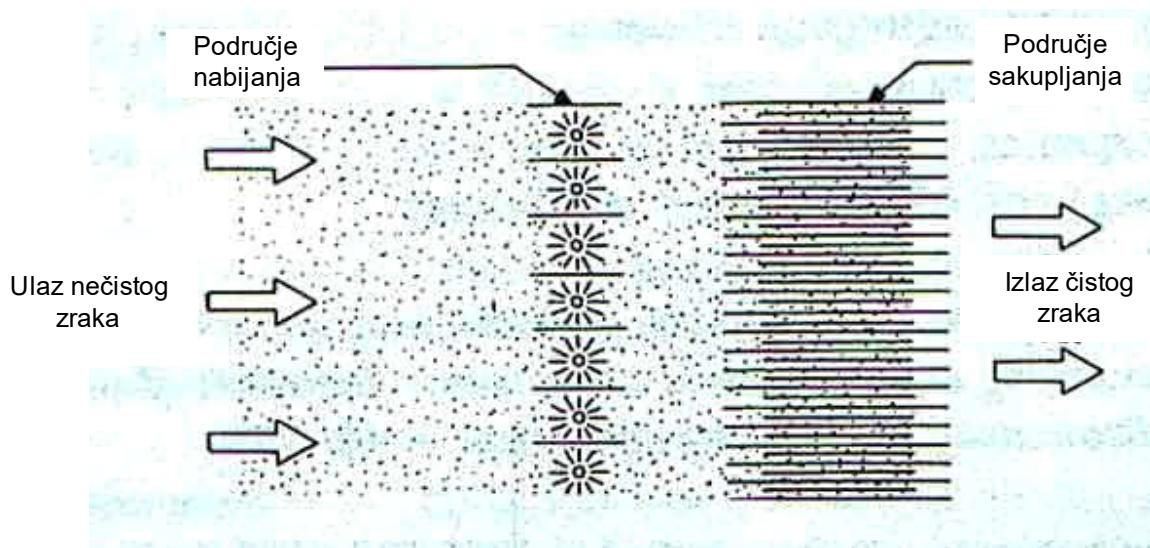
Ionizator zraka – princip eliminiranja statičkoga naboja:



### *Eliminiranje statičkoga naboja*

Visoki napon na elektrodi za koronarno izbijanje (istjecanje) naboja ionizira zrak između šiljka i uzemljene površine. Pod djelovanjem Coulombove sile pozitivni ioni neutraliziraju se s negativnim nabojima na površini s koje želimo ukloniti staticki elektricitet.

### **Elektrostatički pročistači zraka – elektrostatički otprašivači (precipitatori)**



### *Elektrostatički otprašivač*

Elektrostatički otprašivači rade na sličnom principu kao ionski i ozonski generatori. To su naprave koje hvataju određene čestice iz zraka ili plina predajući im električni naboј i skupljajući ih na suprotno nabijenim pločama.

Postupak se provodi u dva koraka: nabijanje i prikupljanje. Prašinom, dimom i drugim česticama zagađen zrak u fazi nabijanja ulazi u otprašivač i biva podvrgnut djelovanju jakog električnog polja – prolazi preko ionizatora koji ih nabija pozitivnim naboјem. Nabijene čestice prolaze zatim preko niza ploča za sakupljanje što su nabijene nabojima suprotnog predznaka. Dakle, u fazi prikupljanja čestice prolaze kroz sekundarno električno polje s negativno nabijenim aluminijskim pločama koje uzrokuju da se pozitivno nabijene čestice lijepe na ploče i time pročišćavaju zrak.

## **Elektrostatički filtri**

Jedan je od primarnih ciljeva elektrostatičkih filtara sprječavanje bakterija i virusa koji ulaze u pacijenta ili izlaze iz njega tijekom disanja. To se postiže zadržavanjem mikroorganizama na statickom naboju u mediju. Elektrostatički filtri iskorištavaju medij koji se sastoji od permanentno bipolarno nabijenih međusobno odvojenih pravokutnih vlakana koja hvataju čestice iz zraka. Efikasni su i pri anesteziji pacijenta te u održavanju rada pluća.

Elektrostatički filtri razlikuju se od elektroničkih filtara zraka (precipitatora) koji trebaju vanjski izvor i nabijene ploče koje skupljaju čestice.

Za povećanje efikasnosti rada pročišćivača zraka kombiniraju se različite tehnologije: HEPA (*High Efficiency Particulate Arrestance*) filtracija, elektrostatička interakcija, ultraaljubičasta (UV) radijacija, ionizacija i dr.

## **Defibrilatori**

Defibrilacija je primjena blagih i kontroliranih elektrošokova na predjelu prsa ili izravno na srcu kako bi se reaktivirao ili normalizirao njegov rad. Primjenjuju se udari istosmjerne električne struje preko defibrilatora. Defibrilacija se primjenjuje i za liječenje malignih, zločudnih poremećaja srčanog ritma. Izvodi se pomoću defibrilatora. Dvije ploče s izoliranim dršcima nabijaju se iz izvora visokog napona. Ploče se pritisnu na pacijentova prsa uz uvjet da je ostvaren dobar električni kontakt. Bitno je da operator i okolno osoblje ne prime električni udar – zato su dršci izolirani, a operator prije nabijanja ploča upozorava ostale osobe (engl. *stand clear*) da se udalje. Električni udar omogućuje uspostavljanje kontrakcija srčanog mišića.



*Defibrilator*

Postoje dvije vrste takvih uređaja:

- automatski vanjski defibrilator (AED) – kojim se mogu koristiti i laici jer sam procjenjuje srčani ritam, ali ne defibrilira automatski, već to čini spašavatelj;
- ručni vanjski defibrilator kakvim se koristi stručno medicinsko osoblje.

Implantabilni defibrilator ICD uređaj je dimenzija otprilike 6 x 5 x 1,5 cm, a služi za otkrivanje i trenutačno prekidanje zločudnih poremećaja srčanog ritma. Sustav se sastoji od kućišta koje sadrži bateriju i elektronički sklop te od katetera koji sadrži elektrodu koja se postavlja u srce. Kućište ICD-a postavlja se ispod kože.



## Fotokopirni stroj

Fotokopirni uređaji su relativno složeni, ali princip rada je vrlo jednostavan i temelji se na svojstvima i primjeni statičkog elektriciteta, odnosno činjenici da se naboji suprotnog predznaka međusobno privlače.



*Fotokopirni uređaj*

Većina fotokopirnih uređaja iskorištava elektrostatički proces nazvan kserografija.

Kada se original dokumenta postavi na staklenu ploču i uključi stroj, koraci u procesu kopiranja pojednostavljeni su prikazani na donjoj slici.



*Faze u procesu kopiranja*

Opis faza u postupku kopiranja:

- Nabijanje* – koronarnim izbijanjem preko žice pod visokim naponom prskaju se negativni naboji na cilindrični valjak prevučen slojem fotoosjetljivog materijala. Fotovodič je poluvodič koji postaje vodljiv kada se izloži svjetlu, a u protivnom predstavlja izolator.
- Eksponiranje* – original dokumenta izlaže se djelovanju jakog svjetlosnog izvora koji preko sustava leća projicira sliku na valjak. Bijela (prazna) područja na dokumentu

reflektiraju svjetlo na površinu fotoosjetljivog valjka. Ta područja postaju vodljiva i neutraliziraju se (izbijaju) preko uzemljenja. Tamna područja na dokumentu ne propuštaju svjetlo i zadržavaju negativni naboј. Stvara se prividna elektrostatička slika dokumenta.

3. *Razvijanje* – suhi crni prah iz uloška tonera nabija se pozitivnim naboјem. Čestice praha pod djelovanjem privlačne elektrostatičke sile prelaze na negativno nabijene dijelove valjka (tamna područja – dijelovi koji se kopiraju).
4. *Prijenos* – slika koju je toner formirao na površini valjka prenosi se na papir (kopiju). Papir je prethodno koronarnim izbojem nabijen negativnim naboјem koji je veći od onoga na valjku, pa povlači čestice tonera s valjka na papir.
5. *Stvaranje otiska na kopiji* – toner se zagrijavanjem otapa i prolaskom preko tlačnih valjaka trajno prianja na vlakna papira.

Opisani proces s negativno nabijenim valjkom i papirom, a pozitivno nabijenim tonerom primjenjuje se kod modernijih digitalnih kopirnih uređaja. Stariji, uglavnom analogni uređaji, imaju pozitivno nabijen valjak i papir, a negativno nabijen toner.

#### Zadatak

U fotokopirnom stroju na površini fotoosjetljivog valjka raspoređuju se pozitivni naboјi koji stvaraju prividnu elektrostatičku sliku dokumenta koji se kopira. Čestice tonera nabijaju se negativnim naboјem i pod djelovanjem privlačne elektrostatičke sile prelaze na pozitivno nabijene dijelove valjka. S valjka se slika prenosi na papir, zagrijavanjem otapa i prolaskom preko tlačnih valjaka trajno prianja na vlakna papira.

Neka je masa čestice tonera  $m = 10^{-15}$  kg, a svaka nosi višak od 20 elektrona. Masa elektrona je  $1,6 \cdot 10^{-19}$  kg. Da bi se osigurala dovoljno velika privlačna sila između čestice tonera i valjka, elektrostatička sila na česticu mora biti najmanje dvostruko veća od njezine težine. Kolika mora biti jakost električnog polja  $E$  uz površinu valjka da bi bio zadovoljen navedeni uvjet?

Rješenje:

Ukupni naboј:  $Q = 20 e^-$

Minimalna jakost električnog polja mora zadovoljiti relaciju:  $QE = 2 mg$ .

Slijedi:

$$E = \frac{2mg}{Q} = \frac{2 \cdot 10^{-15} \cdot 9,81}{20 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \\ E = 6,131 \cdot 10^3 V/m$$

#### **Tintni pisač (*ink jet printer*) – pisač s mlazom**

Tintni pisači rade na principu nanošenja sitnih kapljica tekuće tinte na papir gdje formiraju odgovarajuća slova i slike. Odlikuje ih niska cijena, visoka kvaliteta izlaznog otiska, mogućnost tiskanja u živopisnim bojama i jednostavnost uporabe.

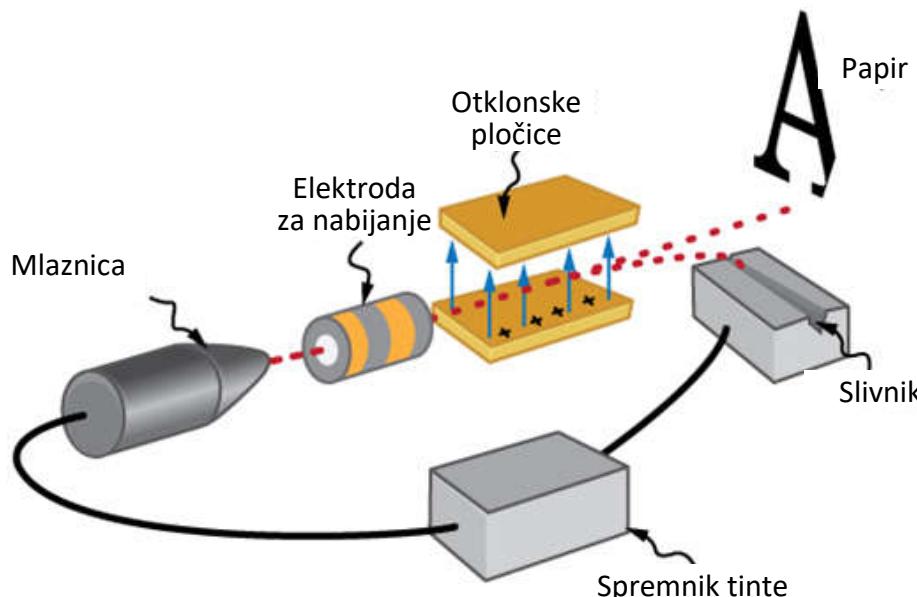
Mlaznica tintnog pisača stvara male kapljice tinte koje se nabijaju elektrostatičkim naboјem. Razni računalno upravljeni uređaji usmjeravaju kapljice na odgovarajuće položaje na stranici papira.



*Tintni pisač*

Pojednostavljeni princip rada prikazan je na slici, a može se opisati u nekoliko koraka:

- iz boćice (spremnika) pumpa se tinta i pod pritiskom usmjerava na mlaznicu;
- ultrazvučnim vibracijama mlaznice protok tinte pod tlakom pretvara se u male kapljice koje izlaze iz mlaznice velikom brzinom;
- kapljice prolaze kroz tunel s elektrodom za elektrostatičko nabijanje;
- nabijene kapljice ulaze u električno polje koje se formira između otklonskih pločica;
- kapljice se otklanjaju u mjeri koja ovisi o naboju što im ga je predala elektroda za nabijanje;
- nakon izlaska kapljica iz područja otklonskih pločica one pravocrtno nastavljaju put od glave pisača do podloge – papira;
- kapljice koje nisu potrebne za tiskanje odlaze u odvodni kanal – slivnik i vraćaju se u spremnik s tintom.



*Tintni pisač – princip rada*

## **Laserski pisač**

Tehnologija i princip rada laserskih pisača preuzeti su od fotokopirnog stroja s tim da su lampa i objektiv zamjenjeni laserskom zrakom za isrtavanje otiska. Laserski pisači i fotokopirni strojevi rade na vrlo sličnom principu. Razlika je ta što se fotokopirni stroj koristi „pozitivom“ slike – tamna područja su znakovi na papiru, a laserski pisači „negativom“ slike – osvijetljena mesta su

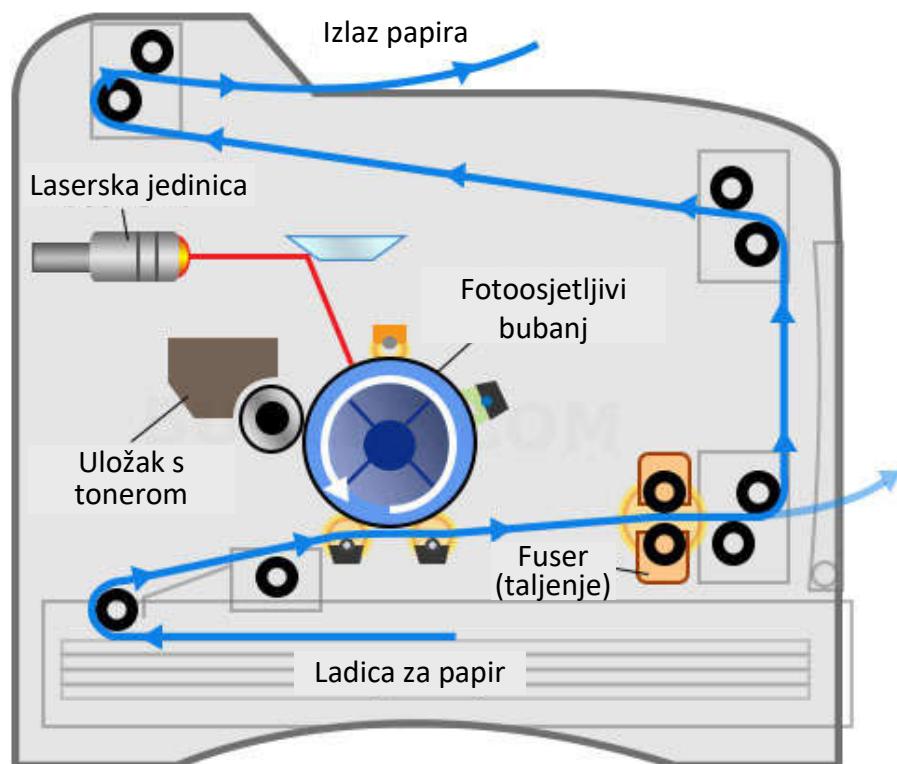
tamne oznake na papiru. Masovna proizvodnja laserskih pisača krenula je s pojavom Hewlett Packardovih LaserJet pisača 1992. godine.



*Laserski pisač*

Laserska zraka skenira fotovodljivi valjak, ostavljajući skrivenu elektrostatičku sliku. Laserskim svjetlom se vrlo precizno može upravljati, što omogućuje stvaranje vrlo kvalitetnih slika – otiska.

*Princip rada laserskog pisača*



Pojednostavljeni princip pojedinih faza rada pisača prikazan je na gornjoj slici. Računalo generira ispisnu stranicu i šalje ju u memoriju laserskog pisača. Površina fotovodljivog valjka kada nije osvijetljena, djeluje kao izolator. Mora biti napravljena tako da može pokupiti jaki elektrostatički naboj kada prolazi pored žice za koronarni izboj ili valjka za nabijanje. Površina fotovodljivog valjka nabija se negativnim nabojem. Temeljem podataka iz memorije elektronika laserskog pisača prenosi i ucrtava sliku na valjak. Na mjestima gdje laserska zraka prijeđe preko fotovodljivog valjka otpor značajno opada i ponisti se negativni naboj – isprazni preko

uzemljenja. Dobije se nevidljiva elektrostatička slika – „negativ“. Slijedi postupak „razvijanja“ slike da bi ona postala vidljiva. Kao razvijač upotrebljava se uložak s tonerom. Valjak za razvijanje s tonerom također je negativno nabijen. Na mjestima na kojima je ostao negativni naboј na fotovodljivom valjku čestice tonera neće se prihvati zbog djelovanja odbojne sile. Čestice tonera rasporedit će se samo na mjestima gdje je prošla laserska zraka i ispraznila naboј na fotovodljivom valjku. Prijenos čestica na papir odvija se također temeljem djelovanja elektrostatičke sile. Papir se povuče iz ladice i nabije pozitivnim naboјem, pa negativno nabijene čestice tonera preskaču s bubenja na papir (privlačna Coulombova sila). U sljedećem koraku papir ulazi u mehanizam za taljenje – *fuser*, gdje se pomoću povišenog tlaka i temperature toner zapeče na papir.

## Sustavi elektrostatičkog raspršivanja

Tehnologija elektrostatičkog raspršivanja spreja/mlaza uvedena je ranih tridesetih godina prošlog stoljeća u cilju poboljšanja taloženja – depozicije spreja. Prednosti te tehnologije prihvatile je automobilska industrija u četrdesetim godinama kao efikasnu metodu za bojenje automobila i kamiona. U osamdesetim godinama sustavi elektrostatičkog raspršivanja primijenjeni su u poljoprivredi. Preliminarni testovi provedeni su na poljima pamuka.

Elektrostatičko bojenje je standard u automobilskoj industriji već nekoliko desetljeća. Elektrostatičko polje iskorištava se za bojenje metalnih objekata zbog djelovanja Coulombove privlačne sile između suprotne nabijenih naboja. Boja se miše s kemijskim katalizatorom i nabija pozitivnim naboјem. Metalni je objekt koji se boja uzemljen. Uzemljenje je potrebno iz sigurnosnih razloga. Kada metalni objekt ne bi bio uzemljen, pozitivne kapljice spreja inducirale bi negativni naboј na prednjoj površini metala, a stražnja bi strana sadržavala pozitivni naboј. Taloženjem pozitivnih kapljica spreja na površinu metala neutralizira se odgovarajuća količina negativnog naboјa, pa bi ostao nevezan pozitivni naboј na unutarnjoj površini. Dodir može uzrokovati elektrošok – električni udar. U slučaju uzemljenja elektroni neutraliziraju preostale pozitivne naboјe na metalnom tijelu. Osim toga, na pojedinim zakrivljenim ili skrivenim površinama pozitivni naboјi djelovali bi odbojnom silom na čestice spreja i te bi površine bile nejednako obojene – pjegave.

Čestice boje kada izlete iz mlaznice, formiraju električki nabijen oblak spreja. Pozitivno nabijene čestice boje međusobno se odbijaju i na izlazu iz mlaznice podjednako se rasprostiru u svim pravcima. Budući da su boja i metalni objekt nabijeni suprotnim naboјem, boja će biti privučena na metalni objekt poput magneta te slijjeće na najbližu uzemljenu površinu. Ravnomjerno se lijepi po površini metala i ima izvrsna svojstva prianjanja, čak i na teško dostupnim mjestima.



*Elektrostatičko bojenje u automobilskoj industriji*

Prednosti takve metode bojenja su:

- bolja kvaliteta bojenja u odnosu na klasične raspršivače;
- manji gubitci – manje se boje utroši po jedinici površine, gotovo sva količina boje prelazi na nabijeno tijelo, uz zanemarive gubitke – nema kapanja;
- manje onečišćenje – boja se nanosi na nabijeno tijelo i ne pada na električki neutralan pod;
- nije potrebna posebna vještina u postupku bojenja, rad je siguran i ugodan za izvoditelja – naboje je raspoređen po cijeloj metalnoj površini i boja se lijepi na nju;
- obojiti se mogu i skrivene površine koje operator izravno ne vidi;
- uredniji rad i jednostavan postupak, boja se ravnomjerno raspoređuje po površini metala.

Elektrostatičko bojenje u odnosu na klasično može značajno pridonijeti smanjivanju troškova ovisno o geometriji bojenog objekta i drugim čimbenicima. Primjerice kod standardnog bojenja kvaka na kućnim vratima 90 % spreja promaši kvaku, a uporabom elektrostatičke privlačne sile većina boje završi na kvaki. Postupak je čišći i jeftiniji.

### **Strojevi za prskanje u poljoprivredi ili hortikulti – *Electrostatic Spraying Systems (ESS)***

U cilju povećanja uroda i zaštite poljoprivrednih kultura od insekata, bolesti biljaka i korova rabe se kemikalije kao što su insekticidi, fungicidi i herbicidi. Kod klasičnih metoda prskanja visok postotak kapljica spreja pada na tlo. Veliki su gubitci i tlo postaje zagađeno.

Elektrostatičko prskanje povoljnije je za okoliš jer znatno smanjuje zagađenost tla i efikasnije prekriva kemikalijama ciljanu biljku.

Ima široko područje primjene od malih vrtova do velikih plantaža. Elektrostatičke prskalice stvaraju čestice koje su 900 puta manje od onih što ih proizvode konvencionalne hidrauličke prskalice i imaju dvostruko bolja svojstva taloženja.

Elektrostatička privlačna sila višestruko je veća od sile gravitacije, pa se kapljice mogu dizati uvis i potpuno obuhvatiti stabljiku ili krošnju tretirane biljke. Istraživanja su pokazala puno bolje prodiranje kemikalija u strukturu lista i bolje prekrivanje skrivenih površina. Posljedica je manji utrošak kemikalija i brži povratak investicije u ESS.



*Elektrostatičko prskanje*

Tretiranje pesticidima pokazalo je da njihove čestice, primjerice nošene vjetrom, mogu ugroziti organizme koji nisu ciljana skupina. Ponekad su pojedine kemikalije uočene na biljkama i

životinjama udaljenima kilometrima od mjesta tretiranja. Porast brige o okolišu utjecao je na kritičko preispitivanje uporabe tradicionalnih metoda prskanja u poljoprivredi. Oprema za prskanje postala je efikasnija i sigurnija za okoliš.

Nabijene čestice pesticida ili gnojiva (prihrane) međusobno se odbijaju i tvore velik oblak koji omogućuje bolje prekrivanje površine biljke.

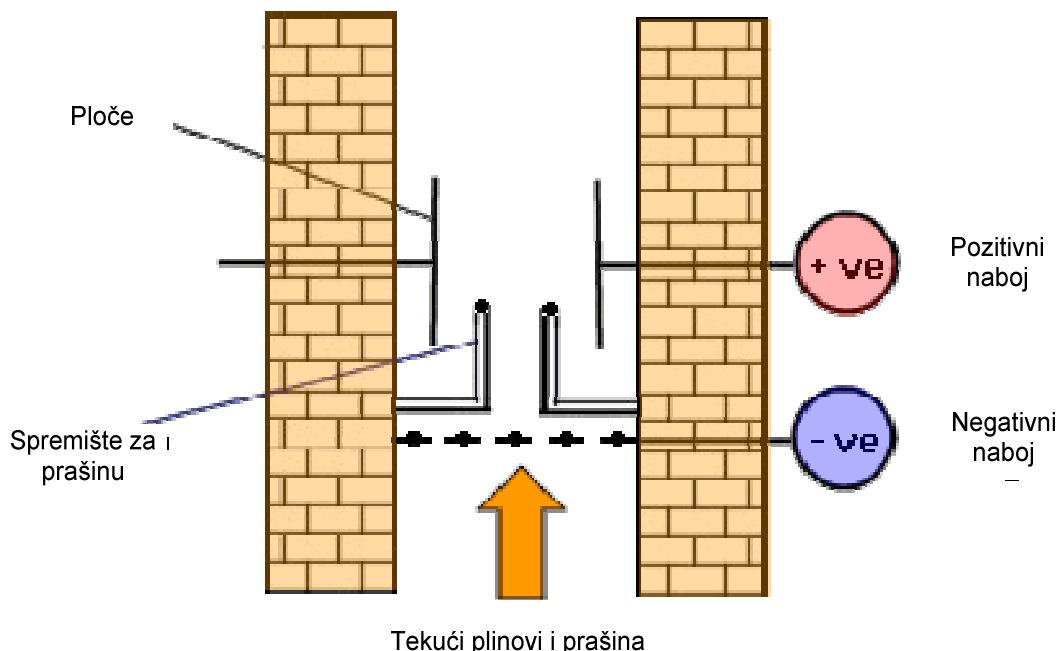
Kako bi se smanjilo rasipanje mlaza, važan je izbor trenutka za prskanje. Mora se voditi računa o temperaturi, vlazi i brzini vjetra kako bi se ustanovio utjecaj navedenih čimbenika na prostiranje pesticida. Osim toga, većina poljoprivrednih kemikalija nestabilna je na visokim temperaturama. Sve se to mora uzeti u obzir pri određivanju količine pesticida. Visok stupanj vlage smanjuje mogućnost da male kapljice ispare i ne pogode cilj. Nadalje, vjetar može otpuhati kapljice s mete i povećati šanse za nanošenje štete organizmima koji nisu cilj prskanja. Obično je jutro najpogodnije vrijeme za prskanje jer je niža temperatura, viši stupanj vlage i vjetar je slaba intenziteta.

Za smanjivanje drifta spreja nova tehnologija elektrostatičkog raspršivanja pokazala se kao pravo rješenje. Oprema temeljena na ovoj tehnologiji poboljšava prekrivanje i penetraciju na površinu listova tretirane poljoprivredne kulture te prekrivanje pesticidom donje površine listova. Također omogućuje smanjivanje ukupne količine pesticida po jedinici površine.

*Princip rada precipitatora* – kemijska smjesa iz mlaznice nabija se negativnim nabojem. Pozitivno nabijene površine listova djeluju na negativne kapljice privlačnom Coulombovom silom. Sprej se taloži na vanjskoj i unutarnjoj površini listova dok ne neutralizira pozitivni naboј, a preostale se kapljice raspoređuju na neprekivena mjesta na krošnji. Ukupni efekt je bolje taloženje pesticida na unutarnjoj površini listova i manji gubitci jer kapljice ne padaju na zemlju ispod krošnje.

## Elektrostatički otprašivači u industriji

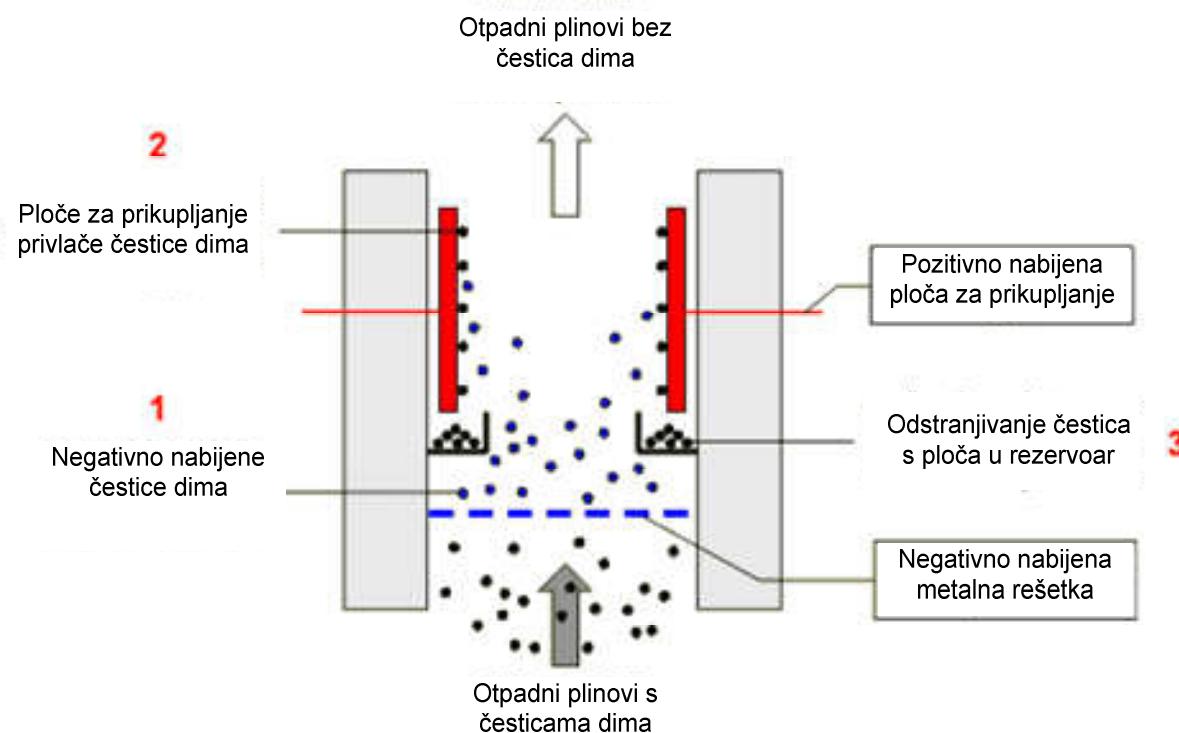
Elektrostatički otprašivači (pročistači – engl. *purifiers*) rabe se u industriji za zaštitu okoliša. Dim i ispušni plinovi iz tvornica, energetskih i kemijskih postrojenja moraju se obraditi na način da se odstrane čestice prašine i drugi štetni dijelovi prije nego se ispuste u atmosferu.



Elektrostatički otprašivač

Poprijeko na cijev dimnjaka postavlja se metalna rešetka koja se nabija na negativni visoki napon od oko 50 kV. Prolaskom dima kroz rešetku čestice dima nabijaju se negativnim nabojem. Te čestice privlače pozitivno nabijene ploče za sakupljanje na koje se čestice lijepe. Na taj se način čestice prašine odvajaju od dima koji se nastavlja ispušтati u atmosferu. Pozitivno nabijene ploče za prikupljanje prašine povremeno se čiste udarnim mehanizmom (mehaničkim čekićima) kako bi se odstranile nataložene čestice koje se talože u rezervoar za prikupljanje i naknadno odstranjuju.

Efekt je isti kao kod kućnih pročistača zraka.



#### *Elektrostaticki otprašivači – princip rada*

Princip rada bio bi isti kad bi rešetka bila negativno, a ploče za prikupljanje pozitivno nabijene.

### Čišćenje solarnih panela

Pustinje su povoljno mjesto za gradnju solarnih elektrana zbog obilja sunca i jeftina zemljишta. Problem predstavljaju prašina i nečistoće naneseni vjetrom. Voda za pranje panela je nedostupna. Rješenje je pronađeno u sustavu samopročišćavajućih panela koji se čiste pomoću električnog naboja što ga generiraju sami paneli. Tehnologija je razvijena za potrebe rada panela za robotizirana vozila na Marsu, gdje također vladaju suha i prašnjava okoliša.

Paneli se prekrivaju prozirnim električki osjetljivim materijalom. Senzori nadziru razinu prašine na površini panela i uključuju djelovanje pokrovног materijala u trenutku kada koncentracija prašine dostigne kritičnu razinu. Sustav je izložen djelovanju promjenljivog elektrostatickog polja. Električni naboј putuje iznad panela i otpuhuje čestice prašine u okolni zrak. Postupak traje nekoliko minuta uz vrlo malu potrošnju energije koju osiguravaju sami paneli.



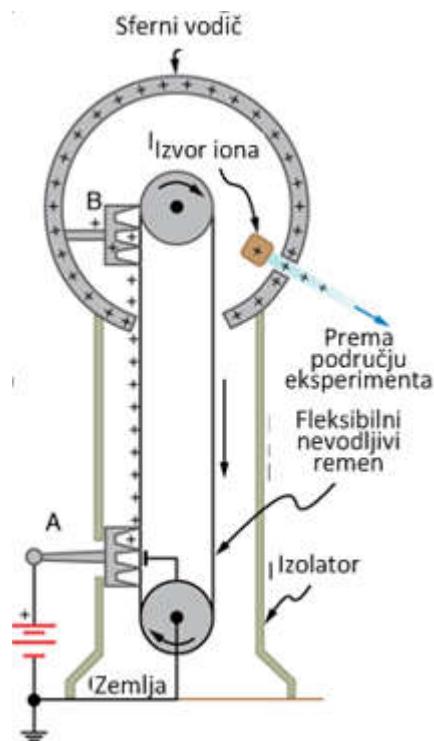
*Primjena elektrostatičkog čišćenja*

## Uklanjanje elektrostatičkog naboja

Prianjanje statičkog naboja može u industrijskim pogonima izazvati gomilanje prašine, neželjeno trenje unutar postrojenja, kvarove, pojавu iskrenja i zastoje u radu.

Materijali kao plastika, papir i tekstil u normalnim su uvjetima električki neutralni. Trenje može poremetiti ravnotežu pozitivnih i negativnih naboja i nabiti materijal neželjenim statičkim nabojem. Spomenuti materijali su izolatori i uklanjanje statičkog naboja ne može se provesti uzemljenjem, pa se rabe posebni uređaji – elektrostatički eliminatori. To su u biti ionizatori koji emitiraju hrpe pozitivnih i negativnih iona na površinu nabijenog objekta kako bi se uklonio nagomilani statički naboje i ponovno uspostavila ravnoteža pozitivnih i negativnih naboja.

## Van de Graaffov akcelerator



*Van de Graaffov generator/akcelerator*

Prethodno opisan van de Graaffov generator često se rabi za istraživačke svrhe kao izvor visokog napona za ubrzavanje čestica, odnosno za realizaciju linearoga elektrostatičkog akceleratora. Ionski izvor koji se nalazi unutar kupole generira pozitivne ione. Ionski snop se tjeran velikom razlikom potencijala naglo ubrzava kroz evakuiranu cijev i udara u metu na uzemljenome kraju. Akceleratori koji su danas u uporabi uglavnom su tandem akceleratori s dva stupnja s pozitivnim i negativnim ionima.

Generator se može rabiti i za ubrzavanje elektrona. Transportirani naboji u elektronском snopu odgovaraju strujama od nekoliko mA, pa je isporučena snaga snopa reda veličine kilovata. Ovaj snažni snop uporabljuje se u istraživanjima u medicini i industriji (za sterilizaciju, terapiju bolesti raka, industrijsku radiografiju i polimerizaciju plastičnih materijala).

## Wimshurstov stroj

Engleski izumitelj Wimhurst<sup>8</sup> 1878. godine konstruirao je stroj za proizvodnju elektrostatičkog naboja – elektrostatički generator za stvaranje visokih napona. U Wimshurstovu stroju dvije okomito postavljene ploče (stakleni diskovi) s metalnim sektorima rotiraju u suprotnim smjerovima i nabijaju se elektrostatičkom indukcijom – influencijom, zbog čega naposljetku preskače iskra između elektroda. Naboј koji stvara razliku potencijala prikuplja se preko dvaju parova metalnih češljeva smještenih uz površinu svakog diska. Da bi se prikupila što veća količina elektriciteta, češljevi su vezani za lajdenske boce. Temeljem mehaničkog rada utrošena pri okretanju ploča, Wimshurstov stroj sam sebe elektrizira, a na njegovim elektrodama skuplja se elektricitet čija potencijalna razlika može iznositi i više od 100 kV. Elektricitet koji se razvija na elektrodama može se uporabiti za razne eksperimente. Ako nam nisu potrebne jake iskre, isključući se veza češljeva s lajdenskim bocama. Mehanička energija pretvara se u električnu energiju pri okretanju stroja i pri tomu osjećamo sve jači otpor što je stroj jače naelektriziran.



<sup>8</sup> James Wimhurst (1832. – 1903.)





Ljubomir Malešević

# OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I

## 2. dio: ISTOSMJERNE STRUJE

STUDIJI ELEKTRONIKE I ELEKTROENERGETIKE

Split, 2018.





## PREDGOVOR

Drugi dio kolegija Osnove elektrotehnike I nastavni je materijal koji pokriva područje istosmjernih struja. Izrađen je za studente stručnog studija elektroenergetike i elektronike na Odsjeku za elektrotehniku Sveučilišnog odjela za stručne studije Sveučilišta u Splitu.

Svrha je predmeta razvitak elektrotehničkog načina mišljenja polazeći od usvojenih znanja iz fizike i izučavanje temeljnih teorijskih znanja iz elektrotehnike u području elektrostatičkih interakcija nabijenih tijela. Glavni je cilj osposobljavanje studenata za olakšano praćenje i savladavanje ostalih stručnih i specijalističkih kolegija. Kako bi se zorno prikazao značaj primjene usvojenih znanja u praksi, dan je velik broj praktičnih primjera i navedena su tipična područja primjene.

U prva dva uvodna poglavlja uvedene su i opisane bitne električne veličine i temeljni zakoni elektrotehnike koji definiraju njihove međuvisnosti – Ohmov i Kirchhoffovi zakoni.

Treće poglavlje odnosi se na određivanje nadomjesnog otpora za sve vrste spojeva otpornika – serijski, paralelni i mješoviti spoj te pretvorbe spojeva u zvijezdu i trokut.

Detaljna analiza odnosa električnih veličina u temeljnome strujnom krugu, modova rada izvora i načina spajanja izvora te odnosa između naponskih i strujnih izvora provedena je u četvrtom poglavlju.

U petom poglavlju uvedeni su pojmovi električnog rada, energije i snage te analizirani odgovarajući odnosi u temeljnome strujnom krugu.

Analiza linearnih istosmjernih električnih mreža i metode za njihovo rješavanje detaljno su obrađene u posljednjem poglavlju.

Sastavni su dio ovih nastavnih materijala:

- Lj. Malešević: Slajdovi s PowerPoint prezentacijom gradiva koje se studentima iznosi na predavanjima (šest slajdova po stranici u pdf formatu), web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Kao dopuna za pripremu usmenog ispita preporučuje se:

- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s usmenih ispita iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Za pripremu kolokvija i pismenog dijela ispita studenti se mogu koristiti zbirkama:

- Lj. Malešević: *Zbirka zadataka s pismenih ispita iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s kolokvija iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Sva poglavlja nastavnoga gradiva iz područja istosmjernih struja pokrivena su odgovarajućim laboratorijskim vježbama.

Molim čitatelje da me upozore na uočene propuste i pogreške te iznesu moguće primjedbe, na čemu ću im biti zahvalan.

*Split, rujna 2018.*

*AUTOR*



## SADRŽAJ

### 2. dio – ISTOSMJERNE STRUJE

<b>1. ELEKTRIČNE VELIČINE.....</b>	<b>1</b>
1.1. ELEKTRIČNA STRUJA .....	1
1.2. POTENCIJAL, ELEKTRIČNI NAPON .....	3
1.3. ELEKTRIČNI OTPOR I ELEKTRIČNA VODLJIVOST .....	5
1.3.1. Ovisnost otpora o temperaturi .....	6
1.3.2. Vrste električnih otpornika.....	6
<b>2. TEMELJNI ZAKONI STRUJANJA U STRUJNOM KRUGU.....</b>	<b>11</b>
2.1. OHMOV ZAKON.....	11
2.2. KIRCHHOFFOVI ZAKONI.....	12
2.2.1. Prvi Kirchhoffov zakon (I. KZ) .....	12
2.2.2. Drugi Kirchhoffov zakon (II. KZ) .....	14
<b>3. ODREĐIVANJE NADOMJESNOGA OTPORA.....</b>	<b>21</b>
3.1. SERIJSKI SPOJ OTPORNIKA (TROŠILA).....	21
3.2. PARALELNI SPOJ OTPORNIKA (TROŠILA) .....	23
3.3. MJEŠOVITI (SERIJSKO-PARALELNI) SPOJEVI OTPORNIKA .....	25
3.4. PRETVORBE ZVIJEZDA – TROKUT I TROKUT – ZVIJEZDA .....	27
<b>4. TEMELJNI STRUJNI KRUG.....</b>	<b>31</b>
4.1. NADOMJESNI NAPONSKI IZVOR (modovi rada izvora) .....	31
4.2. SPAJANJE NAPONSKIH IZVORA .....	35
4.2.1. Serijski spoj naponskih izvora .....	35
4.2.2. Paralelni spoj naponskih izvora .....	36
4.2.3. Mješoviti spoj naponskih izvora .....	38
4.3. NAPONSKI I STRUJNI IZVORI.....	39
<b>5. ELEKTRIČNI RAD, ENERGIJA I SNAGA.....</b>	<b>44</b>
5.1. KORISNOST ELEKTRIČNE SNAGE I ENERGIJE .....	45
5.2. PRILAGODBA STRUJE, NAPONA I SNAGE .....	46
5.3. PRETVORBA ELEKTRIČNE ENERGIJE U TOPLINSKU.....	49
<b>6. LINEARNE ISTOSMJERNE ELEKTRIČNE MREŽE.....</b>	<b>51</b>
6.1. UVODNA RAZMATRANJA.....	51
6.2. ELEMENTI I SASTAVNI DIJELOVI MREŽE .....	53
6.3. ANALIZA LINEARNIH OTPORNIČKIH MREŽA .....	58
6.4. METODE I TEOREMI ZA ANALIZU LINEARNIH MREŽA .....	59
6.4.1. Metoda Kirchhoffovih zakona .....	59
6.4.2. Metoda napona čvorova .....	61
6.4.3. Metoda konturnih struja .....	62

6.4.4.	Metoda superpozicije .....	63
6.4.5.	Theveninov teorem .....	66
6.4.6.	Nortonov teorem .....	71
6.4.7.	Millmannov teorem.....	73
6.4.8.	Teorem uzajamnosti.....	75
6.4.9.	Teorem kompenzacije .....	76

## 1. ELEKTRIČNE VELIČINE

U području elektrostatike analizirali smo pojave vezane za stacionarne naboje. Analiza u dinamičkim uvjetima podrazumijeva proučavanje električnih krugova u uvjetima kretanja naboja. Sastavni elementi svakoga strujnog kruga su izvor, spojni vodovi i trošilo, a dodatni dijelovi kruga mogu biti još i različiti mjerni instrumenti, sklopke, osigurači i drugi pomoćni elementi.

Temeljne električne veličine koje će nam biti potrebne za analizu električnih krugova jesu napon  $U$ , struja  $I$  i otpor  $R$ .

### 1.1. ELEKTRIČNA STRUJA

Metali imaju u vanjskoj ljusci atomske rešetkaste strukture, tzv. slobodne elektrone, koji su posljedica malih udaljenosti između atoma i velike gustoće. Elektroni se mogu odvojiti od matičnog atoma zbog termičkog gibanja, ali je njihovo kretanje kroz kristalnu strukturu podjednako zastupljeno u svim smjerovima. Uz pomoć neke vanjske sile mogu se slobodni elektroni upraviti u željenom smjeru. Nastaje usmjereni tok elektrona ili struja elektrona. U metalima struju vode elektroni, a u tekućinama ioni.

*Električna struja je usmjereno kretanje električnih naboja pod djelovanjem električnoga polja.*

Da bi struja postojala i održavala se u vodljivoj sredini, potrebno je imati:

- izvor električne energije koji će stvoriti i održavati električno polje;
- zatvoreni električni krug koji predstavlja put kojim će se kretati naboji.

Svaku struju u potpunosti određuju tri pojma: *jakost, smjer i gustoća struje*.

Smjer toka struje naziva se tehničkim ili konvencionalnim smjerom. To je smjer prema kojemu struja izvan izvora teče od pozitivnoga prema negativnometu polu.

Fizikalni ili stvarni smjer struje je smjer kretanja negativnih nositelja naboja, elektrona. To je smjer od negativnoga prema pozitivnometu polu.

Jakost struje definirana je kao količina naboja koja prođe kroz poprečni presjek vodiča u jedinici vremena, odnosno:

$$I = \frac{Q}{t} \text{ za konstantne struje, } i = \frac{dq}{dt} \text{ za vremenski promjenljive struje.}$$

Gustoća struje je količina strujnog toka kroz poprečni presjek vodiča:

$$J = \frac{I}{S} \text{ za konstantne struje, } j = \frac{di}{dS} \text{ za vremenski promjenljive struje.}$$

Jedinica za struju je 1 A (amper), nazvana po francuskom fizičaru Amperu.<sup>9</sup> To je jedna od temeljnih jedinica SI sustava.

*Definicija: 1 A je jakost konstantne struje koja teče kroz dva paralelna beskonačno duga vodiča zanemariva kružnog poprečnog presjeka, postavljena na međusobnoj udaljenosti od 1 m u vakuumu, ako između vodiča djeluje sila od  $2 \cdot 10^{-7}$  njutna po metru duljine vodiča.*

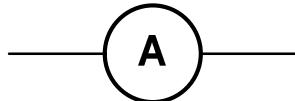
Jakost struje od 1 A ekvivalentna je protoku od  $6,242 \cdot 10^{18}$  elektrona u sekundi.

Jedinica gustoće struje je A/m<sup>2</sup> ili A/mm<sup>2</sup>, što je praktičnije s obzirom na stvarne presjeke vodiča. Jakosti struje u elektrotehnici variraju u vrlo širokim granicama od 10, pa i više redova veličine, što se može vidjeti iz tipičnih vrijednosti struja nekih elektrotehničkih uređaja:

<sup>9</sup> André-Marie Ampère (1775. – 1836.)

<i>elektrolučne peći</i>	10 do 100 kA
<i>aparati za zavarivanje</i>	1 do 10 kA
<i>elektromotori</i>	1 do 1000 A
<i>električne žarulje</i>	100 do 1000 mA
<i>telefonski signal</i>	nekoliko $\mu$ A.

Instrument za mjerjenje struje je ampermetar, čiji je simbol:



Slika 1.1 – Simbol ampermetra

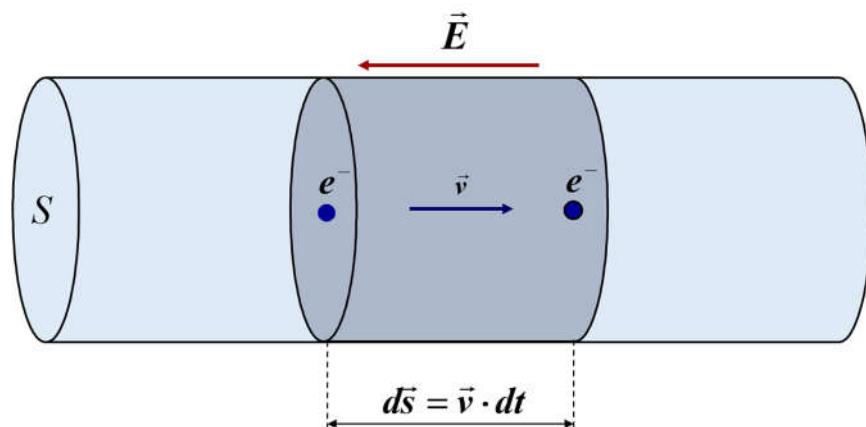
Ampermetar se u krug spaja serijski. Kako kroz njega teče mjerena struja, unutarnji otpor ampermeta mora biti zanemarivo malen ( $R_u \approx 0$ ) kako ne bi utjecao na točnost mjerjenja. Idealan ampermetar predstavlja kratki spoj između mjernih točaka.

Popratni efekti koji prate protok električne struje jesu:

- svaka struja proizvodi toplinu (Jouleovi gubitci);
- svaka struja okružena je magnetskim poljem;
- svaka ionska struja transportira materiju.

Električna struja dovoljne jakosti izaziva fiziološke efekte u tijelima živih bića. Ovi efekti su mišićne ili nervne reakcije, paraliza i u najgorem slučaju smrt.

Kao zanimljiv primjer navest ćemo određivanje brzine nositelja naboja – elektrona pri protjecanju struje određene vrijednosti kroz poprečni presjek vodiča kao na Slici 1.2.



Slika 1.2 – Određivanje brzine nositelja naboja

Gustoća je naboja:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Ne}{V} = ne, \quad (I-1)$$

gdje je  $n = N/V$  broj atoma po metru kubičnom, a  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} As$  naboј elektrona. Za bakar je  $n$  istovremeno i broj slobodnih elektrona, a iznosi  $8,5 \cdot 10^{28} m^{-3}$ . Kako je:

$$dq = \rho dV = neSvdt, \quad (I-2)$$

struja koja teče brzinom  $v$  kroz vodič presjeka  $S$  jest:

$$i = \frac{dq}{dt} = neSv . \quad (I-3)$$

Primjerice, prosječna brzina struje kroz bakreni vodič presjeka  $S = 10 \text{ mm}^2$  kojim teče struja od  $25 \text{ A}$  jest:

$$v = \frac{i}{neS} = \frac{25}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 0,184 \text{ mm/s}. \quad (I-4)$$

## 1.2. POTENCIJAL, ELEKTRIČNI NAPON

U području elektrostatike definirali smo potencijal neke točke  $A$  električnoga polja kao potencijalnu energiju jediničnoga pozitivnog naboja  $Q$  u toj točki:

$$\varphi(A) = \frac{W_p(A)}{Q} . \quad (I-5)$$

Prepostavimo kako smo naboј  $Q$  koji je bio u stanju mirovanja u nekoј referentnoј točki doveli u točku  $A$  djelujući silom  $\vec{F} = Q\vec{E}$ . Izvršili smo rad  $A$  koji se pretvorio u prirast potencijalne energije  $W_p$ :

$$A = \int_{ref.t.}^A \vec{F} d\vec{s} = Q \int_{ref.t.}^A \vec{E} d\vec{s} = -W_p . \quad (I-6)$$

Na temelju definicije potencijala je:

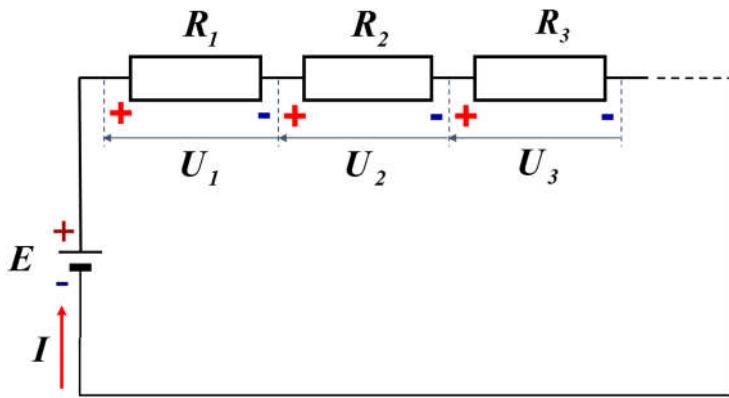
$$\varphi(A) = - \int_{ref.t.}^A \vec{E} d\vec{s} . \quad (I-7)$$

U fizikalnim razmatranjima nulti potencijal je potencijal neizmjerno udaljene točke, no u praksi se površini Zemlje pripisuje nulta vrijednost potencijala. Međutim, za mjerjenja u elektrotehnici nije bitna absolutna vrijednost potencijala, nego potencijalna razlika, tj. električni napon. U tom je smislu sporedan izbor točke referentnog (nultog) potencijala. Naime, odabere li se neka druga referentna točka, svi se potencijali promijene za isti iznos, pa njihova razlika ostaje nepromijenjena.

Električni napon u strujnim se krugovima javlja u dvojaku obliku:

- elektromotorna sila (EMS)  $E$  je sposobnost izvora da na svojim stezalkama izvrši razdvajanje naboja i održava određenu razliku potencijala;
- električni napon (pad napona/protunapon) dio je EMS-a koji se troši na svladavanje otpora nekog dijela kruga.

Energiju koju šalje izvor  $E$  uzimaju trošila  $R_1, R_2, R_3, \dots$  na kojima se javljaju padovi napona  $U_1, U_2, U_3, \dots$ , kao na *Slici I.3.*



Slika 1.3 – EMS i padovi napona

Kako je na lijevim krajevima otpornika potencijalna energija naboja viša nego na desnima, shematski se viši potencijal označava sa "+", a niži sa "-". Ti predznaci ne označavaju pozitivne i negativne naboje. Općenito se terminal trošila u koji struja ulazi nalazi na višem potencijalu.

Jedinica za električni napon je 1 V, a prikazan preko temeljnih jedinica SI sustava jest:

$$1\text{V} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{As}^3}.$$

Opseg napona koji se mogu pojaviti u prirodi odnosno u energetskim ili elektroničkim uređajima vrlo je širok. Primjerice:

<i>Elektrostatički generator</i>	GV
<i>Munja</i>	nekoliko MV
<i>Dalekovodi</i>	10 do 400 kV
<i>Kućanstva</i>	110 do 240 V
<i>Ćelija akumulatora</i>	2 V
<i>Termoelement</i>	nekoliko mV
<i>Radioprijemni napon</i>	nekoliko $\mu$ V

Instrument za mjerjenje napona je voltmeter, a simbol mu je:



Slika 1.4 – Simbol voltmetra

Voltmetar se u krug spaja paralelno s objektom čiji se napon mjeri. Unutarnji otpor treba mu biti što veći ( $R_{UV} \rightarrow \infty$ ). Kroz idealni voltmeter ne teče struja. Predstavlja prekid strujnoga kruga.

Za kalibriranje i vrlo točna mjerena napon upotrebljava se tzv. Westonov standardni članak, koji generira EMS  $E = 1,01865$  V pri  $20^\circ\text{C}$ .

EMS izvora može se stvoriti na različite načine:

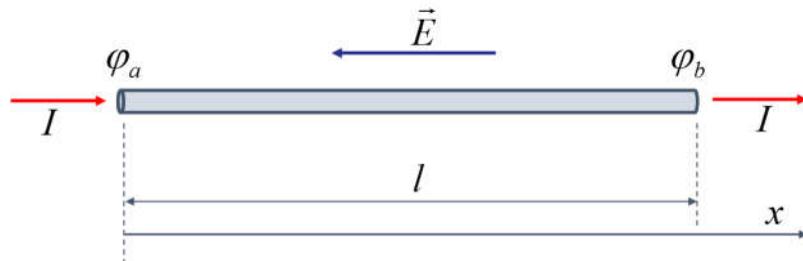
- kemijskim djelovanjem – baterija, akumulator, ćelija goriva (engl. *fuel cell*)
- magnetskim djelovanjem – elektromagnetski generator
- svjetlosnim djelovanjem – fotoelektrična ćelija
- toplinskim djelovanjem – termočlanak
- pritiskom na kristal – piezoelektrični efekt
- razdvajanjem naboja trenjem.

### 1.3. ELEKTRIČNI OTPOR I ELEKTRIČNA VODLJIVOST

Nositelji električnog naboja (elektroni) pri djelovanju usmjerenoga električnog polja sudsaraju se s česticama materijala koje se nalaze u kaotičnom gibanju. Suprotstavljanje materijala prolasku električne struje naziva se *električni otpor*. Otpor ograničuje tok struje u krugu. Različiti vodiči ne vode jednakom dobro električnu struju. Naime, uz konstantno električno polje  $E$  i jednake presjeke  $S$ , kod različitih vodiča uspostavljaju različite gustoće struje  $J = I/S$ , što se dade opisati veličinom koja se naziva *specifična električna vodljivost*  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{J}{E} \left[ \frac{\frac{A}{m^2}}{\frac{V}{m}} \right] = \frac{A}{Vm}. \quad (1-8)$$

Jednadžba koja vezuje gustoću struje i električno polje nije pogodna za praktične proračune. Jednostavnije je raditi s relacijom koja bi povezivala jakost struje u vodiču s razlikom potencijala na njegovim krajevima. Razmatrajmo element vodiča duljine  $l$ , presjeka  $S$ , kroz koji zbog postojanja različitih potencijala  $\varphi_a$  i  $\varphi_b$  na krajevima vodiča, teče struja  $I$ , kao na *Slici 1.5.*



*Slika 1.5 – Element vodiča protjecan strujom*

Polje se mijenja u smjeru osi  $x$ , tj.  $E = -d\varphi/dx$ , pa je:

$$I = JS = \kappa ES = -\kappa S \frac{d\varphi}{dx}, \quad (1-9)$$

odnosno:

$$Idx = -\kappa S d\varphi. \quad (1-10)$$

Primjeni li se integral na obje strane jednadžbe:

$$I \int_0^l dx = -\kappa S \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} d\varphi, \quad (1-11)$$

dobije se za rješenje određenih integrala:

$$Il = \kappa S(\varphi_a - \varphi_b). \quad (1-12)$$

Odnos struje i napona na krajevima vodiča je:

$$I = \kappa \frac{S}{l} U_{ab}. \quad (1-13)$$

Omjer struje i napona označuje se sa  $G$  i naziva se *električna vodljivost*:

$$G = \frac{I}{U} = \kappa \frac{S}{l} \quad \frac{\text{A}}{\text{V}} = \text{S}. \quad (I-14)$$

Jedinica vodljivosti je 1 S (simens), a u američkoj literaturi označuje se s *Mho*.

U praksi se umjesto vodljivosti redovito rabi recipročna vrijednost, tj. električni otpor  $R$ :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{G} = \frac{l}{\kappa S} = \rho \frac{l}{S} \quad , \quad \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega \text{ (Ohm)}, \quad (I-15)$$

gdje je  $\rho$  *specifični električni otpor*, koji se u tablicama materijala daje u  $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ .

Otpor vodiča može se odrediti ako su poznate vanjske geometrijske dimenzije  $l$ ,  $S$  i unutarnja struktura materijala  $\rho$ .

U nekim slučajevima (vodiči između elemenata kruga, vodovi za prijenos električne energije i telekomunikacijskih signala) otpor nije poželjan, te se nastoji smanjiti pogodnim izborom materijala i dimenzija. S druge strane, često je potrebno namjerno spojiti u strujni krug element s određenom vrijednosti otpora. Njegova uloga je transformacija električnog rada u toplinu (elektrotermički uređaji, žarulje sa žarnom niti, topivi osigurači) ili dobivanje određenog pada napona na krajevima elementa, kao što je to slučaj u raznim električnim krugovima u elektronici, gdje su oni najčešće uporabljivana pasivna komponenta.

Otpori spojnih vodova u praktičnim analizama najčešće se mogu zanemariti.

Elementi projektirani s ciljem da u krug unesu određeni otpor, koji je velik u odnosu na otpor spojnih vodova i spojeva, nazivaju se električnim otpornicima.

Vrijednosti koje definiraju pojedini otpornik jesu njegova nazivna vrijednost, tolerancija te vrijednosti u postotcima i opteretivost – maksimalno dopuštena snaga. Opteretivost je ona snaga koju dani otpornik može primiti, a da se ne oštete njegove vitalne funkcije.

### 1.3.1. Ovisnost otpora o temperaturi

Otpor vodiča na temperaturi apsolutne nule jednak je nuli. Pri porastu temperature povećava se titranje kristalne rešetke materijala, povećava se vjerojatnost sudara elektrona i skraćuje im se efektivni put gibanja. Dakle, povećava im se električni otpor.

Vodiči imaju različita temperaturna svojstva. Promjena otpora nastala zbog zagrijavanja/hlađenja vodiča jest:

$$\Delta R = R_{20} \alpha \Delta \vartheta, \quad (I-16)$$

gdje su:

$\Delta R = R_t - R_{20}$  – promjena otpora

$\alpha$  – temperaturni koeficijent otpora u  $\text{K}^{-1}$

$\Delta \vartheta = \vartheta_t - 20^\circ\text{C}$  – promjena temperature.

Električni otpor vodiča na nekoj temperaturi različitoj od sobne može se prema gornjoj jednadžbi izraziti s:

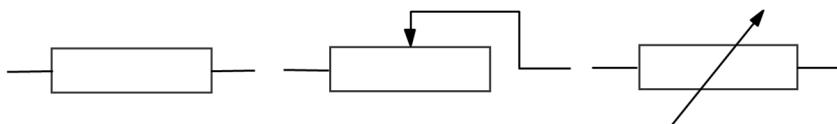
$$R_t = R_{20} (1 + \alpha \Delta \vartheta). \quad (I-17)$$

### 1.3.2. Vrste električnih otpornika

- **Linearni otpornici**

Otpornik se naziva linearnim ako se struja koja kroz njega teče mijenja proporcionalno s narinutim naponom, tj. ako je krivulja koja opisuje funkciju ovisnosti  $I = f(U)$  pravac. Simbol

linearnog otpornika prikazan je na *Slici 1.6.a*). To je otpornik stalne nazivne vrijednosti. Otpornici kojima se vrijednost može mijenjati jesu promjenljivi otpornici (potenciometri, reostati), a prikazuju se simbolima kao na *Slici 1.6.b* i *c*).



*Slika 1.6 – Simboli konstantnog (a) i promjenljivog linearne otpornika (b), (c)*

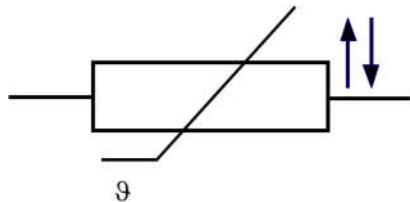
#### • Nelinearni otpornici

Posebnu skupinu otpornika čine nelinearni otpornici. Premda otpor bilo kojeg otpornika ovisi, kako je navedeno, o više parametara, nelinearni otpornici posebno su napravljeni da iskažu strogu ovisnost o nekom vanjskom parametru. To može biti ovisnost o naponu, magnetskom polju (Hallove sonde), svjetlu, tlaku (tenzometrijske trake – engl. *strain gauge*) i dr.

Karakteristična svojstva pojedinih otpornika određuju njihov izbor kao elementa elektroničkih krugova.

#### • NTC otpornici

Kod metala i nekih drugih tvari otpor raste s porastom temperature. Međutim ima niz tvari (ugljen, poluvodiči) koje se ponašaju obratno. One lošije vode u „hladnom“ stanju nego u „toplom“ stanju, odnosno otpor im se smanjuje pri povišenju temperature. Zato ih zovemo toplim vodičima ili otpornicima s negativnim temperaturnim koeficijentom – NTC otpornicima. Često je u uporabi i naziv termistor. Na *Slici 1.7* prikazan je simbol NTC otpornika (promjena temperature i otpora protivnog su smisla ↑↓).



*Slika 1.7 – Simbol NTC otpornika*

Temperaturni koeficijent otpora  $\alpha$  je promjena otpora vodiča od  $1 \Omega$  pri promjeni temperature za  $1 \text{ K}$  (kelvin). Za termistore negativna temperaturna ovisnost znatno je izraženija nego pozitivna kod metala, a iznosi nekoliko postotaka po kelvinu. Izrađuju se od poluvodičkih materijala (polikristalna keramika od mješovitih oksida).

Karakteristična krivulja temperaturne ovisnosti NTC otpornika je eksponencijalna i može se izraziti kao:

$$R = A e^{\frac{B}{T}}, \quad (1-18)$$

gdje su:  $A, B$  – konstante

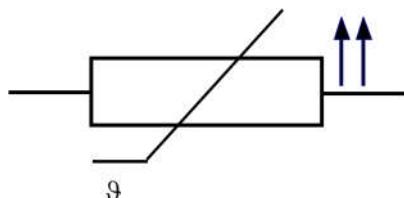
$T$  – apsolutna temperatura u K.

Otpor ovisi o upotrijebljenom materijalu, načinu izvedbe i temperaturnim promjenama. Promjenu otpora može izazvati promjena temperature okoliša. S druge strane, vlastito zagrijavanje (samozagrijavanje) odnosno hlađenje, kao posljedica različitih električnih opterećenja, također uzrokuje promjenu otpora. Taj je efekt posebno važan. Kada se narine dovoljno visoki napon, proizvede se u otporniku toliko topline da mu poraste temperatura. To vodi smanjenju otpora, povećanju struje i novom rastu temperature. Nakon nekog vremena, od djelića sekunde do minute

ovisno o izvedbi, uspostavi se ravnotežno stanje. Opisani efekt samozagrijavanja termistora ima niz primjena. Primjerice, ako se NTC otpornik serijski spoji s nekim drugim uređajem, ograničiti će početnu vrijednost struje. Zagrijavanjem struja bez naglog skoka postupno raste do svoje završne vrijednosti. Primjenjuje se još i kao temperaturno osjetilo (senzor) u mjerenu temperature ili za kompenzaciju temperaturnih ovisnosti drugih naprava, za stabilizaciju radne točke u tranzistorskim spojevima te u regulacijskim uređajima za uključivanje i isključivanje pri određenim temperaturama.

### • PTC otpornici

Osim metala ima još tvari kod kojih je otpor u „hladnom“ manji nego u „toplom“ stanju. To su hladni vodiči. Otpor im raste s porastom temperature. Otpornici takvih karakteristika imaju pozitivni temperaturni koeficijent, pa ih nazivamo PTC otpornicima. Na *Slici 1.8* prikazan je simbol PTC otpornika (promjena temperature i otpora istog su smisla ↑↑).



*Slika 1.8 – Simbol PTC otpornika*

Kao i kod NTC otpornika uzrok promjene otpora može biti promjena temperature okoline (ambijenta) ili vlastito zagrijavanje/hlađenje kao posljedica različitih električnih opterećenja. Otpor im ispod određene temperature umjereno ovisi o temperaturi, a kako se povećava iznad te temperature. Povećanje može biti vrlo naglo, i do 15 % po °C, a ukupno povećanje otpora u intervalu od nekoliko desetaka °C dostiže po nekoliko redova veličine. Izrađuju se od feroelektrične keramike, npr.  $TiO_3$ .

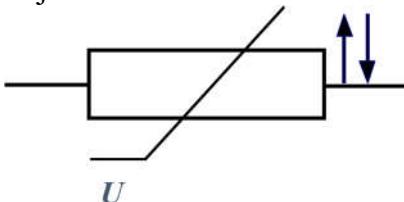
Uporabljaju se u ograničenom opsegu temperature, jer im iznad granične temperature temperaturni koeficijent opet postaje negativan. Osim toga, jako su frekvencijski ovisni iznad 5 MHz zbog velike kapacitivnosti  $C$  koja je posljedica njihove unutarnje strukture.

Ugrađuju se kao zaštitni uređaji u opremi za zaštitu od pregrijavanja i u krugovima za regulaciju temperature za grijanje. PTC otpornik serijski se spoji s krugom za napajanje i postavi na poziciju gdje je moguće zagrijavanje iznad dopuštenoga. U slučaju pregrijavanja trenutačno se poveća njegov otpor. Zaštita od prekomernog porasta struje, odnosno pregrijavanja, automatski se osigurava vlastitim zagrijavanjem PTC otpornika. Kada struja postane prevelika, PTC otpornik je ograniči na sigurnu vrijednost.

Može se uporabiti kao temperaturno osjetilo i kao osjetilo razine tekućine.

### • Varistori (VDR)

Varistori su naponski ovisni otpornici (*VDR – Voltage Dependent Resistor*) kojima se otpor mijenja inverzno s narutim naponom. Opadanje otpora s povećavanjem napona vrlo je oštros izraženo. Simbol varistora prikazan je na *Slici 1.9*.



*Slika 1.9 – Simbol varistora*

Sastoje se od mnoštva sitnih zrnaca s ispravljačkim djelovanjem na spojnim točkama. Kada porast napona prijeđe graničnu vrijednost, struja na kontaktima VDR-a zbog pada otpora naglo poraste. Zrnca – granule mogu se shvatiti kao komplikirana mreža veoma malih otpora. Broj serijski spojenih otpora određuje mjeru napona, a broj paralelnih spojeva definira maksimalnu struju. Izrađuju se od silicijeva karbida ili cinkova oksida.

U normalnom radnom području varistora promjena struje vrlo je izražena već za male promjene napona, pa se varistor može primijeniti u svrhu stabilizacije napona.

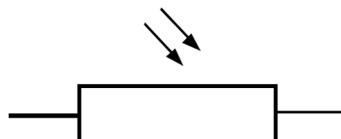
Tipičan primjer uporabe varistora jest za potiskivanje naponskih udara, odnosno zaštitu od prenapona. Takve se prilike mogu stvoriti uključivanjem induktivnih trošila, udarom groma ili drugim vrstama elektrostatickih pražnjenja. Varistor se vezuje kao zaštitni uređaj paralelno trošilu. U normalnim uvjetima kroz njega teče zanemariva struja. Kada se dogodi naponski udar, struja varistora naglo poraste i time spriječi porast napona. Varistor apsorbira energiju uklapanja uređaja. Javlja se i kao element za prekonaponsku zaštitu različitih poluvodičkih sklopova. Varistor je koristan i za gašenje električnih iskara.

PTC, NTC i VDR otpornici proizvode se uglavnom sinteriranjem i to od kristala poluvodičkih elemenata, njihovih spojeva i dodataka.

- **Fotootpornici (LDR)**

Fotootpornici su otpornici ovisni o svjetlu (*LDR – Light Dependent Resistor*). Otpor im se smanjuje pri porastu rasvjetljenosti i obratno.

Simbol fotootpornika prikazan je na *Slici 1.10*.



*Slika 1.10 – Simbol fotootpornika*

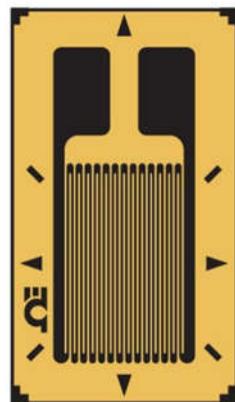
Promjenu otpora uzrokuje unutarnji fotoelektrični efekt. Energiju koju isijava svjetlosni izvor apsorbira poluvodički materijal fotootpornika, pri čemu se oslobađaju slobodni nositelji naboja. Krajnji rezultat je povećanje vodljivosti, pa je u uporabi i naziv fotovodiči.

Uporabljaju se kao svjetlosne prepreke, elementi za upravljanje plamenom, mjerjenje osvjetljenosti, vatrodojavu, u krugovima za regulaciju svjetla kao sklopka za zatamnjivanje i kao strujni prekidači.

Čest su element složenih modernih elektroničkih krugova. Primjerice u krugovima za *A/D* (analogno-digitalnu) pretvorbu analogni električni signal vremenski se uzorkuje i kodira u digitalnom formatu. Pri tomu LDR radi kao vremenski prekidač upravljan laserskim impulsima, pa se tako prati i uzorkuje analogni naponski signal. VDR-ovi se postavljaju i u optoelektroničkim "sample & hold" (uzorkuj i zadrži) jedinicama. Zahvaljujući svojstvima fotootpornika, mogu se izraditi i uređaji koji generiraju kratkotrajne impulse velike snage.

- **Rastezna osjetila (Strain Gauge)**

Omogućuju određivanje deformacija – relativnih promjena pomaka ili duljine. Rastezno tijelo je žica ili listić od vodljivog ili poluvodljivog materijala. Pričvršćuje se (lijepi) na promatrani objekt. Pod djelovanjem sile vjerno slijedi deformacije objekta. Deformacija se određuje mjerjenjem promjene otpora osjetila Wheatstoneovim mostom.



Slika 1.11 – Rastezno osjetilo

## 2. TEMELJNI ZAKONI STRUJANJA U STRUJNOM KRUGU

### 2.1. OHMOV ZAKON

Ohmov zakon jedan je od temeljnih zakona elektrotehnike kojim se definira matematički odnos između električnog napona  $U$ , električne struje  $I$  i električnog otpora  $R$ . Izražen u uobičajenom obliku glasi:

$$I = \frac{E}{R_{eq}}, \quad (2-1)$$

gdje su:

$I$  – električna struja [jedinica: amper (A)]

$E$  – elektromotorna sila izvora EMS [jedinica: volt (V)]

$R_{eq}$  – ukupni električni otpor [jedinica: om ( $\Omega$ )].

Prema Ohmovu zakonu jakost struje u zatvorenom krugu proporcionalna je elektromotornoj sili EMS izvora električne energije, a obrnuto proporcionalna otporu cijelog kruga.

Ohmov zakon primjenjuje se ne samo za cijeli strujni krug nego i za bilo koji dio kruga. Ako se primjeni na neki dio kruga, tada vrijedi:

$$I = \frac{U}{R}, \quad (2-2)$$

gdje su:

$U$  – napon na dijelu kruga (V)

$R$  – otpor na dijelu kruga ( $\Omega$ ).

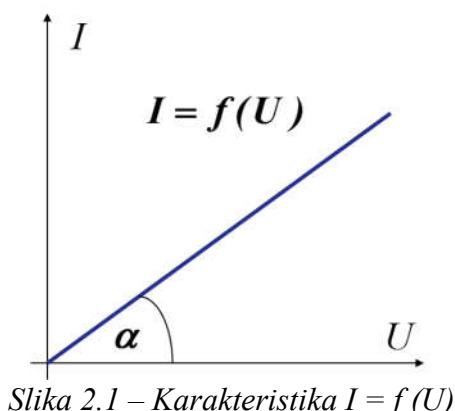
Ekvivalentni su oblici prikaza Ohmova zakona:

$$U = IR \quad i \quad R = \frac{U}{I}. \quad (2-3)$$

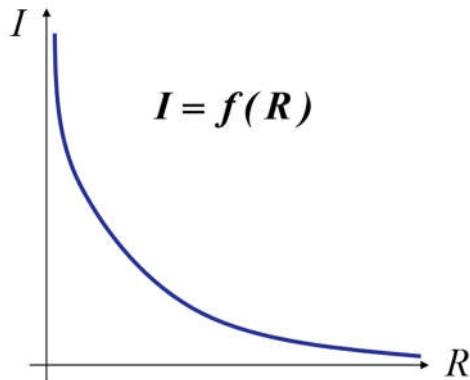
Zakon se smije primjenjivati samo za linearne otpornike čija vrijednost ne ovisi o jakosti struje.

Funkcija  $I = f(U)$  naziva se naponsko-strujna karakteristika i za linearni otpornik predstavljena je pravcem – *Slika 2.1*. Otpor  $R$  dobije se kao inverzna vrijednost koeficijenta smjera  $k$  pravca:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{U}{I} = R. \quad (2-4)$$



Ako se otpor mijenja pri konstantnom naponu, struja i otpor međusobno su obrnuto proporcionalni, tj. poveća li se otpor  $R$  pri nepromijenjenom naponu, smanjiće se jakost struje  $I$  i obratno. Uzrok promjene jakosti struje je promjena otpora. Krivulja  $I = f(R)$  kojom se definira spomenuta ovisnost struje o otporu – otporno-strujna karakteristika, ima oblik hiperbole kao na *Slici 2.2.*



*Slika 2.2 – Karakteristika  $I = f(R)$*

Za obje karakteristike vrijedi kako su EMS  $E$  i otpor  $R$  o struci nezavisne veličine. Struja  $I$  posljedica je promjene napona i/ili otpora, pa je ona zavisna veličina  $I = f(E, R)$ .

## 2.2. KIRCHHOFFOVI ZAKONI

Odnosi struja i napona u strujnim krugovima moraju zadovoljavati dva bitna zakona poznata kao **I. i II. Kirchhoffov zakon**. Prvi se odnosi na grananje struja u čvoru (engl. *Kirchhoff's current law*), a drugi na obilazne napone u zatvorenoj petlji (engl. *Kirchhoff's voltage law*). To su temeljni zakoni za sustavnu analizu električnih krugova – mreža sastavljenih od naponskih i strujnih izvora, otpornika i drugih pasivnih elemenata.

### 2.2.1. Prvi Kirchhoffov zakon (I. KZ)

**Definicija:** **U bilo kojem čvoru bilo kojeg kruga u bilo kojem trenutku zbroj svih struja koje ulaze u čvor jednak je zbroju svih struja koje izlaze iz čvora:**

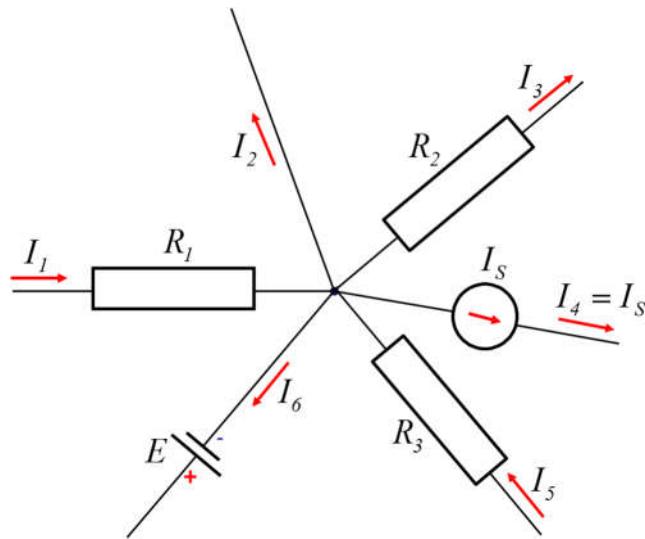
$$\sum I_{ul} = \sum I_{iz} \quad (2-5)$$

ili u općem obliku:

**Algebarski zbroj svih struja (ulaznih i izlaznih) u bilo kojem čvoru jednak je nuli** (u čvoru se ne može akumulirati ili spremati naboj).

$$\sum I = 0 \quad (2-6)$$

Za proizvoljni električni krug spoj dvaju ili više elemenata (grana) naziva se **čvor**. Na *Slici 2.3* prikazan je dio neke složene mreže koji sadrži jedan čvor.



Slika 2.3 – Složena mreža s jednim čvorom

I. KZ primijenjen na primjer prema gornjoj slici glasi:

$$I_1 + I_5 = I_2 + I_3 + I_4 + I_6 \quad (2-7)$$

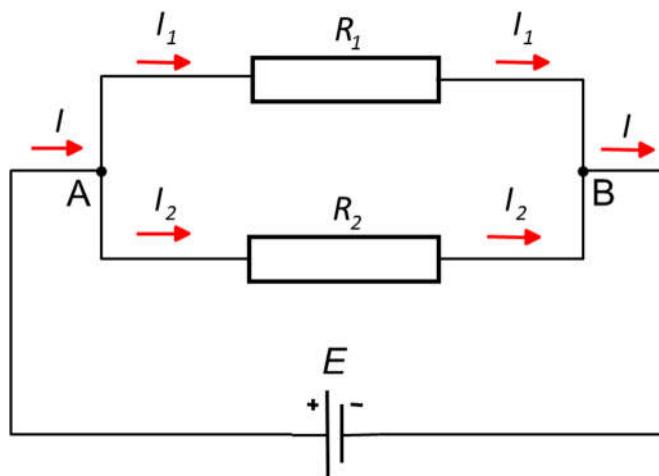
odnosno u općem obliku:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 + I_5 - I_6 = 0 \quad \text{ili} \quad -I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0. \quad (2-8)$$

Ako se ulazne struje u čvor označe kao pozitivne, tada su sve izlazne struje s negativnim predznakom. Vrijedi i obratno.

#### • Strujno djelilo

Ako se dva otpornika spoje paralelno (zajedničke ulazne i izlazne stezaljke), struja koja ulazi u paralelni spoj dijeli se na dvije grane, pa takav sklop predstavlja strujno djelilo, kao što je to prikazano na Slici 2.4.



Slika 2.4 – Strujno djelilo

Na *Slici 2.4* otpori  $R_1$  i  $R_2$  paralelno su spojeni na izvor EMS. Točke  $A$  i  $B$  nalaze se na potencijalima terminala izvora, pa vrijedi:

$$E = U_{AB} = U_1 = U_2. \quad (2-9)$$

Iz jednakosti napona na otporima slijedi po Ohmovu zakonu:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2-10)$$

Zaključujemo kako su djelomične struje u paralelnim granama obrnuto proporcionalne pripadnim otporima. Kada je otpor  $R_2$  dvostruko (trostruko, četverostruko, ...) veći od  $R_1$ , struja  $I_2$  jednaka je polovici (trećini, četvrtini, ...) struje  $I_1$ .

Prema I. KZ je  $I = I_1 + I_2$ . Uvrštenjem u gornju jednadžbu dobiju se parcijalne struje grana izražene preko ukupne struje:

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} ; \quad I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2-11)$$

Te dvije jednadžbe pokazuju kako se ukupna struja dijeli na paralelnom spoju otpora – strujnom djelilu. Veća struja teče kroz manji otpor, tj. struja teče putem najmanjeg otpora.

Relacije strujnog djelila izražene preko odgovarajućih vodljivosti  $G_1 = 1/R_1$ ,  $G_2 = 1/R_2$  jesu:

$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2} ; \quad I_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2}. \quad (2-12)$$

## 2.2.2. Drugi Kirchhoffov zakon (II. KZ)

*Petlja* (engl. *loop*) složenoga električnog kruga takav je zatvoreni put koji počinje od nekog čvora, obilazi druge elemente kruga i završava u početnom čvoru, uz uvjet da niti jedan drugi čvor nije obuhvaćen više od jednom.

**Definicija:** **U bilo kojoj petlji bilo kojeg kruga u bilo kojem trenutku zbroj svih napona jednog predznaka (polariteta) mora biti jednak zbroju svih napona suprotnog predznaka.**

$$\sum U_+ = \sum U_- \quad (2-13)$$

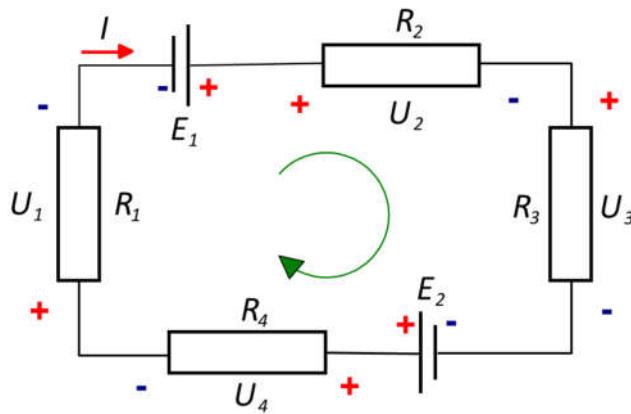
Budući da je napon energija (ili rad) po jediničnom naboju, može se utvrditi kako je II. KZ drugi oblik iskazivanja temeljnoga fizikalnog zakona o očuvanju energije.

Gornja definicija pokazuje kako je zbroj svih porasta napona jednak zbroju svih padova napona. Pri tomu je prijelaz u smjeru obilaženja petlje od minusa do plusa porast napona, a prijelaz od plusa prema minusu pad napona. Alternativni oblik zakona može se dobiti ako primjerice napone usmjerene od minusa ka plusu smatramo pozitivnima, a one usmjerene od plusa prema minusu negativnima (ili obratno). Tada se II. KZ može iskazati u alternativnom obliku:

**Algebarski zbroj svih napona (pozitivnih i negativnih) u bilo kojoj petlji kruga jednak je nuli.**

$$\sum U = 0 \quad (2-14)$$

Primijenimo II. KZ na jednostavni krug s jednom petljom bez grananja, kao na *Slici 2.5*.



Slika 2.5 – Primjena II. KZ na krug s jednom petljom

Zbroj uzroka mora biti jednak zbroju posljedica. EMS-e \$E\_1\$ i \$E\_2\$ uzrokuju protjecanje struje \$I\$ u krugu, a kao posljedica se stvaraju padovi napona na pojedinim otpornicima (\$U\_1, \dots, U\_4\$). Jednadžba prema II. KZ glasi:

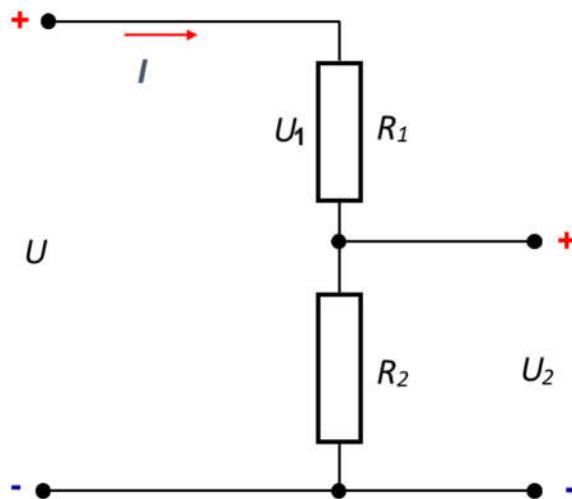
$$\sum E = \sum U_R = \sum IR \Rightarrow E_1 + E_2 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \quad (2-15)$$

ili u općem obliku:

$$\sum U = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 - U_1 - U_2 - U_3 - U_4 = 0. \quad (2-16)$$

U mnogim praktičnim slučajevima potrebno je na trošilo dovesti samo određeni dio napona izvora električne energije. U tu se svrhu rabe naponska djelila. Uloga im je smanjivanje napona ako je raspoloživi napon izvora prevelik ili podjela napona na određene dijelove radi analize signala u nekom od sljedećih stupnjeva složenoga kruga.

Najjednostavnije djelilo sastoji se od dvaju serijski spojenih otpornika kao na Slici 2.6.



Slika 2.6 – Shema neopterećenoga naponskog djelila

Naponi na otpornicima su:

$$U_1 = IR_1, \quad U_2 = IR_2. \quad (2-17)$$

Omjer napona proporcionalan je pripadnim otporima:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (2-18)$$

Napon izvora djelomično se smanjuje na otporniku  $R_1$  ( $U_1$ ), a na otporniku  $R_2$  dobije se potreban napon za napajanje trošila  $R_t$ . Kada je djelilo neopterećeno ( $R_t \rightarrow \infty$ ), kroz serijski spoj otpora teče ista struja, a napon izvora jednak je prema II. KZ-u zbroju napona na otpornicima:

$$U = U_1 + U_2 = I(R_1 + R_2) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R_1 + R_2}. \quad (2-19)$$

Uvrsti li se struja  $I$  u relacije za  $U_1$  i  $U_2$ , dobije se:

$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2-20)$$

To su karakteristične relacije naponskog djelila, a potvrđuju prije iznesenu tvrdnju o proporcionalnom odnosu napona i odgovarajućih otpora.

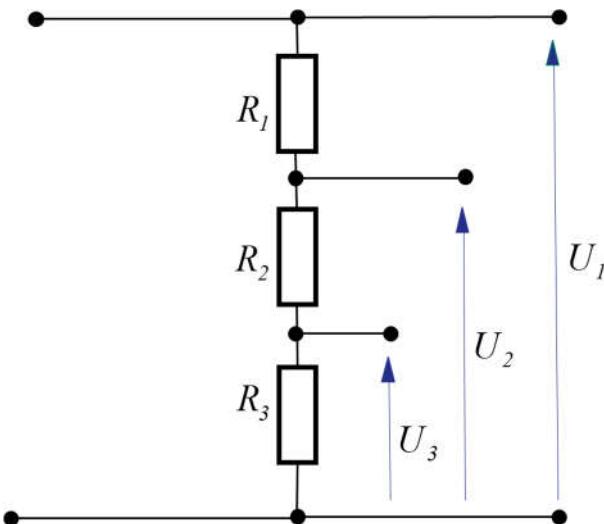
Ako s krajeva otpornika  $R_2$  uzimamo napon za trošilo, izlazi da se na trošilo može dovesti bilo koji napon od 0 do napona izvora  $U$ , ako pri tomu mijenjamo omjer otpora djelila.

Primjerice za:

$$\begin{aligned} R_2 = 0 &\Rightarrow U_2 = 0 \\ R_1 = R_2 &\Rightarrow U_2 = \frac{1}{2}U \\ R_1 = 2R_2 &\Rightarrow U_2 = \frac{1}{3}U \\ R_1 = 0 &\Rightarrow U_2 = U \end{aligned} \quad (2-21)$$

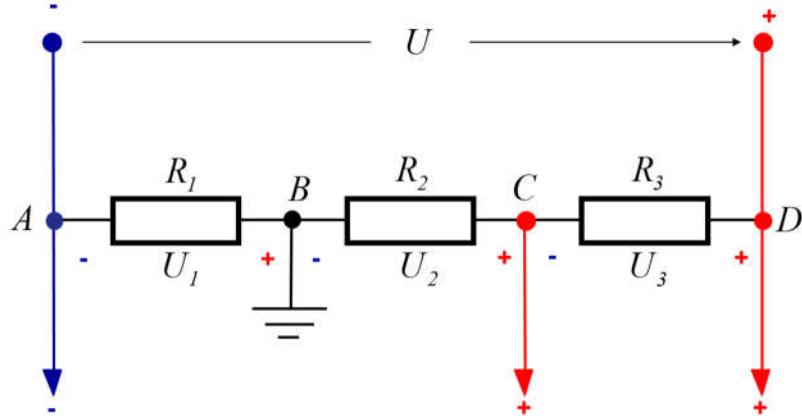
Složenija naponska djelila omogućuju dobivanje nekoliko vrijednosti napona iz jednog izvora. Uporabljaju se primjerice u ADC sklopovima gdje se analogni signal preko višestrukoga djelila napona vodi na komparatore radi pretvorbe u digitalni oblik.

Primjer trostrukoga djelila dan je na *Slici 2.7*.



*Slika 2.7 – Djelilo napona s tri različita napona*

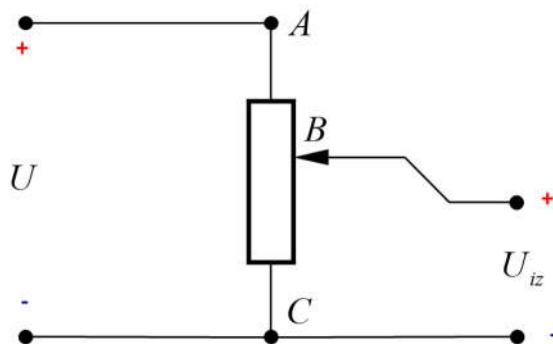
Pomoću djelila može se dobiti i željeni polaritet napona koji će se privesti trošilima. Potrebno je imati neuzemljen izvor, a jednu točku djelila uzemljiti ili spojiti s masom, kao na *Slici 2.8.*



*Slika 2.8 – Djelilo s naponima različita polariteta*

Potencijal točke  $A$  negativan je u odnosu na masu (točka  $B$ ), a potencijali točaka  $C$  i  $D$  su pozitivni. Ovakva djelila služe za napajanje više krugova koji zahtijevaju različite veličine i predznake napona iz istog izvora.

Ako želimo postići kontinuiranu promjenu napona na trošilu, rabi se potenciometar. To je promjenljivi otpornik s tri kontakta od kojih je jedan klizni kontakt. Priključuje se umjesto fiksnih otpornika  $R_1$  i  $R_2$ . Shema spajanja potenciometra prikazana je na *Slici 2.9.* Princip rada potenciometra analogan je naponskome djelilu.



*Slika 2.9 – Promjenljivo neopterećeno naponsko djelilo – potenciometarski spoj*

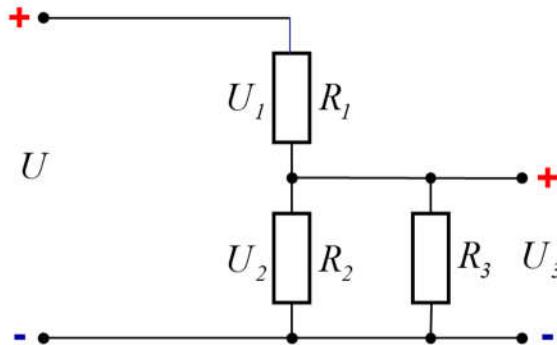
Izlazni je napon:

$$U_{iz} = U \frac{R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}} = U \frac{R_{BC}}{R_{AC}}. \quad (2-22)$$

Pomicanjem klizača potenciometra omjer  $R_{BC}/R_{AC}$  mijenja se od 0, kada je klizač u krajnjem donjem položaju, do napona izvora  $U$ , kada je klizač u krajnjem gornjem položaju. Promjena napona trebala bi biti linearna. Mala odstupanja mogu se javiti na graničnim položajima potenciometra, a posljedica su mehaničke izvedbe potenciometra. Promjena položaja kliznog kontakta (točka  $B$ ) ostvaruje se zakretanjem potenciometra za kut  $\alpha$  između graničnih položaja.

- **Opterećeno naponsko djelilo**

Neopterećeno naponsko djelilo samo po sebi nije od neke praktične koristi, sve dok se s jednog od krajeva djelila ne uzima napon za trošilo. Uvjeti se tada bitno mijenjaju. Djelomični napon s  $R_2$  vodi se na trošilo (otpornik  $R_3$ ) kao na *Slici 2.10*.



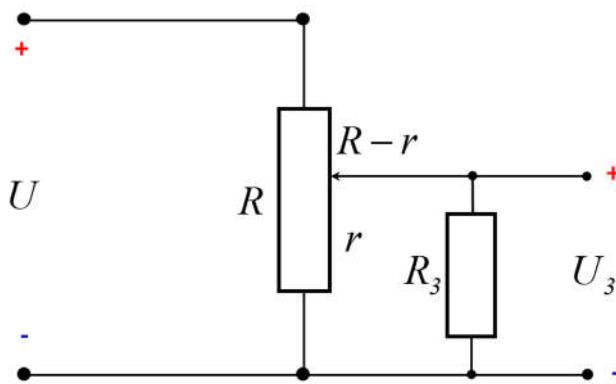
*Slika 2.10 – Opterećeno naponsko djelilo*

Budući da sada struja teče i kroz  $R_3$ , mijenjaju se naponski odnosi. Napon  $U_3$  može se odrediti temeljem prethodno postavljenih relacija, imajući u vidu da su otpori  $R_2$  i  $R_3$  paralelno spojeni:

$$U_3 = U \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = U \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 R_3} = U \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (2-23)$$

Ako se fiksni otpornici  $R_1$  i  $R_2$  zamijene potenciometrom, napon  $U_3$  može se mijenjati od 0 do  $U_{max}$  ovisno o položaju klizača (kut zakreta potenciometra). Potenciometar je klizni otpornik kod kojeg se spajaju sve tri stezaljke – ulazna, izlazna i klizač.

U spoju prema *Slici 2.11* ukupni otpor potenciometra  $R$  klizačem je razdijeljen na otpor  $r$  i ostatak  $R-r$ . Napon s djelomičnog otpora  $r$  narunut je na trošilo otpora  $R_3$ .



*Slika 2.11 – Opterećeno djelilo napona u potenciometarskome spoju*

Od interesa je odrediti  $U_3$  na otporu trošila. Dobije se:

$$U_3 = U \frac{\frac{rR_3}{r+R_3}}{R-r+\frac{rR_3}{r+R_3}} = U \frac{rR_3}{rR-r^2+RR_3}. \quad (2-24)$$

Unutar graničnih položaja promjena napona  $U_3 = f(r)$  je nelinearna. Za gornji granični položaj je:

$$r=R \Rightarrow U_3=U_{max}=U, \quad (2-25)$$

a za krajnji donji položaj:

$$r=0 \Rightarrow U_3=0. \quad (2-26)$$

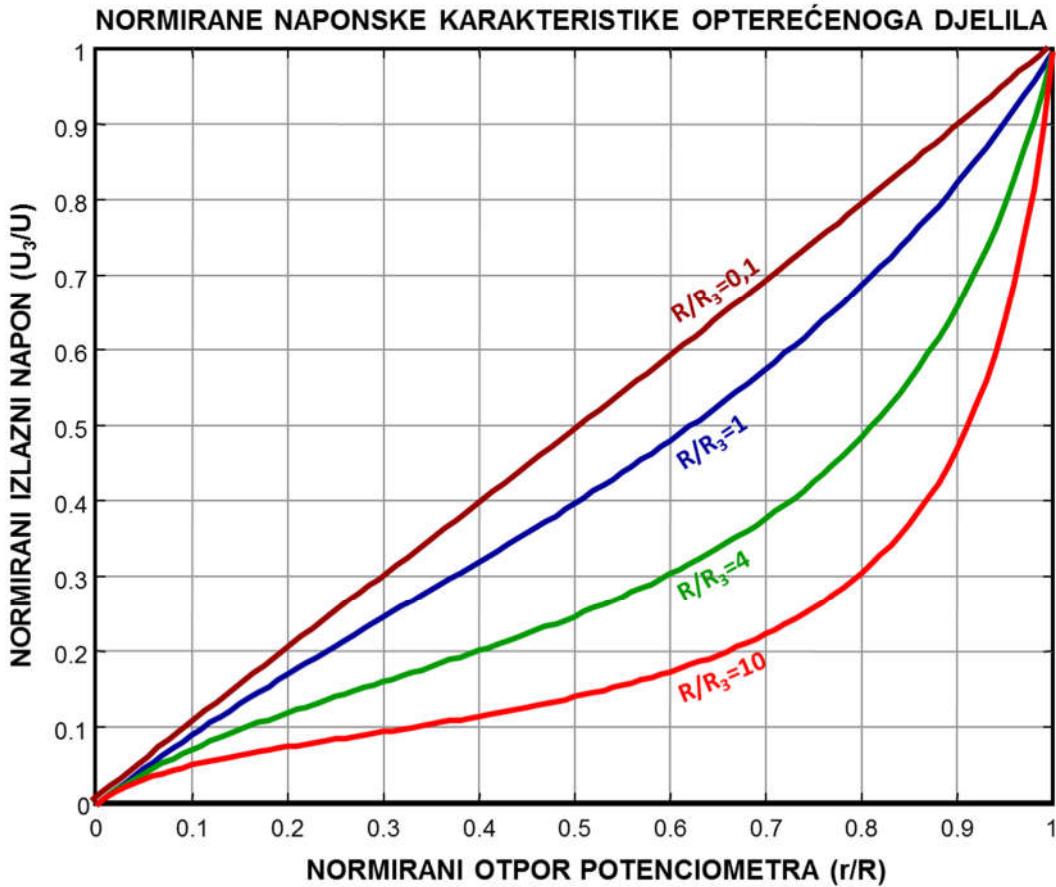
Promjena napona trošila normirana na maksimalan napon  $U_3/U$  u ovisnosti o omjeru  $r/R$  prikazana je na *Slici 2.12*. Različiti omjeri otpora potenciometra i otpora trošila  $R/R_3$  uzeti su kao parametar. Odabran je konkretni primjer s ulaznim naponom  $U = 10$  V, potenciometrom od  $R = 100 \Omega$  i različitim otporima trošila  $R_3$  ( $10 \Omega$ ,  $25 \Omega$ ,  $100 \Omega$ ,  $1000 \Omega$ ). Jednostavan program za proračun i grafički prikaz odnosa napona i otpora pri uporabi potenciometarskoga djelila izrađen je s pomoću programskoga paketa MatLab.

Budući da se studenti u sklopu predmeta *Primijenjena i numerička matematika* koriste programskim paketom MatLab, u nastavku je navedena lista programa (*m-file*) za rješenje gore navedenog zadatka.

% Primjer određivanja karakteristika opterećenoga naponskog djelila u MatLab-u  
clear

```

U=10; % Ulazni napon
R=100; % Otpor potenciometra
r=[0:1:100]; % 100 uzoraka položaja klizača potenciometra
R3X=[10,25,100,1000]; % Odabrane vrijednosti otpora trošila R3
for j=1:4
    R3=R3X(j) % Izbor sukcesivnih vrijednosti otpora R3
    for i=0:1:100; % Proračun napona U3 za svaki položaj klizača
        U3(i+1)=U*r(i+1)*R3/(r(i+1)*R-r(i+1)*r(i+1)+R*R3);
    end % Završetak petlje za proračun U3
    grid % Rešetka na slici
    g=plot(r/R,U3/U) % Crtanje normiranih grafova U3/U=f(r/R) za odabrane omjere R3/R
    set(g,'LineWidth',1.5) % Debljina linija dobivenih krivulja
    hold on % Zadržava prethodni graf
    end % Završetak petlje određivanja 4 grafa za 4 vrijednosti R3/R
% Naslov
title('NORMIRANE NAPONSKE KARAKTERISTIKE OPTEREĆENOGLA DJELILA')
xlabel('NORMIRANI OTPOR POTENCIOMETRA (r/R)') % Apscisa
ylabel('NORMIRANI IZLAZNI NAPON (U3/U)') % Ordinata
gtext('R/R3=10') % Pozicioniranje teksta za pojedine krivulje na slici pomoću miša
gtext('R/R3=4')
gtext('R/R3=1')
gtext('R/R3=0')
```



Slika 2.12 – Normirana naponska karakteristika potenciometra za različita opterećenja

Vidljivo je da ovisnost napona trošila biva sve linearnija kako omjer  $R/R_3$  pada. Za izbjegavanje nelinearnosti potrebno je odabratи  $R \ll R_3$ , jer se tada dobiju uvjeti pravidna praznog hoda (otvorenog kruga) i vrlo povoljno „linearno“ ugađanje struje. Naime za  $R_3 \rightarrow \infty$  funkcija  $U_3 = f(r)$  postaje čisto linearна što odgovara slučaju neopterećenoga naponskog djelila.

U praksi otpor potenciometra  $R$  treba biti najmanje 5 puta manji od otpora trošila. Potenciometarski spoj omogućuje reguliranje napona u širokim granicama pri malim strujama. Međutim, korisnost  $\eta$  mu je loša i postaje to slabija što je ugađanje linearnije. Zbog toga se potenciometarski spoj upotrebljava za ugađanje struja slabih tereta, gdje se ne postavlja pitanje potroška snage, kao u električkim sklopovima i regulacijskoj tehnici gdje se radi sa signalima male snage. Primjerice, potenciometarski spoj ima primjenu u krugovima za napajanje tranzistora, regulaciju jakosti zvuka, u ADC konverziji, za mjerne svrhe u kompenzacijskim krugovima i dr. U visokonaponskoj tehnici upotrebljavaju se omsko, kapacitivno i mješovito (kombinirano) naponsko djelilo.

Za reguliranje napona u relativno malim granicama, pri velikim strujama, primjenjuje se klizni otpornik spojen kao predotporek – reostat. Reostat se u krug spaja serijski s otporom trošila i to dvjema stezaljkama (jedan kraj i klizač). Primjenjuje se u krugovima za pobudu električnih strojeva, krugovima za punjenje akumulatora i dr.

### 3. ODREĐIVANJE NADOMJESNOGA OTPORA

Umjesto pojedinačnih otpornika u većini praktičnih slučajeva u strujnom krugu može biti više otpornika povezanih u grupe na različite načine. Dva su temeljna načina spajanja: *serijski* i *paralelni spoj*. Ti se spojevi mogu i kombinirati u *mješovite (grupne) spojeve* te se tako dobiju raznovrsne mreže otpornika.

Čisti serijski spoj rijedak je u praksi, jer ispad (kvar, prekid) na bilo kojem trošilu isključuje iz strujnoga kruga sva preostala trošila. U paralelnome spoju električna trošila priključena su na isti izvor napona, pa se po volji uključuju i isključuju i to neovisno jedna o drugima. Zato se ova vrsta spoja češće javlja od serijskoga.

Mješoviti spojevi susreću se u razgranatim električnim strujnim krugovima, koji mogu sadržavati više naponskih i/ili strujnih izvora.

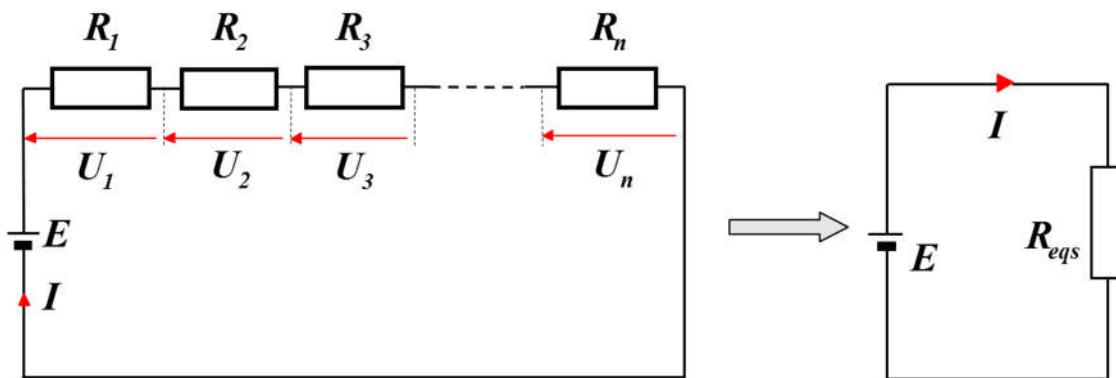
Ako se želi odrediti ukupna struja u nekom složenom krugu, on se mora pretvoriti u temeljni krug koji sadržava izvor električne energije i određeni otpor. Struja kroz taj otpor mora biti jednaka ukupnoj struci kroz različite opore složene mreže. Drugim riječima, taj otpor u potpunosti mora zamijeniti djelovanje svih pojedinačnih otpora složene mreže. Zato ga i nazivamo *nadomjesnim ili ekvivalentnim (ukupnim) otporom* kruga.

Načini određivanja nadomjesnog otpora otpornika ovise o vrsti mreže spojene na izvor EMS (serijski, paralelni, mješoviti, spojevi u zvijezdu i trokut).

#### 3.1. SERIJSKI SPOJ OTPORNIKA (TROŠILA)

U serijskome spoju svi su otpornici na naponski izvor spojeni u nizu jedan iza drugoga – kraj prvoga vezan je na početak drugoga, kraj drugoga na početak trećega itd. Pri prekidu strujnog kruga svi otpornici ostaju bez struje.

Na *Slici 3.1* prikazan je serijski spoj proizvoljnog broja od  $n$  otpornika priključenih na izvor EMS i odgovarajući temeljni strujni krug s nadomjesnim otpornikom otpora  $R_{eqs}$  koji zamjenjuje djelovanje svih serijskih otpora.



*Slika 3.1 – Serijski krug otpornika i nadomjesni otpor*

Kako u krugu nema grananja struje, očito je kako će kroz sve otpornike protjecati ista struja:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_n = I. \quad (3-1)$$

Na krajevima pojedinih otpornika naponi su prema Ohmovu zakonu:

$$U_1 = R_1 I, \quad U_2 = R_2 I, \quad U_3 = R_3 I, \quad \dots, \quad U_n = R_n I. \quad (3-2)$$

Ako se razmatra raspodjela napona na pojedinačnim otporima, dobije se iz gornje relacije za odnose napona:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{U_2}{U_3} = \frac{R_2}{R_3}, \quad \dots, \quad \frac{U_{n-1}}{U_n} = \frac{R_{n-1}}{R_n}, \quad (3-3)$$

tj. pojedinačni naponi proporcionalni su pojedinačnim otporima. U općem slučaju gornju tvrdnju matematički iskazujemo kao:

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{R_i}{R_j}. \quad (3-4)$$

Što je vrijednost otpora veća, na krajevima otpornika bit će veći napon i obratno.

Odredimo vezu između pojedinačnih napona i EMS izvora  $E$ . EMS izvora brojčano je jednak radu koji se utroši na prenošenje jediničnog naboja ( $E = W/Q_0$ ) kroz cijeli vanjski dio kruga. Rad koji se utroši na svakom serijskom dijelu kruga tada je brojčano jednak naponima  $U_1, U_2, \dots, U_n$ . Elektromotorna sila izvora mora biti jednak zbroju pojedinačnih napona na otpornicima (II. Kirchhoffov zakon):

$$E = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (3-5)$$

odnosno:

$$E = I(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n). \quad (3-6)$$

Kvocijentom  $E/I$  određen je otpor nadomjesnog otpornika  $R_{eqs}$  koji zamjenjuje sve serijski spojene otpornike  $R_1, R_2, \dots, R_n$ :

$$\frac{E}{I} = R_{eqs} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (3-7)$$

ili u kraćem obliku:

$$R_{eqs} = \sum_{i=1}^{i=n} R_i. \quad (3-8)$$

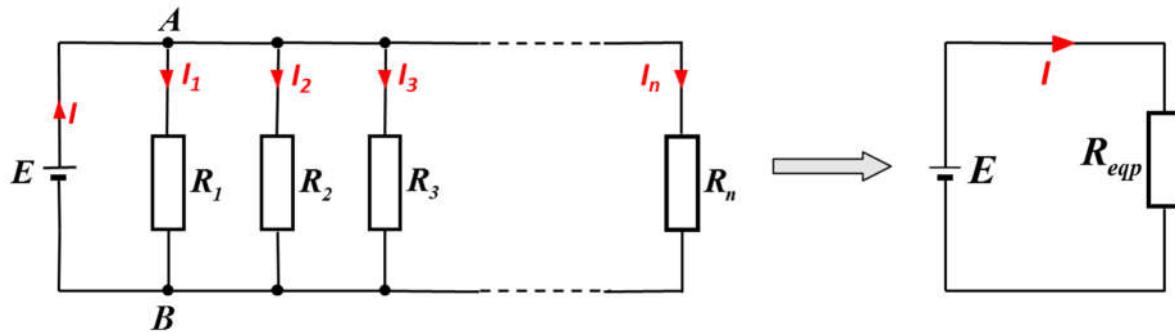
*Zaključak:* Ukupan otpor serijskoga kruga jednak je zbroju pojedinačnih otpora. Serijskim spajanjem ukupan otpor raste, pa je nadomjesni otpor uvijek veći od najvećega pojedinačnog otpora.

Ako je serijski krug sastavljen od  $n$  jednakih otpora  $R$ , tada je:

$$R_{eqs} = nR. \quad (3-9)$$

### 3.2. PARALELNI SPOJ OTPORNIKA (TROŠILA)

Otpornici su spojeni paralelno ako je na jednu stezaljku izvora spojen jedan priključak svih otpornika, a na drugu stezaljku izvora drugi priključak svih otpornika. Na *Slici 3.2* prikazan je paralelni spoj  $n$  otpornika priključenih na izvor EMS i pripadni temeljni krug s nadomjesnim otpornikom otpora  $R_{eqp}$  koji zamjenjuje djelovanje svih paralelno spojenih otpornika.



*Slika 3.2 – Paralelni krug otpornika i nadomjesni otpor*

U paralelnome spoju ukupna struja grana se na  $n$  grana. Svaki je otpornik spojen između dviju zajedničkih točaka (čvora)  $A$  i  $B$ , pa je razlika potencijala (električni napon) na bilo kojem otporniku jednaka razlici potencijala između zajedničkih točaka. Prema tomu za paralelni spoj vrijedi da su naponi na svim otpornicima jednaki. Ako je paralelni spoj vezan neposredno na izvor EMS, napon na svakome otporniku jednak je naponu na stezaljkama izvora:

$$U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n = E. \quad (3-10)$$

Paralelni spoj je razgranat strujni krug u kojem se ukupna struja dijeli na onoliko grana (pojedinačnih struja) koliko ima otpornika. Svakim se novim paralelno priključenim otpornikom povećava ukupna struja. Pojedinačne struje dobiju se iz Ohmova zakona:

$$I_1 = \frac{E}{R_1}, \quad I_2 = \frac{E}{R_2}, \quad I_3 = \frac{E}{R_3}, \quad \dots, \quad I_n = \frac{E}{R_n}. \quad (3-11)$$

Prema gornjem izrazu omjeri struja su:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{E}{R_1}}{\frac{E}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}, \quad \dots, \quad \frac{I_{n-1}}{I_n} = \frac{R_n}{R_{n-1}} \quad (3-12)$$

ili u općem obliku:

$$\frac{I_i}{I_j} = \frac{R_j}{R_i}. \quad (3-13)$$

Dakle, djelomične struje obrnuto su proporcionalne otporima paralelnih grana. Kroz manji otpor teče jača struja i obratno.

Ukupna struja ulazi u čvor  $A$  iz kojega izlazi kao suma djelomičnih struja  $I_1, I_2, \dots, I_n$  (nema gomilanja naboja u točki). Djelomične struje ulaze u čvor  $B$ . Na izlazu iz čvora  $B$  opet teče

ukupna struja  $I$ . Općenito vrijedi kako je zbroj struja koje ulaze u čvor jednak zbroju struja koje iz tog čvora izlaze (I. Kirchhoffov zakon).

Za paralelni spoj prema *Slici 3.2* jakost struje u dovodnoj grani – ukupna struja jednaka je zbroju struja u paralelnim granama:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n. \quad (3-14)$$

Uvrste li se izrazi za pojedinačne struje, slijedi:

$$I = E \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right). \quad (3-15)$$

Kvocjent  $I/E$  predstavlja recipročnu vrijednost nadomjesnog otpora  $R_{eq_p}$  koji zamjenjuje cijelu grupu paralelno vezanih otpora  $R_1, R_2, \dots, R_n$ :

$$\frac{I}{E} = \frac{1}{R_{eq_p}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3-16)$$

ili skraćeno:

$$\frac{1}{R_{eq_p}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{R_i}. \quad (3-17)$$

*Zaključak:* Recipročna vrijednost nadomjesnog otpora paralelnoga kruga jednaka je zbroju recipročnih vrijednosti pojedinačnih otpora. Paralelnim spajanjem ukupni se otpor smanjuje, pa je nadomjesni otpor uvijek manji od najmanjega pojedinačnog otpora.

Za slučaj dvaju paralelno spojenih otpornika vrijedi:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad (3-18)$$

odnosno:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3-19)$$

Analogno se za tri paralelna otpornika dobije nadomjesni otpor:

$$R_{123} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (3-20)$$

Ako je paralelni krug sastavljen od  $n$  jednakih otpornika  $R$ , dobije se:

$$R_{eq_p} = \frac{R}{n}. \quad (3-21)$$

Budući da je recipročna vrijednost otpora  $R$  jednaka vodljivosti  $G$  ( $G = 1/R$ ), nadomjesni otpor može se lakše odrediti računajući s odgovarajućim vodljivostima mreže. Zamjenom otpora vodljivostima dobije se nadomjesna vodljivost paralelnog spoja:

$$G_{eq_p} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n = \sum_{i=1}^{i=n} G_i , \quad (3-22)$$

a nadomjesni otpor tada je:

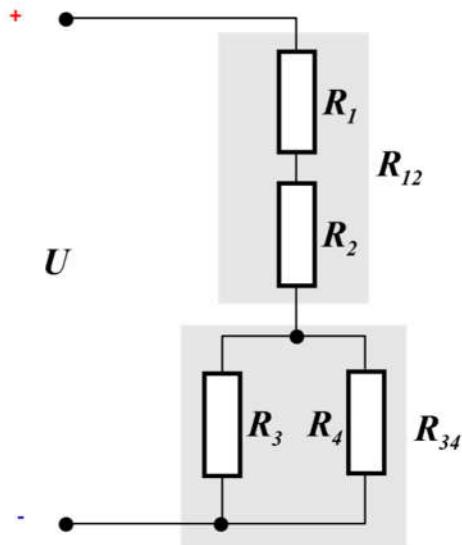
$$R_{eq_p} = \frac{1}{G_{eq_p}} . \quad (3-23)$$

*Zaključak:* Nadomjesna vodljivost jednaka je zbroju vodljivosti paralelno spojenih otpornika. Paralelnim spajanjem povećava se ukupna vodljivost.

### 3.3. MJEŠOVITI (SERIJSKO-PARALELNI) SPOJEVI OTPORNIKA

U električnim shemama rijetki su krugovi u kojima se primjenjuju samo serijski ili samo paralelni spojevi. Najčešće se radi o različitim kombinacijama spomenutih spojeva. Nema opće relacije za proračun ovakvih krugova, jer je moguće napraviti neizmjerno mnogo kombinacija.

Za određivanje nadomjesnog otpora mješovito spojenih trošila koja se napajaju iz jednog izvora potrebno je izdvojeno razmatrati pojedine dijelove kruga koji se sastoje od serijski odnosno paralelno spojenih trošila. Primjenjuju se prethodno razmatrani izrazi za nadomjesni otpor za svaki dio kruga posebno, a zatim za cijeli krug (metoda „korak po korak“). U svakom se koraku serijsko-paralelnom redukcijom kruga pojednostavljuje početna mreža otpora. Iznimka su slučajevi rješavanja mreže otpornika gdje nema eksplicitno izraženih ni serijskih ni paralelnih spojeva. Tada je potrebno prethodno izvršiti pretvorbe spoja u zvijezdu u spoj u trokut, ili obratno. Razmotrimo jednostavan mješoviti spoj prema primjeru na *Slici 3.3*.



*Slika 3.3 – Primjer mješovitog spoja otpornika*

U prvom koraku odredimo nadomjesni serijski otpor:

$$R_{12} = R_1 + R_2 , \quad (3-24)$$

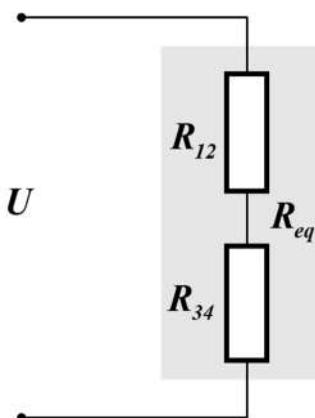
a u sljedećem koraku nadomjesni paralelni otpor:

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}. \quad (3-25)$$

Tada se mreža s prvotne sheme svodi na pojednostavljenu nadomjesnu shemu kao na *Slici 3.4*. Nadomjesna shema je ona shema u kojoj izvor električne energije daje jednaku struju i razvija jednaku snagu kao u prvotnoj shemi.

Očito je kako u sljedećem koraku možemo odrediti nadomjesni otpor kao serijski spoj sastavljen od prethodno određenoga serijskog  $R_{12}$  i paralelnog  $R_{34}$  dijela kruga:

$$R_{eq} = R_{12} + R_{34}. \quad (3-26)$$

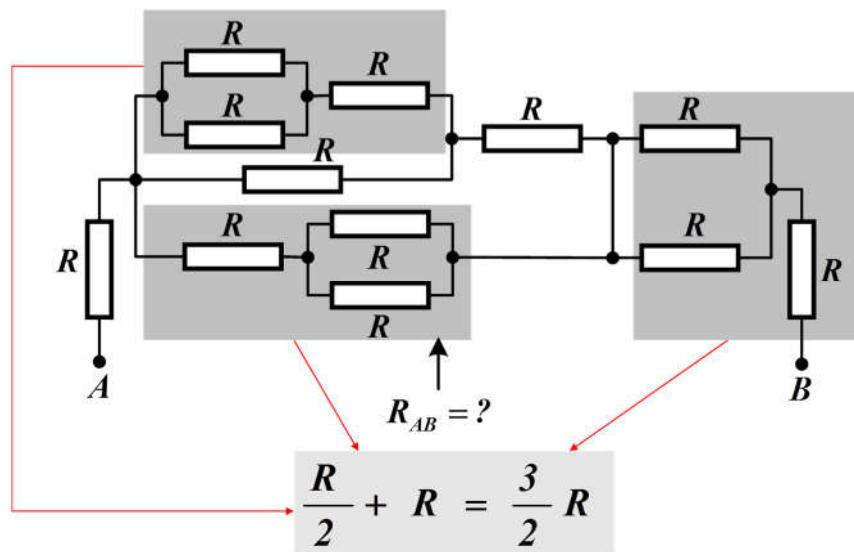


*Slika 3.4 – Nadomjesna shema nakon serijsko-paralelne redukcije kruga*

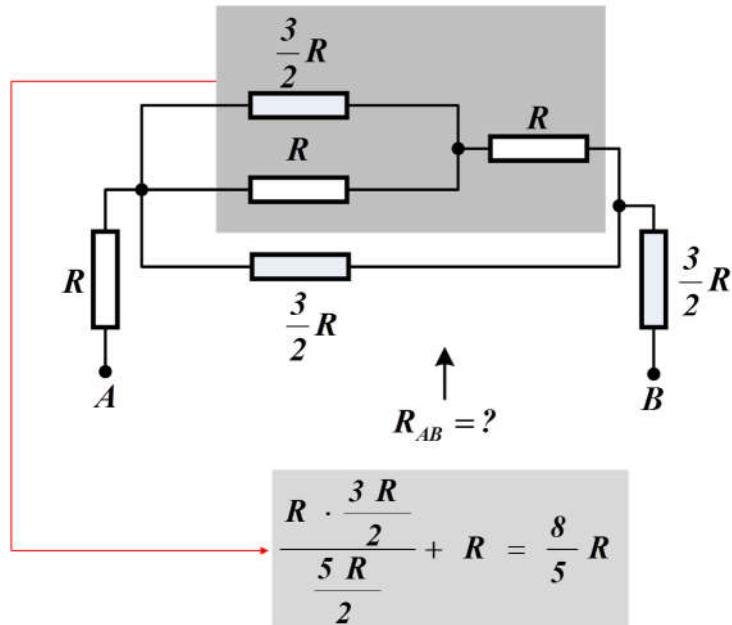
U rješavanju mješovitih spojeva potrebno je, dakle, postupnim pojednostavljinjem sheme odrediti nadomjesni otpor cijelog kruga, a zatim vraćajući se na stvarnu shemu, izračunati padove napona i struje u pojedinim granama.

Primjer: Odredite nadomjesni otpor između točaka A i B serijsko-paralelnom redukcijom kruga.

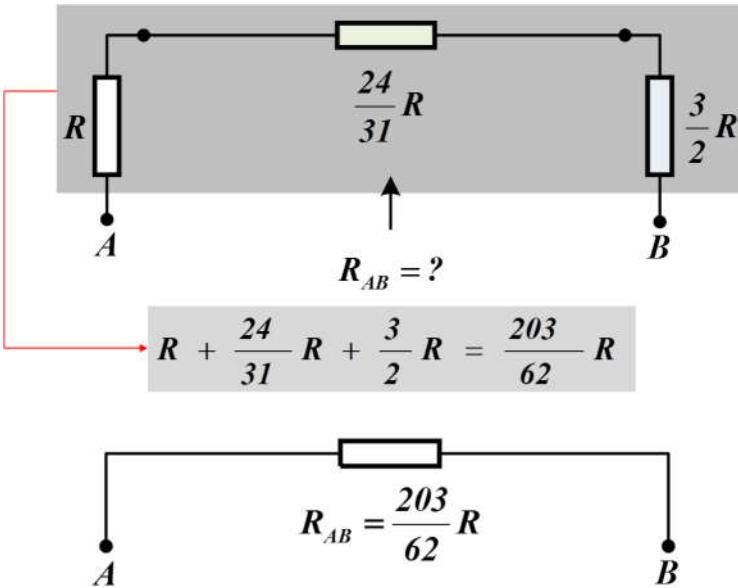
1. korak:



2. korak:

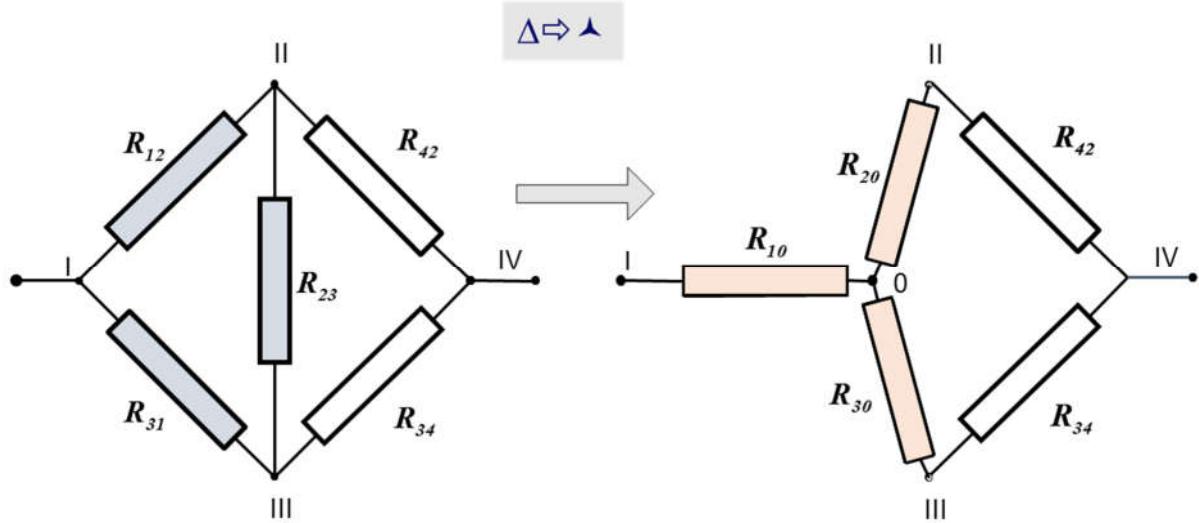


3. i 4. korak:



### 3.4. PRETVORBE ZVIJEZDA – TROKUT I TROKUT – ZVIJEZDA

U složenim mrežama mogu se pojaviti takve konfiguracije za koje nije moguće izravno primijeniti serijsko-paralelnu redukciju. Primjerice za proračun kruga prema sljedećoj slici nije moguće proračunati nadomjesni otpor uporabom do sada iznesenih metoda, jer se ne može izravno uočiti ni jedan izdvojeni serijski ili paralelni spoj.



Slika 3.5 – Pretvorba trokuta u zvijezdu

U takvim slučajevima potrebno je izvršiti pretvorbu kruga tako da se „trocuk“ otpora pretvori u nadomjesnu „zvijezdu“ ili obratno – *Slika 3.5*. Pretvorbom se treba dobiti jednostavniji krug na koji se u sljedećem koraku može primijeniti serijsko-paralelna redukcija.

U gornjem primjeru mogu se uočiti dva trokuta i dvije zvijezde otpora. Izvršit ćemo pretvorbu trokuta  $R_{12}, R_{23}, R_{31}$  u nadomjesnu zvijezdu  $R_{10}, R_{20}, R_{30}$ . Uvjet je da se nakon pretvorbe ne smiju promijeniti vrijednosti ukupne ulazne struje, kao ni djelomičnih struja kroz otpore  $R_{34}$  i  $R_{42}$ . Ukupni otpor između točaka  $I-II$  kao i napon  $U_{I,II}$  u izvornoj i nadomjesnoj shemi moraju ostati sačuvani. Navedene uvjete zadovoljavaju jednadžbe:

$$R_{I,II} = R_{12} \parallel (R_{23} + R_{31}) = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ; R_{I,II} = R_{10} + R_{20}. \quad (3-27)$$

Analogno moraju ukupni otpori između točaka  $II-III$  i  $III-I$ , kao i naponi  $U_{II,III}$  i  $U_{III,I}$ , ostati nepromijenjeni, pa vrijedi:

$$R_{II,III} = R_{23} \parallel (R_{12} + R_{31}) = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ; R_{II,III} = R_{20} + R_{30} \quad (3-28)$$

$$R_{III,I} = R_{31} \parallel (R_{12} + R_{23}) = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ; R_{III,I} = R_{10} + R_{30}. \quad (3-29)$$

Izjednačavanjem odgovarajućih otpora izvorne i nadomjesne sheme dobiju se jednadžbe koje vrijede za pretvorbu trokuta u nadomjesnu zvijezdu:

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ; R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ; R_{30} = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3-30)$$

Nakon izvršene transformacije nadomjesni otpor kruga na gornjoj slici dobije se jednostavnom serijsko-paralelnom redukcijom:

$$R_{eq} = R_{I,IV} = R_{I0} + [(R_{20} + R_{42})(R_{30} + R_{34})] = R_{I0} + \frac{(R_{20} + R_{42})(R_{30} + R_{34})}{R_{20} + R_{42} + R_{30} + R_{34}}. \quad (3-31)$$

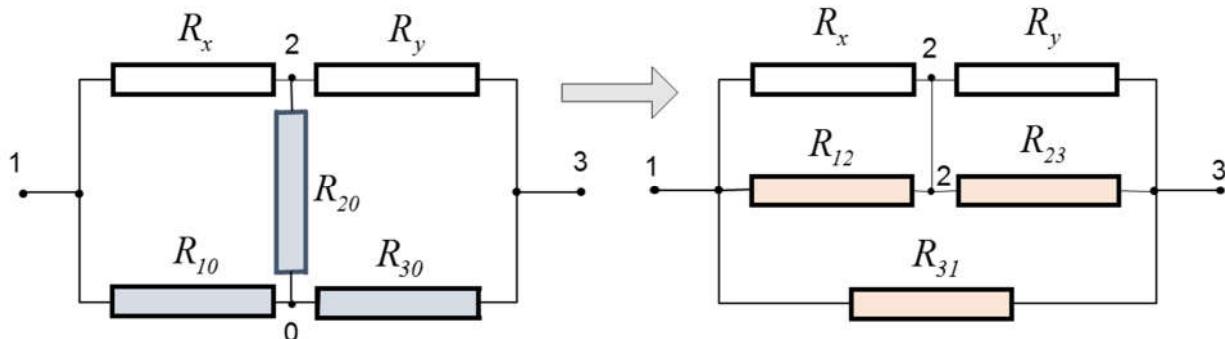
U posebnom slučaju koji se često javlja u praksi (elektroenergetski sustavi), kada su svi otpori trokuta jednaki, tj.  $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_A$ , nadomjesni otpori zvijezde su:

$$R_\Delta = \frac{1}{3} R_A. \quad (3-32)$$

Kada su poznati otpori zvijezde  $R_{I0}$ ,  $R_{20}$ ,  $R_{30}$ , a želimo odrediti odgovarajuće otpore trokuta  $R_{12} = R_{23} = R_{31}$ , možemo temeljem jednadžbi (3-30) dobiti jednadžbe za pretvorbu zvijezda – trokut:

$$R_{12} = \frac{R_{I0}R_{20}}{R_{30}} + R_{I0} + R_{20} \quad ; \quad R_{23} = \frac{R_{20}R_{30}}{R_{I0}} + R_{20} + R_{30} \quad ; \quad R_{31} = \frac{R_{I0}R_{30}}{R_{20}} + R_{I0} + R_{30}. \quad (3-33)$$

Na *Slici 3.6* prikazan je primjer pretvorbe zvijezda – trokut.



*Slika 3.6 – Pretvorba zvijezde u trokut*

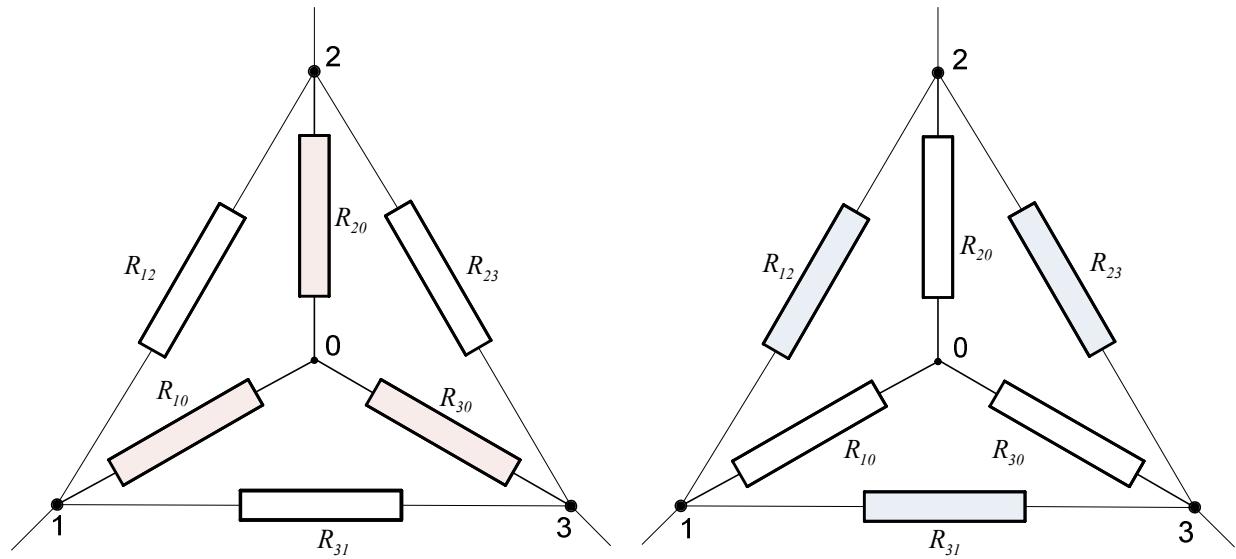
Nadomjesni otpor mreže je:

$$R_{eq} = R_{31} \parallel (R_{12} \parallel R_x + R_{23} \parallel R_y) = \frac{R_{31} \left( \frac{R_{12}R_x}{R_{12} + R_x} + \frac{R_{23}R_y}{R_{23} + R_y} \right)}{R_{31} + \frac{R_{12}R_x}{R_{12} + R_x} + \frac{R_{23}R_y}{R_{23} + R_y}} = \dots \quad (3-34)$$

U slučaju kada su svi otpori zvijezde jednaki, tj.  $R_{I0} = R_{20} = R_{30} = R_\Delta$ , nadomjesni otpori trokuta su:

$$R_A = 3R_\Delta. \quad (3-35)$$

Na *Slici 3.7* sumarni su grafički prikazi pretvorba zvijezda  $\Leftrightarrow$  trokut, a u nastavku su odgovarajuće jednadžbe za pretvorbe zvijezda  $\Leftrightarrow$  trokut.

Slika 3.8 – Pretvorbe zvijezda  $\Leftrightarrow$  trokut

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{12} = \frac{R_{10}R_{20}}{R_{30}} + R_{10} + R_{20}$$

$$R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (3-36)$$

$$R_{23} = \frac{R_{20}R_{30}}{R_{10}} + R_{20} + R_{30} \quad (3-37)$$

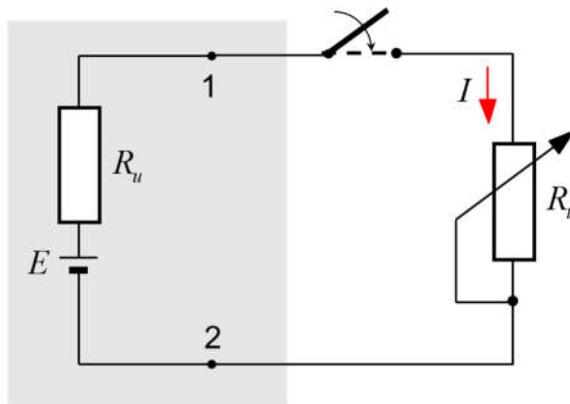
$$R_{30} = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_{31} = \frac{R_{10}R_{30}}{R_{20}} + R_{10} + R_{30}$$

## 4. TEMELJNI STRUJNI KRUG

### 4.1. NADOMJESNI NAPONSKI IZVOR (modovi rada izvora)

Naponski izvori u različitim područjima elektrotehnike mogu biti vrlo složene izvedbe. Međutim, analiza i svi potrebni proračuni mogu se izvesti na krugu s jednostavnim nadomjesnim naponskim izvorom, koji se sastoji od idealnoga izvora  $E$ MS i njegova serijski spojenoga unutarnjeg otpora  $R_u$  (Theveninov ekvivalent). Na Slici 4.1 prikazan je temeljni strujni krug s nadomjesnim naponskim izvorom.



Slika 4.1 – Nadomjesni krug naponskoga izvora

Elektromotorna sila  $E$  jednaka je razlici potencijala na idealnome izvoru bez pada naponu na unutarnjem otporu. Idealni izvor ima uvijek konstantnu razliku potencijala na svojim krajevima, neovisno o veličini struje. U praktičnim slučajevima napon može lagano opadati s porastom struje.

Napon na stezalkama 1-2 stvarnoga realnog izvora jednak je razlici potencijala nadomjesnoga naponskog izvora uključujući pad naponu na unutarnjem otporu.

Potrebno je razmotriti strujne i naponske odnose u krugu za slučaj da je na nadomjesni naponski izvor priključen promjenljivi vanjski otpornik  $R_t$ . Opterećenje izvora ovisi o jakosti struje:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{E}{R_u + R_t}. \quad (4-1)$$

Napon na stezalkama izvora, koji je istovremeno i napon na trošilu, jest:

$$U_{12} = E - IR_u = E \frac{R_t}{R_u + R_t} = IR_t. \quad (4-2)$$

Prva od gornjih jednakosti daje vezu između dvaju napona nadomjesnoga električnog izvora, a naziva se jednadžba generatora. U praktičnim slučajevima, želimo li što veći napon na vanjskim stezalkama izvora, otpor  $R_u$  mora biti što manji. Osim toga, izvori s malim unutarnjim otporom

dat će stabilniji napon pri promjeni opterećenja. Stabilizirani istosmjerni izvori s  $R_u \approx 0$  realiziraju se kao složeni elektronički uređaji.

Posljednja jednakost u relaciji 4.2 jest jednadžba trošila, a ekvivalentna je jednadžbi generatora. Svaki se izvor ovisno o veličini vanjskog opterećenja može nalaziti u jednom od tri moda rada:

- stanje kratkoga spoja
- stanje praznoga hoda (otvorenoga kruga)
- stanje opterećenja.

Prva dva moda ekstremni su slučajevi, a treći pokriva područje između njih.

Prazni hod (*PH*) ili otvoreni krug (*OK*) stanje je kada je otpor kruga neizmјerno velik, što se u većini slučajeva ostvaruje otvaranjem sklopke, odnosno isključivanjem trošila od izvora. U krugu ne teče struja, pa nema ni pada napona na unutarnjem otporu izvora. Vrijedi, dakle:

$$R_T \rightarrow \infty , \quad I = 0 , \quad U_{12} = E = U_{PH} . \quad (4-3)$$

U stanju praznoga hoda napon je na stezaljkama izvora  $U_{12}$  maksimalan i jednak je *EMS*  $E$  izvora električne energije. Naziva se naponom praznoga hoda,  $U_{PH}$ , i može se izravno izmjeriti na stezaljkama neopterećenoga naponskog izvora.

Drugi vrlo važan ekstremni slučaj stanje je kratkoga spoja (*KS*). Nastupa kada je vanjski otpor kruga  $R_T$  vrlo malen. U idealnim uvjetima on je jednak nuli. Kratki spoj nastaje kada se stezaljke izvora izravno spoje vodičem malog otpora ili pri probodu izolacije između vodova kojima je povezano trošilo. Ukupni otpor kruga tada je jednak unutarnjem otporu izvora, a napon na stezaljkama izvora jednak je nuli:

$$R_T = 0 , \quad U_{12} = 0 , \quad I = \frac{E}{R_u} = I_{KS} . \quad (4-4)$$

U krugu teče maksimalna struja koju zovemo strujom kratkoga spoja, a njezina je vrijednost ograničena samo unutarnjim otporom na kojemu se troši sva energija izvora. Kada bi u idealnim uvjetima bio  $R_u = 0$ , tekla bi neizmјerno velika struja.

Struja kratkoga spoja opasna je za većinu izvora, jer se zbog nagla porasta struje pregrijava izvor, što može izazvati njegovo pregaranje. Zato se u cilju zaštite u krug postavljaju osigurači koji prekidaju strujni krug pri prekomjernom porastu struje.

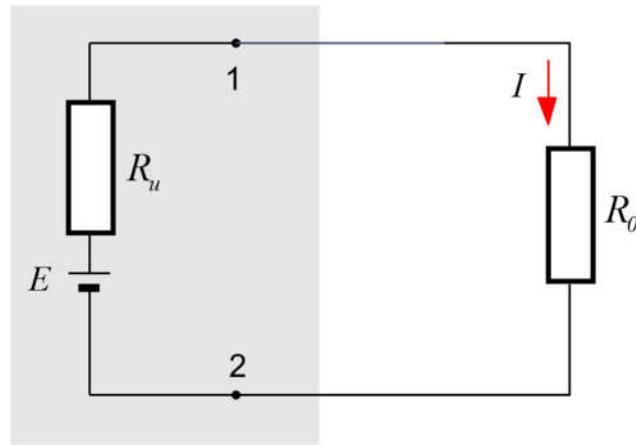
Iz izraza za prazni hod i kratki spoj slijedi važna jednadžba koja pokazuje da se mjerjenjem napona praznog hoda i struje kratkog spoja može odrediti vrijednost unutarnjega otpora:

$$R_u = \frac{E}{I_{KS}} = \frac{U_{PH}}{I_{KS}} . \quad (4-5)$$

To je pogodno za slučajeve kada nije moguće isključiti *EMS*, primjerice za elektrokemijske izvore. Ako je mjerjenje kratkoga spoja opasno za izvor, unutarnji se otpor može odrediti tako da krug opteretimo otpornikom poznate vrijednosti  $R_o$ , kao što je to prikazano na *Slici 4.2*.

Mjerjenjem u pokusu praznog hoda odredi se *EMS* izvora, a iz relacije za struju u krugu, čiju vrijednost također izmjerimo, dobije se:

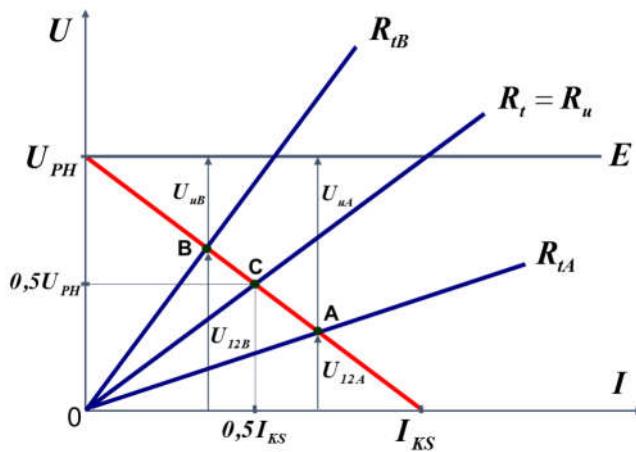
$$R_u = \frac{E - R_o I}{I} . \quad (4-6)$$



Slika 4.2 – Određivanje unutarnjeg otpora izvora

Do sada su razmatrana ekstremna stanja. Praktični mod rada izvora je stanje opterećenja, koje se može shvatiti kao normalno stanje eksploracije električne mreže. Svako trošilo je predviđeno za rad pri određenoj vrijednosti napona na svojim stazaljkama, uz dopuštene tolerancije u postotcima. To je *nazivni* ili *nominalni* napon.

Svaka promjena otpora trošila znači i promjenu opterećenja izvora. Što je struja u krugu veća, to je više opterećen izvor. Optereti li se izvor, napon na njegovim stazaljkama opada i to, kako je već pokazano, za iznos pada napona na unutarnjem otporu ( $U_{12} = E - IR_u$ ). Ta se relacija dade grafički razmotriti na naponsko-strujnoj karakteristici, prikazanoj na Slici 4.3. Ona predstavlja pravac koji spaja dvije karakteristične točke na apscisi ( $U_{12} = 0, I = I_{KS}$ ) i ordinati ( $U_{12} = U_{PH}, I = 0$ ), koje opisuju ekstremna stanja KS i PH. Karakteristike trošila  $U = f(I)$  za odabране otpore trošila  $R_{TA}$  i  $R_{TB}$  te razina elektromotorne sile  $E$  također su prikazane na slici. Karakteristike trošila sijeku karakteristiku izvora u točkama A i B. Iz dijagrama se može za bilo koju vrijednost struje opterećenja odrediti napon na trošilu  $U_{12}$  i pad napona na samom izvoru  $U_u$ . Vidi se kako se porastom opterećenja ( $R_{TB} > R_{TA}$ ) smanjuje gubitak na  $R_u$ . Za  $R_T \gg R_u$  napon je približno jednak  $E$ .



Slika 4.3 – Strujno-naponska karakteristika izvora i trošila

Na Slici 4.3 prikazana je i posebno važan slučaj kada je otpor trošila jednak unutarnjem otporu izvora. To je slučaj prilagodbe (engl. *matching*). U tim se uvjetima postiže maksimalna snaga na trošilu za dati izvor (više o prilagodbi u posebnom poglavlju: prilagođivanje snage). Tada je:

$$R_T = R_u \quad , \quad I = \frac{E}{2R_u} = \frac{I_{KS}}{2} \quad , \quad U_{12} = \frac{E}{2} = \frac{U_{PH}}{2}. \quad (4-7)$$

Za zoran uvid u stanje kruga za različite vrijednosti otpora trošila pogodno je modove rada obuhvatiti tzv. normiranim dijagramima. Struja i napon na stezaljkama izvora mogu se zapisati kao:

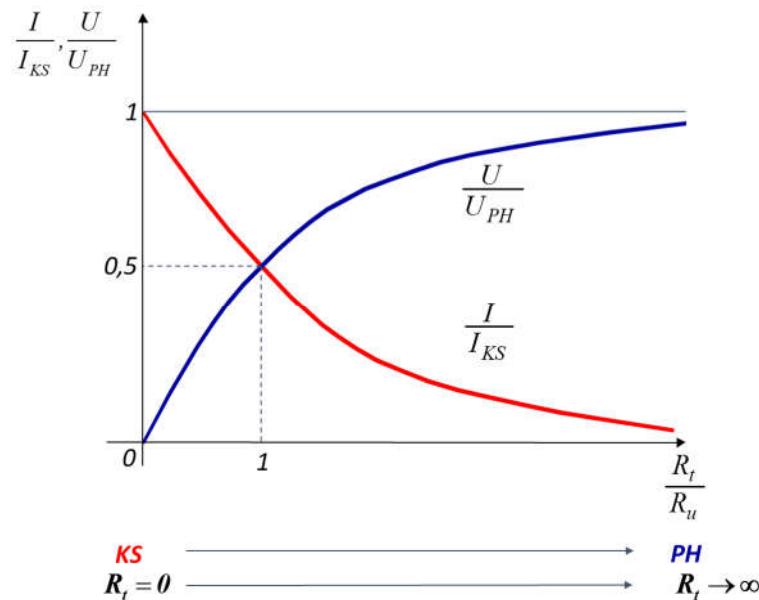
$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{R_u + R_T} = \frac{\frac{E}{R_u}}{1 + \frac{R_T}{R_u}} = \frac{I_{KS}}{1 + \frac{R_T}{R_u}} \\ U_{12} &= E \frac{R_T}{R_u + R_T} = \frac{E}{1 + \frac{R_u}{R_T}} = \frac{U_{PH}}{1 + \frac{R_u}{R_T}} \end{aligned} \quad (4-8)$$

odakle slijede normirane vrijednosti:

$$\frac{I}{I_{KS}} = \frac{I}{1 + \frac{R_T}{R_u}} \quad , \quad \frac{U}{U_{PH}} = \frac{I}{1 + \frac{R_u}{R_T}}. \quad (4-9)$$

Takav prikaz je pogodan jer ne ovisi o absolutnim vrijednostima koje mogu biti za jednu vrijednost vrlo velike, a za drugu vrlo malene, pa je prikaz nepregledan. Kod normiranih vrijednosti ukupna promjena kreće se uvijek u intervalu od 0 do 1 umjesto od 0 do maksimalne vrijednosti pojedine veličine. Iz gornjih se relacija vidi kako je bitan omjer otpora trošila i unutarnjeg otpora, a ne absolutna vrijednost vanjskoga otpora.

Na *Slici 4.4* prikazane su normirane vrijednosti  $I/I_{KS}$  i  $U/U_{PH}$  kao funkcije omjera  $R_T/R_u$ , te karakteristična točka za slučaj prilagodbe.



*Slika 4.4 – Normirane krivulje  $I/I_{KS}$ ,  $U/U_{PH}$*

## 4.2. SPAJANJE NAPONSKIH IZVORA

Nerijetko pojedinačni izvor ne može pravilno opskrbljivati uređaj koji, radi ispravnog funkciranja, zahtjeva određeni nazivni (nominalni) napon i struju. Stoga se izvori spajaju međusobno tako da osiguraju uvjete za normalan rad uređaja.

Istosmjerni izvori električne energije kao što su baterijski članci, akumulatori i dr. mogu se, poput otpornika, spajati serijski, paralelno ili u nekoj od serijsko-paralelnih kombinacija.

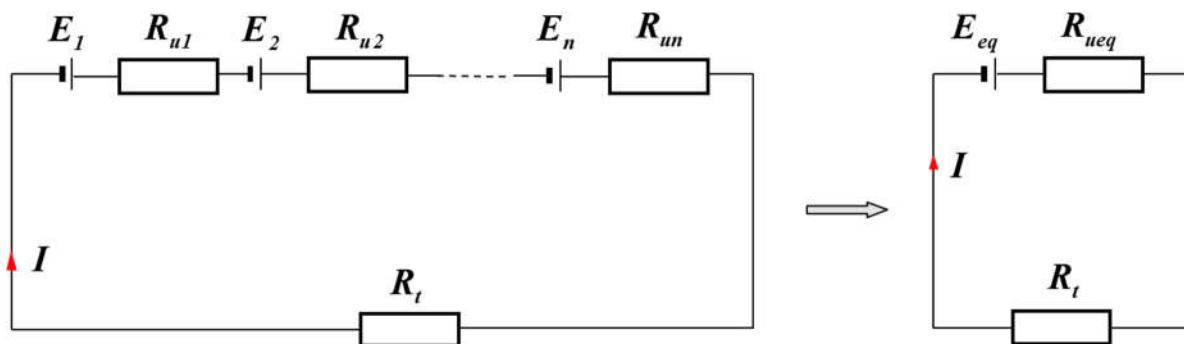
Serijski spoj neophodan je kada se zahtjeva napon koji je viši od napona raspoloživog izvora, što je čest slučaj u praksi. Primjerice, tranzistorskom prijamniku ili džepnom računalu nekoliko serijski spojenih baterija osigurava potreban napon za funkciranje. U mnogim valjkastim džepnim i reflektorskim svjetiljkama također je više naponskih izvora spojeno serijski.

Paralelni spoj izvora pogodan je kada je potrebna veća struja od one koju može dati pojedini izvor, odnosno kada je potreban veći kapacitet izvora (veći broj ampersati). Punjenje akumulatora i obnovljivih baterijskih izvora (Ni-Cd i slični) ostvaruje se paralelnim spajanjem istih s odgovarajućim punjačem. Za pokretanje automobila u slučaju ispraznjenog akumulatora pomažemo se paralelnim spajanjem s ispravnim akumulatorom drugoga automobila.

Mješoviti spoj upotrebljava se kada se zahtjeva viši napon i jača struja od onih što ih daje jedan izvor. Pri tomu se može odabrati tako kombiniran spoj da se postigne maksimalno moguća struja, odnosno snaga na trošilu.

### 4.2.1. Serijski spoj naponskih izvora

Serijski spoj naponskih izvora izvodi se tako da se spoji (+) pol prvoga izvora s (-) polom drugoga izvora. Zatim se spoji (+) pol drugoga s (-) polom trećega izvora itd. Svaki izvor ima svoj unutarnji otpor. Serijski spoj izvora prikazan je na *Slici 4.5*.



*Slika 4.5 – Serijski spoj n izvora EMS*

Grupa serijski spojenih izvora ponaša se kao jedan nadomjesni izvor čiji je EMS  $E_{eq}$  jednak zbroju pojedinačnih EMS, dakle:

$$E_{eq} = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n E_i . \quad (4-10)$$

Ovo je opća relacija, jer gornja algebarska suma obuhvaća i slučaj kada su jedan ili više izvora spojeni u serijskome protuspoju. Tada su međusobno vezane stezaljke jednaka polariteta (+) i (+) ili (-) i (-). Za tako spojene izvore uzima se negativan predznak u gornjem izrazu. Međutim od stvarnoga praktičnog značenja samo je serijski spoj.

Ako su svih  $n$  izvora (ćelija, članaka) međusobno jednaki, tada je:

$$E_{eq} = nE. \quad (4-11)$$

Unutarnji otpor nadomjesnoga izvora ( $R_{ueq}$ ) sastavljen je od serijskoga spoja unutarnjih otpora pojedinih izvora, neovisno o tomu jesu li neki izvori u serijskome protuspoju:

$$R_{ueq} = R_{u1} + R_{u2} + \dots + R_{un} = \sum_{i=1}^n R_{ui}. \quad (4-12)$$

U krugu prema *Slici 4.5* uspostavljena je struja:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^n E_i}{\sum_{i=1}^n R_{ui} + R_t}. \quad (4-13)$$

Kroz sve izvore teče ista struja. Zato se kod serijskoga spajanja obično rabe izvori jednake nazivne struje. Za uobičajen slučaj spajanja  $n$  jednakih izvora je:

$$I = \frac{nE}{nR_u + R_t}, \quad R_{ueq} = nR_u. \quad (4-14)$$

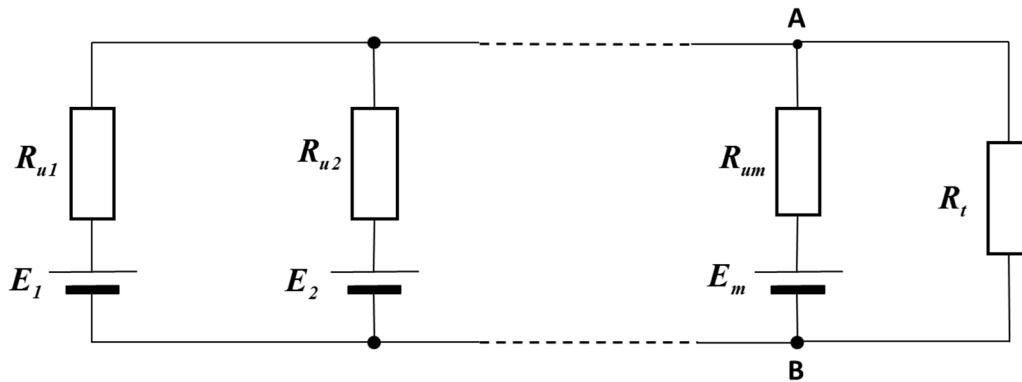
Kada bi nazivne struje pojedinih izvora bile različite, maksimalna struja složenog izvora ne bi smjela biti veća od nazivne struje najslabijega izvora.

Napon na stezaljkama (A-B) nadomjesnoga naponskog izvora jest:

$$U_{AB} = E_{eq} - IR_{ueq}. \quad (4-15)$$

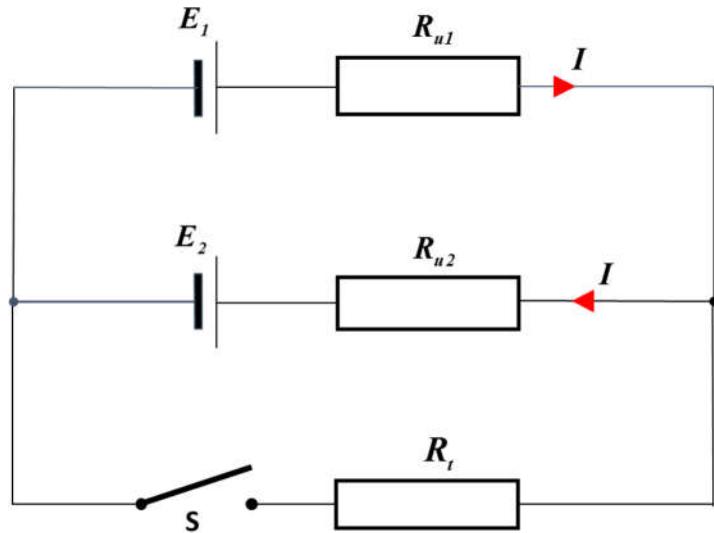
#### 4.2.2. Paralelni spoj naponskih izvora

Paralelni spoj naponskih izvora dobije se ako se međusobno povežu izlazne stezaljke istih polova pojedinih izvora, kao na *Slici 4.6*.



*Slika 4.6 – Paralelni spoj izvora*

Stvarnoga smisla ima samo paralelno spajanje jednakih izvora jer bi u protivnome tekle struje izjednačenja. Da to dokažemo, razmotrit ćemo jednostavan spoj dvaju različitih neopterećenih izvora (otvorena sklopka S) kao na *Slici 4.7*.



Slika 4.7 – Paralelni spoj izvora – struja izjednačenja

Za zatvoreni krug koji tvore grane s naponskim izvorima, struja je:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_{u_1} + R_{u_2}}. \quad (4-16)$$

Vidljivo je kako će u krugu protjecati struja čak i onda kada su izvori neopterećeni. Ta se struja naziva strujom izjednačenja. Ona je očito štetna pojava jer se energija nadomjesnoga izvora troši i u uvjetima praznog hoda. U praksi se izbjegava tako da se za paralelno spajanje preporučuje uporaba izvora kod kojih su podjednaki stanje nabijenosti, unutarnji otpori, proizvedeni naponi i starost izvora. Također, paralelni spoj valja upotrebljavati samo u opterećenome stanju jer se navedeni uvjeti ne mogu ostvariti u idealnom obliku.

Analizirat ćemo, dakle, paralelni spoj sastavljen od \$m\$ jednakih izvora. Tada je:

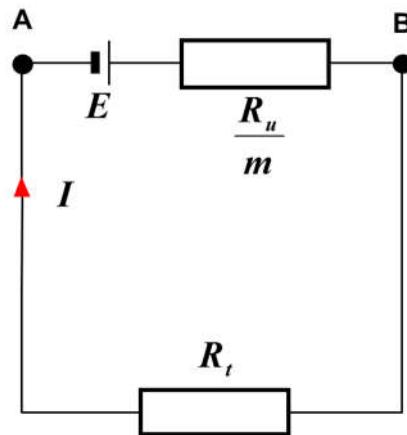
$$E_i = E_1 = \dots = E_m = E; \quad R_{u_i} = R_{u_1} = \dots = R_{u_m} = R_u. \quad (4-17)$$

Napon na stezalkama nadomjesnoga izvora je:

$$U_{AB} = E_i - I_i R_{u_i} = E_2 - I_2 R_{u_2} = \dots = E_m - I_m R_{u_m}. \quad (4-18)$$

Nadomjesni izvor, prikazan na *Slici 4.8*, imat će EMS jednak EMS-u \$E\$ pojedinog generatora, a unutarnji otpor \$m\$ puta manji, dok će struja kroz trošilo biti \$m\$ puta veća od one koju daje pojedini generator (\$I\_i\$), tj.:

$$R_{u_{eq}} = \frac{R_u}{m}; \quad I = I_1 + I_2 + \dots + I_m = mI_i. \quad (4-19)$$



Slika 4.8 – Nadomjesni izvor paralelnoga spoja izvora

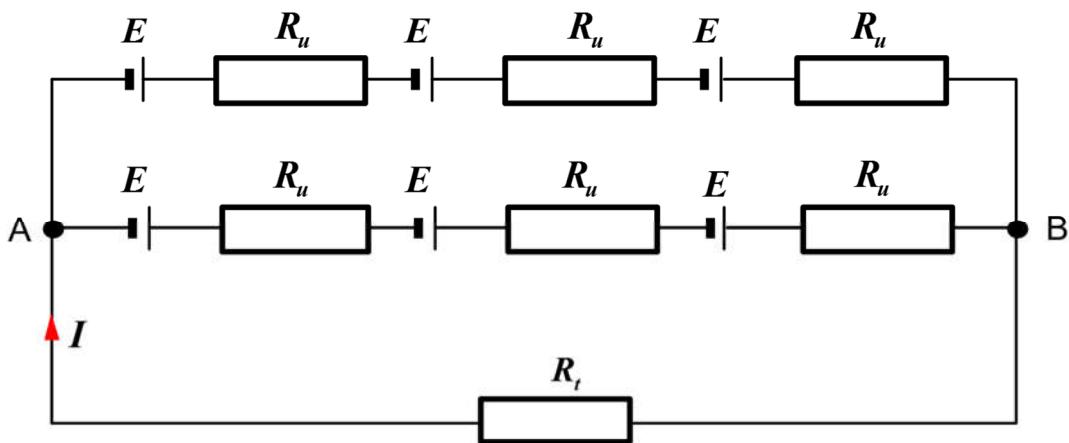
Prema prikazu nadomjesnoga izvora, struja trošila i napon na stezaljkama izvora mogu se izraziti kao:

$$I = \frac{E}{\frac{R_u}{m} + R_t} ; \quad U_{AB} = E - I \frac{R_u}{m} \quad (4-20)$$

Temeljem razmatranja struje kroz trošilo za obje vrste spajanja izvora može se zaključiti da ćemo, ako želimo dobiti najveću moguću struju, izvore spajati paralelno ako je  $R_T < R_u$ , a serijski ako je  $R_T > R_u$ .

#### 4.2.3. Mješoviti spoj naponskih izvora

Ovaj se spoj realizira spajanjem  $n$  serijski spojenih izvora u  $m$  paralelnih grana. Ukupan broj upotrijebljenih izvora je  $z = m \cdot n$ . Primjer mješovitog spoja s  $n = 3$  i  $m = 2$  prikazan je na Slici 4.9.



Slika 4.9 – Mješoviti spoj izvora

Primijene li se zaključci koji vrijede za serijski i paralelni spoj izvora, dobije se struja kroz trošilo:

$$I = \frac{nE}{\frac{n}{m}R_u + R_t}. \quad (4-21)$$

Djelomične struje u granama su međusobno jednake i iznose  $m$ -ti dio ukupne struje ( $I_l = I/m$ ). Napon na trošilu je:

$$U_{AB} = nE - nR_u I_l = nE - \frac{n}{m}R_u I. \quad (4-22)$$

Cijela grupa izvora ponaša se kao nadomjesni izvor čiji je EMS  $n$  puta veći, a unutarnji otpor  $n/m$  puta veći od odgovarajućih vrijednosti pojedinih izvora.

Za zadani otpor trošila  $R_t$  i ukupno raspoloživi broj izvora  $z$  može se odrediti optimalan raspored izvora, koji će osigurati maksimalno moguću struju, odnosno snagu na trošilu. To je već spomenuti slučaj prilagodbe. Tada je:

$$R_{u_{eq}} = R_t \Rightarrow \frac{nR_u}{m} = R_t. \quad (4-23)$$

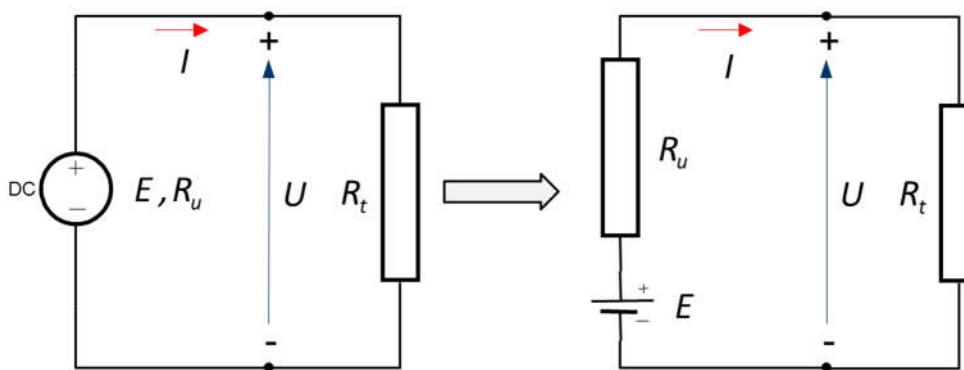
Kako je  $z = m \cdot n$ , izlazi da je potreban broj elemenata u granama:

$$n = \sqrt{\frac{zR_t}{R_u}}, \quad m = \sqrt{\frac{zR_u}{R_t}}. \quad (4-24)$$

U izvedbi se  $n$ ,  $m$  naravno zaokružuju na najbliži cijeli broj.

### 4.3. NAPONSKI I STRUJNI IZVORI

Naponski izvor istosmjerne struje određuje njegov EMS  $E$  i unutarnji otpor  $R_u$ . U električnim shemama i teorijskim analizama naponski se izvor prikazuje kao serijski spoj idealnoga naponskog generatora elektromotorne sile  $E$  zanemariva unutarnjeg otpora i otpora koji je jednak unutarnjem otporu generatora, kao na *Slici 4.10*.



*Slika 4.10 – Nadomjesni naponski izvor*

Struja kroz trošilo  $R_t$  i napon na njemu jesu:

$$I = \frac{E}{R_t + R_u} \quad , \quad U = IR_t = E \frac{R_t}{R_t + R_u}. \quad (4-25)$$

U najvećem broju slučajeva unutarnji je otpor generatora puno manji od otpora trošila ( $R_u \ll R_t$ ), pa je približno:

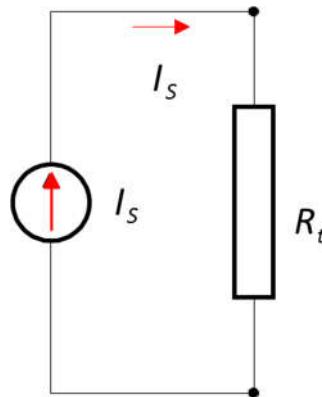
$$I \approx \frac{U}{R_t} \quad , \quad U \approx E. \quad (4-26)$$

Izvor se može zamijeniti idealnim naponskim izvorom koji na svojim stezalkama generira konstantan napon neovisno o vrijednosti otpora trošila.

Međutim ponekad se, posebice u elektroničkim sklopovima, rabe generatori velikoga unutarnjeg otpora, odnosno unutarnji je otpor u radnim uvjetima puno veći od otpora trošila ( $R_u \gg R_t$ ). Tada je:

$$I \approx \frac{E}{R_u} = I_S \quad , \quad U \approx E \frac{R_t}{R_u} = I_S R_t. \quad (4-27)$$

U takvim se slučajevima uvodi pojam idealnoga strujnog izvora. Struja  $I_S$  je konstantna i nezavisna od otpora trošila. Struja  $I_S$  je temeljna vrijednost strujnog izvora, kao što je EMS  $E$  temeljna vrijednost naponskoga izvora. Idealni strujni izvor spojen na trošilo označava se kao na *Slici 4.11*.



*Slika 4.11 – Idealni strujni izvor i trošilo*

U grani u kojoj se nalazi idealni strujni izvor uvijek teče konstantna struja neovisno o otporima i izvorima EMS-a koji se nalaze u toj grani.

Realni strujni izvor ima neki svoj konačni unutarnji otpor. Ako naponsku jednadžbu koja vrijedi za krug prema *Slici 4.10*:

$$U = E - IR_u \quad (4-28)$$

dijeljenjem s  $R_u$  pretvorimo u strujnu jednadžbu, dobije se:

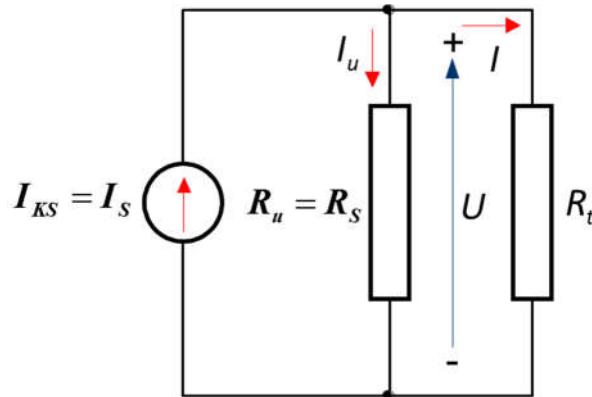
$$\frac{U}{R_u} = \frac{E}{R_u} - I \quad ; \quad I_u = I_{KS} - I, \quad (4-29)$$

gdje je:

- $I_u = \frac{U}{R_u}$  dio struje koja prolazi kroz unutarnji otpor izvora, dakle struja gubitaka,

- $I_{KS} = \frac{E}{R_u}$  struja za slučaj kratkoga spoja trošila,
- $I$  struja kroz trošilo.

Struja  $I_{KS} = I_s$  dijeli se na dio struje kroz trošilo i dio koji se zatvara u samom izvoru na unutarnjem otporu. Označimo li struju strujnoga izvora s  $I_s$ , a unutarnji otpor s  $R_s$ , gornja se strujna jednadžba može grafički prikazati kao na *Slici 4.12*.



*Slika 4.12 – Realni strujni izvor*

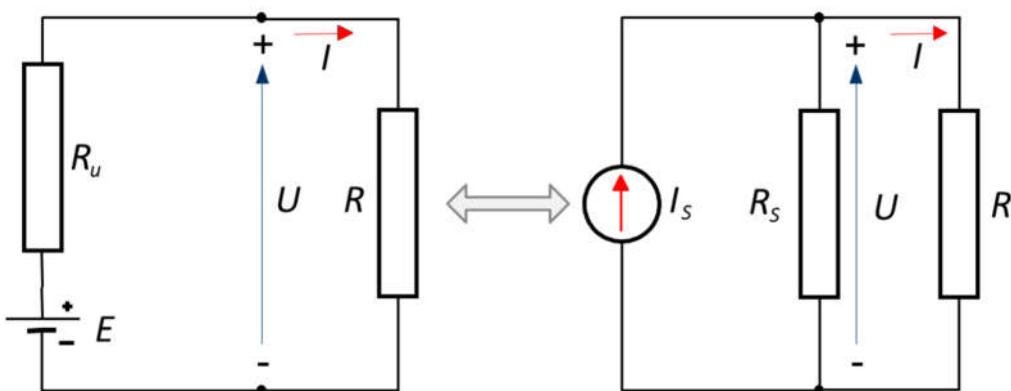
Napon i struja trošila su:

$$I = \frac{U}{R_t} = I_s \frac{R_s}{R_s + R_t}, \quad U = I_s \frac{R_s R_t}{R_s + R_t}. \quad (4-30)$$

Idealni strujni izvor (izvor konstantne struje) ima zanemarivu struju gubitaka, a to znači da za unutarnji otpor idealnoga strujnog izvora vrijedi  $R_s \rightarrow \infty$ .

#### Pretvorbe: naponski izvor $\Leftrightarrow$ strujni izvor

U općem slučaju kada je odnos unutarnjega otpora i otpora trošila proizvoljan, naponski se izvor može zamijeniti ekvivalentnim strujnim izvorom i obratno, kao što je to prikazano na *Slici 4.13*.



*Slika 4.13 – Pretvorbe naponski  $\Leftrightarrow$  strujni izvor*

Međusobni odnosi  $E$ ,  $R_u$  i  $I_S$ ,  $R_S$  određuju se iz uvjeta da oba izvora podržavaju jednaku struju kroz trošilo i zadržavaju jednak napon na stezalkama trošila. To znači da se moraju izjednačiti odgovarajuće vrijednosti napona i struja.

Izjednačavanjem se dobije jednadžba:

$$\frac{E}{R_u + R} = I_S \frac{R_S}{R_S + R}. \quad (4-31)$$

Jednadžba će biti zadovoljena za svaki  $R$  ako je:

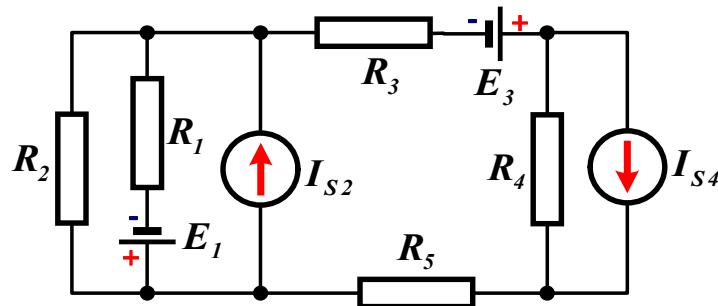
$$E = R_S I_S \quad , \quad R_u = R_S. \quad (4-32)$$

Gornje relacije omogućuju određivanje nadomjesnoga naponskog izvora s parametrima  $E$ ,  $R_u$  iz zadanoga strujnog izvora parametara  $I_S$ ,  $R_S$ . U obratnom slučaju za pretvorbu zadanoga naponskog izvora u nadomjesni strujni izvor dobije se:

$$I_S = \frac{E}{R_u} \quad , \quad R_S = R_u. \quad (4-33)$$

Napomena: Za idealni naponski izvor ne postoji ekvivalentni strujni izvor, jer bi za  $R_u = 0$  bio i  $R_S = 0$ , a struja  $I_S \rightarrow \infty$ . Također vrijedi kako nema ekvivalenta idealnomu strujnom izvoru, jer bi se za neki konačan  $I_S$  i  $R_S \rightarrow \infty$  dobilo  $R_u \rightarrow \infty$  i  $E \rightarrow \infty$ .

**Primjer:** Odredite struju  $I_5$  kroz otpor  $R_5$  pretvorbama naponskoga izvora u nadomjesni strujni izvor i obratno za krug prema sljedećoj slici:

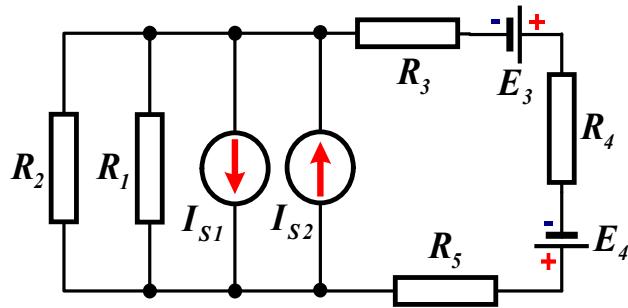


- Pretvorba naponskoga izvora  $E_1$ ,  $R_1$  u nadomjesni strujni izvor  $I_{S1}$ ,  $R_{S1}$ :

$$I_{S1} = \frac{E_1}{R_1} \quad ; \quad R_{S1} = R_1$$

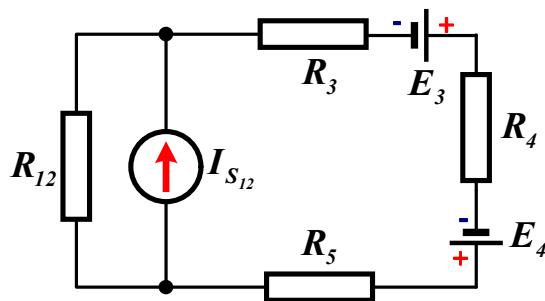
- Pretvorba strujnoga izvora  $I_{S4}$ ,  $R_4$  u nadomjesni naponski izvor  $E_4$ ,  $R_{u4}$ :

$$E_4 = I_{S4} R_4 \quad ; \quad R_{u4} = R_4$$



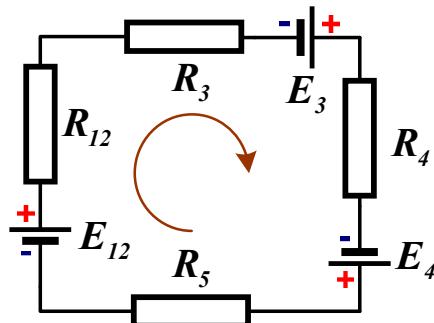
3. Pretvorba dvaju strujnih izvora u jedan nadomjesni strujni izvor  $I_{S12}$ ,  $R_{S12}$ :

$$I_{S12} = -I_{S1} + I_{S2} \quad ; \quad R_{S12} = R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



4. Pretvorba strujnoga izvora  $I_{S12}$ ,  $R_{12}$  u nadomjesni naponski izvor  $E_{12}$ ,  $R_{u12}$ :

$$E_{12} = I_{S12} R_{12} \quad ; \quad R_{u12} = R_{12}$$



5. Krug je pretvorbama sveden na jednu petlju kroz koju teče tražena struja  $I_5$ :

$$I_5 = \frac{E_{12} + E_3 + E_4}{R_{12} + R_3 + R_4 + R_5}$$

6. Uvrste li se pretvorbama dobivene vrijednosti, struja  $I_5$  je:

$$I_5 = \frac{\left( \frac{E_1}{R_1} + I_{S2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + E_3 + I_{S4} R_4}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + R_4 + R_5}$$

## 5. ELEKTRIČNI RAD, ENERGIJA I SNAGA

Struja, napon i otpor temeljne su električne veličine u području elektrotehnike. S druge strane, pojmovi rad, energija i snaga rabe se u svim granama prirodnih znanosti i povezuju međusobno različite fizikalne discipline.

Rad je djelovanje sile  $F$  na određenoj udaljenosti  $s$ . Uz pretpostavku da sila djeluje na pravcu i u smjeru u kojem mjerimo udaljenost, izvršeni mehanički rad  $A$ , potreban da bi se neko tijelo gibalo brzinom  $v$ , jest:

$$A = F \cdot s = F \cdot v \cdot t. \quad (5-1)$$

Kada izvor napona (EMS) pokrene naboј kroz električni krug, vrši se određeni rad na sličan način kao kod bilo kojega mehaničkog kretanja. Rad izvora električne energije je:

$$A = E \cdot q = E \cdot I \cdot t. \quad (5-2)$$

Rad potreban za prenošenje električnog naboja  $q$  između dviju točaka, čija je razlika potencijala  $U$ , može se iskazati relacijama:

$$A = U \cdot q = U \cdot I \cdot t. \quad (5-3)$$

Rad koji izvrši struja u nekom dijelu kruga proporcionalan je naponu  $U$  toga dijela kruga, jakosti struje  $I$  i vremenu  $t$  u tijeku kojega je tekla struja.

Relacije za mehanički i električni rad mogu se usporediti uvođenjem odgovarajućih formalnih analogija. Mehanička sila odgovara ( $\hat{=}$ ) električnom naponu  $F \hat{=} U$ , jer se napon može zamisliti kao tlak na nabijene čestice. Brzina  $v$  odgovara struji  $I$  ( $v \hat{=} I$ ), jer je struja kretanje nabijenih čestica.

U svakom se naponskome izvoru pretvara neka energija (mehanička, kemijska, Sunčeva, ...) u električnu energiju  $W$ . Tako dobivena energija može obavljati rad  $A$ . Ovisno o vrsti trošila rad koji izvrši struja prolaskom kroz trošilo ima za posljedicu pretvorbe u druge oblike energije:

- toplinsku (termički uređaji, žarulje),
- mehaničku (elektromotori),
- kemijsku (elektroliza i punjenje akumulatora, punjenje Ni-Cd i drugih vrsta obnovljivih baterija),
- svjetlosnu (plinske i žarulje sa žarnom niti).

Poznato je iz fizike kako je energija sposobnost tijela da vrši rad. Proizvedena energija predstavlja pokazatelj rada što ga izvrši električna struja, pa se energija i rad brojčano izražavaju istim jedinicama. Jedinica za rad, odnosno energiju, u SI sustavu je 1 J (džul), pri čemu je:

$$1\text{J} = 1\text{Nm} = 1\text{VAs} = 1\text{Ws} = 1\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}. \quad (5-4)$$

Definicija: Džul ili vatsekunda je rad koji se izvrši u dijelu kruga pri naponu od 1 V i struji od 1 A za vrijeme od 1 s. Budući da je u elektrotehnici vatsekunda vrlo malena jedinica, češće se primjenjuju veće jedinice. To su:

- *Vatsat:*  $1\text{Wh} = 3600\text{ J}$
- *Kilovatsat:*  $1\text{kWh} = 10^3\text{ Wh} = 3600000\text{ J} = 3,6\text{ MJ}$

- *Megavatsat*:  $1 \text{ MWh} = 10^6 \text{ Wh}$
- *Teravatsat*:  $1 \text{ TWh} = 10^{12} \text{ Wh}$ .

Temeljna relacija za električnu energiju može se uporabom Ohmova zakona prikazati i u oblicima:

$$W = UIt = \frac{U^2}{R}t = I^2Rt. \quad (5-5)$$

Jedan te isti rad može se obaviti u više ili manje vremena, ovisno o upotrijebljenoj snazi. Za električnu snagu vrijede isti odnosi kao i za mehaničku snagu, tj. snaga je rad izvršen u jedinici vremena. Ako električna struja u vremenu  $t$  izvrši rad  $A$ , snaga je:

$$P = \frac{A}{t} = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}. \quad (5-6)$$

Jedinica električne snage je vat (W),  $1 \text{ W} = 1 \text{ VA}$ .

Snaga što se razvija na trošilu neizravno se dobije mjeranjem napona i struje. Za izravno mjerjenje rabe se vatmetri.

U elektroničkim krugovima dio električne energije transformira se na omskim otporima u toplinsku energiju. To je nepoželjna pojava jer nastaju gubitci snage. Ako se razmatra temeljni strujni krug s nadomjesnim naponskim izvorom i trošilom, naponska jednadžba kruga je:

$$E = IR_u + IR_t. \quad (5-7)$$

Pomnoži li se gornji izraz sa strujom  $I$ , dobiju se odnosi snaga u krugu:

$$EI = I^2R_u + I^2R_t \quad (5-8)$$

odnosno:

$$P_{uk} = P_u + P_t, \quad (5-9)$$

gdje je:

$P_{uk}$  – ukupna snaga koju razvija izvor

$P_u$  – gubitak snage na unutarnjem otporu izvora

$P_t$  – snaga predana trošilu (korisna snaga).

Iz podataka za maksimalno dopuštenu snagu što se smije disipirati na otporniku može se u  $U$ - $I$  dijagramu konstruirati hiperbola snage koja određuje maksimalno dopuštene vrijednosti struje i napona na otporniku.

## 5.1. KORISNOST ELEKTRIČNE SNAGE I ENERGIJE

Prema zakonu o očuvanju energije, energija se ne može izgubiti niti ni iz čega stvoriti. Ona se može proizvoditi ili trošiti samo pretvorbom iz jednog oblika u drugi, ali pri tomu ukupna energija ostaje sačuvana. Svaku pretvorbu prate neizbjegni gubitci. Drugim riječima, nijedna pretvorba nije u potpunosti djelotvorna. Razlika između ulazne (uložene) energije  $W_{ul}$  i izlazne (korisne) energije  $W_{iz}$  predstavlja gubitak u pretvorbi i/ili prijenosu energije  $W_g$ . Na isti se način definira ulazna  $P_{ul}$  i izlazna, tj. korisna snaga  $P_{iz}$ , te snaga gubitaka  $P_g$ . Omjer izlazne i ulazne energije, odnosno snage, jest korisnost (djelotvornost, učinkovitost, iskoristivost)  $\eta$ . Dakle, vrijedi:

$$W_{iz} = W_{ul} - W_g \quad ; \quad P_{iz} = P_{ul} - P_g \quad (5-10)$$

$$\eta = \frac{W_{iz}}{W_{ul}} = \frac{P_{iz}}{P_{ul}} = \frac{P_{iz}}{P_{iz} + P_g} \quad (5-11)$$

pri čemu se  $\eta$  nalazi u granicama:  $0 \leq \eta \leq 1$ , ili izraženo u postotcima:  $0 \leq \eta (\%) \leq 100$ .

Put od ulaza u neki proces ili neki uređaj do izlaza iz njega može sadržavati  $n$  unutarnjih stupnjeva od kojih svaki ima svoju korisnost. Ukupna korisnost tada je:

$$\eta_{uk} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdots \cdot \eta_n. \quad (5-12)$$

Korisnost temeljnog strujnog kruga je:

$$\eta = \frac{P}{P_{uk}} = \frac{I^2 R_t}{I^2 R_t + I^2 R_u} = \frac{R_t}{R_t + R_u}, \quad (5-13)$$

tj. ovisi o unutarnjem otporu nadomjesnoga naponskog izvora i otporu trošila.

U elektrotehničkoj praksi od interesa je razmatranje dvaju karakterističnih slučaja vezanih za korisnost i odnose snaga u određenom sustavu.

Prvi se odnosi na uvjete koje treba zadovoljiti za postizanje najveće moguće korisnosti. To je posebno važno kada se razmatraju energetski izvori, mreže, postrojenja i uređaji, gdje je gubitke poželjno svesti na najmanju moguću mjeru. To je razumljivo s obzirom na to što proizvedene i prenesene snage mogu biti izražene u stotinama megavata.

Korisnost se dade prikazati i u obliku:

$$\eta = \frac{P_{ul} - P_g}{P_{ul}} = 1 - \frac{P_g}{P_{ul}} = 1 - \frac{I^2 R_u}{EI} = 1 - \frac{IR_u}{E}. \quad (5-14)$$

Za zadani iznos EMS  $E$ , želi li se postići  $\eta$  što bliži jedinici, uvjeti su ili  $I = 0$  ili  $R_u = 0$ . Prvi uvjet znači rad u modu praznog hoda. Struja ne teče, izvor je neopterećen, ne troši se snaga izvora, ali ne izdvaja se ni korisna snaga. Od stvarnoga je značenja uvjet  $R_u = 0$ , jer je tada izvor opterećen. U praksi se to svodi na  $R_u \ll R_t$ . Tada se cijela snaga proizvedena u izvoru prinosi trošilu uz zanemarive gubitke. U unutarnji otpor uračunava se i otpor prijenosnih vodova, odnosno gubitak snage na njima.

Drugi slučaj odnosi se na zadovoljavanje uvjeta postizanja maksimalne snage na trošilu. Taj uvjet bitno je ispuniti u onim sustavima gdje je korisnost od sekundarnoga značaja, a bitna je snaga signala koji se prenosi, primjerice u području telekomunikacija. To je već spomenuti slučaj prilagodbe, koji je detaljnije obrađen u sljedećem poglavljju.

## 5.2. PRILAGODBA STRUJE, NAPONA I SNAGE

Struja, napon i snaga što ih generira izvor električne energije ovise o EMS-u izvora, unutarnjem otporu i priključenom trošilu. Promjenom odnosa unutarnjeg otpora  $R_u$  i otpora trošila  $R_T$  mogu se stvoriti uvjeti za prilagodbu struje, napona, odnosno snage. Izbor tipa prilagodbe ovisi o području primjene određenog sklopa ili uređaja.

Za sklopove s naponskim izvorima *prilagodba struje* nastupa kada je otpor trošila relativno malen u odnosu na unutarnji otpor izvora  $R_t \ll R_u$ . Ako se razmatra temeljni strujni krug kao na *Slici 4.1*, dobiju se približne vrijednosti:

$$I \approx \frac{E}{R_u} \quad , \quad U_{12} \approx E \frac{R_t}{R_u} \quad , \quad P_T \approx 0, \quad (5-15)$$

gdje je  $P_T$  snaga disipirana na trošilu.

U ekstremnom slučaju  $R_T = 0$  struja je ograničena samo unutarnjim otporom, a to je već opisani mod kratkoga spoja.

*Prilagodba napona* ostvaruje se kada je otpor trošila relativno velik u odnosu na unutarnji otpor  $R_T \gg R_u$ . Tada je:

$$I \approx \frac{E}{R_t} \quad , \quad U_{12} \approx E \quad , \quad P_u \approx 0. \quad (5-16)$$

U graničnom slučaju  $R_t \rightarrow \infty$  i izvor radi u modu praznoga hoda.

*Prilagodba snage* jedan je od temeljnih zahtjeva u telekomunikacijskim sustavima, gdje je od iznimne važnosti dobivanje maksimalne snage signala iz izvora. Gubitci energije su manje važni jer se radi o nevelikim iznosima prenesene energije.

Kako je pokazano za mod rada izvora neposredno blizu praznoga hoda, korisna snaga je mala zbog male jakosti struje, a za rad u blizini kratkoga spoja korisna snaga je mala zbog maloga iznosa napona. Očito je kako se maksimum korisne snage dobije u nekom srednjem modu rada između tih dvaju graničnih slučajeva.

Korisna snaga je snaga na otporu trošila, tj.:

$$P_k = P_t = I^2 R_t = \left( \frac{E}{R_u + R_t} \right)^2 R_t = \frac{E^2 R_t}{(R_u + R_t)^2}, \quad (5-17)$$

a njezina grafička ovisnost o struci predstavlja funkciju oblika parabole. Potrebno je odrediti onu vrijednost otpora trošila za koju će, uz zadani izvor, snaga na trošilu biti maksimalna. Uvjet se može odrediti primjenom matematičkog pravila za određivanje maksimalne vrijednosti funkcije. Izlazi da prvu derivaciju funkcije  $P_t = f(R_t)$  moramo izjednačiti s nulom. Radi se o parcijalnoj

derivaciji  $\frac{\partial}{\partial R_t}$  jer se derivira samo po parametru  $R_t$ :

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t} = 0. \quad (5-18)$$

Primjenom pravila za deriviranje kvocijenta dobije se:

$$\frac{E^2 (R_u + R_t)^2 - 2E^2 R_t (R_u + R_t)}{(R_u + R_t)^4} = 0. \quad (5-19)$$

Nakon kraćenja i sređivanja gornje relacije ostaje:

$$R_u + R_t - 2R_t = 0, \quad (5-20)$$

pa je konačni uvjet za prilagodbu snage:

$$R_t = R_u. \quad (5-21)$$

Zaključak: Korisna snaga koja se predaje trošilu postiže maksimum kada je otpor trošila jednak unutarnjem otporu izvora.

Tada je:

$$I = \frac{E}{2R_u} = \frac{E}{2R_t} = \frac{I_{KS}}{2}, \quad U_{I2} = \frac{E}{2} = \frac{U_{PH}}{2}, \quad (5-22)$$

a maksimalna snaga iznosi:

$$P_{t_{max}} = \frac{E^2}{4R_t}. \quad (5-23)$$

Korisnost kruga u modu prilagođenog opterećenja je:

$$\eta = \frac{R_t}{R_u + R_t} = 0,5, \quad (5-24)$$

odnosno u postotcima samo 50 % jer se polovica snage gubi na unutarnjem otporu izvora.

Primjer (Matlab): ovisnost izlazne snage o otporu trošila

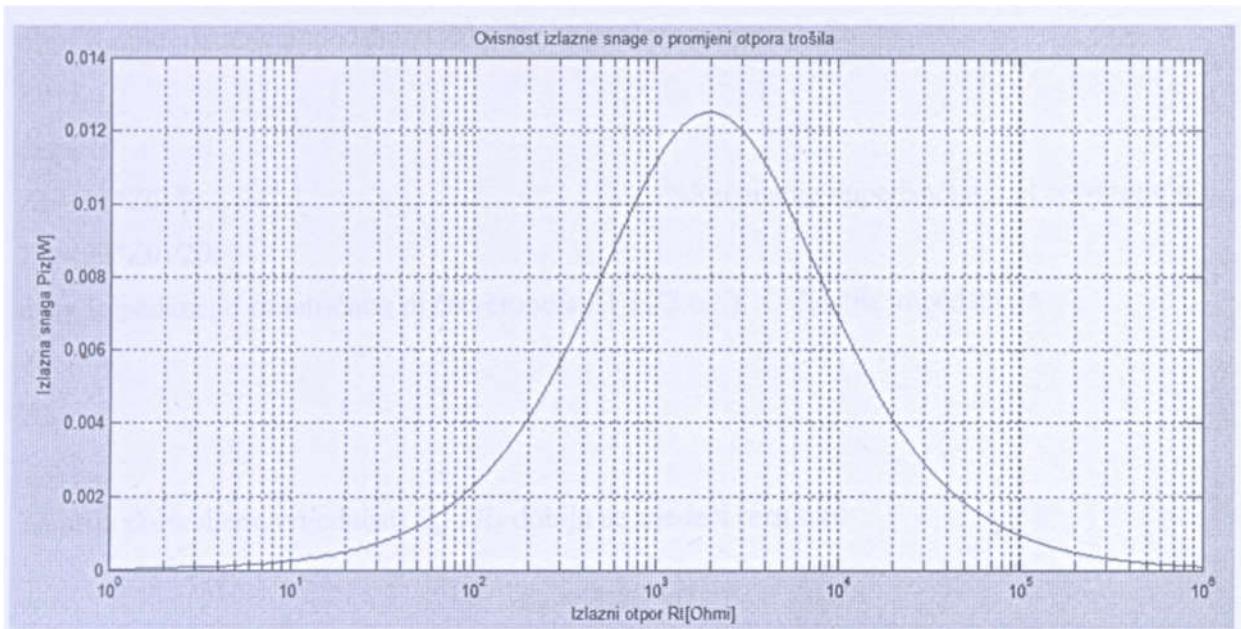
```

U=10;
Ru=2000; %unutarnji otpor izvora
Rt=[1:1:1000000]; %mijenjanje otpora trošila od 0 do 1 Mohma
I=U./(Ru+Rt); %struja trošila
Pt=I.*I.*Rt; %Snaga trošila
semilogx(Rt,Pt)
grid on
xlabel('Izlazni otpor Rt[Ohmi]')
ylabel('Izlazna snaga Pt[W]')
title('Ovisnost izlazne snage o promjeni otpora trošila')

```

Grafički prikaz krivulje snage na kojem se može uočiti prilagodba – maksimum za  $R_t = R_u = 2000 \Omega$ , dan je na *Slici 5.1.*

Radi bolje preglednosti os apscisa (izlazni otpor) prikazana je logaritamskom skalom.



Slika 5.1 – Grafički prikaz krivulje snage

### 5.3. PRETVORBA ELEKTRIČNE ENERGIJE U TOPLINSKU

Električna energija lako se može pretvarati u druge oblike energije. Prolaskom struje kroz otpornik sva energija koja se na njemu utroši pretvara se u toplinu. Ako se dio energije utroši na zagrijavanje vodiča vodova, tada govorimo o gubitcima u bakru (Jouleovi gubici).

Količina topline  $Q$  pohranjena u nekom tijelu zagrijavanjem s početne  $\Theta_1$  na konačnu temperaturu  $\Theta_2$  dobije se iz jednadžbe:

$$Q = mc(\Theta_2 - \Theta_1), \quad (5-25)$$

gdje je  $m$  – masa, a  $c$  – specifični toplinski kapacitet (za vodu on iznosi  $c = 4187 \text{ J/kgK}$ ). Porast temperature je:

$$\Theta_2 - \Theta_1 = \frac{UIt}{mc}. \quad (5-26)$$

Temperatura linearno raste s vremenom pod uvjetom da nema gubitaka topline prelaskom u okoliš. Kako uvijek postoje gubici, stvarno povećanje temperature ide po eksponencijalnoj funkciji i dostiže maksimum kada se proizvedena toplina izjednači s gubitcima.

#### OPASNOST OD ELEKTRIČNOG UDARA

Električna struja opasna je za čovjeka ako se strujni krug zatvori preko ljudskog tijela ili nekog njegova dijela. Stupanj opasnosti ovisi o trima bitnim čimbenicima:

- naponu dodira
- putu struje kroz organizam
- vremenu izloženosti djelovanju električne struje.

Za napon od 220 V ovisno o otporu ljudskog tijela teče odgovarajuća struja. Navest ćemo neke karakteristične vrijednosti struja te način i posljedice djelovanja tih struja na organizam:

- 0 do 1 mA ne osjeća se
- 1 do 8 mA osjeća se udar, ali ne боли
- 8 do 15 mA udar koji pričinjava бол
- 15 do 20 mA bolni udar, mišići u blizini dodira se grče, tijelo se teško odvaja od vodiča
- 20 do 50 mA snažno grčenje mišića praćeno otežanim disanjem
- 50 do 200 mA poremećaj rada unutarnjih organa, srčani udar i trenutačna smrt
- više od 200 mA opasne opeklane i grčevi mišića koji mogu žrtvu odbaciti od vodiča.

Za više napone struja se povećava, pa je i opasnost veća.

Otpor tijela dijeli se na otpor kože, koji ovisi o vlažnosti kože, i unutarnji otpor tijela. Približne vrijednosti su:

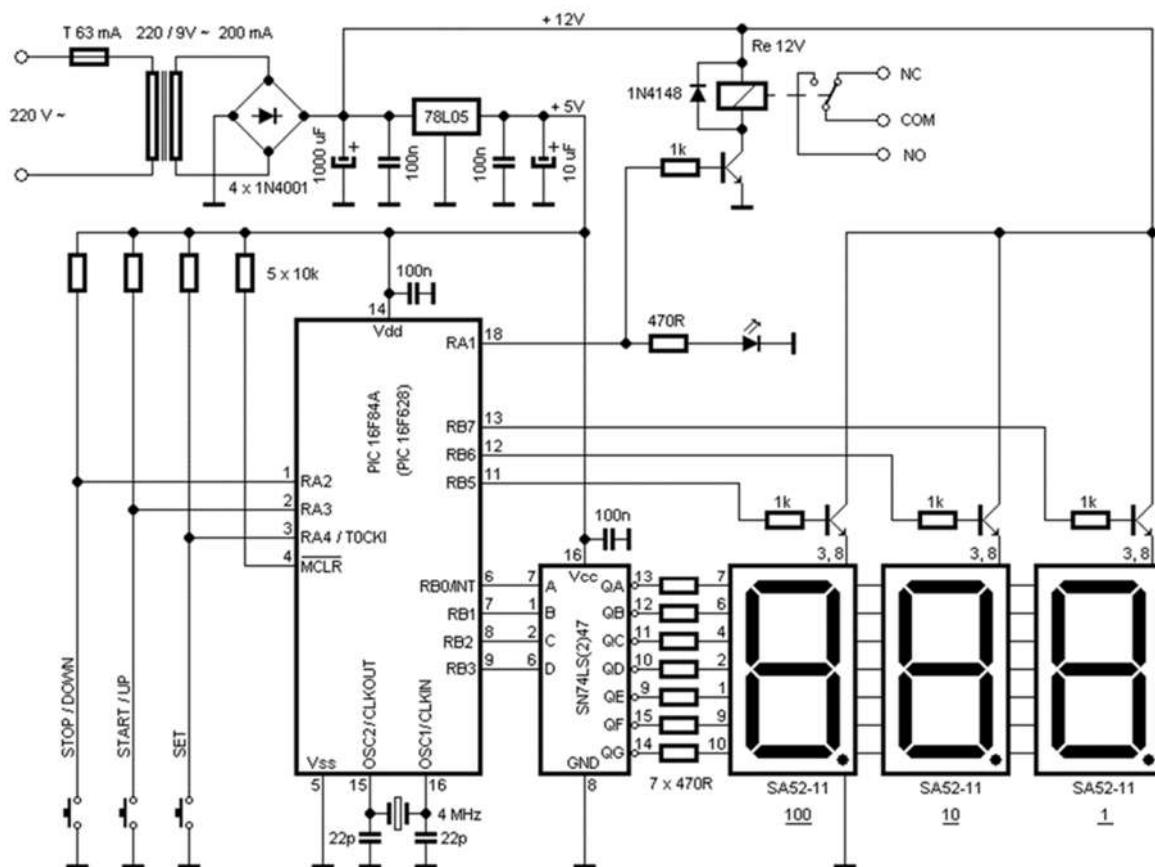
- $100 \text{ k}\Omega$  otpor suhe kože
- $1 \text{ k}\Omega$  otpor vlažne kože
- 400 do  $600 \Omega$  unutarnji otpor na najdužem putu (ruka-noga).

## 6. LINEARNE ISTOSMJERNE ELEKTRIČNE MREŽE

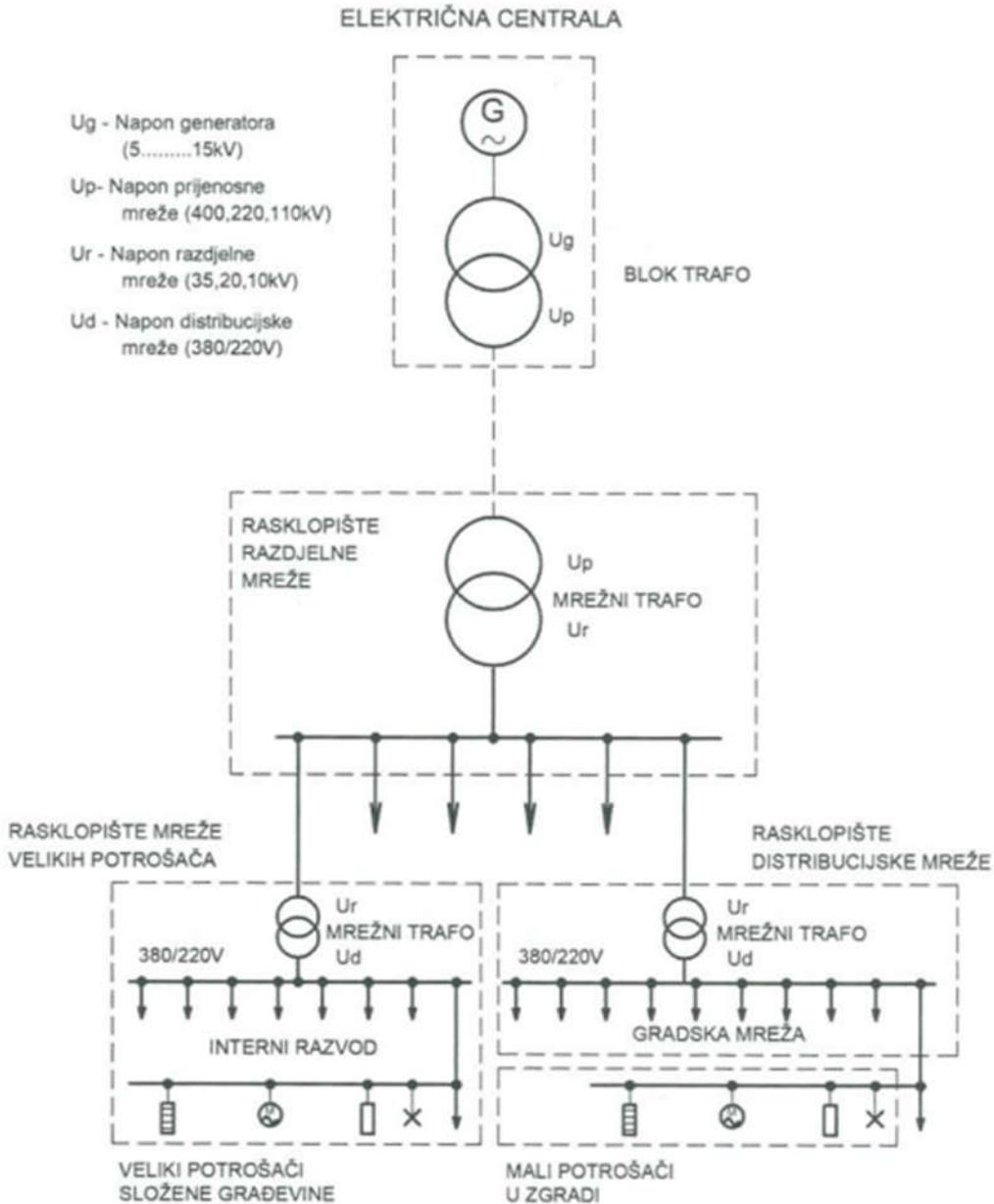
### 6.1. UVODNA RAZMATRANJA

U elektrotehničkoj praksi električni uređaji često su složeni od više izvora i trošila, pa mogu nastati različite spojne sheme izvora i trošila. Takve sheme nazivamo električnim mrežama. U području elektronike pojedini električni uređaji i aparati i njihovi sastavni dijelovi mogu se prikazati preko nadomjesnih shema, kao kombinacija različitih elemenata (izvora, otpornika, svitaka, kondenzatora, blok prikaza i dr.). S druge strane, u području elektroenergetike jednu takvu mrežu predstavljaju generatori u elektranama, koji su vodovima povezani s trošilima široke potrošnje.

Primjeri shema elektroničkog sklopa – vremenski sklop i opće sheme elektroenergetskog sustava, s kojima će se studenti susretati tijekom studija, prikazani su na *Slikama 6.1 i 6.2*.



*Slika 6.1 – Vremenski sklop (Countdown timer)*



Slika 6.2 – Opći shematski prikaz EES-a

Analizu provodimo samo na linearnim mrežama, pa je potrebno definirati svojstva koja mrežu čine linearnom. Za neku matematičku funkciju kaže se da je linearna ako ispunjava dva uvjeta: *homogenosti (proporcionalnosti)* i *aditivnosti (superpozicije)*:

$$f(Kx) = Kf(x) - \text{homogenost}, \quad (6-1)$$

gdje je  $K$  skalarna konstanta;

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - \text{aditivnost}. \quad (6-2)$$

Prepostavimo da u linearnom krugu ili sustavu pobude (ulazi)  $x_1$  i  $x_2$  stvaraju odzive (izlaze)  $y_1$  i  $y_2$ . Tada pobuda  $(K_1x_1 + K_2x_2)$  stvara odziv  $(K_1y_1 + K_2y_2)$ , gdje su  $K_1$  i  $K_2$  konstante. Takav odnos

uzrok – posljedica između pobude i odziva vrijedi za sve linearne sustave. Drugim riječima, linearni sustavi zadovoljavaju *princip superpozicije*.

Promotrimo, prema gore navedenome, odnose napona i struje na otporniku (Ohmov zakon). Ako struja  $I_1$  (pobuda) teče otpornikom  $R$ , stvara se na njemu pad napona (odziv)  $U_1 = I_1 R$ . Slično tomu, ako kroz otpornik teče struja  $I_2$ , stvoreni pad napona je  $U_2 = I_2 R$ . Ako je pobudna struja  $I = I_1 + I_2$ , odziv je napon:

$$U = RI = R(I_1 + I_2) = RI_1 + RI_2 = U_1 + U_2. \quad (6-3)$$

Odziv na zbroj pobuda jednak je zbroju pojedinih odziva, tj. zadovoljen je uvjet (6-2).

Također, ako je  $U$  odziv na  $I$ , tj.  $U = IR$ , tada je odziv na  $KI$ :

$$R(KI) = K(RI) = KU. \quad (6-4)$$

Dakle, ako pobudu pomnožimo konstantom  $K$ , tada se i odziv množi istom konstantom (ispunjeno uvjet (6-1)). Proizlazi kako su odnosi između struje (pobuda) i napona (odziv) na otporniku *linearni*. Isto tako, ako uporabimo alternativni oblik Ohmova zakona ( $I = U/R$ ), može se pokazati kako je i odnos napona kao pobude i struje kao odziva također linearan na otporniku. Zaključujemo da je otpornik *linearan element*.

Električni krug koji sadrži neovisne izvore (strjne i/ili naponske), linearne ovisne izvore i druge linearne elemente jest *linearni krug*. Idealni kondenzatori i svitci imaju također linearne ulazno-izlazne odnose, uz pretpostavku da im je početna energija jednaka nuli (kondenzator nenabijen, magnetsko polje svitka jednako nuli). Ako su im početni uvjeti različiti od nule, analiziraju se kao neovisni izvori. Ti i neki drugi sastavni elementi krugova bit će analizirani u sklopu izmjeničnih mreža.

U električnim krugovima pobudu stvaraju naponski i strujni izvori, a odzivi su struje i naponi na elementima kruga. Dovoljna je prisutnost samo jednog nelinearnog elementa da mreža postane nelinearna. Kada sadrže sve opisane linearne elemente, mreže se općenito opisuju linearnim diferencijalnim jednadžbama.

Mreža koja ne sadrži izvore jest *pasivna mreža*, za razliku od *aktivne mreže* koja sadrži izvore električne energije. Složeni krug s istosmjernim izvorima je *istosmjerna mreža*, za razliku od mreže u kojoj su izvori vremenski promjenljivi. Mreža koja sadrži izvore koji generiraju sinusni valni oblik jest *izmjenična ili sinusoidna mreža*.

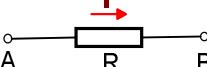
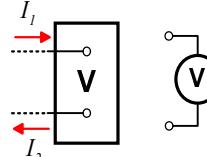
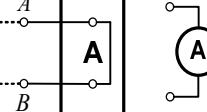
U mreži su obično poznati svi pasivni i aktivni elementi, a traže se struje grana, naponi ili snage na pojedinim elementima kruga. Referentni smjerovi struja zadaju se proizvoljno.

Iako ćemo u ovom poglavlju razmatrati samo krugove s otpornicima i neovisnim istosmjernim izvorima, iste metode proračuna uporabljive su i za mreže koje sadržavaju i druge vrste elemenata, kao što su svitci i kondenzatori, izvori izmjeničnih signala i dr.

## 6.2. ELEMENTI I SASTAVNI DIJELOVI MREŽE

Nakon što smo prethodno detaljno opisali jednostavne strujne krugove, ukratko ćemo obnoviti načine modeliranja temeljnih elemenata električnih krugova: izvora, otpornika i mjernih instrumenata kao elemenata koji tvore električnu mrežu, kao što je to prikazano na *Slici 6.3*.

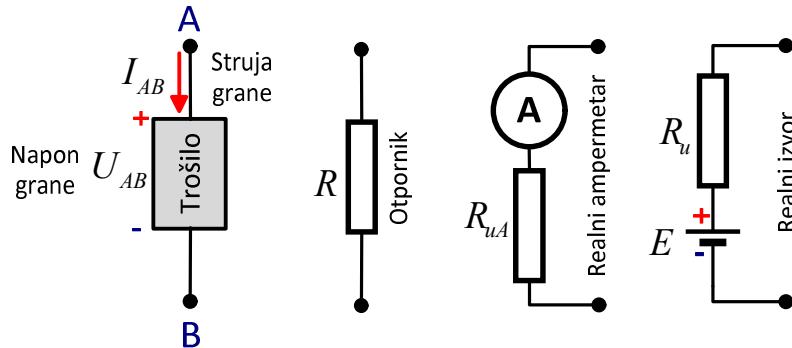
Za realne ampermetre, voltmetre, strujne i naponske izvore potrebno je uzeti u obzir njihove unutarnje otpore i izdvojeno ih prikazati.

Ime	Simbol	Svojstvo
Opći simbol neovisnog naponskog izvora		Na stezaljkama izvora je vremenski promjenljiv ili konstantan napon
Idealni neovisni izmjenični naponski izvor		$u(t) = U_m \sin \omega t$
Idealni neovisni istosmjerni naponski izvor		Razlika potencijala E na stezaljkama izvora je konstantna
Ime	Simbol	Svojstvo
Idealni neovisni strujni izvor		Struja I u grani (smjer zadan strjelicom) je konstantna
Idealni naponom ( $U=AU_x$ ) ili strujom ( $I=AI_x$ ) upravljeni naponski izvor		Napon ovisi o strujnoj/naponskoj varijabli mreže kojoj izvor pripada
Idealni naponom ( $I=AU_x$ ) ili strujom ( $I=AI_x$ ) upravljeni strujni izvor		Struja ovisi o strujnoj/naponskoj varijabli mreže kojoj izvor pripada
Ime	Simbol	Svojstvo
Idealni otpornik		$I = \frac{U_A - U_B}{R}$
Idealni voltmeter		$I_1 = I_2 = 0$
Idealni ampermeter		$U_A - U_B = 0$

Slika 6.3 – Idealni elementi mreže (simboli i svojstva)

U sljedećem koraku opisat ćemo pojedine dijelove električnog kruga koji su dio standardne terminologije u elektrotehnici, kako bismo mogli provesti analizu složenih strujnih krugova. Uvest ćemo standardne nazine za pojedine dijelove mreže radi lakšeg snalaženja u složenim shemama električnih krugova.

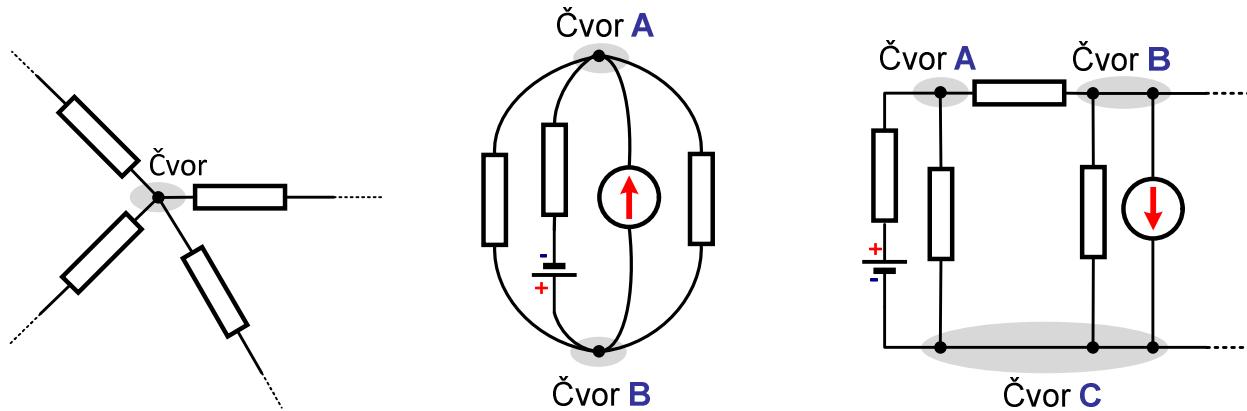
**Grana** je bilo koji dio kruga kojim teče ista struja, a svi elementi u grani, izvori i otpori, spojeni su u seriju. Grana je razapeta između dvaju čvorova. Primjerice, povezuje dvije stezaljke (dva terminala) nekog uređaja ili dijela kruga. Sadrži jedan ili više elemenata kruga. U svakoj grani ucrtava se i referentni smjer struje, koji može biti stvaran ili proizvoljan. Primjeri različitih grana kruga prikazani su na *Slici 6.4*.



Slika 6.4 – Primjeri različitih grana električnih krugova

Broj grana mreže označavat ćemo s  $n_g$ .

**Čvor** je spoj dviju ili više grana – spoj samo dviju grana je *trivijalni čvor*. Bilo koji spoj dobiven spajanjem (u praksi lemljenjem) različitih stezaljaka tvori čvor. Primjeri čvorova kruga prikazani su na *Slici 6.5*.



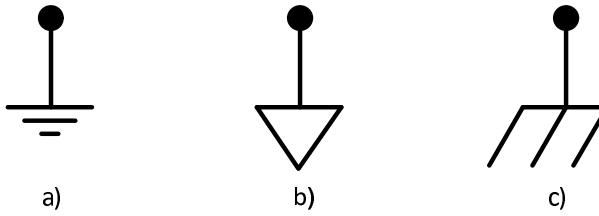
Slika 6.5 – Primjeri različitih čvorova električnih krugova

Ukupan broj čvorova mreže označavat ćemo s  $n_c$ .

**Zemlja**, uzemljenje, u žargonu: šasija, masa, napon kućišta (oklopa).

Za analizirani krug, primjerice u metodi potencijala čvorova, potrebno je proizvoljno odabrat jedan od čvorova kruga kao *referentni čvor*. Potencijal bilo kojeg od preostalih čvorova možemo odrediti u odnosu na referentni.

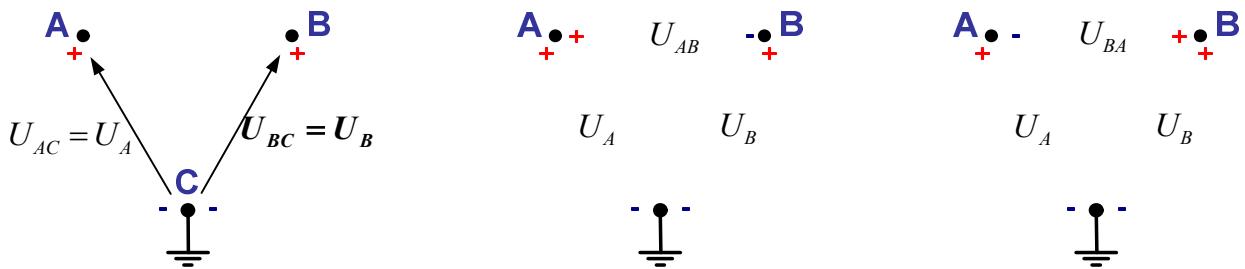
Simboli zemlje (kućišta) prikazani su na *Slici 6.6*.



Slika 6.6 – Simboli referentnog (uzemljenog) čvora

Simbol *c*) na slici obično označuje kućište.

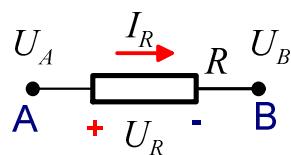
Bilo koji čvor u krugu možemo označiti kao referentni čvor s pripadnim referentnim potencijalom. Razmotrimo čvorove prikazane na *Slici 6.7*.



Slika 6.7 – Označavanje napona između referentnih i nereferentnih čvorova

Referentni čvor je *C*. Kako je referentni čvor istovremeno i uzemljeni čvor, razlika potencijala između njih je 0 V, pa oznaku čvora i napona referentnog čvora možemo izostaviti. Naponi ostalih čvorova su  $U_A$  i  $U_B$  (razlike potencijala u odnosu na referentni čvor) kao na *Slici 6.7.a*). Želimo odrediti napon  $U_{AB}$  između čvorova *A* i *B* s prepostavkom da je čvor *A* na višem potencijalu (+), a čvor *B* na nižem potencijalu (-). Prema II. Kirchhoffovu zakonu (*Slika 6.7.b*) jest:  $U_{AB} = U_A - U_B$ . Na isti način kada bi (+) bio na čvoru *B*, a (-) na čvoru *A*, dobili bismo:  $U_{BA} = U_B - U_A$ , kao na *Slici 6.7.c*).

Bitne varijable u analizi kruga su potencijali čvorova i struje grana, što je izravna posljedica Ohmova zakona. Proučimo granu koja sadrži samo jedan otpornik, kao na *Slici 6.8*.



Slika 6.8 – Grana i varijable grane

Struja  $I_R$  teče otpornikom  $R$  stvarajući na njemu pad napona  $U_R = I_R R$ . Napon  $U_R$  koji tjeru struju kroz otpornik u stvari je razlika potencijala između čvorova *a* i *b*, tj.  $U_R = U_A - U_B$ . Koje značenje pridijeliti varijablama  $U_A$  i  $U_B$ ? Napon jest razlika potencijala. Legitimno je stoga odrediti napon jedne točke (čvora) u krugu. Kada govorimo o naponu čvora, automatski impliciramo prepostavku kako je napon čvora razlika potencijala između samog čvora i referentnog čvora nazvanog zemlja. Referentni čvor smješten je negdje u krugu, a radi jednostavnosti pridijeljen mu je potencijal od nula volti ( $U_C = 0$  V).

Jednadžba  $U_R = U_A - U_B$  razlika je između razlike napona (potencijala):

$$U_R = U_A - U_B = (U_A - U_C) - (U_B - U_C), \quad (6-5)$$

pri čemu je  $U_C$  proizvoljni potencijal zemlje. Jednadžba vrijedi i u slučaju kada referentnom čvoru C nije pridijeljen nulti potencijal.

U svakom krugu može se odabrati točka (ako već prethodno nije određena) koja se „uzemlji“ i radi jednostavnosti joj se odredi potencijal od 0 V. Zemlja u dva potpuno odvojena kruga ne mora biti na istom potencijalu, osim ako krugovi nisu namjerno međusobno povezani.

**Petlja** je bilo koji zatvoreni krug koji se sastoji od grana koje se dodiruju i koje počinju i završavaju u istom čvoru. Pri tomu ne dodiruju nijedan čvor više od jedanput. Obilaženjem po granama mreže dobijemo konturu sastavljenu od nekoliko grana.

Čvorovi, grane, petlje su dijelovi topološkog prikaza mreže. Da bismo taj prikaz upotpunili, uvest ćemo još neke definicije za karakteristične dijelove mreže.

**Stablo** je ogoljena mreža dobivena spajanjem svih čvorova mreže, uz uvjet da se ne dobije ni jedna zatvorena petlja. Složena mreža može sadržavati jedno ili više različitih stabala.

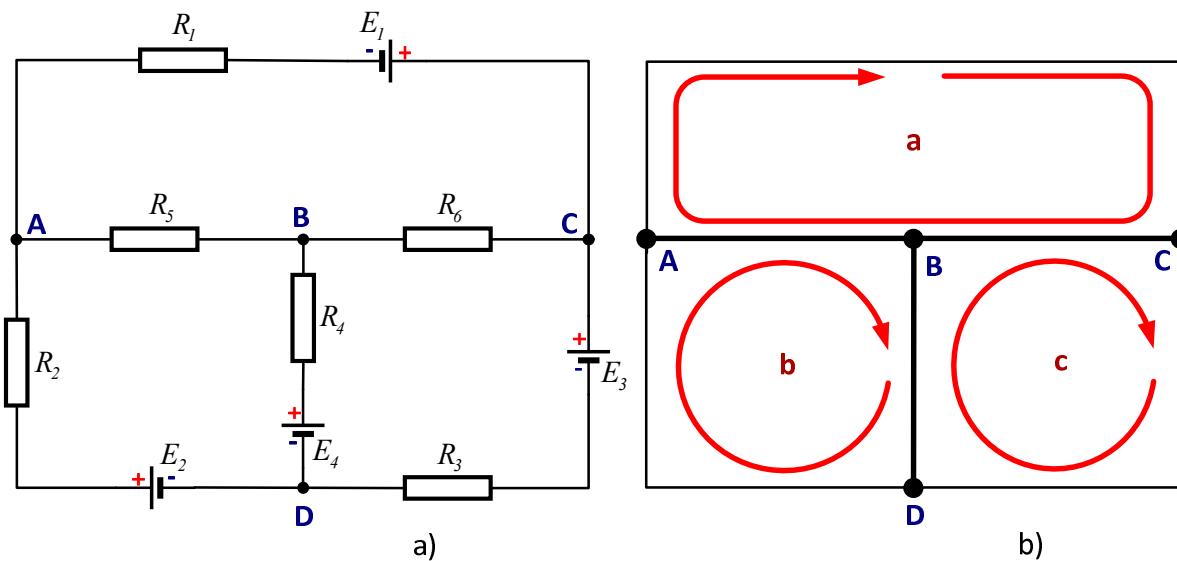
**Zavisne grane** su sve grane stabla mreže. Stablo ima:  $n_{zg} = n_c - 1$ .

**Nezavisne** grane su preostale grane mreže koje nisu obuhvaćene stabalom ( $n_{ng}$ ).

**Nezavisna petlja** je posebna petlja koja je važna za proračun mreže metodom konturnih struja. Neka petlja je nezavisna ako se od svih ostalih petlja razlikuje barem za jednu granu, tj. ako se svaka sljedeća petlja razlikuje od prethodnih barem za jednu granu. Sastoji se od jedne nezavisne grane i zavisnih grana stabla, pa je ukupan broj nezavisnih petlja  $n_{np}$  određen brojem nezavisnih grana.

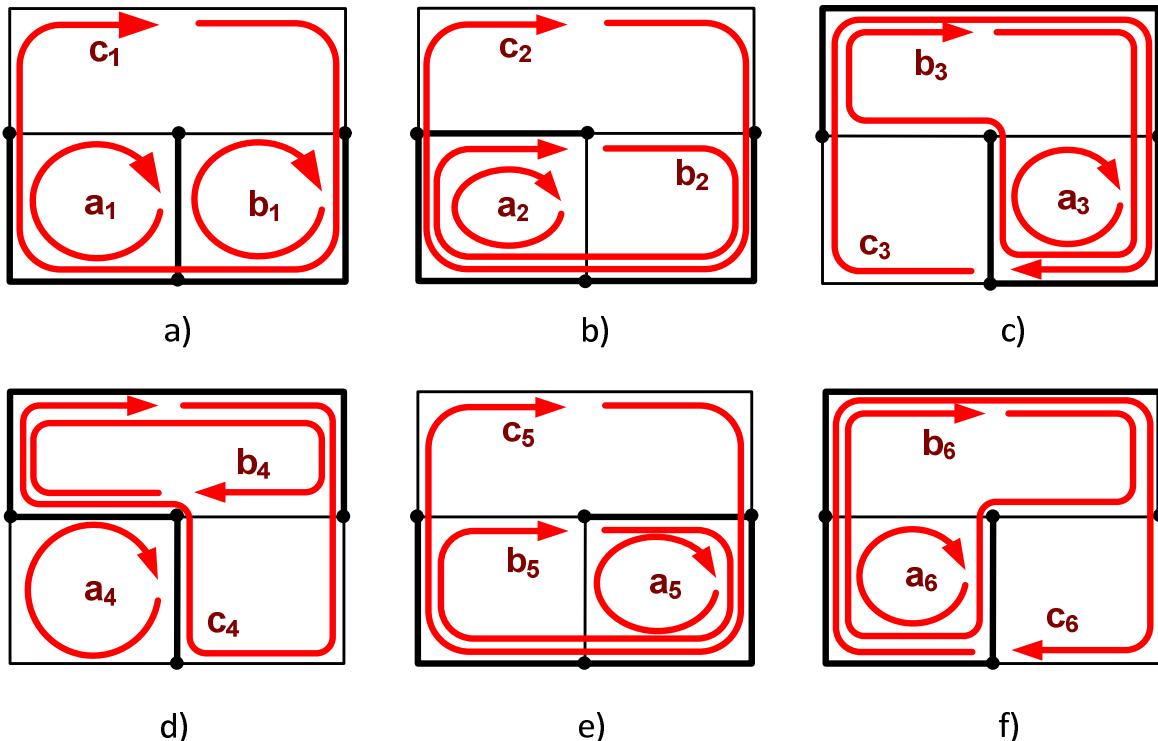
$$n_{np} = n_{ng} = n_g - n_{zg} = n_g - (n_c - 1) \quad (6-6)$$

Odabrat ćemo primjer složene mreže kao na *Slici 6.9.a*). Njezin topološki ekvivalent dan je na *Slici 6.9.b*), s odabranim najjednostavnijim tipom stabla. Oblik stabla mreže koji ćemo primijeniti u analizi ovisi o iskustvu, prisutnosti strujnih izvora u mreži i dr., a temeljni je cilj postaviti najjednostavniji ili najmanji broj jednadžbi za rješenje cijelog kruga. Na slici su zavisne grane deblje, a nezavisne tanje otisnute. Locirat ćemo sve dijelove mreže što će nam biti potrebni u metodama analize mreže koje slijede.



Slika 6.9 – Primjer složene linearne mreže i njezin topološki prikaz

Mreža ima 4 čvora ( $A, B, C, D$ ) i 6 grana ( $A-B, A-C, A-D, B-C, B-D, C-D$ ), od kojih su tri zavisne grane  $n_{zg}$ :  $A-B, B-C, B-D$  i tri nezavisne grane  $n_{ng}$ :  $A-C, A-D, C-D$ . Ukupni broj nezavisnih petlja je 3 prema (6-6), a za odabrani primjer to su petlje  $a, b$  i  $c$ . Preostali mogući oblici stabla mreže prikazani su na Slici 6.10.



Slika 6.10 – Različiti oblici stabla zadane složene mreže

Ukupno se može postaviti 7 različitih vrsta stabla. Za svaku preostalu inačicu stabla ucrtane su i odgovarajuće nezavisne petlje:  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$ ,  $(a_3, b_3, c_3)$ ,  $(a_4, b_4, c_4)$ ,  $(a_5, b_5, c_5)$ ,  $(a_6, b_6, c_6)$ . Odabir nezavisnih petlja bitan je, kako će kasnije biti pokazano, u primjeni metode konturnih struja. Naime, kroz nezavisne petlje teku tzv. *konturne struje*, a granama stabla teku *međašnje struje*. Smjer obilaska nezavisnih petlja po granama mreže odabran je u smjeru kazaljke na satu, ali je on u osnovi proizvoljan.

### 6.3. ANALIZA LINEARNIH OTPORNIČKIH MREŽA

Zadatak *analize mreže* je određivanje struje svake grane ili potencijala svih čvorova.

Temeljem zadane spojne sheme s podatcima o električnim izvorima i otporima trošila određuju se struje, naponi i snage na elementima koji tvore mrežu.

Zbog toga je potrebno što jasnije definirati sve varijable kruga i sistematizirati ih na odgovarajući način. Kada uočimo sve nepoznate varijable, postavlja se grupa pripadnih jednadžbi koju tvore postavljene varijable. Jednadžbe se rješavaju odgovarajućim metodama (determinante – Kramerovo pravilo, supsticija, suprotni koeficijenti, komparacija i dr.). Potrebno je postaviti najmanji broj jednadžbi, koji je dovoljan za određivanje svih nepoznatih varijabli.

*Sinteza mreže* je sastavljanje mreže kako bi se uz zadane napone dobile struje željenih vrijednosti ili obratno. Za razliku od analize, sinteza je općenito teža i složenija, te zahtijeva više znanja i iskustva.

U sljedećim će razmatranjima težište biti na analizi složenih mreža.

Opisat ćemo najvažnije metode analize krugova s otpornicima. Sve se one naravno temelje na Ohmovu i Kirchhoffovim zakonima. Savladavanje ovih metoda bitno pojednostavljuje i analizu krugova izmjenične struje.

Metode potencijala čvorova i konturnih struja fundamentalne su tehnike rješavanja složenih mreža. Opisat ćemo i rješavanje na principu superpozicije koji je koristan u analizi svih tipova linearnih sustava u različitim područjima, ne samo u elektrotehnici.

Sljedeća poglavila odnose se na temeljni koncept pretvorbe složenog kruga u njegov nadomjesni oblik, Theveninov i Nortonov ekvivalent. Pokazat ćemo kako je moguće sve linearne krugove svesti na jedan ili dva ekvivalentna oblika, te da se bilo koji zadatak analize linearnih krugova dade svesti na jednostavni problem strujnog ili naponskog djelila. Prikaz preko Theveninova i Nortonova ekvivalenta omogućuje pojednostavljen opis električnih krugova preko izvora i trošila. Time se olakšava analiza prijenosa snage od izvora do trošila, kao i analiza opterećenja izvora.

## 6.4. METODE I TEOREMI ZA ANALIZU LINEARNIH MREŽA

Prvi je korak u rješavanju mreže analitičkim metodama postavljanje jednadžbi koje prikazuju protok struje kroz elemente mreže i raspodjelu napona na njima. U jednostavnijim slučajevima to se postiže izravno proučavanjem sheme mreže. Ako to nije moguće, mreža se može pojednostaviti i izračun skratiti primjenom odgovarajućih teorema i metoda što se mogu prikazati grupama opće primjenjivih pravila.

Iako ćemo analizirati samo otporničke mreže, metode koje slijede općenito su uporabljive i za opće slučajeve s vremenski promjenljivim izvorima, kondenzatorima, svitcima i drugim elementima mreža.

### 6.4.1. Metoda Kirchhoffovih zakona

U *Pogl.2.2.* dana je definicija *I.* i *II.* Kirchhoffova zakona (*I. KZ* i *II. KZ*). *I. KZ* definira tokove struja koje ulaze u čvor ili izlaze iz čvora, a *II. KZ* određuje raspored napona u petlji koja povezuje elemente kruga. To su temeljni zakoni za sve probleme vezane uz analizu složenih mreža. Ako su poznata svojstva svih elemenata mreže, omogućen je izračun napona i struja na bilo kojem mjestu u mreži.

Za analizu temeljem *KZ-a* uzet ćemo primjer sa *Slike 6.11.* Odabrat ćemo proizvoljno struje u granama mreže i tražimo njihove vrijednosti.

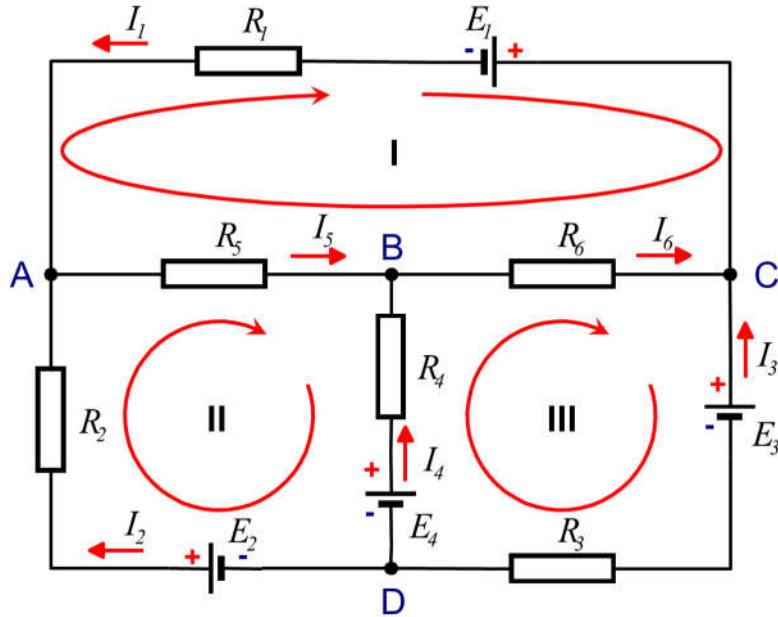
Broj grana  $n_g$  je broj nepoznanica, pa je potrebno postaviti isto toliko linearnih nezavisnih jednadžbi, koje treba riješiti. U analiziranom primjeru treba postaviti niz od  $n_g = 6$  jednadžbi.

Prvo ćemo analizirati *I. KZ* za struje u čvorovima. Sve što bi nam jednadžba zadnjeg čvora dala već je sadržano u jednadžbama prethodnih čvorova (redundantno). To se može matematički pokazati ako zbrojimo jednadžbe  $1, 2, 3, n-1$ . Zbroj tih jednadžbi daje jednadžbu  $n$ -tog čvora.

Samo  $n_c - 1$  jednadžba je nezavisna, pa se upotrebljava samo  $n_c - 1$  čvor. U odabranom primjeru treba, dakle, odrediti  $4-1=3$  jednadžbe čvora. Po *II. KZ-u* preostaje odrediti:  $n_g - (n_c - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$  jednadžbe.

Treba eliminirati redundantne jednadžbe s obzirom na to da je ukupno moguće odrediti jednadžbe za 4 čvora i 7 različitih petlja.

Od tih 11 mogućih, izabrat ćemo 6 linearno nezavisnih jednadžbi. Neka to budu čvorovi *A*, *B* i *C* i petlje *I*, *II* i *III* s prepostavljenim smjerom obilaska po granama kruga.



Slika 6.11 – Petlje i čvorovi za primjenu KZ-a

$$\text{Čvor } A: \quad I_1 + I_2 - I_5 = 0 \quad (6-7)$$

$$\text{Čvor } B: \quad I_5 + I_4 - I_6 = 0 \quad (6-8)$$

$$\text{Čvor } C: \quad I_3 + I_6 - I_1 = 0 \quad (6-9)$$

Napomena: Zbroj gornjih jednadžbi daje jednadžbu čvora D: ( $I_2 + I_3 + I_4 = 0$ ) – dokaz da se radi o redundantnoj jednadžbi.

$$\text{Petlja I} \quad E_1 = -I_6 R_6 - I_5 R_5 - I_1 R_1 \quad (6-10)$$

$$\text{Petlja II} \quad E_2 - E_4 = I_2 R_2 + I_5 R_5 - I_4 R_4 \quad (6-11)$$

$$\text{Petlja III} \quad E_4 - E_3 = I_4 R_4 + I_6 R_6 - I_3 R_3 \quad (6-12)$$

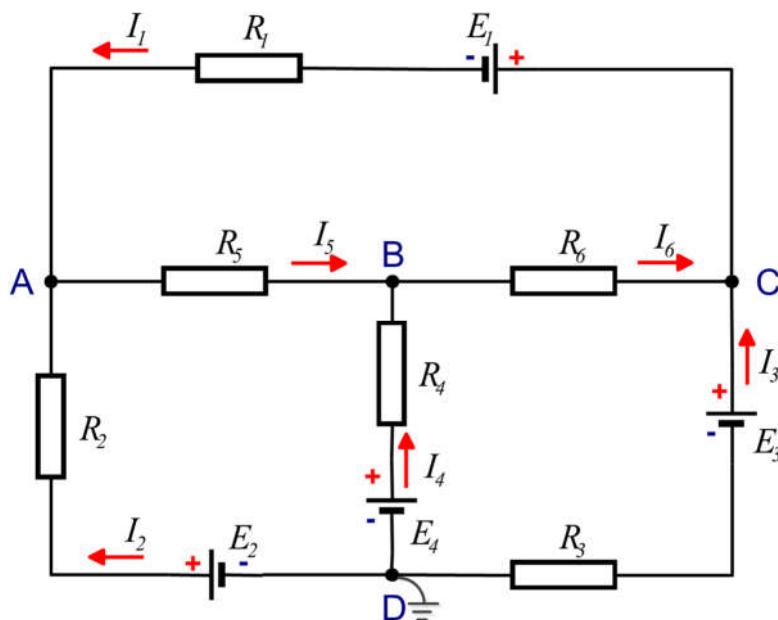
Prvi nedostatak metode KZ je taj što izbor neovisnih jednadžbi nije, osim za jednostavne slučajeve, uvijek očit. Primjerice, od mogućih 11 jednadžbi u analiziranom primjeru trebali smo odabrati 6. Drugi je nedostatak što svakoj grani mreže treba pridijeliti jednu nepoznanicu, pa se za složenije mreže dobije velik broj jednadžbi.

Na sreću postoje sistemske metode primjene KZ-a. Metoda napona čvorova, temeljena na I. KZ-u i metoda konturnih struja temeljena na II. KZ-u, otklanjamju prvi nedostatak i olakšavaju drugi. Njihovom uporabom dobije se minimalno potreban broj neovisnih jednadžbi, koje daju najbrže rješenje. Kada se dobiju rješenja ovih jednadžbi, sve ostale nepoznanice jednostavno slijede iz već određenih. Odluka o tomu koju metodu primijeniti ovisi o broju jednadžbi koju zahtijeva svaka od njih.

### 6.4.2. Metoda napona čvorova

Formuliranje jednadžbi mreže metodom napona čvorova temelji se na grupi varijabli (naponima čvorova) u mreži što implicitno zadovoljavaju  $I_KZ$ . Referentni ili nulti čvor bira se proizvoljno na mjestu gdje je to najprikladnije s obzirom na karakteristike mreže i pridjeljuje mu se vrijednost potencijala jednak nuli. Naponi svakog od preostalih čvorova u odnosu na referentni čvor predstavljaju varijable: *napone čvorova*. Ova metoda može se nazvati i metodom potencijala čvorova, jer će prema referentnom čvoru svaki od preostalih čvorova imati neki napon koji je točno jednak njegovu potencijalu (vidi *Sliku 6.7*). Mreža se u potpunosti opisuje jednadžbama postavljenima po  $I_KZ$ -u, čija su rješenja naponi čvorova. Iz napona čvorova lako slijede svi naponi i struje na svakom elementu mreže. Općenito se otpori zamjenjuju pripadnim vodljivostima radi jednostavnosti.

Primjenu ove metode ilustrirat ćeemo na primjeru iste složene mreže što smo je analizirali primjenom Kirchhoffovih zakona. Za referentni čvor odabrat ćemo čvor  $D$  i prepostaviti smjerove struja u granama mreže kao na *Slici 6.12*.



*Slika 6.12 – Primjer primjene metode napona čvorova*

Strujne jednadžbe preostalih čvorova  $A$ ,  $B$  i  $C$  prema  $I_KZ$ -u navedene su prethodno u jednadžbama (6-7), (6-8) i (6-9). Naponi (potencijali) ostalih čvorova su  $U_A$ ,  $U_B$  i  $U_C$ . Primijenimo li na pojedine grane mreže Ohmov zakon, uz zamjenu otpora odgovarajućim vodljivostima, mogu se, nakon sređivanja, postaviti jednadžbe za tražene struje svih grana:

$$I_1 = [-(U_A - U_C) - E_1]G_1 \quad (1)$$

$$I_2 = (E_2 - U_A)G_2 \quad (2)$$

$$I_3 = (E_3 - U_C)G_3 \quad (6-13)$$

$$I_4 = (E_4 - U_B)G_4 \quad (4)$$

$$I_5 = (U_A - U_B)G_5 \quad (5)$$

$$I_6 = (U_B - U_C)G_6 \quad (6).$$

Uvrštavanjem 6 jednadžbi iz (6-13) u jednadžbe čvorova (6-7), (6-8) i (6-9) dobiju se 3 jednadžbe s naponima čvorova  $U_A$ ,  $U_B$  i  $U_C$  kao nepoznancama:

$$\text{čvor } A: U_A(G_1 + G_2 + G_5) - U_B G_5 - U_C G_1 = -E_1 G_1 + E_2 G_2$$

$$\text{čvor } B: -U_A G_5 + U_B (G_4 + G_5 + G_6) - U_C G_6 = E_4 G_4 \quad (6-14)$$

$$\text{čvor } C: -U_A G_1 - U_B G_6 + U_C (G_1 + G_3 + G_6) = E_1 G_1 + E_3 G_3.$$

Razmotre li se gornje jednadžbe, može se zaključiti kako postoje određene pravilnosti:

- napon čvora kojem pripada jednadžba ima pozitivan predznak i množi se zbrojem admitancija svih grana koje u taj čvor ulaze;
- predznak ostalih napona je negativan, a naponi se množe admitancijom razapetom između tog čvora i čvora pripadne jednadžbe;
- članovi s desne strane jednadžbi su strujni izvori dobiveni pretvorbom iz naponskih izvora i to onih grana koje ulaze u razmatrani čvor;
- predznak strujnih izvora je pozitivan ako je pripadni EMS usmjerjen prema čvoru, odnosno negativan ako je usmjerjen od čvora.

Temeljem navedenih zaključaka može se postaviti opća jednadžba koja vrijedi za bilo koji čvor u složenoj mreži.

Iz analiziranog primjera primjene metode potencijala čvorova vidljivo je kako rješavanje sustava triju linearnih jednadžbi (6-14) omogućuje izračun 6 nepoznatih struja grana ( $I_1, \dots, I_6$ ), što je jednostavnije od izravne primjene KZ-a gdje se trebao riješiti sustav od 6 jednadžbi.

Rješenjem jednadžbi (6-14) dobiju se naponi čvorova  $U_A$ ,  $U_B$  i  $U_C$ , a njihovim uvrštenjem u (6-13) izračunaju se sve tražene struje grana u zadanoj mreži.

#### 6.4.3. Metoda konturnih struja

Metodu je definirao Maxwell temeljem I. i II. KZ-a. Na istom primjeru kao u prethodnim dvjema metodama ilustrirat ćemo primjenu metode konturnih struja – *Slika 6.13*.

Potrebno je:

- postaviti potreban broj kontura (konturnih struja) – broj jednadžbi odgovara broju jednadžbi po II. KZ-u:  $n_g - (n_c - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$  jednadžbe. Odabrane su konture  $a$ ,  $b$  i  $c$ ;
- odrediti jednadžbe konturnih struja za odabранe konture  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – uračunati padove napona na svim otpornicima koje stvaraju sve konturne struje.

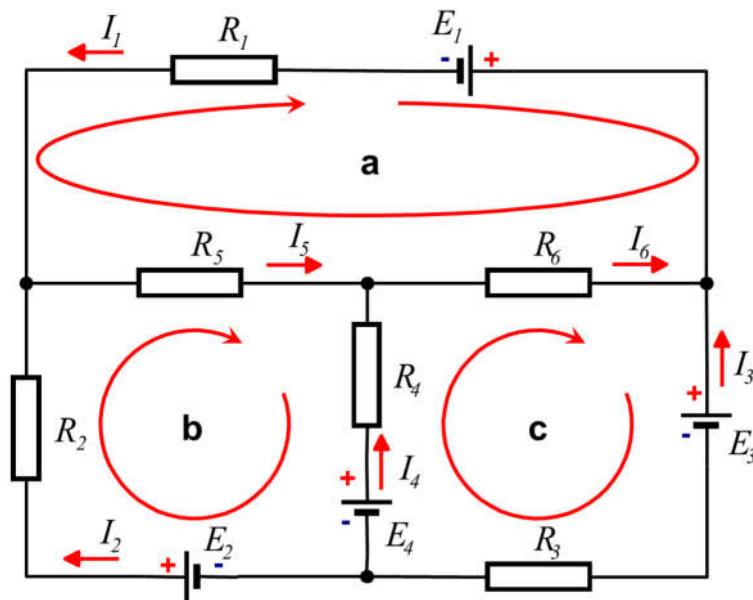
Pri tomu vrijedi:

- struje kroz nezavisne grane odgovaraju strujama pripadnih kontura
- struje u zavisnim (zajedničkim) granama jednake su algebarskoj sumi susjednih kontura
- izbor kontura ovisi o načinu definiranja stabla mreže:

$$\text{Kontura "a": } E_1 = I_a(R_1 + R_5 + R_6) - I_b R_5 - I_c R_6 \quad (6-15)$$

$$\text{Kontura "b": } E_2 - E_4 = I_b(R_2 + R_4 + R_5) - I_a R_5 - I_c R_4 \quad (6-16)$$

$$\text{Kontura "c": } E_4 - E_3 = I_c(R_3 + R_4 + R_6) - I_a R_6 - I_b R_4. \quad (6-17)$$



Slika 6.13 – Primjer primjene metode konturnih struja

Metoda konturnih struja temeljena je na II. KZ-u i otklanja nedostatke KZ-a. Dobije se minimalno potreban broj neovisnih jednadžbi (3 umjesto 6). Kada se dobiju rješenja jednadžbi kontura, sve struje grana jednostavno slijede iz već određenih.

Struje u granama mreže su:

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_a & I_4 &= I_c - I_b \\ I_2 &= I_b & I_5 &= I_b - I_a \\ I_3 &= -I_c & I_6 &= I_c - I_a \end{aligned} \quad (6-18)$$

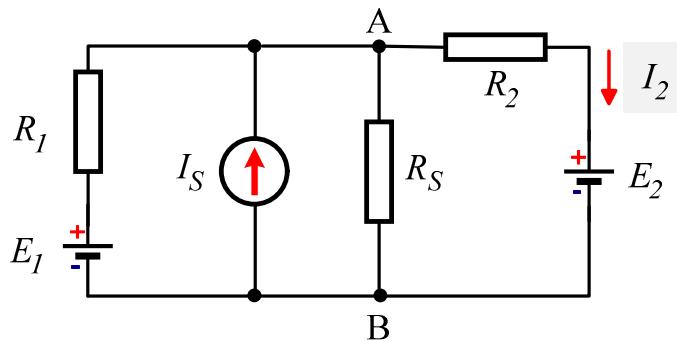
Metode napona čvorova i konturnih struja daju isti rezultat, a u izboru metode vodilja može biti kriterij ukupnog broja napona čvorova „č“, odnosno nezavisnih kontura “n“ u složenoj mreži. Metodom napona čvorova povoljnije je računati ako je  $(\check{c}-1) < n$ , a ako je  $n < (\check{c}-1)$ , prikladnija je metoda konturnih struja.

#### 6.4.4. Metoda superpozicije

Za linearnu mrežu koja sadrži više neovisnih izvora, prema principu superpozicije, odziv mreže na bilo kojem njezinu elementu je algebarska suma pojedinačnih odziva izazvanih svakim od nezavisnih izvora koji djeluju samostalno, uz preostale ukinute izvore. Izvori koji ne djeluju stavljuju se izvan funkcije. Naponski se izvori zamjenjuju kratkim spojem, a na mjestu strujnog izvora je otvoreni krug. Ako su u krugu prisutni ovisni izvori, njihovo djelovanje mora biti uključeno u proračun svakog od neovisnih izvora zasebno.

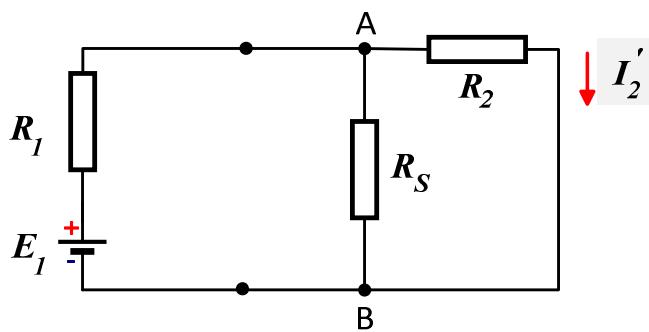
Primjenu ove metode, kao i Theveninov i Nortonov teorem, ilustrirat ćemo na primjeru sa Slike 6.14. Potrebno je odrediti struju  $I_2$ .

Mreža sadrži 3 izvora – jedan strujni i dva naponska. Zadatak se po principu superpozicije rješava u tri koraka za tri različite sheme kruga u kojima pojedinačno djeluju tri izvora:  $E_1, E_2, I_S$ .



Slika 6.14 – Mreža za primjenu metode superpozicije, Theveninova i Nortonova teorema

1. **Uključen izvor  $E_1$**   
Struja  $I_2'$  je djelomična struja koju daje izvor  $E_1$ , pri čemu je izvor  $E_2$  premošten, a izvor  $I_S$  odspojen. Nadomjesna shema prikazana je na Slici 6.15.



Slika 6.15 – Određivanje djelomične struje  $I_2'$

Po Ohmovu zakonu struja je  $I_2' = \frac{U_{AB}'}{R_2}$ .

Napon  $U_{AB}'$  najjednostavnije se određuje iz jednadžbe naponskoga djelila. Naime, napon izvora  $E_1$  dijeli se na napon na otporu  $R_1$  i napon  $U_{AB}$  na paralelnoj kombinaciji otpora  $R_2$  i  $R_S$ . Dakle:

$$U_{AB}' = E_1 \frac{R_2 \| R_S}{R_1 + R_2 \| R_S} = E_1 \frac{\frac{R_2 R_S}{R_2 + R_S}}{R_1 + \frac{R_2 R_S}{R_2 + R_S}} = \frac{E_1 R_2 R_S}{R_1 R_2 + R_1 R_S + R_2 R_S}. \quad (6-19)$$

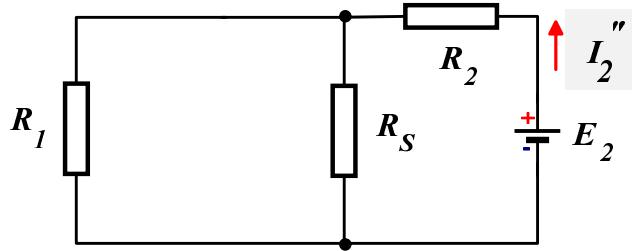
Uvrštavanjem  $U_{AB}'$  dobije se prva djelomična struja:

$$I_2' = \frac{E_1 R_S}{R_1 R_2 + R_1 R_S + R_2 R_S}. \quad (6-20)$$

Do istog rješenja moglo se doći pretvorbom naponskog izvora  $E_1$  u odgovarajući strujni izvor i primjenom strujnog djelila.

### 2. Uključen izvor $E_2$

Struja  $I_2''$  je djelomična struja koju daje izvor  $E_2$ , pri čemu je izvor  $E_1$  premošten, a izvor  $I_S$  odspojen. Nadomjesna shema prikazana je na *Slici 6.16.*



*Slika 6.16. – Određivanje djelomične struje  $I_2''$*

Po Ohmovu zakonu struja je:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_{eq}}, \quad (6-21)$$

pri čemu je  $R_{eq}$  nadomjesni otpor cijelog kruga, a dan je izrazom:

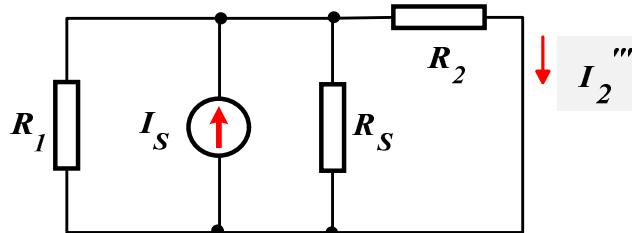
$$R_{eq} = R_2 + R_S \| R_I = R_2 + \frac{R_S R_I}{R_S + R_I} = \frac{R_I R_2 + R_2 R_S + R_I R_S}{R_I + R_S}. \quad (6-22)$$

Uvrštavanjem  $R_{eq}$  dobije se druga djelomična struja:

$$I_2'' = \frac{E_2 (R_I + R_S)}{R_I R_2 + R_2 R_S + R_I R_S}. \quad (6-23)$$

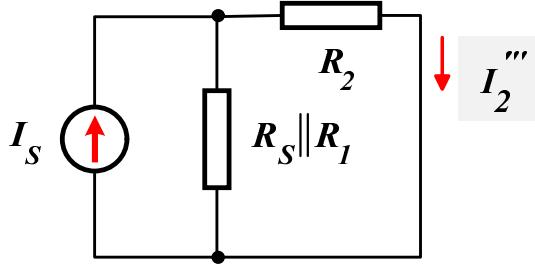
### 3. Uključen izvor $I_S$

Struja  $I_2'''$  je djelomična struja koju daje izvor  $I_S$ , pri čemu su izvori  $E_1$  i  $E_2$  premošteni. Nadomjesna shema prikazana je na *Slici 6.17.*



*Slika 6.17. – Određivanje djelomične struje  $I_2'''$*

Gornja se shema može prikazati u obliku prikladnu za primjenu relacije za strujno djelilo, kao na *Slici 6.18.*



Slika 6.18 – Određivanje djelomične struje  $I_2'''$  pomoću strujnog djelila

Djelomična struja  $I_2'''$  tada je:

$$I_2''' = I_S \frac{R_I \parallel R_S}{R_2 + R_I \parallel R_S} = I_S \frac{\frac{R_I R_S}{R_I + R_S}}{R_2 + \frac{R_I R_S}{R_I + R_S}}. \quad (6-24)$$

Konačno je:

$$I_2''' = \frac{I_S R_I R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S}. \quad (6-25)$$

Algebarski zbroj svih triju djelomičnih struja predstavlja ukupnu vrijednost tražene struje (struja  $I_2''$  teče u suprotnom smjeru u odnosu na dvije preostale djelomične struje).

$$I_2 = I_2' - I_2'' + I_2''' = \frac{E_1 R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} - \frac{E_2 (R_I + R_S)}{R_I R_2 + R_2 R_S + R_I R_S} + \frac{I_S R_I R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} \quad (6-26)$$

$$I_2 = \frac{E_1 R_S - E_2 (R_I + R_S) + I_S R_I R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} \quad (6-27)$$

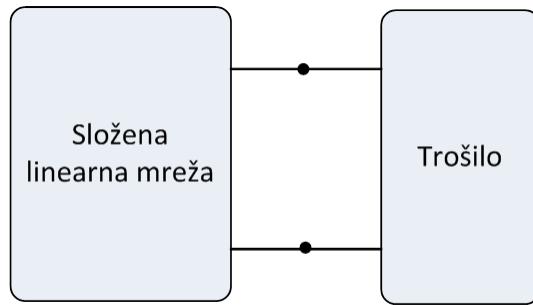
#### 6.4.5. Theveninov teorem

Theveninov teorem je temeljna metoda za određivanje struje/napona/snage u odabranoj grani složene linearne mreže, bez potrebe definiranja struja u preostalim granama mreže.

Kao i Nortonov teorem, temelji se na određivanju nadomjesnog kruga. Čak i vrlo složene krugove uvijek je moguće zamijeniti nadomjesnim temeljnim krugom koji sadrži ekvivalentni naponski ili strujni izvor sa svojim unutarnjim otporom i otpor trošila.

Granu s trošilom, kroz koju teče tražena struja, promatramo izdvojeno od ostatka mreže, kao na Slici 6.19.

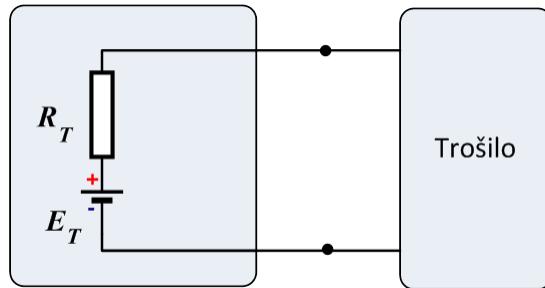
Za izračun struje/napona/snage u nekoj grani linearne mreže ostatak složene mreže zamijeni se aktivnim dvopolom – Theveninovim nadomjesnim izvorom.



Slika 6.19 – Izdvajanje ostatka složene mreže u odnosu na trošilo

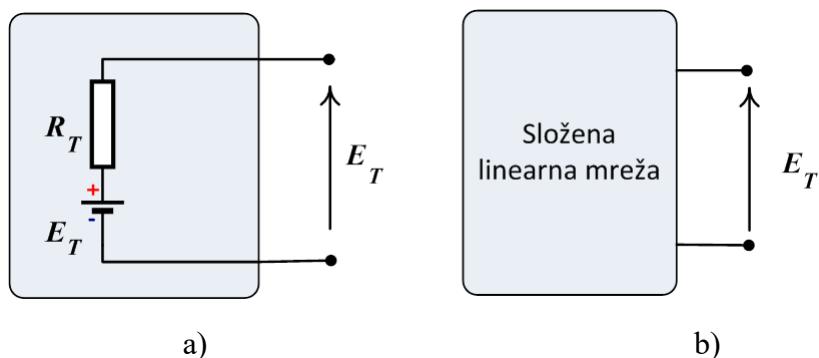
Za Theveninov teorem vrijedi:

- gledano sa strane trošila, bilo koja mreža sastavljena od idealnih naponskih i strujnih izvora i linearnih otpornika može se prikazati nadomjesnim krugom koji se sastoji od idealnoga naponskog izvora  $E_T$  – Theveninov napon i serijski spojenog nadomjesnog otpora  $R_T$  – Theveninov otpor, kao na Slici 6.20;



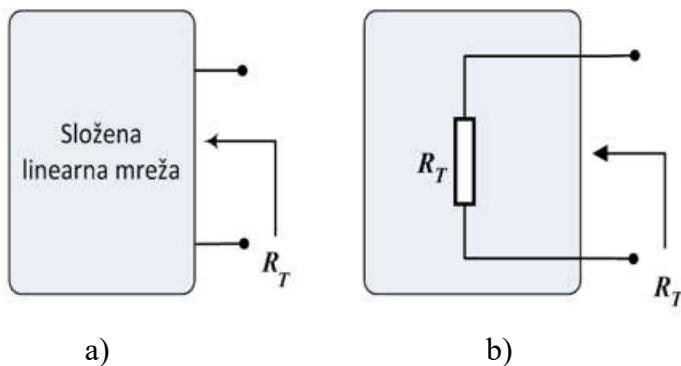
Slika 6.20 – Zamjena ostatka složene mreže Theveninovim ekvivalentom

- za određivanje Theveninova napona potrebno je:
  1. odstraniti granu s otporom trošila. Ostatak mreže se prema toj grani ponaša kao naponski generator predstavljen Theveninovim ekvivalentom – Slika 6.21.a);
  2. odrediti napon otvorenog kruga koji se javlja na stezalkama trošila kada je trošilo odstranjeno – Slika 6.21.b). To je nadomjesni (Theveninov) naponski izvor  $E_T$ ;



Slika 6.21 – Određivanje Theveninova napona

- za određivanje Theveninova otpora potrebno je:
  - odstraniti granu s otporom trošila – *Slika 6.22.a)*;
  - otpor  $R_T$  jednak je nadomjesnom otporu između točaka prekida, pri čemu je odstranjeno djelovanje svih generatora u ostatku mreže (naponski izvori zamjenjuju se kratkim spojem, a strujni izvori otvorenim krugom);
  - proračunati nadomjesni otpor  $R_T$  između stezaljki trošila. Ostatak mreže se prema toj grani ponaša kao nadomjesni otpor predstavljen Theveninovim otporom – *Slika 6.22.b).*



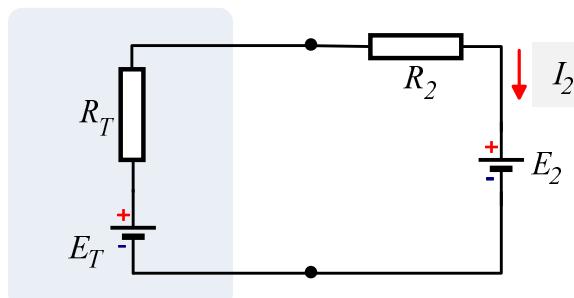
*Slika 6.22 – Određivanje Theveninova otpora*

Napomena: Alternativno se  $R_T$  određuje iz omjera: *napon otvorenog kruga/struja kratkog spoja grane s trošilom.*

Theveninov teorem svrsishodno se primjenjuje pri određivanju prilagodbe trošila na zadani izvor (uvjet maksimalne snage).

Primjenu Theveninova teorema ilustrirat ćemo na već poznatom primjeru sa *Slike 6.14*. Potrebno je odrediti struju  $I_2$ .

U prvom koraku granu kroz koju teče tražena struja  $I_2$  izdvojimo, a ostatak mreže prikažemo nadomjesnim Theveninovim izvorom, kao na *Slici 6.23* – to je shema koja odgovara općoj shemi kruga na *Slici 6.20*.



*Slika 6.23 – Zamjena ostatka mreže Theveninovim ekvivalentom*

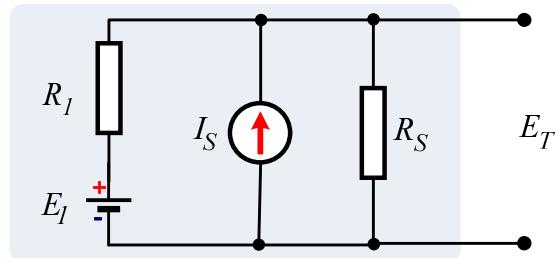
Struja  $I_2$  jednostavno se odredi iz jednadžbe petlje na gornjoj slici:

$$I_2 = \frac{E_T - E_2}{R_T + R_2}. \quad (6-28)$$

Preostaje određivanje parametara Theveninova izvora  $E_T$  i  $R_T$ .

#### Proračun $E_T$

Ako odstranimo granu s nepoznatom strujom, napon otvorenog kruga koji se javlja na stezaljkama te grane jest Theveninov napon  $E_T$ . Primjenom kruga na *Slici 6.21.b)* na konkretni primjer dobije se krug za proračun  $E_T$  prema *Slici 6.24.*



*Slika 6.24 – Određivanje Theveninova napona*

Theveninov napon može se odrediti nekom od već navedenih metoda. Izbor načina rješavanja ovisi o vrsti kruga i iskustvu u analizi električnih krugova. U nastavku su, u svrhu primjene do sada navedenih metoda, prikazane različite mogućnosti izračuna Theveninova napona.

1. *Primjena metode superpozicije* – za ovaj primjer omogućuje najbrži proračun:

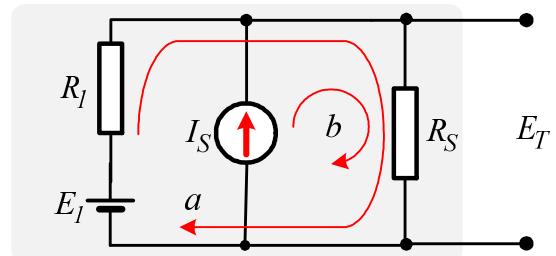
$$E_T = E_I \frac{R_S}{R_S + R_I} + I_S \frac{R_I R_S}{R_S + R_I}. \quad (6-29)$$

Prvi član u gornjoj jednadžbi rezultat je djelovanja izvora  $E_I$  (naponsko djelilo), a drugi je član doprinos strujnog izvora  $I_S$  (napon na paralelnoj kombinaciji otpora  $R_S$  i  $R_I$ ). Sređivanjem se dobije:

$$E_T = \frac{R_S}{R_S + R_I} (E_I + I_S R_I). \quad (6-30)$$

2. *Primjena metode konturnih struja*

Potrebno je postaviti dve konture,  $a$  i  $b$ , kao na *Slici 6.25*. Budući da je u krugu strujni izvor, prikladno je jednu od kontura (kontura  $b$  na slici) odabrati tako da se izvor nalazi u nezavisnoj grani konture. Time se automatski dobije rješenje jedne jednadžbe, jer je struja odabrane konture  $b$  jednaka struci strujnog izvora.



*Slika 6.25 – Određivanje Theveninova napona metodom konturnih struja*

Jednadžbe kontura su:

$$\begin{aligned} E_I &= I_a(R_I + R_S) + I_S R_S \\ I_b &= I_S \end{aligned} . \quad (6-31)$$

Slijedi:

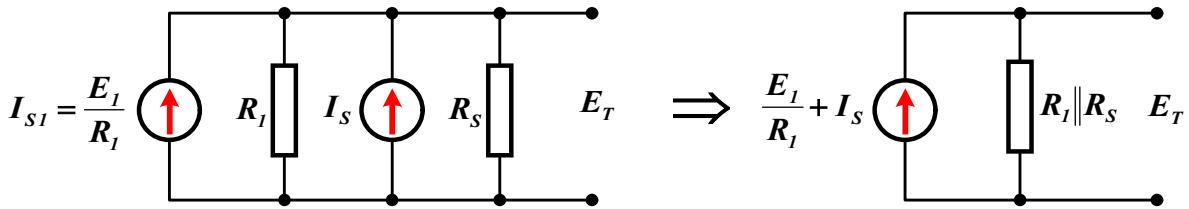
$$I_a = \frac{E_I - I_S R_S}{R_S + R_I} . \quad (6-32)$$

Kroz otpor  $R_S$  teku obje konturne struje, pa je Theveninov napon:

$$E_T = R_S(I_a + I_b) = R_S \left( \frac{E_I - I_S R_S}{R_S + R_I} + I_S \right) = \frac{R_S}{R_S + R_I} (E_I + I_S R_I) . \quad (6-33)$$

### 3. Pretvorba naponskog u strujni izvor

Ako se izvor  $E_I$  pretvori u odgovarajući strujni izvor  $I_{SI}$ , u dva jednostavna koraka odredi se  $E_T$ . Postupak je prikazan na Slici 6.26.



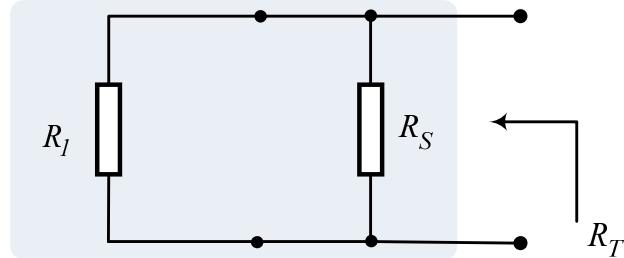
Slika 6.26 – Određivanje Theveninova napona pretvorbom izvora

Theveninov napon je:

$$E_T = \frac{R_I R_S}{R_S + R_I} \left( \frac{E_I}{R_I} + I_S \right) = \frac{R_S}{R_S + R_I} (E_I + I_S R_I) . \quad (6-34)$$

### Proračun $R_T$

Ako prekinemo granu s nepoznatom strujom, izvor  $E_I$  kratko spojimo, a izvor  $I_S$  odspojimo, dobije se krug prema Slici 6.27 koji je, za konkretni primjer, ekvivalent kruga prema Slici 6.22.



Slika 6.27 – Određivanje Theveninova otpora za zadani primjer

Otpor  $R_T$  jednak je nadomjesnom otporu između točaka prekida:

$$R_T = \frac{R_I R_S}{R_S + R_I} . \quad (6-35)$$

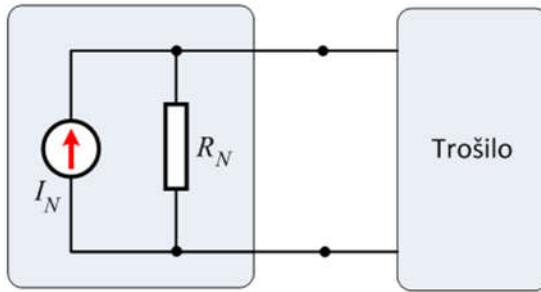
Uvrštavanjem u početnu jednadžbu (6-26) dobije se tražena struja  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{\frac{R_S}{R_S + R_I}(E_I + I_S R_I) - E_2}{\frac{R_I R_S}{R_S + R_I} + R_2} = \frac{E_I R_S - E_2 (R_I + R_S) + I_S R_I R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} . \quad (6-36)$$

#### 6.4.6. Nortonov teorem

Granu s trošilom, kroz koju teče tražena struja, promatramo izdvojeno od ostatka mreže, kao na *Slici 6.19*. Za Nortonov teorem vrijedi:

- gledano sa strane trošila, bilo koja mreža sastavljena od idealnih naponskih i strujnih izvora i linearnih otpornika može se prikazati nadomjesnim krugom koji se sastoji od idealnoga strujnog izvora  $I_N$  (Nortonova struja) i paralelno spojenoga nadomjesnog otpora  $R_N$  (Nortonov otpor), kako je to prikazano na *Slici 6.28*;



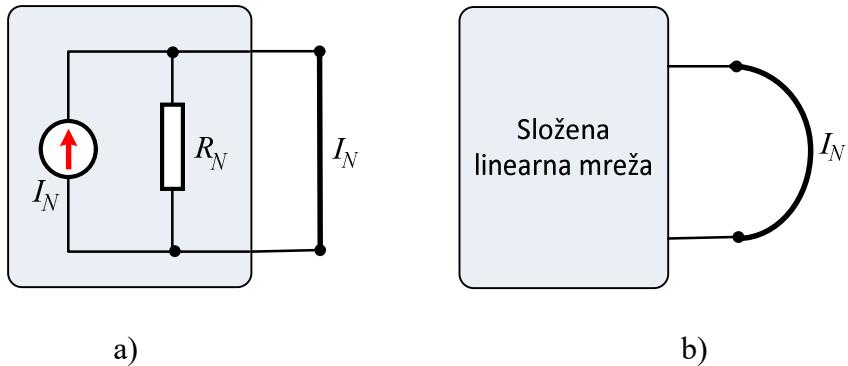
*Slika 6.28 – Zamjena složene mreže Nortonovim nadomjesnim izvorom*

- otpor  $R_N$  jednak je nadomjesnom otporu između točaka prekida, pri čemu je odstranjeno djelovanje svih generatora u ostatku mreže. Nortonov otpor određuje se na isti način kao i Theveninov otpor, tj.  $R_N = R_T$ .

Za određivanje Nortonove struje potrebno je:

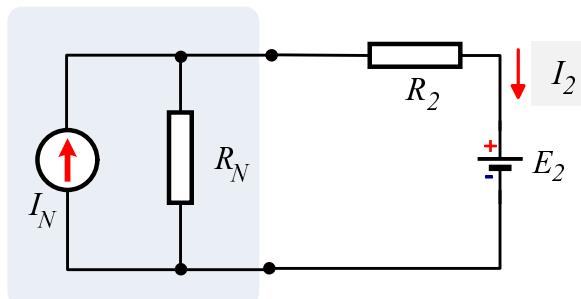
1. Odstraniti granu s otporom trošila i terminale trošila kratko spojiti. Ostatak se mreže prema kratko spojenoj grani ponaša kao strujni generator predstavljen Nortonovim ekvivalentom – *Slika 6.29.a*).
2. Odrediti struju kratkog spoja koji se javlja na stezalkama trošila kada je trošilo odstranjeno – *Slika 6.29.b*). To je nadomjesni (Nortonov) strujni izvor  $I_N$ .

Nortonov generator je strujni izvor ekvivalentan Theveninovu naponskom generatoru. Pretvorbom Nortonova nadomjesnog kruga ( $I_N$ ,  $R_N$ ) u ekvivalentni naponski izvor dobije se Theveninov nadomjesni krug ( $E_T$ ,  $R_T$ ) i obratno.



Slika 6.29 – Određivanje Nortonove struje

Primjenu Nortonova teorema ilustrirat ćemo na primjeru sa *Slike 6.14*. Određujemo struju  $I_2$ . U prvom koraku granu kroz koju teče tražena struja  $I_2$  izdvojimo od ostatka mreže, što je prikazano na *Slici 6.30*, a ostatak mreže zamjenimo Nortonovim ekvivalentnim izvorom. To je shema koja odgovara općoj shemi kruga na *Slici 6.28*.



Slika 6.30 – Zamjena ostatka mreže Nortonovim ekvivalentom

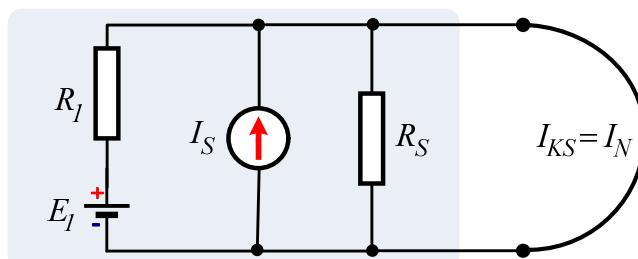
Uporabom metode superpozicije dobije se struja  $I_2$ :

$$I_2 = I_N \frac{R_N}{R_N + R_2} - \frac{E_2}{R_N + R_2} . \quad (6-37)$$

Preostaje određivanje parametara Nortonova izvora  $I_N$  i  $R_N$ .

#### Proračun $I_N$

Ako kratko spojimo granu s nepoznatom strujom, struja kratkog spoja koji se javlja na stezaljkama te grane jest Nortonova struja  $I_N$ . Primjenom kruga prikazanoga na *Slici 6.29.b*) na konkretni primjer dobije se krug za proračun  $I_N$  prema *Slici 6.31*.



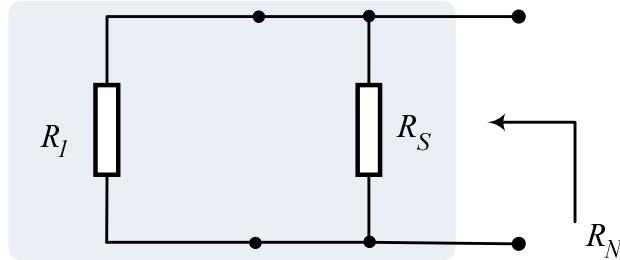
Slika 6.31 – Određivanje Nortonove struje za zadani primjer

Otpor  $R_S$  je kratko spojen. Nortonova struja po metodi superpozicije je:

$$I_N = \frac{E_I}{R_I} + I_S = \frac{E_I + I_S R_I}{R_I} . \quad (6-38)$$

#### Proračun $R_N$

Ako prekinemo granu s nepoznatom strujom, izvor  $E_I$  kratko spojimo, a izvor  $I_S$  odspojimo, dobije se krug prema *Slici 6.32*.



*Slika 6.32 – Određivanje Nortonova otpora za zadani primjer*

Vidi se da vrijedi  $R_N = R_T$ , dakle:

$$R_N = \frac{R_I R_S}{R_S + R_I} . \quad (6-39)$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu (6-37) dobije se tražena struja  $I_2$ :

$$I_2 = \frac{E_I + I_S R_I}{R_I} \frac{\frac{R_I R_S}{R_S + R_I}}{\frac{R_I R_S}{R_S + R_I} + R_2} - \frac{E_2}{\frac{R_I R_S}{R_S + R_I} + R_2} = \frac{(E_I + I_S R_I) R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} - \frac{E_2 (R_I + R_S)}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} . \quad (6-40)$$

Konačno se dobije već poznata jednadžba (6-27):

$$I_2 = \frac{E_I R_S - E_2 (R_I + R_S) + I_S R_I R_S}{R_I R_2 + R_I R_S + R_2 R_S} .$$

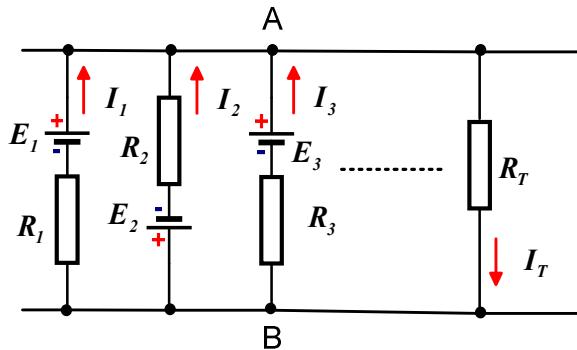
Provjerit ćemo na kraju alternativni način određivanja Theveninova ili Nortonova otpora, odnosno unutarnjeg otpora Theveninova/Nortonova izvora. Uvrštavamo prethodno proračunate vrijednosti  $E_T$  i  $I_N$ :

$$R_T = R_N = \frac{U_{OK}}{I_{KS}} = \frac{E_T}{I_N} = \frac{\frac{R_S}{R_S + R_I} (E_I + I_S R_I)}{\frac{E_I + I_S R_I}{R_I}} = \frac{R_I R_S}{R_S + R_I} . \quad (6-41)$$

#### 6.4.7. Millmannov teorem

Čest je slučaj u elektrotehničkoj praksi kada više paralelno spojenih trošila napajaju paralelno spojeni izvori (primjerice izvori i trošila koja se spajaju između sabirnica u energetskim postrojenjima).

Za izračun struja u pojedinim granama primjenjuje se metoda dvaju čvorova, poznatija pod nazivom Millmannov teorem. Primjenu ćemo razmotriti na krugu koji sadrži  $n$  paralelnih grana, kao na *Slici 6.33*.



*Slika 6.33 – Primjer kruga za primjenu Millmannova teorema*

Napon na svakoj od paralelnih grana je općenito:

$$U_{AB} = E_i - I_i R_i. \quad (6-42)$$

Pojedinačne struje u granama su:

$$I_i = \frac{E_i - U_{AB}}{R_i} = (E_i - U_{AB}) \cdot G_i. \quad (6-43)$$

Primijenimo li *I. KZ* na jedan od čvorova:  $\sum I_i = 0$ , dobije se:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (E_i - U_{AB}) \cdot G_i = \sum_{i=1}^{i=n} E_i \cdot G_i - U_{AB} \sum_{i=1}^{i=n} G_i = 0. \quad (6-44)$$

Traženi napon  $U_{AB}$  prema Millmannovu teoremu je:

$$U_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} E_i \cdot G_i}{\sum_{i=1}^{i=n} G_i}. \quad (6-45)$$

Ako se krug sastoji od triju paralelnih grana s izvorima i grane s trošilom, dobije se:

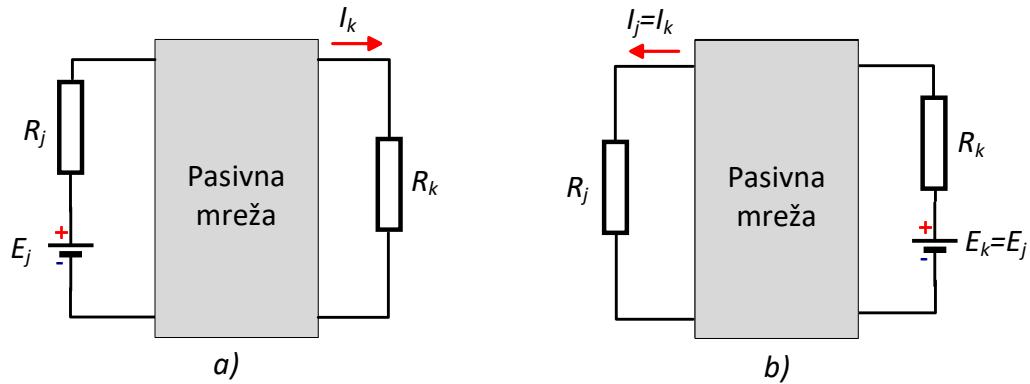
$$U_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_T}}. \quad (6-46)$$

Struje u prvim trima granama na *Slici 6.33* jesu:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{R_1} ; I_2 = \frac{-E_2 - U_{AB}}{R_2} ; I_3 = \frac{E_3 - U_{AB}}{R_3} ; I_T = \frac{U_{AB}}{R_T} . \quad (6-47)$$

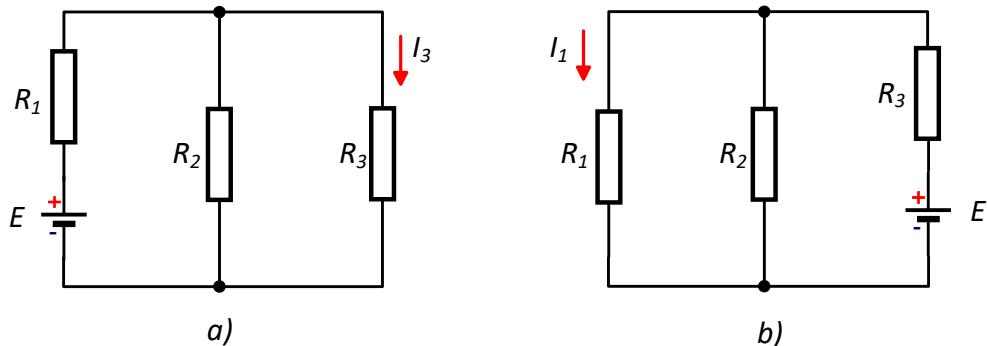
#### 6.4.8. Teorem uzajamnosti

Teorem se može primijeniti samo na linearne mreže i to one što sadrže samo jedan izvor. Na *Slici 6.34* prikazan je princip na kojem se temelji teorem uzajamnosti ili reciprociteta. Ako u nekoj pasivnoj linearnoj mreži djeluje samo jedan generator EMS  $E_j$  u grani  $j$  koji stvara struju  $I_k$  u grani  $k$  (*Slika 6.34.a*), tada će taj isti EMS premješten u granu  $k$  ( $E_k = E_j$ ) izazvati u grani  $j$  struju jednake jakosti  $I_j = I_k$  (*Slika 6.34.b*).



*Slika 6.34 – Teorem uzajamnosti: a) djeluje samo  $E_j$ ; b) djeluje samo  $E_k$ .*

Umjesto izvoda opće relacije dokazat ćemo teorem na jednostavnom primjeru prema *Slici 6.35*.



*Slika 6.35 – Primjer valjanosti teorema uzajamnosti*

Struja  $I_3$  na *Slici 6.35.a* može se primjenom naponskog djelila izraziti kao:

$$I_3 = \frac{U_{R3}}{R_3} = E \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}{\frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}} \frac{I}{R_3} = \frac{ER_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} . \quad (6-48)$$

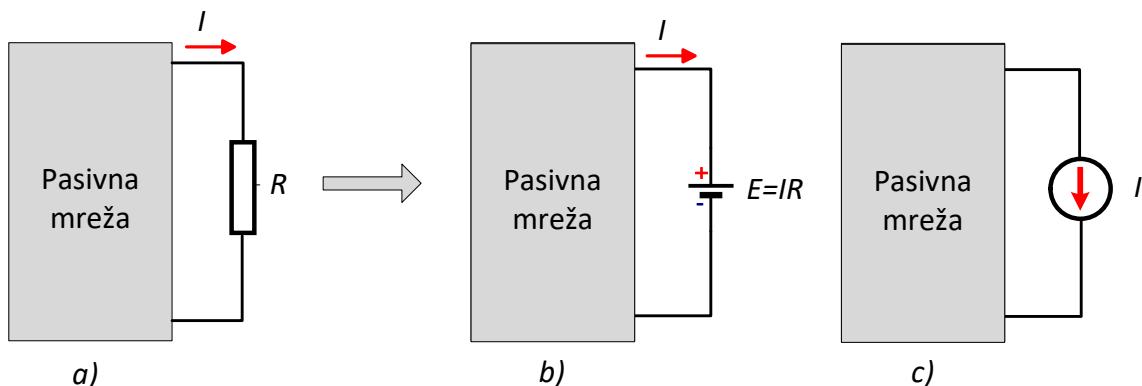
Na isti se način može odrediti struja  $I_1$  na *Slici 6.35.b*:

$$I_1 = \frac{U_{RI}}{R_1} = E \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2}} \frac{I}{R_1} = \frac{ER_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \quad (6-49)$$

Razvidno je kako vrijedi  $I_3 = I_1$ , čime je dokazana valjanost teorema uzajamnosti.

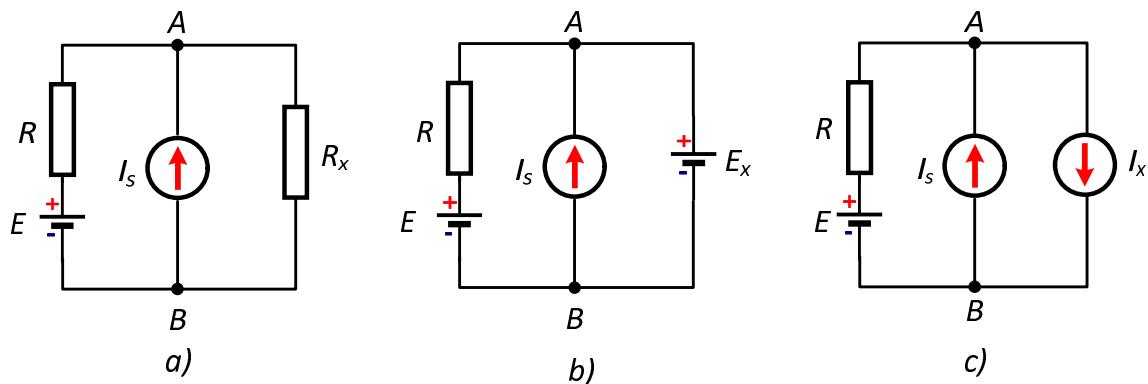
#### 6.4.9. Teorem kompenzacije

Prema Ohmovu zakonu protjecanje struje kroz bilo koji otpornik stvara pad napon na otporniku koji se suprotstavlja naponu izvora. Stoga se pad napon na otporniku u bilo kojoj mreži može prikazati kao naponski izvor što djeluje nasuprot naponu izvora. Teorem kompenzacije upravo se temelji na tom principu. Omogućuje da se u nekom električnom krugu jedna grana (ili njezin dio) otpora  $R$ , kroz koju protječe struja jakosti  $I$  – *Slika 6.36.a*), zamijeni naponskim generatorom elektromotorne sile  $E = RI$ , suprotnoga smjera od smjera struje  $I$  – *Slika 6.36.b*). S obzirom na ekvivalenciju koja vrijedi između realnog naponskog i realnog strujnog izvora, teorem kompenzacije omogućuje također da se grana (ili njezin dio) kroz koju protječe struja  $I$  zamijeni idealnim strujnim izvorom jednakog jakosti i smjera kao što je smjer struje kroz promatrani granu – *Slika 6.36.c*). U literaturi ovaj teorem dolazi i pod nazivom teorem supstitucije.



*Slika 6.36 – Princip primjene teorema kompenzacije*

Jednostavan primjer primjene teorema kompenzacije prikazan je na *Slici 6.37*.



*Slika 6.37 – Primjer primjene teorema kompenzacije*

Potrebno je odrediti otpor otpornika  $R_x$  u mreži prema *Slici 6.37.a*) ako je zadan napon na njegovim krajevima  $U_{AB}$ .

Otpornikom  $R_x$  protječe struja  $I_x$  i na njegovim krajevima stvara pad napona  $U_x$ . Prema teoremu kompenzacije grana s otpornikom  $R_x$  može se zamijeniti idealnim naponskim generatorom elektromotorne sile  $E_x$  suprotnoga smjera od smjera struje – *Slika 6.37b*), pa je:

$$E_x = U_{AB} = E - R(I_x - I_s). \quad (6-50)$$

Uvrsti li se struja  $I_x = U_{AB}/R_x$  u jednadžbu (6-50), dobije se:

$$R_x = \frac{RU_{AB}}{E - U_{AB} + RI_s}. \quad (6-51)$$

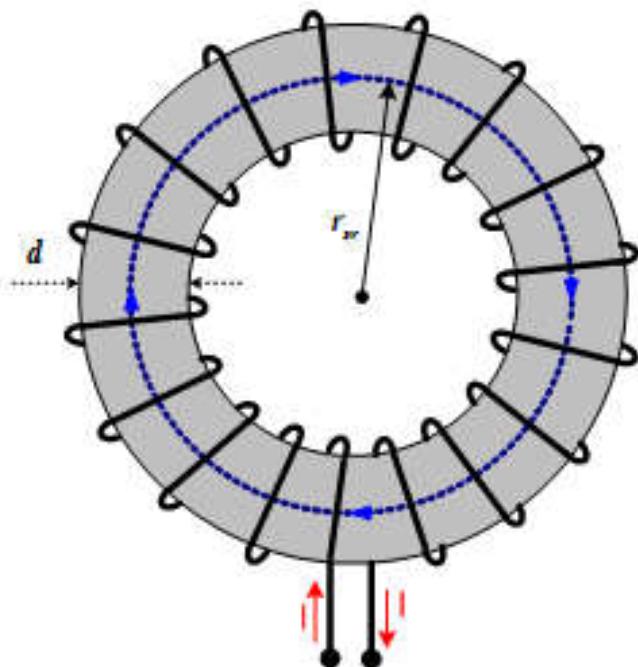
Isti se rezultat dobije kada se grana s nepoznatim otpornikom zamijeni idealnim strujnim izvorom  $I_x$  prema *Slici 6.37.c*).





Ljubomir Malešević

# OSNOVE ELEKTROTEHNIKE I

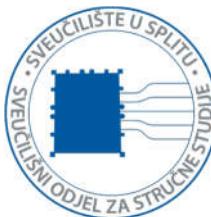


## 3. dio: ELEKTROMAGNETIZAM

STRUČNI STUDIJI ELEKTRONIKE I ELEKTROENERGETIKE

Split, 2018.





## PREDGOVOR

Treći dio kolegija Osnove elektrotehnike I nastavni je materijal koji pokriva područje elektromagnetizma. Izrađen je za studente stručnog studija elektroenergetike i elektronike na Odsjeku za elektrotehniku Sveučilišnog odjela za stručne studije Sveučilišta u Splitu.

Svrha je predmeta razvitak elektrotehničkog načina mišljenja polazeći od usvojenih znanja iz fizike i matematike te izučavanje temeljnih teorijskih znanja iz elektrotehnike u području elektromagnetizma. Glavni je cilj osposobljavanje studenata za olakšano praćenje i savladavanje ostalih stručnih i specijalističkih kolegija. Kako bi se zorno prikazao značaj primjene usvojenih znanja u praksi, dan je velik broj praktičnih primjera i navedena su tipična područja primjene.

U uvodu je naveden povjesni redoslijed bitnih spoznaja iz magnetizma i elektromagnetizma kako bi se uočila važnost pojave iz tog područja za svakodnevni život.

Drugo je poglavlje priprema za izučavanje elektromagnetskih pojava uvođenjem temeljnih veličina magnetskoga polja.

U trećem su poglavljju obrađeni temeljni zakoni magnetskoga polja – Biot-Savartov i Amperov zakon, te određivanje magnetskih veličina za tipične konfiguracije vodiča protjecanim konstantnom strujom u neferomagnetskom okruženju.

Temeljni učinci magnetskoga polja detaljno su opisani u četvrtom poglavljju – stvaranje sile u magnetskome polju i princip elektromagnetske indukcije te pojave samoindukcije i međuindukcije.

Karakteristike magnetskoga polja i proračun magnetskih veličina u feromagnetskim materijalima obrađeni su u petom poglavljju, a energija sadržana u magnetskome polju proučena je u šestom poglavljju.

Završno sedmo poglavlje objedinjuje prethodno navedena saznanja o elektromagnetizmu kroz pregled niza primjera primjene učinaka magnetskoga polja.

Sastavni dio ovih nastavnih materijala su:

- Lj. Malešević: Slajdovi s PowerPoint prezentacijom gradiva koje se studentima iznosi na predavanjima (šest slajdova po stranici u pdf formatu), web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, 2018.

Kao dopuna za pripremu usmenog ispita preporučuje se:

- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s usmenih ispita iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Za pripremu kolokvija i pismenog dijela ispita studenti se mogu koristiti zbirkama:

- Lj. Malešević: *Zbirka zadataka s pismenih ispita iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.
- Lj. Malešević: *Zbirka pitanja i zadataka s kolokvija iz OE I*, web-izdanje (Moodle), Sveučilišni odjel za stručne studije Sveučilišta u Splitu, Split, 2018.

Dio nastavnoga gradiva iznosi se i u obliku demonstracijskih vježba.

Molim čitatelje da me upozore na uočene propuste i pogreške te iznesu moguće primjedbe, na čemu ću im biti zahvalan.

*Split, rujna 2018.*

*AUTOR*



## SADRŽAJ

### 3. dio – ELEKTROMAGNETIZAM

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>2. VELIČINE MAGNETSKOGA POLJA.....</b>	<b>5</b>
<b>3. MAGNETSKO POLJE KONSTANTNIH STRUJA U NEFEROMAGNETSKIM MATERIJALIMA.....</b>	<b>9</b>
3.1. TEMELJNI ZAKONI MAGNETSKOGA POLJA .....	9
3.1.1. Biot-Savartov zakon .....	9
3.1.2. Primjena Biot-Savartova zakona.....	11
3.1.3. Amperov zakon (zakon protjecanja).....	16
3.1.4. Primjena Amperova zakona.....	16
3.2. MAGNETSKI TOK, MAGNETSKA INDUKCIJA .....	30
3.2.1. Prikaz polja silnicama i zakon o konzervaciji magnetskoga toka.....	32
3.2.2. Primjeri izračuna magnetskoga toka .....	34
<b>4. UČINCI MAGNETSKOGA POLJA.....</b>	<b>38</b>
4.1. SILE U MAGNETSKOME POLJU .....	39
4.1.1. Sila na nabijenu česticu.....	39
4.1.2. Sila na vodič protjecan strujom.....	42
4.1.3. Sila između vodiča protjecanih strujom.....	44
4.2. FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE .....	48
4.2.1. Nepokretan svitak u vremenski promjenljivome magnetskom polju.....	50
4.2.2. Svitak se translacijski giba u konstantnome magnetskom polju – napon pomicanja .....	52
4.2.3. Svitak rotira u konstantnome magnetskom polju - napon rotacije.....	54
4.3. SAMOINDUKCIJA I KOEFICIJENT SAMOINDUKCIJE .....	56
4.3.1. Induktivnost dugoga ravnog svitka .....	58
4.3.2. Induktivnost toroidnog svitka .....	58
4.4. MEĐUINDUKCIJA I KOEFICIJENT MEĐUINDUKCIJE .....	59
<b>5. MAGNETSKO POLJE U FEROMAGNETSKIM MATERIJALIMA.....</b>	<b>62</b>
5.1. MAGNETIZIRANJE MATERIJALA.....	62
5.2. PODJELA MATERIJALA PREMA MAGNETSKIM SVOJSTVIMA .....	62
5.3. KRIVULJA MAGNETIZIRANJA FEROMAGNETSKIH MATERIJALA .....	64
5.4. PRORAČUN MAGNETSKOGA KRUGA.....	66
5.5. SILA NA MAGNETSKI MATERIJAL .....	68
<b>6. ENERGIJA MAGNETSKOGA POLJA.....</b>	<b>70</b>
<b>7. PRIMJERI PRIMJENE UČINAKA MAGNETSKOGA POLJA .....</b>	<b>72</b>

**LITERATURA.....**

**PRILOZI .....**

**Predmetci za tvorbu decimalnih jedinica.....**

**Fizikalne veličine.....**

**Grčki alfabet.....**

**Fizikalne konstante.....**

## 1. UVOD<sup>10</sup>

U samim početcima razvoja znanosti u Grčkoj, 600 godina pr. Kr., ljudi su pokušavali objasniti kompleksni svijet oko sebe. Otkrili su magnetizam kao maleno čudo – taman kamen (magnetit) koji nevidljivom silom privlači željezo. U vrijeme kada su ljudi na vatri kovali alat i kad su zvijezde već imale svoja imena, bilo je nešto doista magično – kamen koji je posjedovao volju, posljedica bez uzroka. O rudi čudesnih svojstava, danas znamo da je to  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , pisao je grčki filozof Tales<sup>11</sup> iz maloazijskoga grada Mileta. Taj prirodni magnet Grci su pronašli u pokrajini Magneziji i po tome su mu dali ime.

Petrus Peregrinus 1269. godine otkrio je da svaki komad magnetita zauzima isti smjer ako mu se dopusti da se slobodno okreće. Pokazao je kako kamen od magnetita svoja magična svojstva može prenijeti na običnu željeznu iglu. To je dovelo do otkrića kompasa, iako su saznanja o tomu postojala znatno prije kod starih Kineza. Pomorci više nisu morali ovisiti o suncu ili zvijezdama, pa je kompas pomogao i Kolumbu u otkriću Novoga svijeta.

William Gilbert,<sup>12</sup> liječnik na engleskome dvoru, godine 1600. napisao je revolucionarnu studiju *De Magnete (O magnetu)*, gdje je otkrio kako udaranje po vrelom željezu u njemu inducira magnetizam. Otkrio je i to da magnetizirana igla koja pluta u vodi ne samo što pokazuje sjever nego to čini ukoso prema dolje (prema zemlji). Gilbert je zaključio kako je i Zemlja golem magnet. Danas znanstvenici drže kako magnetizam potječe od struja u tekućim metalima u Zemljinoj jezgri.

Znamo da postoje magneti svih veličina, veliki poput planeta i maleni poput atoma. Izvor magnetizma je u atomu. Oko atomske jezgre nalazi se golem prostor unutar kojega kruže elektroni. Naboј koji se kreće stvara magnetsko polje i to je jedan elementarni magnet. Ako su ti magneti okrenuti svaki na svoju stranu, onda je krajnji rezultat nulti magnetizam, kao što je to slučaj za većinu tvari. Takve tvari nisu magneti. Ali u nekim metalima poput željeza skupine atoma slažu svoje polove u isti smjer. Te skupine polova zovu se *domene*. Svi se sjeverni polovi okupe na jednoj, a južni na drugoj strani, te se tako dobije magnet.

Ako se željezne strugotine prospu po magnetu i uokolo, magnetizam se može i vidjeti. Magnetsko polje nije jednoliko. Ima nevidljive crte – silnice koje izlaze iz vrhova magneta. Zemlja je velika, ali kada bismo je mogli posuti željeznim strugotinama, opet bismo vidjeli iste magnetne silnice, koje se kao i kod svih magneta skupljaju na polovima. Magnetsko polje Zemlje štiti nas od opasnog kozmičkog zračenja. Sunce stalno emitira nabijene čestice. Kada bi te čestice padale na Zemlju, kozmičko zračenje ozbiljno bi utjecalo na naše zdravlje (rak kože, katarakte i druge bolesti). Zemljino magnetsko polje preusmjerava te čestice i sprječava njihov ulazak u atmosferu. Povijest Zemljina magnetskog polja zapisana je u slojevima stijena. Kada se stijena formira, neke se njezine čestice postave u smjer Zemljina magnetskog polja. Svaki sloj čuva tadašnje stanje polja. Studije su pokazale da magnetsko polje brzo slabi. Oslabjelo je čak za 15 % od 1670. godine. Kad bi se takav trend nastavio, Zemlja bi ostala bez magnetskog polja za dvije tisuće godina. Kompasi bi postali beskorisni, čovjek bi bio izložen kozmičkom zračenju. Ali nitko ne zna što će se stvarno dogoditi. Polje bi moglo početi jačati i tako sačuvati svijet o kojem ovisimo.

Još je jedna važna pojava u prirodi vezana za magnetizam. To je biomagnetizam. Neki primitivni organizmi (bakterije), kao i mnoge ptice i ribe orijentiraju se po magnetskom polju. To šesto osjetilo posljedica je postojanja magnetita u životinjskim mozgovima. Čak su i seciranjem ljudskog mozga pronađeni minijaturni magneti među neuronima.

<sup>10</sup> Korišteni podatci iz BBC-jeva dokumentarnog filma o magnetizmu.

<sup>11</sup> Thalēs (c. 624. – c. 546. pr. Kr.)

<sup>12</sup> William Gilbert (1544. – 1603.)

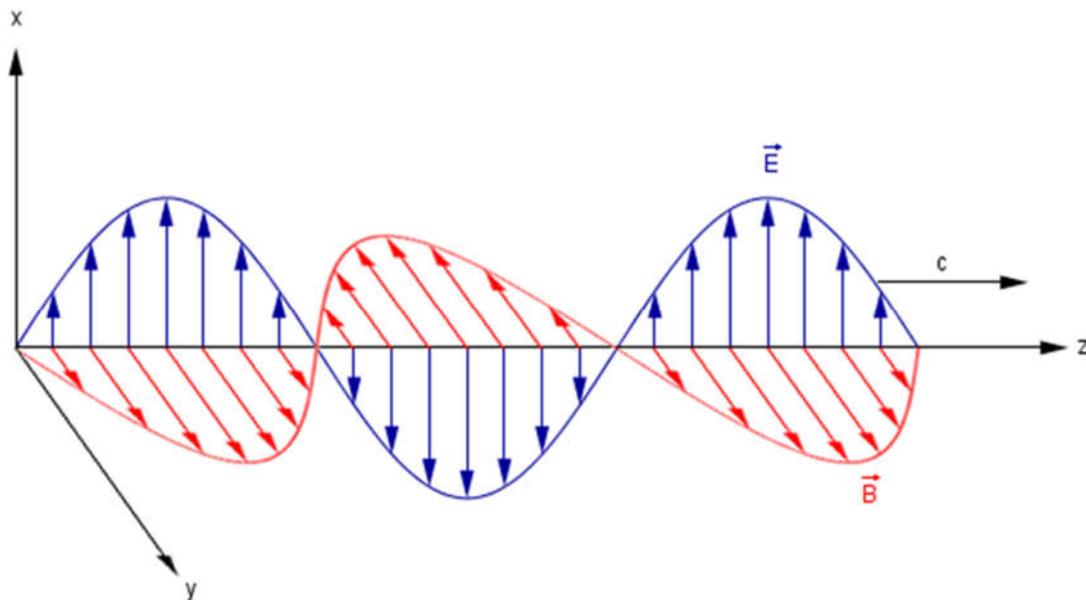
Magnetizam se iskorištava i u medicinske svrhe. Tomografsko prikazivanje pomoću magnetske rezonancije unaprijedilo je medicinsku zaštitu. Pacijent se postavi u cilindar s magnetskim poljem 5000 puta jačim od Zemljina. Jezgre atoma u ljudskom tijelu počnu se ponašati kao igle kompasa: poredaju se u niz. Nakon toga jezgre bivaju izložene radiovalovima. Kad impulsi prestanu, jezgre se vrate u prethodno stanje. Oslobođena energija ponaša se poput signala minijaturnih radiopostaja. Ti signali prenose se u računalo koje ih pretvara u sliku. Snimanje uređajima za magnetsku rezonanciju daje uvid u unutrašnjost tijela.

Magnetizam nije samo zaštita Zemlje. Otkriće veze između elektriciteta i magnetizma promijenilo je sadržaje naših života. Godine 1819. Danac Oersted<sup>13</sup> postavio je kompas blizu žice koju je spojio na bateriju. Kad je struja potekla žicom, igla se pomaknula. Oersted je prvi pokazao da električna struja svara magnetsko polje.

Andre Maria Amper (1820. godine) otkrio je postojanje elektromagnetskih sila među vodičima protjecanim strujom i činjenicu da se gusto motani svitak ponaša kao cilindrični magnetski štap. U Engleskoj je Michael Faraday nastavio njegov rad. Dokazao je kako se kolut žice u blizini magneta počinje okretati kad pored njega poteče struja. Bio je to početak razvoja elektromotora. Otkrio je 1831. godine da pomicanje magneta unutar svitka inducira električnu energiju u svitku. Bio je to početak razvijanja električnih generatora. Dakle, sada se mehanička energija mogla pretvoriti u električnu i obratno. Nastalo je novo doba golema i brza tehnološkog razvijanja.

Magnetizam je svugdje prisutan. Iz doba strojeva prešlo se u dobu informacija. To je još jedna tehnološka revolucija koju je omogućio magnetizam. Žličica hrde nanesena na diskove ili vrpce može pohraniti više podataka od svih glinenih pločica u Egiptu. Audiovrpcu, videokasete, računalne diskete i diskovi podatke bilježe magnetski.

Spremanje podataka nije jedina uloga magnetizma u dobu informacija. Elektromagnetski valovi omogućuju prijenos podataka širom svijeta. Najvažnija uloga magnetizma je prijenos energije kroz svemir. Da nema elektromagnetskih valova, Sunčev zračenje ne bi dopiralo do nas. Električno i magnetsko polje koje vibrira pod pravim kutom stvara valove koji prenose radijske i TV signale putujući u obliku elektromagnetskog vala. Svjetlost koju šalje Sunce također je elektromagnetski val, tj. vibracija u kojoj električni dio inducira magnetski, magnetski dio električni i to se neprekidno ponavlja uz pravocrtno kretanje vala, kao na *Slici 1.1*.



*Slika 1.1 – Elektromagnetski val*

<sup>13</sup> Hans Christian Ørsted (1777. – 1851.)

Magnetizam je stvorio novi svijet. Jedna je od čudesnih primjena magnetizma i magnetski levitirajući vlak – maglev. To je stroj koji doslovno leti pomoću magneta. Ako spojite dva sjeverna pola magneta, odbijat će jedan drugoga. Odbojne sile mogu s tračnicama podignuti vlak težak 50 tona. Snažni magneti u vozilu induciraju odbojne sile u tračnicama kao što u zrcalu vidite svoje lice. Promjena privlačnosti i odbojnosti magnetskog polja u tračnicama vuče magnet brzinom većom od 400 km/h. To više nije znanstvena fantastika. Takva vozila već postoje u Njemačkoj, Japanu i Kini, a razvijaju ih i u drugim zemljama.

Na MIT-u se koriste magnetizmom u pokusima dobivanja energije iz vode. Ako razbijete atome urana, jedan se dio njihove mase pretvori u energiju, u velike količine energije. To je nuklearna fisija. Energija se može dobiti i ako se spajaju atomi. Ako se spoje dva atoma vodika, dobije se jedan atom helija i energija. To je fuzija. Ako izvažete atom helija i usporedite ga s težinom 2 atoma vodika, ustanovit ćete da je helij malo lakši. Ta mala razlika u masi pretvorena je u energiju po čuvenoj relaciji  $E = mc^2$ , gdje je  $E$  energija,  $m$  je razlika u masi između  $2H$  i  $He$ , a  $c$  brzina svjetlosti od 300 000 km/s. Kvadrat brzine nevjerljivo je velik broj. Zato mala razlika u masi oslobađa golemu energiju. Fuzija održava Sunce na životu. Ali i kad bismo imali dio Sunca, u čemu bismo ga držali? Magnetizam daje odgovor – u magnetskoj boci.

TOKAMAK je stroj za proizvodnju toroidnoga magnetskog polja za razgraničenje plazme. To je jedan od kandidata za proizvodnju kontrolirane termonuklearne fizijske energije. U novije se vrijeme uređaji ovakva tipa nazivaju zajedničkim imenom fizijski reaktori. Pojam TOKAMAK transliteracija je ruske riječi tokamak, koja je sama po sebi kratica od ruskih riječi: „тороидальная камера в магнитных катушках“ – toroidna komora s magnetiziranim zavojnicama (vjerojatno *tochamac*).

Magnetski plazmeni fizijski generator TOKAMAK na MIT-u za izazivanje fuzije treba energiju dovoljnu da napaja osrednji grad. Energija se šalje u magnet radi stvaranja vrlo snažna magnetskog polja. Unutra se plin zagrijava na temperaturu do 50 milijuna stupnjeva. U središtu Sunca temperatura je samo 15 milijuna stupnjeva. Ni jedan materijal na Zemlji ne može podnijeti ni milijun stupnjeva. Zato treba tolika energija za stvaranje magnetske boce koja plazmi ne dopušta da dotakne stroj. Na MIT-u rabe 57 000 litara tekućeg dušika dnevno za hlađenje magneta na  $-250^{\circ}\text{C}$ . Kroz ohlađene magnete šalje se u TOKAMAK golema količina energije. Magnetska sila toliko je jaka da bi mogla podignuti gomilu automobila visoku kao Mount Everest. Problem je u tomu što TOKAMAK za sada troši više energije nego što je proizvodi. Kad zaista dostigne temperaturu od 50 milijuna stupnjeva, moći će proizvesti energiju koja će napajati čitavi svijet i koja će zamijeniti fosilna goriva. Energiju bismo mogli dobiti iz morske vode, a pri tomu ne bismo zagađivali okoliš nuklearnim otpadom. Dobili bismo čistu energiju i svjetlost.

Godine 2005. odlučeno je da se u Cadaracheu kod Marseillea sagradi Međunarodni termonuklearni reaktor ITER u suradnji EU-a, SAD-a, Rusije, Kine, Indije, Japana i Južne Koreje. Gradnja ITER-a počela je 2007., a prva plazma očekuje se 2019. godine. Projekt ITER najveći je međunarodni znanstveni projekt, vrijedan oko 13 milijardi eura. ITER bi po svojim karakteristikama trebao nadmašiti sve do sada viđeno kod Tokamaka. Temperatura koja se planira postići u središtu plazme trebala bi dosegnuti čak 150 milijuna  $^{\circ}\text{C}$ , tj. 10 puta više od središta Sunca. Bljeskovi fuzije trebali bi trajati više od 500 sekunda. Bio bi zadovoljen Lawsonov kriterij za samoodrživu fuziju. Za ilustraciju veličine i snage tog stroja navodi se kako će se za pokretanje fuzije povlačiti iz francuske električne mreže snaga od 150 do 650 MW u vremenu od 30 sekunda. U ITER-u bi se testirao niz tehnoloških procesa koji bi omogućili gradnju komercijalnih termonuklearnih reaktora nakon 2035. Temeljem spoznaja s ITER-a planira se gradnja još jačeg termonuklearnog reaktora DEMO, od 2 do 2,5 GW, koji bi bio spojen na električnu mrežu kao i „klasična“ nuklearna elektrana. Gradnja DEMO-a trebala bi početi 2025., a trebao bi proraditi do 2035. godine i biti model za komercijalne fizijske reaktore snage 3-4 GW. Očekuje se kako bi termonuklearni fizijski reaktori nakon 2050. mogli proizvoditi glavninu energije u svijetu, što bi otklonilo krizu energije u svijetu i smanjilo emisiju  $\text{CO}_2$ .

Magnetizam pomaže i u traženju saznanja o postanku našeg skladnog i kompaktnog svemira. U Fermilabu blizu Chicaga, kao i u CERN-u blizu Geneve, simulira se trenutak stvaranja – veliki prasak (engl. *big bang*). Čestice jure krugom golema opsega, a pokreću ih magneti u ciklotronu. Kad se čestice sudare, to je minijaturni veliki prasak. Ostatci nakon eksplozije dočaravaju nam kako je nastao svemir. U trenutku velikog praska svemir je bio jednostavan. Jedna čestica i jedna sila, a možda su sila i čestica bili jedno. Stvari su se zakomplicirale hlađenjem svemira. U njemu danas postoje četiri osnovne sile:

- *gravitacija* – drži galaktike i planete
- *jaka sila* – drži atomske jezgre na okupu
- *slaba sila* – uzrokuje sporu dezintegraciju atomske jezgre
- *elektromagnetska sila* – veže elektrone uz jezgru i atome u molekule.

Najveći je cilj fizičara naći teoriju koja bi ujedinila sve četiri sile. Einstein je utrošio trideset godina pokušavajući povezati gravitaciju, koja drži Zemlju u orbiti i bacu jabuku sa stabla na zemlju, s elektromagnetskom silom. Nije uspio. Zasad su znanstvenici povezali dvije od četiriju sila: slabe i elektromagnetske sile. One se očituju pri kolizijama u laboratorijima. Za potpuno ujedinjenje fizičari bi trebali akcelerator opsega 1000 svjetlosnih godina. Čak i kada bi uspjeli u tome, pitanje je kolike bismo koristi imali od svega.

## 2. VELIČINE MAGNETSKOGA POLJA

Radi lakše interpretacije veličina koje opisuju karakteristike magnetskog polja uspoređivat ćemo ih s odgovarajućim električnim veličinama. Analogije koje ćemo navesti formalnog su karaktera i služe za lakše razumijevanje magnetskih veličina.

- **Magnetski tok  $\Phi$**

To je veličina koja se može usporediti s električnom strujom iako u sredini prožetoj magnetskim tokom ništa ne teče. Usporedbu poticu linije magnetskog polja koje ilustriraju magnetski tok, slično kao što smo prikazivali električni tok u elektrostatickom polju.

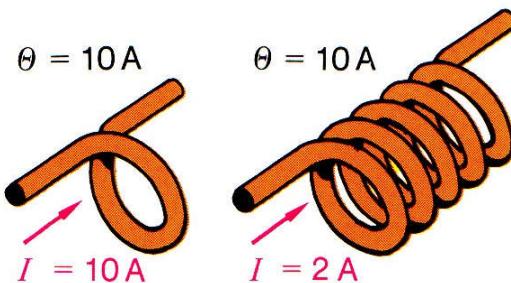
Izvedena SI jedinica magnetskog toka  $\Phi$  je veber (1 Wb = 1 Vs).

- **Magnetomotorna sila (MMS)  $\Theta$**

Magnetomotorna sila  $\Theta$  (analogija s elektromotornom silom) uspostavlja magnetski tok. Ponekad se naziva i *sila magnetiziranja*. Generiranje magnetskoga polja može se izvesti na dva načina:

- djelovanjem permanentnih magneta
- protjecanjem struje.

Empirijska mjerena pokazuju kako je MMS, generirana na potonji način, proporcionalna struji  $I$  i broju zavoja  $N$  protjecanih strujom (amperzavoji):  $\Theta = NI$  (*Slika 2.1*). Jedinica je 1A.



*Slika 2.1 – Magnetomotorna sila*

- **Magnetski napon  $U_m$**

MMS stvara magnetski pad napona  $U_m$  u magnetskome polju na elementima magnetskoga kruga. Važno je napomenuti kako ne postoji unutarnji magnetski otpor koji bi bio usporediv s unutarnjim električnim otporom električnog izvora. Magnetsko polje, stvoreno primjerice unutar svitka protjecanog strujom, ne ovisi o električnom otporu svitka, već samo o ulančenim amperzavojima. Iz toga se dade zaključiti kako nikakva dodatna energija nije potrebna za održavanje magnetskog polja. Magnetsko polje uspostavlja se zbog protoka struje kroz  $N$  zavoja svitka i konstantno je ako je konstantna struja.

- **Magnetski otpor (reluktancija)  $R_m$**

Svojstvo neke tvari da se u većoj ili manjoj mjeri protivi uspostavljanju magnetskoga toka jest magnetski otpor  $R_m$ . Formalno se može usporediti s električnim otporom u električnom krugu. Pri tomu vrijedi Ohmov zakon za magnetski krug:

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_{m_{eq}}} \quad \text{za zatvoreni magnetski krug (petlju)} \quad (2-1)$$

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m} \quad \text{za svaki pojedinačni magnetski otpor.} \quad (2-2)$$

Magnetski otpor izražen preko magnetskih veličina i pripadna jedinica jest:

$$R_m = \frac{U_m}{\Phi} \quad , \quad \frac{A}{Vs} = \frac{I}{\Omega s}. \quad (2-3)$$

Svaki magnetski otpor ima određene vanjske (geometrijske) veličine definirane njegovim dimenzijama, a to su: srednja duljina magnetske silnice  $l$  i površina presjeka magnetskoga materijala  $S$ . Unutarnja magnetska veličina koja ovisi o prirodi tvari jest permeabilnost  $\mu$ . Magnetski otpor se, slično kao i električni, dade iskazati preko vanjskih i unutarnjih veličina kao:

$$R_m = \frac{l}{\mu S}. \quad (2-4)$$

Permeabilnost  $\mu$  je specifična magnetska vodljivost, a formalno je analogna električnoj vodljivosti. Određeni električni materijali mogu imati zanemarivu vodljivost. To su izolatori. S druge strane, nema tvari za koju se može reći da je magnetski izolator, tj. tvar s  $\mu = 0$ . Magnetsko polje prolazi i kroz zrak, odnosno vakuum, pa se kao referenca uzima konstanta:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}, \quad (2-5)$$

koja predstavlja permeabilnost slobodnog prostora (vakuma), a u dopuštenom se približenju može smatrati i permeabilnošću u zraku.

Vrijednost kojom se iskazuje koliko je puta permeabilnost neke tvari veća od permeabilnosti zraka (vakuma) jest relativna permeabilnost  $\mu_r$ , pa je:

$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (2-6)$$

Za većinu tvari (paramagnetske i dijamagnetske) permeabilnost je približno jednaka  $\mu_0$  ( $\mu_r \approx 1$ ), a za feromagnetske tvari koje iskazuju izrazita magnetska svojstva ona je  $\mu_r \gg 1$  i ovisi o vrsti tvari i magnetiziranju.

- **Magnetska indukcija (gustoća magnetskoga toka)  $\vec{B}$**

To je količina magnetskoga toka  $\Phi$  koji prožima plohu  $S$  gledano pod pravim kutom na tu plohu i vektorska je veličina. Usporediva električna veličina je gustoća struje. Iznos magnetske indukcije  $B$  definira se kao:

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad \text{za homogena magnetska polja} \quad (2-7)$$

$$B = \frac{d\Phi}{dS} \quad \text{za nehomogena magnetska polja.} \quad (2-8)$$

Jedinica magnetske indukcije je 1 tesla:  $1T = \frac{Vs}{m^2} = \frac{Wb}{m^2}$ .

Dio toka kroz element plohe dan je skalarnim produktom:

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2-9)$$

- **Jakost magnetskoga polja  $\vec{H}$**

Pad magnetskoga napona po jediničnoj duljini je jakost magnetskoga polja  $H$ :

$$H = \frac{U_m}{l} \quad \text{za homogena magnetska polja} \quad (2-10)$$

$$H = \frac{dU_m}{dl} \quad \text{za nehomogena magnetska polja.} \quad (2-11)$$

Jedinica jakosti polja je A/m. Odnos gustoće i jakosti polja dobije se iz izraza:

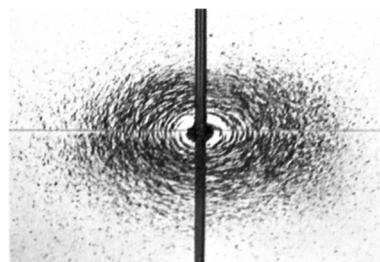
$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{U_m}{R_m S} = \frac{U_m}{\frac{l}{\mu S} \cdot S} = \mu \frac{U_m}{l} = \mu H. \quad (2-12)$$

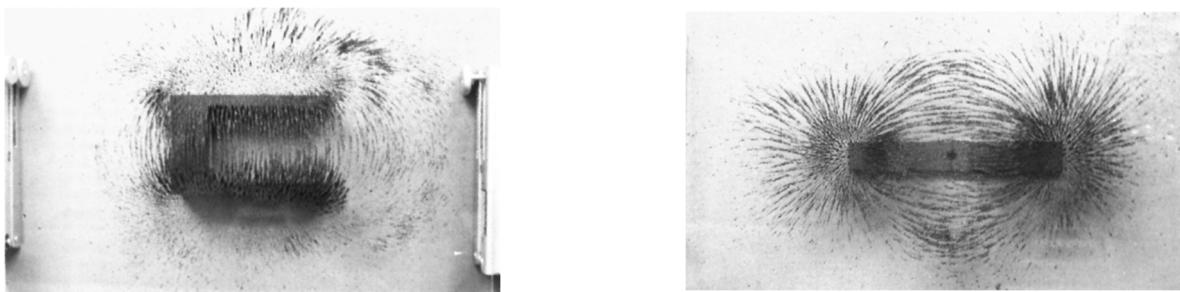
Funkcija ovisnosti  $B = f(H)$  linearna je za para- i dijamagnetske tvari, a za feromagnetike je određena petljom histereze. O tomu će biti više riječi u jednom od sljedećih poglavila. Kako su magnetska indukcija i jakost polja vektorske veličine, vrijedi:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (2-13)$$

### **Slika magnetskoga polja**

Magnetska igla postavlja se na bilo kojem mjestu u magnetskome polju u točno određeni smjer. To je smjer u kojem djeluje magnetska sila. Budući da ne možemo vidjeti magnetsko polje niti smjer u kojem djeluje sila, za predodžbu polja služimo se magnetskim silnicama. Ako magnet pokrijemo staklenom pločom na koju posipamo jednolično željeznu piljevinu, može se opaziti kako se piljevina raspoređuje u točno određen oblik kao na *Slici 2.2.*

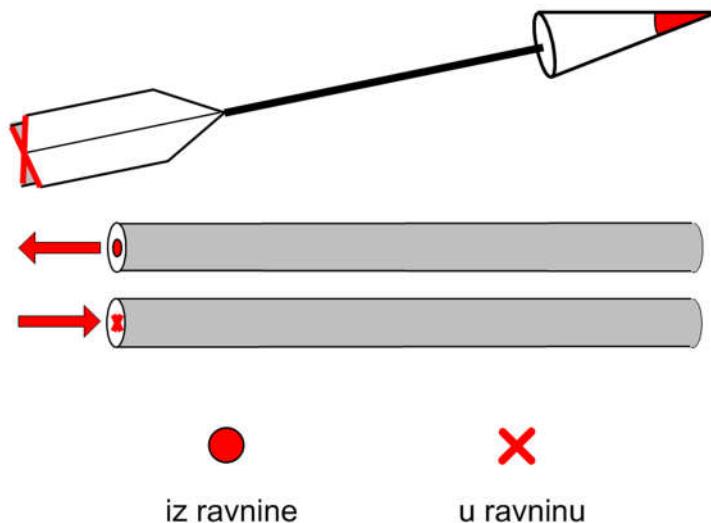




*Slika 2.2 – Raspodjela silnica magnetskoga polja vodiča protjecanog strujom, potkovičastog i štapićastog magneta*

Silnice „teku“ od jednog pola prema drugome i predstavljaju zornu sliku magnetskoga polja. Magnetske silnice su same u sebi zatvorene linije. Silnice ne završavaju na polovima, već prolaze i magnetom. Pokazalo se korisnim označavanje silnicama. Dogovoren je ovo: magnetske silnice teku izvan magneta od sjevernog pola k južnome, a u unutrašnjosti magneta od južnog pola k sjevernoume. Magnetsko polje je djelotvorno u cijelom prostoru oko magneta.

Uobičajeno je smjer jakosti polja (ili struje), koje ulazi u ravninu crtnje ili izlazi iz nje, prikazati točkom ili križićem. Takvo označavanje potaknula je slika strjelice u letu. Gledajući u smjeru leta strjelice, vidi se njezin kraj, što se shematski označuje križićem. Ako strjelica leti prema nama, vidi joj se vrh, što ga označujemo točkom. Pri tomu točka definira smjer koji ide okomito iz ravnine crtnje (stranice), a križić smjer koji pokazuje u ravninu crtnje, kao na *Slici 2.3*.



*Slika 2.3 – Dogovoren prikaz određivanja smjera jakosti polja (ili struje)*

### 3. MAGNETSKO POLJE KONSTANTNIH STRUJA U NEFEROMAGNETSKIM MATERIJALIMA

Postojanje veze između elektrostatičkog i magnetostatičkog polja ustanovio je Oersted već 1820. godine. Statički naboј, tj. naboј u stanju mirovanja, stvara elektrostatičko polje. Ako se naboјi kreću konstantnom brzinom, formira se statičko magnetsko (magnetostatičko) polje. Kretanje naboјa (električna struja) može biti uzrokovano na više različitih načina.

U ovom poglavlju analizirat ćemo magnetska polja u slobodnom prostoru stvorena protjecanjem istosmjerne struje konstantnog iznosa kroz vodič. Razumijevanje magnetskih polja neophodno je, jer fenomeni koji ih prate zadiru u naš svakodnevni život i igraju važnu ulogu u elektrotehničkoj praksi. Spomenimo samo da se na svojstvima magnetskih polja, među ostalim, temelji rad generatora električne energije, motora, transformatora, kompasa, mikrofona, sustava za fokusiranje u televizoru, telefonskog zvona, vlakova na bazi magnetske levitacije, memorijskih čelija, magnetskih separatora, uređaja za nuklearnu magnetsku rezonanciju i dr.

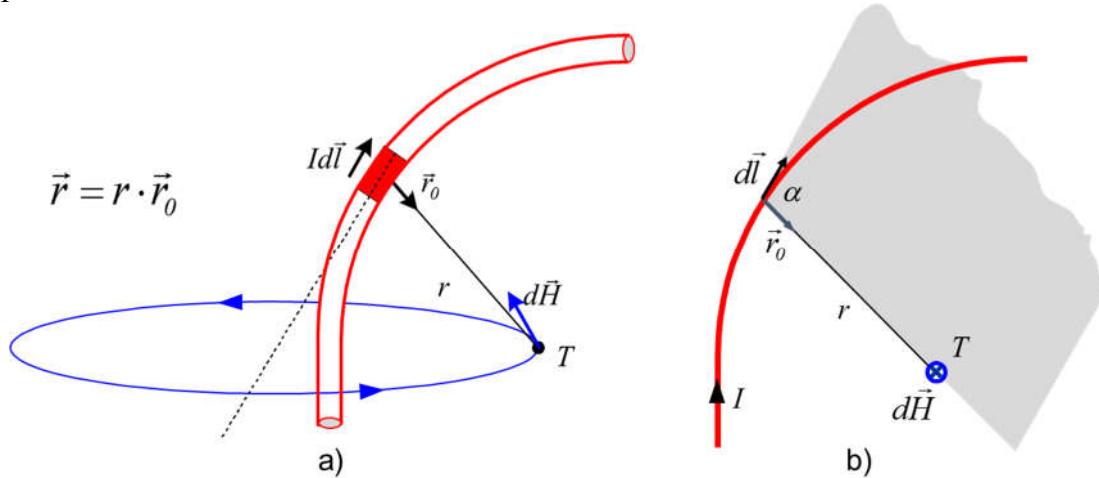
#### 3.1. TEMELJNI ZAKONI MAGNETSKOGA POLJA

Analiza magnetskih polja temelji se na dvama zakonima: *Biot-Savartovu i Amperovu zakonu protjecanja*. Poput Coulombova zakona u elektrostatici, Biot-Savartov zakon je opći zakon magnetostatike. Jednako tako kao što je Gaussov zakon poseban slučaj Coulombova zakona, Amperov zakon je poseban slučaj Biot-Savartova zakona.

Kod primjene Amperova zakona bitno je poznavanje geometrije polja (magnetskih silnica), a kod Biot-Savartova zakona važno je poznavanje geometrije uzročnika polja, tj. oblika strujne konture.

##### 3.1.1. Biot-Savartov zakon<sup>14</sup>

Ovaj zakon omogućuje definiranje jakosti polja na bilo kojem mjestu oko vodiča i za bilo kakav oblik vodiča protjecanog strujom. Izведен je temeljem činjenice da se jakost polja  $\vec{H}$  u nekoj točki  $T$  može dobiti geometrijskim zbrajanjem doprinosa  $d\vec{H}$  koje stvara svaki element  $d\vec{l}$  protjecan strujom  $I$ . Točka  $T$  nalazi se na udaljenosti  $r$  od diferencijalnog elementa struje  $Id\vec{l}$ , kao što je prikazano na *Slici 3.1*.



*Slika 3.1 – Magnetsko polje  $d\vec{H}$  u točki  $T$  uzrokovano elementom struje  $Id\vec{l}$*

<sup>14</sup> Francuski fizičari Jean-Baptiste Biot (1774. – 1862.) i Félix Savart (1791. – 1841.)

Definicija: Doprinos jakosti magnetskog polja  $dH$  u nekoj točki  $T$ , koja se nalazi u prostoru na udaljenosti  $r$  od vodiča protjecanog strujom  $I$ , razmjeran je umnošku struje i elementa vodiča  $Idl$  te sinusu kuta  $\alpha$  između elementa vodiča i spojnica s promatranom točkom, a obrnuto je razmjeran kvadratu udaljenosti  $r^2$  od konture:

$$dH = k \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (3-1)$$

Faktor razmjernosti je  $k = I/4\pi$ , pa je:

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (3-2)$$

Vektor  $d\vec{H}$  stoji okomito na ravninu (zasjenjena površina na gornjoj slici) koju tvore vektori  $d\vec{l}$  i  $\vec{r} = r \cdot \vec{r}_0$ , gdje je  $\vec{r}_0$  jedinični vektor usmjeren od elementa vodiča prema točki promatranja.

Matematički izraženo, smjer se određuje temeljem vektorskog umnoška:  $d\vec{l} \times \vec{r}_0$ . Biot-Savartov zakon u vektorskom obliku tada glasi:

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}_0}{4\pi r^2} = \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (3-3)$$

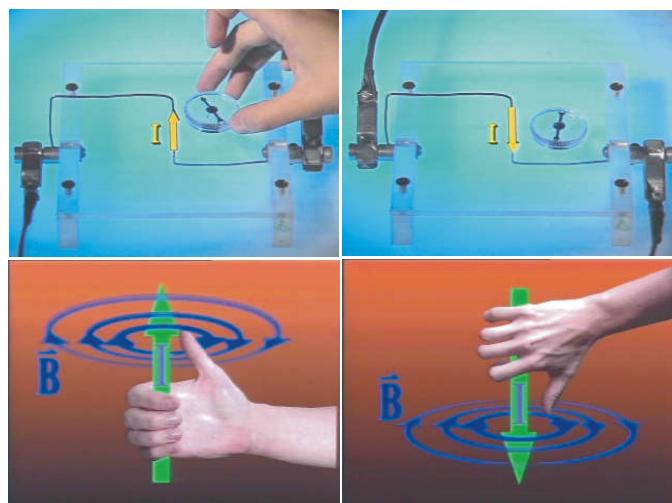
Ukupna jakost polja  $\vec{H}$  bilo kakve strujne konture  $k$  jednaka je geometrijskom zbroju elementarnih jakosti polja  $d\vec{H}$  što ih uzrokuju strujni elementi  $Id\vec{l}$ :

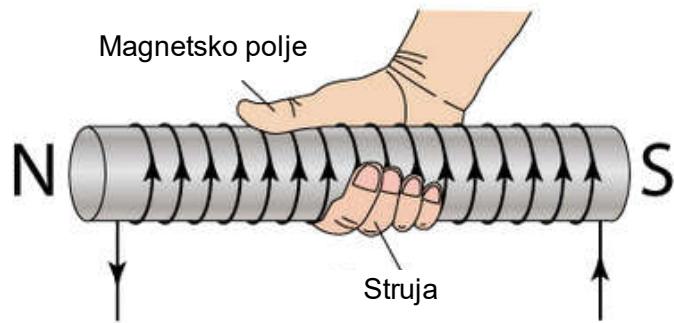
$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_k \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2}. \quad (3-4)$$

Praktična pravila za određivanje smjera vektora  $d\vec{H}$ , pa time i silnica magnetskoga polja, jesu pravilo desne ruke – ako se desnom rukom obuhvati vodič tako da se palac postavi u smjeru struje, tada savijeni prsti pokazuju smjer magnetskih silnica, ili desnog vijka – ako se vijak postavi uzduž vodiča tako da pokazuje smjer struje, smjer uvijanja vijka pokazuje smjer  $d\vec{H}$ .

Druga inačica ovog pravila odnosi se na određivanje smjera magnetskoga polja unutar svitka protjecanog strujom. Ako se svitak obuhvati prstima desne ruke tako da prsti pokazuju smjer struje, palac će pokazivati smjer magnetskoga polja unutar svitka.

Primjena pravila desne ruke grafički je prikazana na *Slici 3.2*.





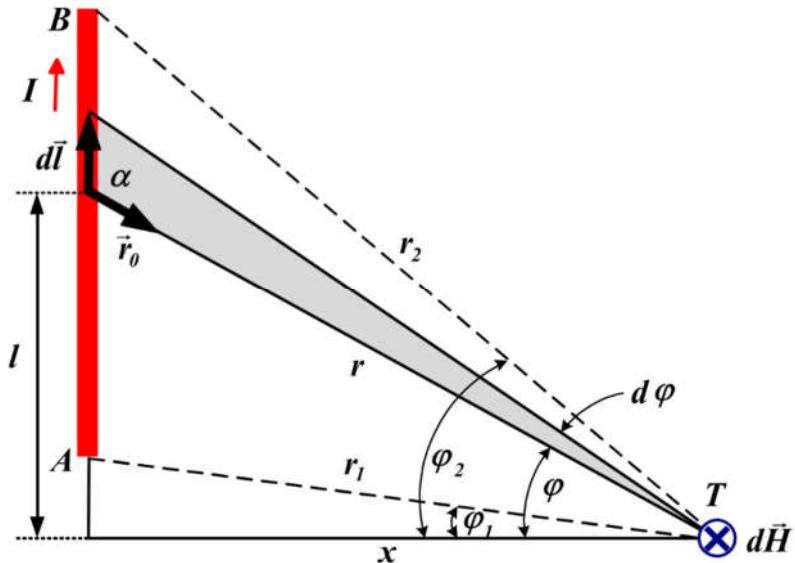
Slika 3.2 – Određivanje smjera jakosti polja uporabom pravila desne ruke

### 3.1.2. Primjena Biot-Savartova zakona

Biot-Savartov zakon primjenljiv je za proračun jakosti polja u slučajevima kada je poznata geometrija raspodjele električnih struja. Navest ćemo neke primjere: polje u središtu i na osi kružnog zavoja, polje dugog tankog ravnog vodiča, polje ravnog segmenta vodiča i složenijih struktura sastavljenih od dijelova ravnog vodiča, polje jednoslojnog svitka i dr. Analizirat ćemo neke od navedenih primjera.

#### 3.1.2.1. Magnetsko polje segmenta tankog ravnog vodiča

Potrebno je odrediti jakost polja u nekoj točki  $T$  na udaljenosti  $x$  od osi tankoga ravnog vodiča duljine  $\overline{AB}$ . Sve oznake i varijable prikazane su na Slici 3.3.



Slika 3.3 – Određivanje jakosti polja segmenta ravnog vodiča

Svi doprinosi  $d\vec{H}$  imaju isti smjer u točki  $T$  (okomit na ravnicu slike), pa je:

$$dH = \frac{Idl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (3-5)$$

Ukupna jakost polja dobije se zbrajanjem elemenata vodiča  $dl$  od točke  $A$  udaljene za  $r_1$  do točke  $B$ , koja je na udaljenosti  $r_2$  od promatrane točke:

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sin \alpha dl}{r^2}. \quad (3-6)$$

Integraciju je jednostavnije provesti po kutu  $\varphi$  pod kojim se vidi vodič iz točke  $T$ . U tom smislu potrebno je varijable u podintegralnoj funkciji izraziti preko kuta  $\varphi$ . Temeljem oznaka na slici može se razabrati:

$$\sin \alpha = \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos \varphi} \quad (3-7)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{x}; \text{ deriviranjem } \Rightarrow \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dl}{x} \Rightarrow dl = \frac{xd\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Nove granice integracije su kutovi  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  pod kojima se vide točke  $A$  odnosno  $B$ . Uvrštavanjem gornjih izraza u podintegralnu funkciju slijedi:

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\cos \varphi \frac{xd\varphi}{\cos^2 \varphi}}{\frac{x^2}{\cos^2 \varphi}} = \frac{I}{4\pi x} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi. \quad (3-8)$$

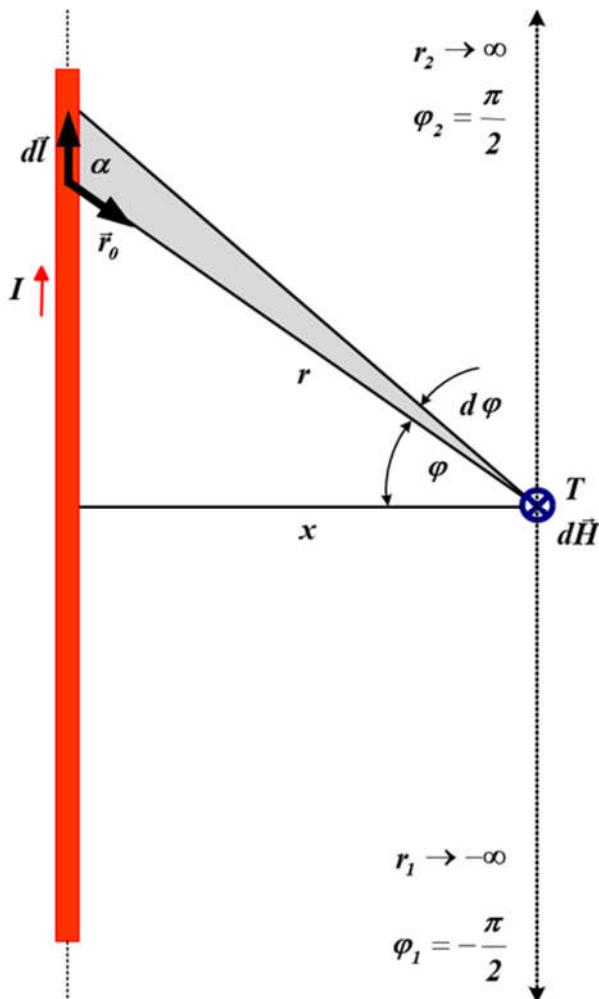
Za određivanje ukupne jakosti polja segmenta ravnog vodiča u nekoj točki potrebno je znati udaljenost od osi vodiča te kuteve iz kojih se vidi početna i krajnja točka vodiča:

$$H = \frac{I}{4\pi x} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (3-9)$$

### 3.1.2.2. Magnetsko polje vrlo dugoga tankog ravnog vodiča

Odredit ćemo jakost polja u okolišu vrlo dugoga (teorijski: beskonačno dugog) vodiča kojim teče struja  $I$ , kao na *Slici 3.4.*

Prepostavit ćemo da se radi o tankom linijskom vodiču zanemariva presjeka. Analizu polja unutar vodiča provest ćemo potom temeljem Amperova zakona.



Slika 3.4 – Određivanje jakosti polja dugoga ravnog vodiča temeljem Biot-Savartova zakona

Ukupna jakost polja trebala bi se odrediti integracijom od početne točke udaljene za  $r_1 \rightarrow -\infty$  do krajnje točke udaljene za  $r_2 \rightarrow \infty$  od promatrane točke:

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha dl}{r^2}. \quad (3-10)$$

U prikazu preko kuta  $\varphi$  granice integracije su:

$$r_1 \rightarrow -\infty \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} ; \quad r_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (3-11)$$

Kako je pokazano u poglavlju 3.1.2.1., jakost polja postaje:

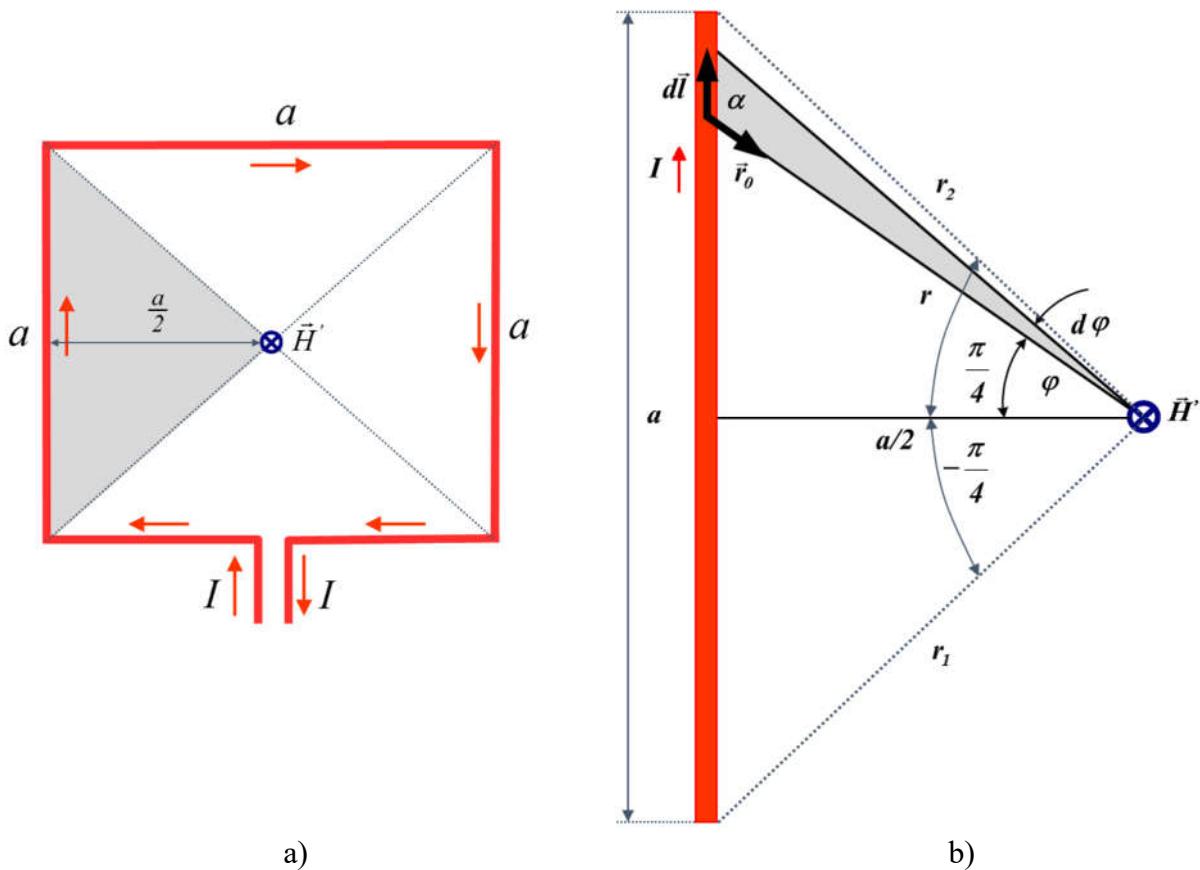
$$H = \frac{I}{4\pi x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{I}{4\pi x} \left[ \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (3-12)$$

Polje u okolišu zadanoga vodiča opada po zakonu:

$$H = \frac{I}{2\pi x}. \quad (3-13)$$

### 3.1.2.3. Magnetsko polje u središtu kvadratne konture

Relacija za polje segmenta vodiča može se primijeniti na različite oblike strujne petlje sastavljene od ravnih segmenata vodiča. Navest ćemo primjer izračuna polja u središtu kvadratne petlje stranice  $a$  kojom teče struja  $I$  kao na *Slici 3.5.*



*Slika 3.5 – Određivanje jakosti polja u središtu kvadratne strujne petlje*

Doprinos na jakost polja svake stranice kvadratne petlje na *Slici 3.5.a)* je jednak, pa je dovoljno odrediti jakost polja jedne stranice kao na *Slici 3.5.b).* Uкупno polje usmjereno je u ravninu stranice i iznos mu je  $H = 4H'$ .

Jakost polja segmenta duljine  $a$  u središtu petlje udaljenom  $x = a/2$  možemo odrediti izravnom uporabom prethodno dobivenih jednadžbi za polje segmenta vodiča. Vrhovi stranice kvadrata iz središta petlje vide se pod kutovima  $\varphi_1 = -\pi/4$  odnosno  $\varphi_2 = \pi/4$ , pa su to ujedno i granice integracije:

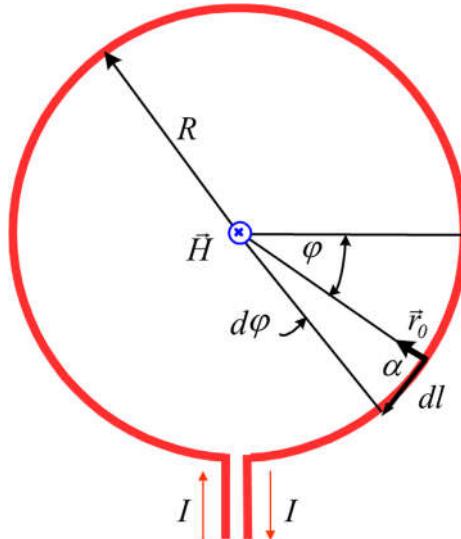
$$H' = \frac{I}{4\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi d\varphi = \frac{I}{2\pi a} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{I}{2\pi a} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} I}{2\pi a}. \quad (3-14)$$

Ukupno polje je:

$$H = \frac{2\sqrt{2}I}{\pi a}. \quad (3-15)$$

### 3.1.2.4. Magnetsko polje u središtu kružnoga zavoja

Potrebno je odrediti jakost polja u središtu kružnoga zavoja polumjera  $R$ . Prema *Slici 3.6* vidi se kako svi doprinosi  $d\vec{H}$  imaju isti smjer u točki  $T$  – iz ravnine slike.



*Slika 3.6 – Određivanje jakosti polja u središtu kružnoga zavoja*

Vektori  $\vec{r}_0$  i  $d\vec{l}$  uvijek su međusobno okomiti, pa je  $\sin\alpha = 1$ . Udaljenost svakog elementa konture od središta je konstantna i jednaka polumjeru zavoja  $r = R$ . Prema Biot-Savartovu zakonu tada je:

$$dH = \frac{Idl}{4\pi R^2}. \quad (3-16)$$

Ukupna jakost polja dobije se integracijom elemenata  $dl$  uzduž cijelog zavoja duljine  $l$ :

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \int_l dl. \quad (3-17)$$

Zbroj svih elemenata zavoja daje opseg zavoja  $l = 2\pi R$ , tj.:

$$H = \frac{I \cdot 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{I}{2R}. \quad (3-18)$$

Ako se, kao u prethodnim primjerima, integracija vrši preko kuta  $\varphi$ , iz omjera  $dl : 2R\pi = d\varphi : 2\pi$  (element luka/ukupni luk = element kuta/ukupni kut) slijedi  $dl = Rd\varphi$ . Kako se kut mijenja od 0 do  $2\pi$ , gornji integral postaje:

$$H = \frac{I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi} Rd\varphi = \frac{I}{2R}. \quad (3-19)$$

Primjena Biot-Savartova zakona može se proširiti i na primjer polja u osi kružnog zavoja, u osi jednoslojnog svitka i dr. Ti su primjeri izostavljeni jer zahtijevaju nešto složeniji proračun.

### 3.1.3. Amperov zakon (zakon protjecanja)

U području elektrostatike pokazali smo kako je Gaussov zakon, koji proizlazi iz Coulombova zakona, mnogo jednostavniji za primjenu u proračunu elektrostatičkog polja nego Coulombov zakon. Na sličan način, u području magnetizma poseban slučaj Biot-Savartova zakona je Amperov zakon, koji omogućuje znatno jednostavniju primjenu u praktičnim proračunima jakosti magnetskoga polja.

Karakteristike magnetskoga polja u zraku ovise o obliku vodiča kojim teče struja, tj. o geometriji uzbudnih struja. Premda oblik vodiča i slika stvorenoga polja mogu biti vrlo složeni, za odnos jakosti polja i uzbudne struje vrijedi jednostavan zakon koji glasi:

*Linijski integral tangencijalne komponente jakosti magnetskoga polja  $\vec{H}$  uzduž zatvorene krivulje  $k$  jednak je ukupnoj struji  $I_{uk}$  obuhvaćenoj tom krivuljom, tj.:*

$$\oint_k \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{uk}, \quad (3-20)$$

*ili cirkulacija vektora  $\vec{H}$  po zatvorenoj krivulji jednaka je ukupno obuhvaćenoj struji.*

To je Amperov zakon ili zakon protjecanja. Skalarni produkt  $\vec{H} \cdot d\vec{l} = Hdl \cos \alpha$  definira tangencijalnu komponentu polja. Amperov zakon daje najopćenitiji kvantitativni odnos između jakosti magnetskoga polja i jakosti struje.

Gornji integral predstavlja magnetski napon, odnosno  $MMS \Theta$ . Ukupno obuhvaćena struja je suma parcijalnih struja koje se mogu nalaziti unutar zatvorene konture magnetskoga polja, odnosno ukupno protjecanje  $\sum_i I_i$ . Slijedom navedenoga Amperov zakon može se napisati i u obliku:

$$\oint_k \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_i = \Theta. \quad (3-21)$$

*Magnetski napon (MMS) uzduž zatvorene krivulje magnetskoga polja jednak je ukupnom protjecanju struje koja prolazi kroz plohu obuhvaćenu tom zatvorenom krivuljom.*

Smjer polja  $\vec{H}$  u odnosu na smjer struje  $I$  određuje se pravilom desnog vijka.

### 3.1.4. Primjena Amperova zakona

Amperov zakon ima pored šireg teorijskoga i neposredno praktično značenje. Njime se ne određuje izravno jakost magnetskoga polja u nekoj točki. U tom smislu postoji izvesna sličnost s Gaussovim zakonom za elektrostatiku kojim se definira o čemu ovisi ukupni tok kroz zatvorenu površinu. Kako je već pokazano, Gaussov zakon omogućio nam je određivanje jakosti elektrostatičkoga polja u pojedinim točkama polja za neke važne slučajeve karakterizirane aksijalnom ili radijalnom simetrijom polja. Dakle, umjesto rješavanja stvarne raspodjele polja koja

može biti vrlo složena, razmatraju se pojednostavljeni slučajevi raspodjele polja koji se od stvarnih bitno ne razlikuju. Rješenje jednostavnog problema može „zdravorazumskim“ zaključivanjem pridonijeti i rješenju složenijeg problema. Taj se „trik“ dosta primjenjuje u inženjerskoj praksi, jer je složene probleme često teško opisati odgovarajućim matematičkim jednadžbama.

Gaussov zakon, pa tako i Amperov zakon protjecanja, ne zahtijevaju postavljanje sustava jednadžbi, nego daju putokaz za rješenje stvarnoga problema, koji upućuje na odnos između odgovarajućih fizikalnih veličina u jedinstvenu i lako pamtljivu obliku.

Uporabom Amperova zakona određujemo jakosti magnetskog polja u nekim slučajevima gdje postoji visok stupanj simetrije polja. Proračun je jednostavan ako su ispunjeni uvjeti poznavanja:

- oblika magnetskoga polja
- raspodjele jakosti polja uzduž linija polja.

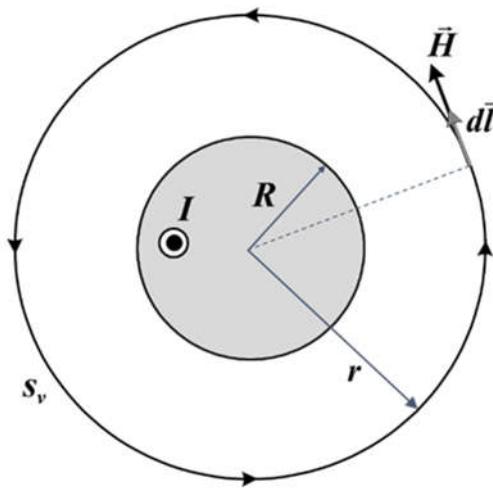
Gornji uvjeti ispunjeni su za primjere koji slijede.

### 3.1.4.1. Magnetsko polje dugoga ravnog cilindričnog vodiča

Analizirat ćemo polje vrlo dugoga ravnog cilindričnog vodiča. Vodič kružnoga poprečnog presjeka  $S$ , polumjera  $R$ , protjecan je strujom  $I$  ravnomerne gustoće. Kako bi se odredila jakost polja u svim točkama prostora, potrebno je analizirati dva odvojena slučaja – područje izvan, odnosno unutar vodiča.

a) *Magnetsko polje izvan vodiča  $H_v$  za  $R \leq r < \infty$*

Na Slici 3.7 dan je poprečni presjek vodiča:



Slika 3.7 – Određivanje jakosti polja izvan ravnoga cilindričnog vodiča

Svaka kružnica sa središtem u osi vodiča poklapa se s odgovarajućom silnicom polja, tj. silnice su, iz razloga simetrije, koncentrične kružnice oko vodiča. S obzirom na smjer struje (izlazi iz ravnine crtne) pravilom desnog vijka dobije se smjer magnetskih silnica. Na slici je prikazana jedna od silnica vanjskoga polja. To je kružnica  $s_v$  polumjera  $r$ . Ona obuhvaća ukupnu struju vodiča  $I$ , pa je po Amperovu zakonu:

$$\oint_{s_v} \vec{H}_v \cdot d\vec{l} = I. \quad (3-22)$$

Element silnice  $d\vec{l}$  i vektor polja  $\vec{H}$  su kolinearni u svakoj točki silnice, pa skalarni umnožak prelazi u obični umnožak. Za svaku silnicu, uzduž nje same, iznos polja  $H$  je konstantan za svaki  $dl$ , pa se može izlučiti ispred integrala, dakle:

$$H_v \oint_{S_v} dl = I. \quad (3-23)$$

Integriranjem svih elemenata silnice dobije se opseg kružnice radijusa  $r$ :

$$H_v \cdot 2r\pi = I. \quad (3-24)$$

Jakost magnetskoga polja izvan vodiča je:

$$H_v = \frac{I}{2r\pi}. \quad (3-25)$$

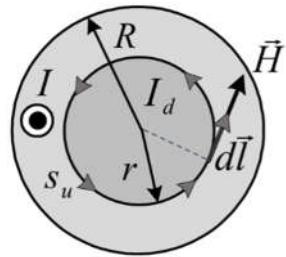
To je rezultat koji smo već dobili primjenom Biot-Savartova zakona. Iznos jakosti polja opada s prvom potencijom udaljenosti od osi vodiča, a maksimalan je na površini vodiča za  $r = R$ :

$$H_{v_{max}} = \frac{I}{2R\pi}. \quad (3-26)$$

b) Magnetsko polje unutar vodiča  $H_u$  za  $0 \leq r \leq R$

Na Slici 3.8 prikazana je jedna silnica unutarnjega polja. To je kružnica  $s_u$  polumjera  $r$ . Ona obuhvaća samo dio ukupne struje vodiča, djelomičnu struju  $I_d$ , koja teče unutar površine  $S_u$ . Struja u vodiču jednoliko je raspodijeljena po presjeku vodiča, tj. gustoća struje unutar površine punog presjeka vodiča  $S$  jednak je gustoći unutar djelomične površine  $S_u$ :

$$\frac{I}{S} = \frac{I_d}{S_u} \Rightarrow \frac{I}{R^2\pi} = \frac{I_d}{r^2\pi}. \quad (3-27)$$



Slika 3.8 – Određivanje jakosti polja unutar ravnoga cilindričnog vodiča

Dio struje obuhvaćen silnicom  $s_u$  je:

$$I_d = I \frac{r^2}{R^2}. \quad (3-28)$$

Primjeni li se Amperov zakon, slijedi:

$$\oint_{S_u} \vec{H}_u \cdot d\vec{l} = I \frac{r^2}{R^2}. \quad (3-29)$$

Slično kao i za polje izvan vodiča, integriranjem svih elemenata unutarnje silnice dobije se opseg kružnice radijusa  $r$ :

$$H_u \cdot 2r\pi = I \frac{r^2}{R^2}, \quad (3-30)$$

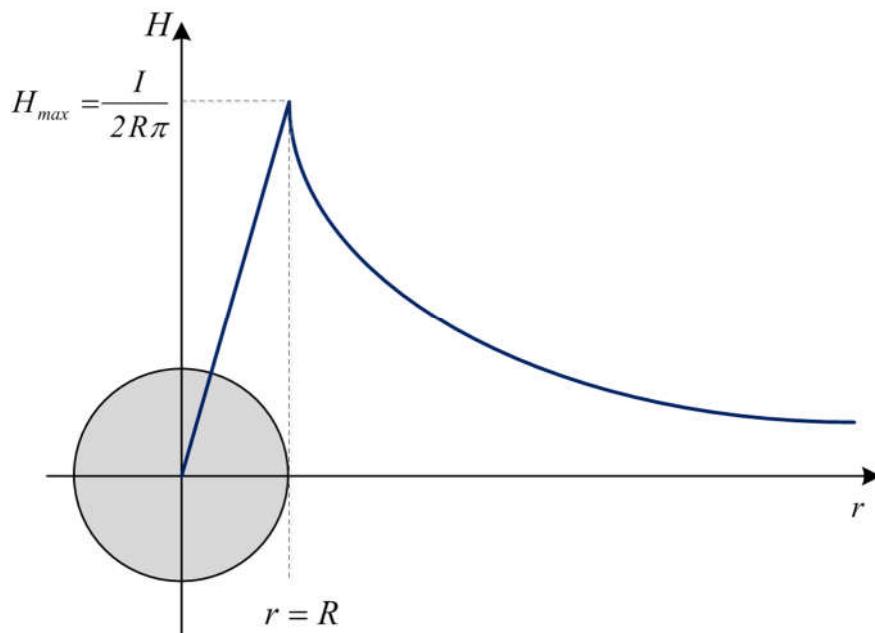
odnosno:

$$H_u = \frac{I}{2R^2\pi} \cdot r = k \cdot r, \quad (3-31)$$

gdje je  $k = \frac{I}{2R^2\pi}$  konstantna vrijednost.

Polje unutar vodiča linearno raste od nule ( $r = 0 \Rightarrow H_u = 0$ ) do maksimalne vrijednosti na površini vodiča ( $r = R \Rightarrow H_u = H_{max} = I/2R\pi$ ).

Ako se objedine rezultati dobiveni u a) i b), graf funkcije  $H(r)$  izgleda kao na *Slici 3.9*.

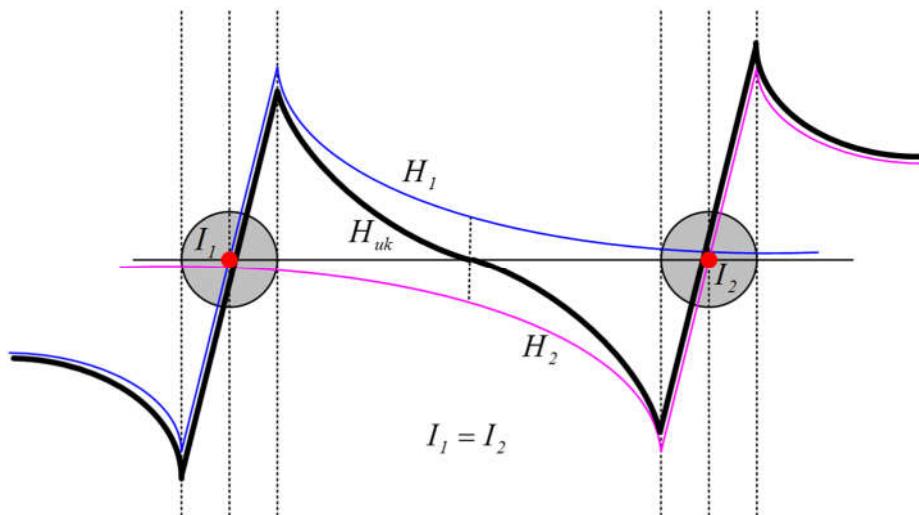


*Slika 3.9 – Grafički prikaz magnetskoga polja dugog cilindričnog vodiča  $H = f(r)$*

Polje raste linearno do površine vodiča, a dalje opada po hiperboli.

#### 3.1.4.2. Magnetsko polje paralelnih ravnih vodiča

Magnetsko polje oko sustava dvaju paralelnih vodiča protjecanih strujama istog ili suprotnog smjera određuje se superpozicijom obaju polja. Ukupno polje  $\vec{H}$  je vektorski zbroj parcijalnih polja  $\vec{H}_1$  i  $\vec{H}_2$ . Ako se ograničimo na proračun polja samo u ravnini u koju ulaze vodiči pod pravim kutom, ukupno polje može se odrediti kao algebarski zbroj polja. Pri tomu treba uzeti u obzir i smjerove polja. Na *Slikama 3.10 i 3.11* prikazano je određivanje ukupnoga polja sustava dvaju paralelnih ravnih vodiča kojima teku jednake  $I_1 = I_2$  struje istog, odnosno suprotnoga smjera.



Slika 3.10 – Magnetsko polje paralelnih vodiča protjecanih strujama istoga smjera

Slika 3.11 – Magnetsko polje paralelnih vodiča protjecanih strujama suprotnoga smjera

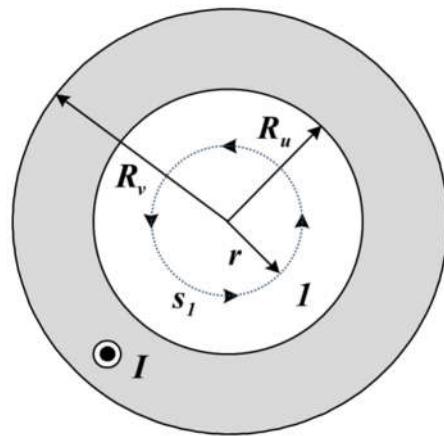
### 3.1.4.3. Magnetsko polje dugog šupljeg cilindričnog vodiča

Karakteristike dugog šupljeg cilindričnog vodiča određene su unutarnjim  $R_u$  i vanjskim polumjerom  $R_v$ . Vodič je protjecan strujom  $I$  ravnomođne gustoće zadano smjera. Potrebno je odrediti jakost polja u samom vodiču te unutar vodiča i izvan njega.

Navedena tri područja označena su ucrtanim pripadnim silnicama na Slici 3.12.

Slika 3.12 – Magnetsko polje šupljega cilindričnog vodiča

1) Magnetsko polje u šupljini  $H_1$  za  $0 \leq r < R_u$  – Slika 3.13



Slika 3.13 – Magnetsko polje u šupljini

Očito je kako pretpostavljena silnica  $s_1$  ne obuhvaća nikakvu struju, pa je:

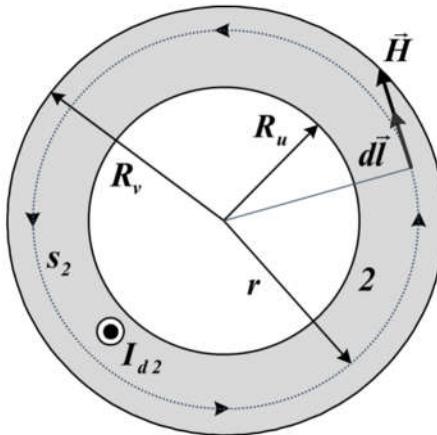
$$\oint_{s_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = 0. \quad (3-32)$$

Gornji izraz može biti zadovoljen samo ako je  $H_1 = 0$ , tj. unutar šupljine nema magnetskoga polja.

2) Magnetsko polje u vodiču  $H_2$  za  $R_u \leq r < R_v$  – Slika 3.14

Silnicom  $s_2$  obuhvaćena je djelomična struja  $I_{d2}$  koja je dio ukupne struje  $I$ . Slijedi:

$$\oint_{s_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l} = I_{d2}. \quad (3-33)$$



Slika 3.14 – Magnetsko polje u vodiču

Zbog konstantne gustoće struje u vodiču može se izjednačiti omjer struja i pripadnih površina (kružni vijenci) kojima teku struje  $I$  i  $I_{d2}$ :

$$\frac{I}{R_v^2 \pi - R_u^2 \pi} = \frac{I_{d2}}{r^2 \pi - R_u^2 \pi} , \quad (3-34)$$

pa je djelomična struja:

$$I_{d2} = I \frac{r^2 - R_u^2}{R_v^2 - R_u^2} . \quad (3-35)$$

Integriramo li sve elemente unutarnje silnice i uvrstimo obuhvaćenu struju, Amperov zakon poprima oblik:

$$H_2 \cdot 2r\pi = I \frac{r^2 - R_u^2}{R_v^2 - R_u^2} , \quad (3-36)$$

pa je polje unutar vodiča:

$$H_2 = \frac{I}{2r\pi} \cdot \frac{r^2 - R_u^2}{R_v^2 - R_u^2} . \quad (3-37)$$

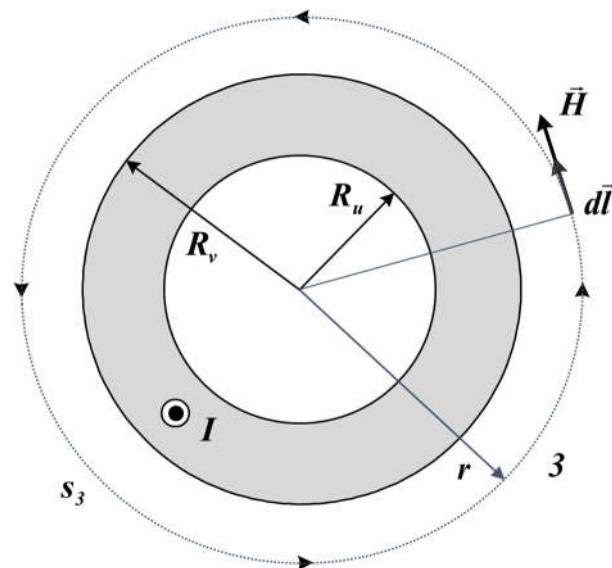
U graničnim točkama vrijednosti polja su:

$$\begin{aligned} r = R_u &\Rightarrow H_{2min} = 0 \\ r = R_v &\Rightarrow H_{2max} = \frac{I}{2R_v\pi} . \end{aligned} \quad (3-38)$$

3) Magnetsko polje izvan vodiča  $H_3$  za  $R_v \leq r < \infty$  – Slika 3.15

Unutar silnice  $s_3$  nalazi se ukupna struja  $I$ . Slijedi:

$$H_3 \oint_{s_3} dl = I . \quad (3-39)$$



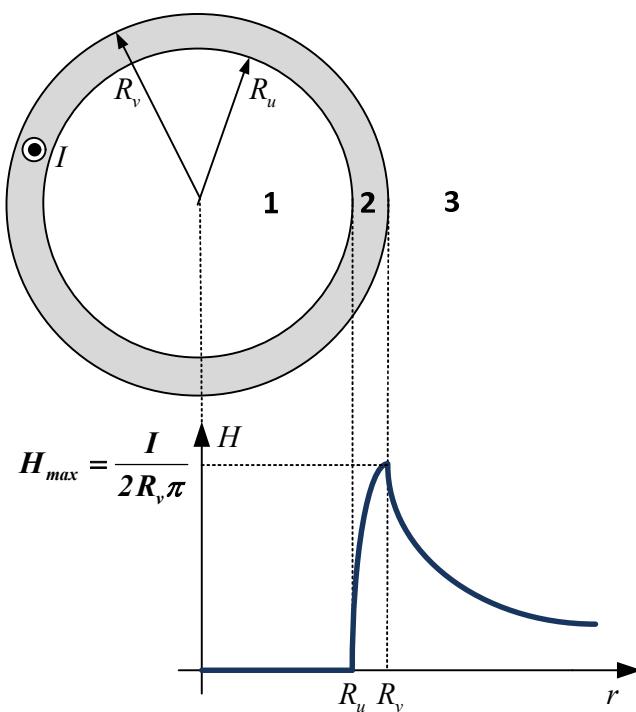
Slika 3.15 – Magnetsko polje izvan vodiča

Slično prethodno provedenoj analizi, dobije se za jakost magnetskoga polja izvan vodiča:

$$H_3 = \frac{I}{2r\pi}, \quad (3-40)$$

tj. jakost polja izvan šupljega vodiča ista je kao i jakost polja dugoga ravnog vodiča. Granične vrijednosti su:

$$\begin{aligned} r = R_v &\Rightarrow H_{3max} = \frac{I}{2R_v\pi} \\ r \rightarrow \infty &\Rightarrow H_{3min} = 0. \end{aligned} \quad (3-41)$$

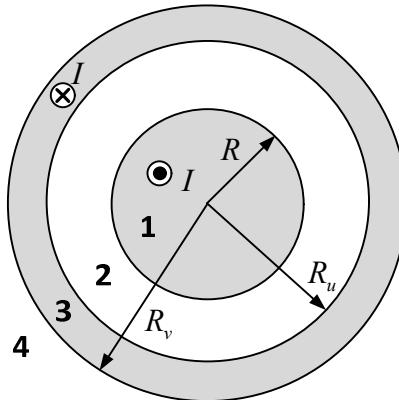


Slika 3.16 – Grafički prikaz polja šupljega cilindričnog vodiča

Uzveši u obzir relacije za  $H_1$ ,  $H_2$  i  $H_3$ , dobije se grafička ovisnost jakosti polja o udaljenosti od osi vodiča, kao na *Slici 3.16*.

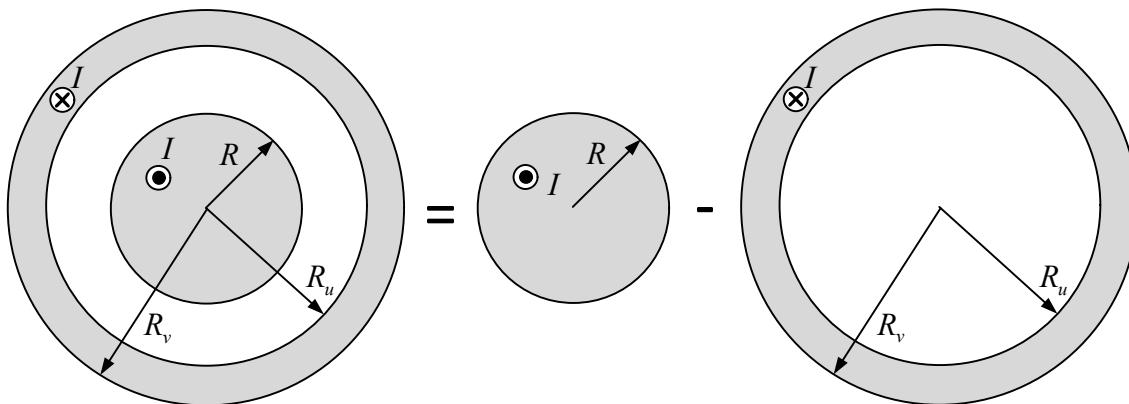
### 3.1.4.4. Magnetsko polje koaksijalnoga vodiča

Koaksijalni vodiči su elementi često korišteni u elektrotehničkoj praksi. Sastoje se od unutarnjeg vodiča kružnoga presjeka i koncentričnoga vanjskog vodiča (plašt ili oplet), kao na *Slici 3.17*. Struja  $I$  teče unutarnjim vodičem u jednome smjeru i vraća se kroz vanjski vodič u suprotnome smjeru.



*Slika 3.17 – Magnetsko polje koaksijalnog vodiča*

Ukupno polje može se dobiti kao superpozicija polja dugoga ravnog vodiča i šupljega vodiča. Budući da struje teku u suprotnim smjerovima, navedena se polja oduzimaju, kako je to prikazano na *Slici 3.18*.



*Slika 3.18 – Polje koaksijalnog vodiča kao superpozicija polja ravnog i šupljega vodiča*

1) *Magnetsko polje  $H_1$  za  $0 \leq r \leq R$*

Polje vanjskoga vodiča jednako je nuli, pa je ukupno polje jednako polju unutarnjega vodiča:

$$H_1 = \frac{I}{2R^2\pi} \cdot r. \quad (3-42)$$

Polje  $H_1$  linearno raste od 0 do  $I/2 R\pi$ .

2) *Magnetsko polje  $H_2$  za  $R \leq r \leq R_u$*

Ukupno polje opet ovisi samo o polju unutarnjega vodiča:

$$H_2 = \frac{I}{2r\pi} \quad (3-43)$$

i opada po hiperboli od  $I/2 R\pi$  do  $I/2 R_u\pi$ .

3) Magnetsko polje  $H_3$  za  $R_u \leq r < R_v$

Sada treba uzeti u obzir i utjecaj vanjskoga vodiča, pa je ukupno polje razlika:

$$H_3 = \frac{I}{2r\pi} - \frac{I}{2r\pi} \cdot \frac{r^2 - R_u^2}{R_v^2 - R_u^2} = \frac{I}{2r\pi} \left( 1 - \frac{r^2 - R_u^2}{R_v^2 - R_u^2} \right) = \frac{I}{2r\pi} \cdot \frac{R_v^2 - r^2}{R_v^2 - R_u^2} \quad (3-44)$$

i opada između graničnih vrijednosti:

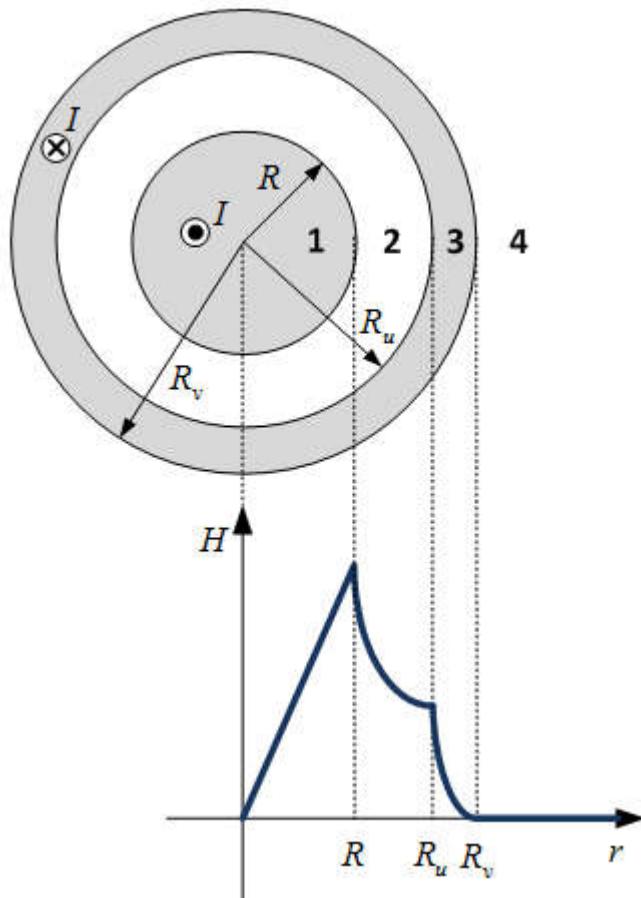
$$\begin{aligned} r = R_u &\Rightarrow H_{3max} = \frac{I}{2R_u\pi} \\ r = R_v &\Rightarrow H_{3min} = 0 . \end{aligned} \quad (3-45)$$

4) Magnetsko polje  $H_4$  za  $R_v \leq r < \infty$

Polja obaju vodiča dana su jednakim izrazom  $I/2 r\pi$  i međusobno se potiru. To slijedi i izravno iz Amperova zakona, jer se obuhvaćene struje oduzimaju:

$$\oint_l \vec{H}_4 \cdot d\vec{l} = I - I = 0 \Rightarrow H_4 = 0 . \quad (3-46)$$

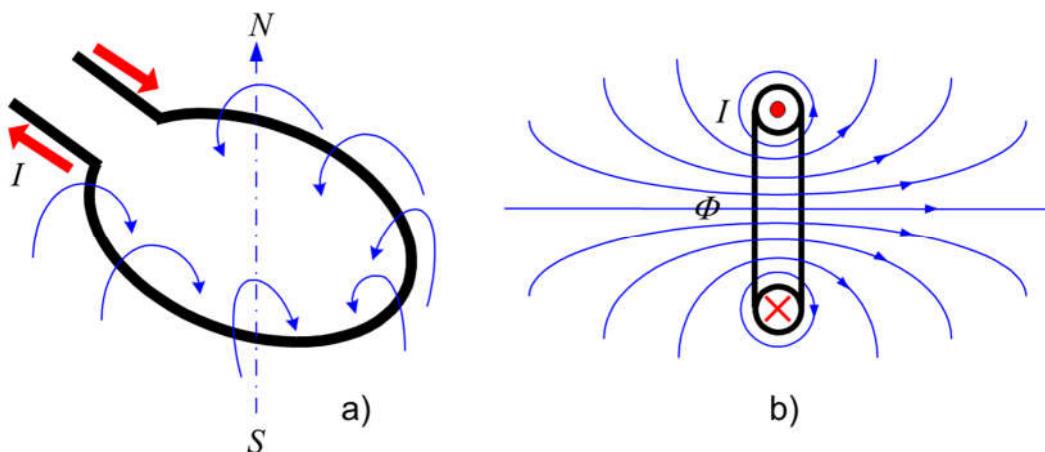
Ukupni grafički prikaz  $H = f(r)$  polja koaksijalnoga vodiča dan je na Slici 3.19.



Slika 3.19 – Grafički prikaz magnetskoga polja koaksijalnoga vodiča

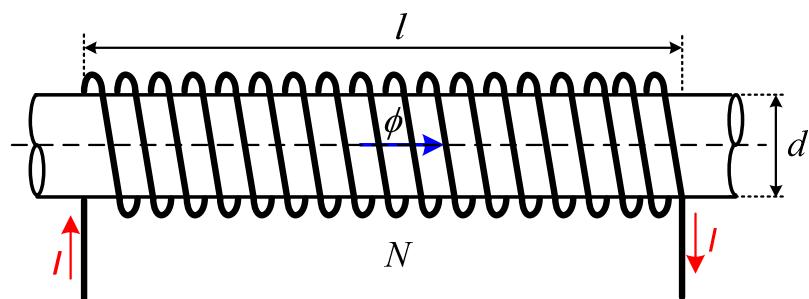
### 3.1.4.5. Magnetsko polje dugoga ravnog cilindričnog svitka (solenoid)

Magnetsko polje koje se, protjecanjem struje kroz vodič, uspostavlja u njegovu okolišu, najčešće nije dovoljne jakosti za praktične primjene. Ono se može pojačati ako se pojača struja kroz vodič. Prikladniji je način u povišenju koncentracije linija polja, što se postiže ako se ravni vodič savije u kružnu petlju. Kao što je prikazano na *Slici 3.20.a*), sve silnice polja unutar petlje djeluju u istom smjeru, čime se povećava gustoća magnetskoga toka. Na *Slici 3.20.b*) prikazan je presjek strujne petlje (zavoja) i pripadne silnice uspostavljenoga magnetskog toka.



*Slika 3.20 – Magnetsko polje strujne petlje*

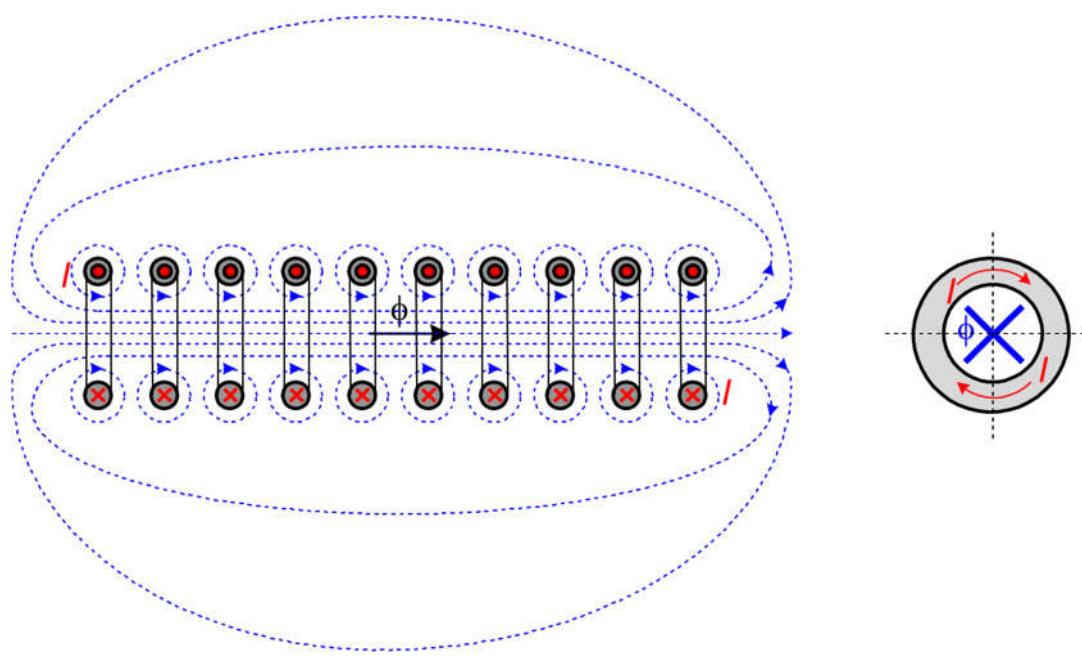
Ako se na tijelo od neferomagnetskog materijala ravnomjerno gusto, u jednom ili u više slojeva, namota  $N$  zavoja vodiča kojima teče struja  $I$ , dobije se svitak duljine  $l$ , promjera  $d$ , kao na *Slici 3.21*.



*Slika 3.21 – Cilindrični svitak*

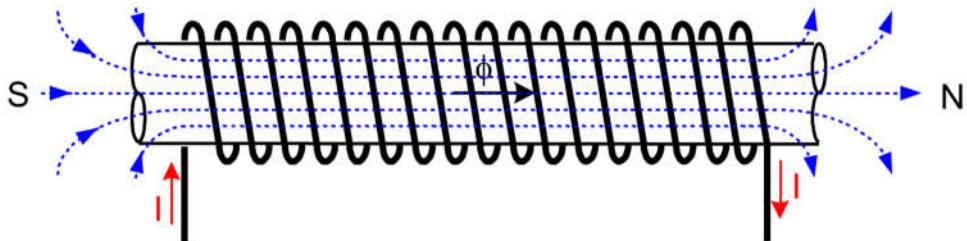
Poprečni i uzdužni presjek svitka s ucrtnim smjerovima struje kroz zavoje i pripadnim magnetskim silnicama dan je na *Slici 3.22*.

Magnetska polja pojedinih zavoja zbrajaju se unutar svitka i određuju ukupni magnetski tok  $\Phi$ . Silnice polja unutar svitka su ravne i približno ravnomjerno gusto raspoređene (ekvidistantne). Izvan svitka silnice se šire i oblikuju u petlje manje gustoće. Magnetska indukcija u svitku, pa time i jakost magnetskoga polja, stoga su puno veći nego izvan svitka. Nadalje, ako je svitak dug i tanak (omjer duljine i promjera:  $l/d \geq 10$ ), magnetsko polje u svitku može se, u dobrom približenju, smatrati homogenim. Stvarni proračun polja je složen jer polje nije u potpunosti homogeno.



Slika 3.22 – Poprečni i uzdužni presjek svitka sa slikom magnetskoga polja

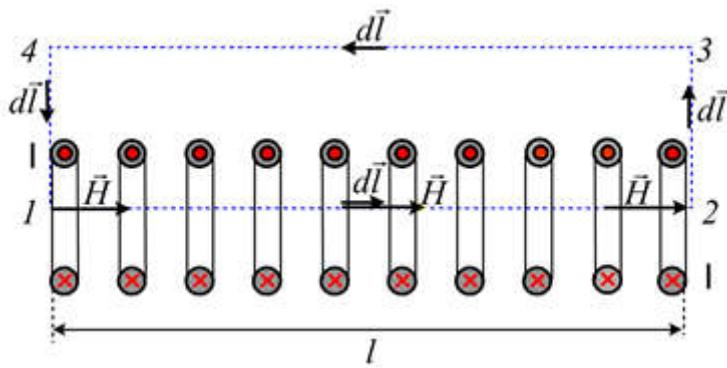
Magnetsko polje stvoreno u svitku protjecanom strujom slično je polju štapićastog magneta. Ravni svitak je elektromagnet s izraženim polovima. Kraj svitka iz kojeg silnice izlaze je sjeverni pol, a kraj u koji ulaze južni pol, kao na Slici 3.23.



Slika 3.23 – Cilindrični svitak kao štapićasti magnet

Primijenit ćemo Amperov zakon vodeći računa o uvedenim aproksimacijama. Svitak je niz gusto postavljenih strujnih petlja. Djelovanje petlja je takvo da se na samom obodu svitka polja poništavaju. Ako zanemarimo rubne efekte, tj. pretpostavimo dovoljno dug svitak, praktički je cijelo polje koncentrirano unutar svitka i uniformno je (homogeno). Silnice polja su paralelne s osi svitka. Vanjsko polje je zanemarivo. Kako sugerira Amperov zakon, u cilju određivanja jakosti polja svitka, postavit ćemo zatvorenu krivulju 1-2-3-4, kao na Slici 3.24. Krivuljom je obuhvaćen zbroj struja svih zavoja. Kako svim zavojima teče jedna te ista struja, ukupno obuhvaćeno protjecanje je  $\Theta = NI$ , pa je:

$$\oint_{1234} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI. \quad (3-47)$$



Slika 3.24 – Primjena Amperova zakona za izračun polja cilindričnoga svitka

Integraciju po zatvorenoj krivulji provest ćemo po segmentima 1-2, 2-3, 3-4, 4-1. Uz pretpostavku zanemariva vanjskoga polja ( $H_v = 0$ ) jest i  $\int_{3-4} \vec{H}_v \cdot d\vec{l} = 0$ . U segmentima 2-3 i 4-1 polje je jednako

nuli izvan svitka, a u dijelovima unutar svitka vektori  $\vec{H}$  i  $d\vec{l}$  stoje pod pravim kutom, pa su skalarni produkti u podintegralnoj funkciji jednaki nuli, tj.:  $\int_{2-3} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ ;  $\int_{4-1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ . Amperov zakon poprima oblik:

$$\int_{1-2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI . \quad (3-48)$$

Vektori  $\vec{H}$  i  $d\vec{l}$  na cijelom putu 1-2 su paralelni, pa skalarni prelazi u običan umnožak. Pored toga, vrijednost jakosti polja je konstantna, jer je polje homogeno, pa se  $H$  može izlučiti ispred integrala:

$$H \int_{1-2} dl = NI . \quad (3-49)$$

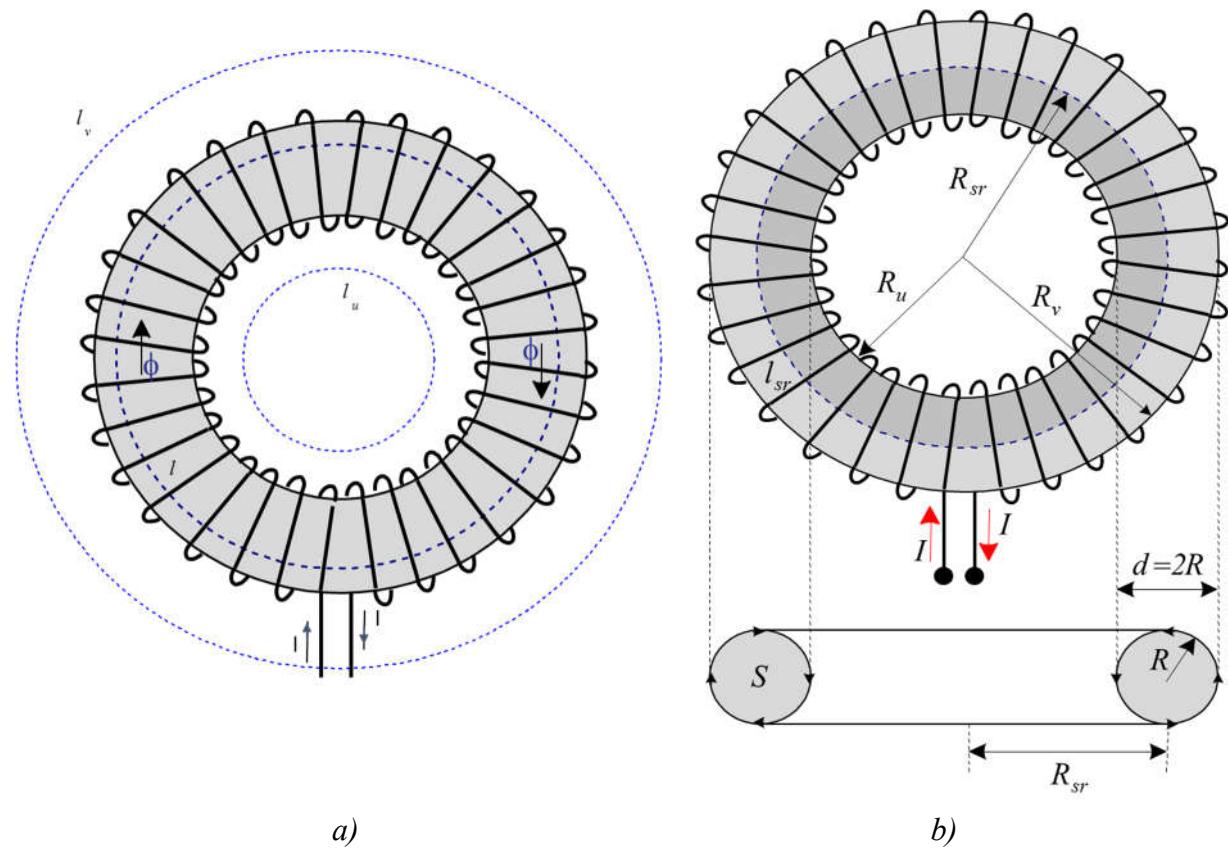
Integriranjem elemenata segmenta 1-2 dobije se ukupna duljina svitka ( $\int_{1-2} dl = l$ ). Jakost polja dugoga ravnog svitka jest:

$$H = \frac{NI}{l} . \quad (3-50)$$

Svitci su važan dio elektrotehničkih uređaja, posebno oni s feromagnetskom jezgrom, pa će biti detaljnije obrađeni unutar kolegija Osnove elektrotehnike II. Primjerice, mogućnost stvaranja konstantnog polja unutar ravnog svitka iskorištena je u komorama za nuklearnu magnetsku rezonanciju, gdje se testirani uzorak pobuđuje na rezonanciju u konstantnom magnetskom polju reda 1,5 T.

### 3.1.4.6. Magnetsko polje toroidnoga svitka

Toroidni svitak prikazan na Slici 3.25.a) jest elektromagnet bez izraženih polova. Potrebno je odrediti jakost polja u svitku i izvan svitka. Na slici su označene krivulje  $l_u$ ,  $l$ ,  $l_v$  potrebne za određivanje pripadnih jakosti polja  $H_u$ ,  $H$ ,  $H_v$  temeljem Amperova zakona.



Slika 3.25 – Toroidni svitak

Krivulja  $l_u$  ne obuhvaća nikakvu struju, pa je  $H_u = 0$ . Krivuljom  $l_v$  obuhvaćeno je protjecanje  $NI - NI = 0$ , pa je i  $H_v = 0$ .

Preostaje određivanje polja u samom svitku. Na Slici 3.25.b) označene su zadane geometrijske dimenzije svitka. Za zatvorenu Amperovu krivulju  $l$  možemo odabratи bilo koji polumjer  $r$  koji se kreće u granicama:  $R_{sr} - R < r < R_{sr} + R$ , gdje je  $R_{sr}$  srednji polumjer svitka, a  $R$  polumjer zavoja. Krivulja  $l$  polumjera  $r$  obuhvaća  $N$  zavoja protjecanih strujom  $I$ . Jakosti polja i pripadni elementi krivulje kolinearni su u svim točkama unutar svitka, pa je:

$$H \int_l dl = NI \Rightarrow H \cdot l = NI. \quad (3-51)$$

Jakost polja je:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2r\pi}. \quad (3-52)$$

Slijedom analize provedene za ravni svitak, magnetsko polje u svitku praktički je homogeno, tj. magnetska indukcija  $B$  i jakost polja  $H$  konstantni su po cijelom presjeku  $S$ . Jednolikost polja u svitku postiže se uz uvjet  $R_{sr} \gg R$ . Naime, ako se polumjer zavoja  $R$  smanjuje u odnosu na polumjer svitka  $R_{sr}$ , magnetske silnice jednoliko su raspoređene po cijelom presjeku i jednake su srednjoj duljini  $l_{sr}$ . Tada se gornja jednadžba može prikazati u jednostavnijem obliku:

$$H = \frac{NI}{l_{sr}} = \frac{NI}{2R_s\pi}. \quad (3-53)$$

Jednadžba je istoga oblika kao i ona za dugi ravni svitak koji zadovoljava uvjet  $l \gg d$ . Ravni se svitak može razmatrati kao poseban slučaj toroidnog svitka za koji vrijedi  $R_s \rightarrow \infty$ .

Ovisno o zadanim geometrijskim dimenzijama označenima na *Slici 3.25.b)* gornji se izraz može napisati i u oblicima:

$$H = \frac{NI}{2\pi(R_u + R)} = \frac{NI}{2\pi\left(R_u + \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)} = \frac{NI}{(R_u + R_v)\pi}. \quad (3-54)$$

Prednost je toroidnog svitka u postizanju vrlo velikih iznosa polja u svitku uz zanemarivo rasipanje.

### 3.2. MAGNETSKI TOK, MAGNETSKA INDUKCIJA

U prethodnome poglavlju pokazano je kako se primjenom temeljnih zakona magnetskoga polja mogu odrediti jakosti polja za tipične konfiguracije vodiča protjecanih konstantnim strujama. Dobivene jednadžbe mogu se primijeniti i na determiniranje ostalih važnih magnetskih veličina, čiji je međusobni odnos dan u *Pogl. 2*. U ovom poglavlju analizirat ćemo detaljnije magnetski tok  $\phi$  i magnetsku indukciju  $B$ . Te su nam veličine potrebne za tumačenje Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije, za mehaničko tumačenje toga zakona preko induktivnosti i međuinduktivnosti, kao i za određivanje energije magnetskoga polja. Pored toga, magnetski je tok fizikalna veličina koja se može lako i izravno mjeriti.

Magnetska indukcija  $\vec{B}$  slična je električnoj indukciji  $\vec{D}$ . Kao što je  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  u slobodnom prostoru, magnetska je indukcija proporcionalna jakosti magnetskoga polja:

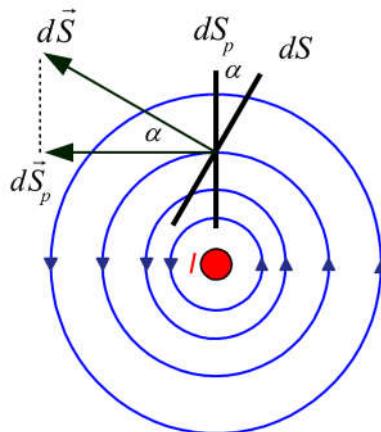
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad (3-55)$$

gdje je  $\mu_0$  konstanta poznata kao permeabilnost slobodnoga prostora:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}. \quad (3-56)$$

Proporcionalnost  $\vec{B}$  i  $\vec{H}$  vrijedi samo u slobodnom prostoru (vakuum ili zraku). Prisutnost feromagnetskih materijala unosi nelinearnost, što će biti predmet analize u sljedećim poglavljima. Silnicama magnetskoga polja simbolički se prikazuje raspodjela magnetskoga polja. Silnice ilustriraju magnetski tok  $\phi$  koji je skalarna veličina. Gustoća silnica upućuje na jakost magnetskoga polja – što je veća, veća je i jakost polja. Pri tomu možemo razmatrati i broj silnica na jedinicu površine, što predstavlja mjeru gustoće toka, pa se *magnetska indukcija* često naziva i *gustoća magnetskoga toka*. Odnos toka i gustoće magnetskoga toka prikazat ćemo na poznatom primjeru polja ravnog vodiča kojim teče struja.

Zamislimo neki mali element površine  $dS$  smješten u magnetsko polje vodiča. Na *Slici 3.26*, koja prikazuje presjek uzduž osi vodiča, vidi se rub te površine.



Slika 3.26 – Efektivna površina kroz koju se zatvara magnetski tok

Vektor elementa površine  $d\vec{S}$  može zauzimati proizvoljan kut  $\alpha$  u odnosu na polje. Kako bismo odredili gustoću silnica koje prodiru kroz površinu  $dS$ , potrebno je naći njezinu projekciju  $dS_p$  na površinu koja je okomita na silnice. Sličan postupak pri određivanju toka vektora električnoga polja opisan je u području elektrostatike. Projicirana površina ima iznos  $dS_p = dS \cdot \cos \alpha$  i određena je vektorom  $d\vec{S}_p = dS_p \cdot \vec{n}_0$ , gdje je  $\vec{n}_0$  jedinični vektor. Gustoća toka kroz  $dS_p$  tada se može pisati kao:

$$\bar{B} = \frac{d\Phi}{dS_p} \cdot \vec{n}_0, \quad (3-57)$$

gdje vektor  $\bar{B}$  ima smjer vektora  $d\vec{S}_p$ .

Za proizvoljno postavljenu površinu  $dS$  je:

$$\bar{B} = \frac{d\Phi}{dS \cos \alpha} \cdot \vec{n}_0 \quad \Rightarrow \quad B = |\bar{B}| = \frac{d\Phi}{dS \cos \alpha}. \quad (3-58)$$

Iz iznosa  $B$  dobije se skalarna vrijednost magnetskoga toka  $d\Phi$  kroz površinu  $dS$ :

$$d\Phi = B dS \cos \alpha, \quad (3-59)$$

što se može napisati u obliku skalarnog produkta:

$$d\Phi = \bar{B} \cdot d\vec{S}. \quad (3-60)$$

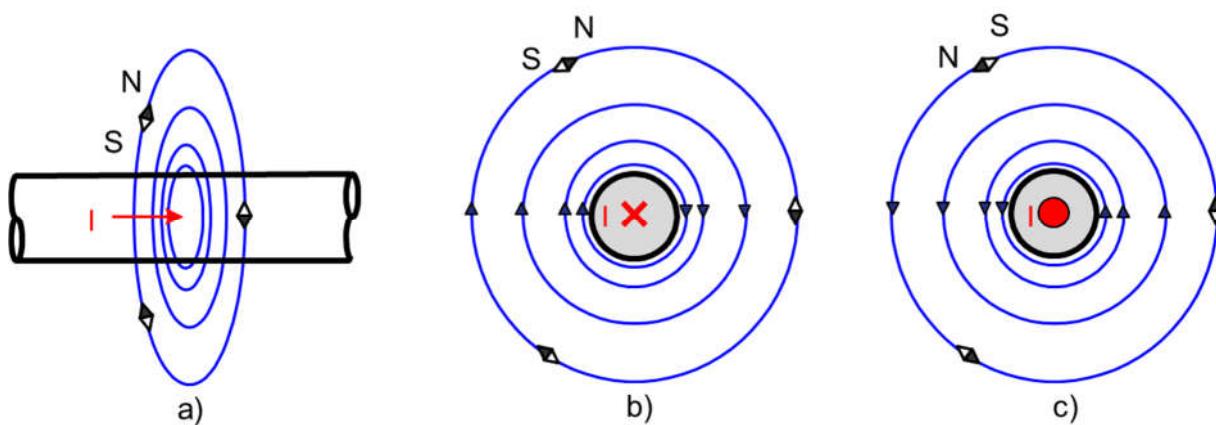
Iz prethodne jednadžbe može se odrediti magnetski tok kroz proizvoljnu plohu u magnetskome polju:

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\vec{S}. \quad (3-61)$$

### 3.2.1. Prikaz polja silnicama i zakon o konzervaciji magnetskoga toka

Spomenuto je kako silnice služe za prikaz magnetskoga polja. Sada je vrijeme da detaljnije opišemo silnice kao linije magnetskoga toka i upoznamo još neka važna svojstva polja, te ih usporedimo sa svojstvima elektrostatickoga polja.

Magnetske silnice definiraju se na istom principu kao i silnice elektrostatickoga polja što smo ga verificirali postavljanjem probnoga naboja u točke polja. Ovdje ćemo to uraditi pomoću igle magnetskoga kompasa malih dimenzija i zanemarive težine. Linija magnetskoga toka (magnetska silnica) jest put na kojem su vektori  $\vec{B}$  i  $\vec{H}$  uvijek tangencijalni i to u svakoj točki magnetskoga polja. To je linija uzduž koje bi se orijentirala igla kompasa smještenog u polje, kao što se vidi na primjeru slike polja ravnoga vodiča – *Slika 3.27.a*). Izgled polja s lijeve, odnosno desne strane vodiča dan je na slikama *b)* i *c)*.



*Slika 3.27 – Slika polja ravnog vodiča*

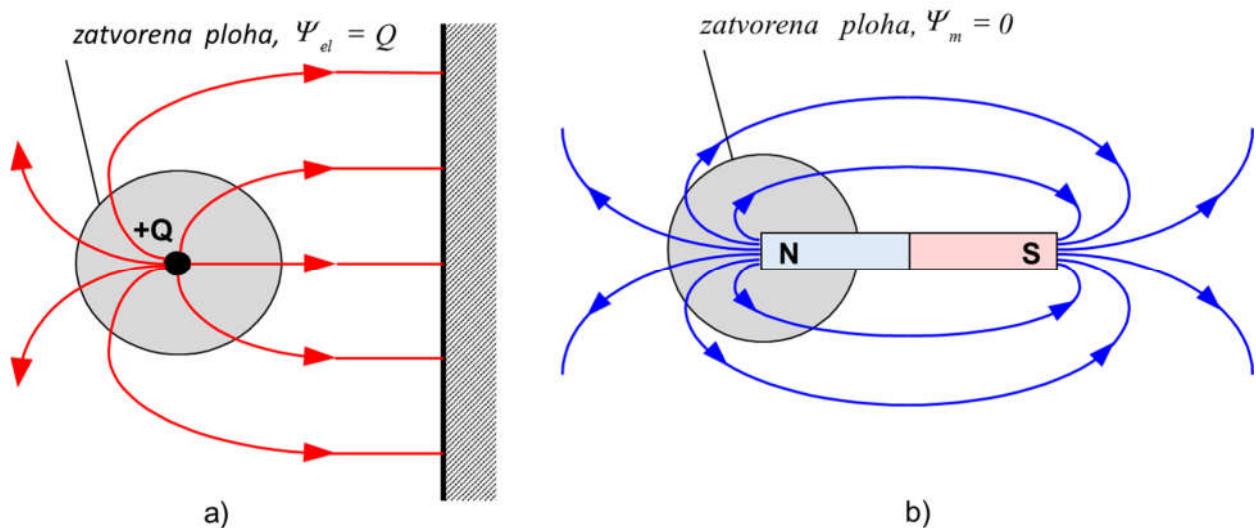
Smjerovi vektora  $\vec{B}$  i  $\vec{H}$  su oni u koje bi se postavio sjeverni pol igle kompasa. Važno je uočiti kako je, za razliku od silnica električnoga polja, svaka magnetska silnica linija bez početka i kraja i zatvara se sama u sebe. Silnice se međusobno ne sijeku, a njihova gustoća je mjera jakosti polja. Prostor između silnica također je ispunjen poljem.

Sve gore navedeno ne vrijedi samo za ravni vodič, nego općenito za bilo koju geometriju polja uzrokovanog protjecanjem struje. Isto vrijedi i za polja koja stvaraju permanentni magneti s tim da silnice ulaze u magnet i izlaze iz magneta pod pravim kutom.

Za elektrostaticka polja ukupni je tok kroz zatvorenu plohu jednak naboju obuhvaćenom tom plohom (Maxwellov postulat:  $\Psi = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$ ). To znači da možemo imati izolirani naboј koji je

izvor polja, a silnice ne moraju imati zatvorenu putanju, kao što je to prikazano na primjeru polja točkastog naboja u blizini vodljive ravne plohe – *Slika 3.28.a*).

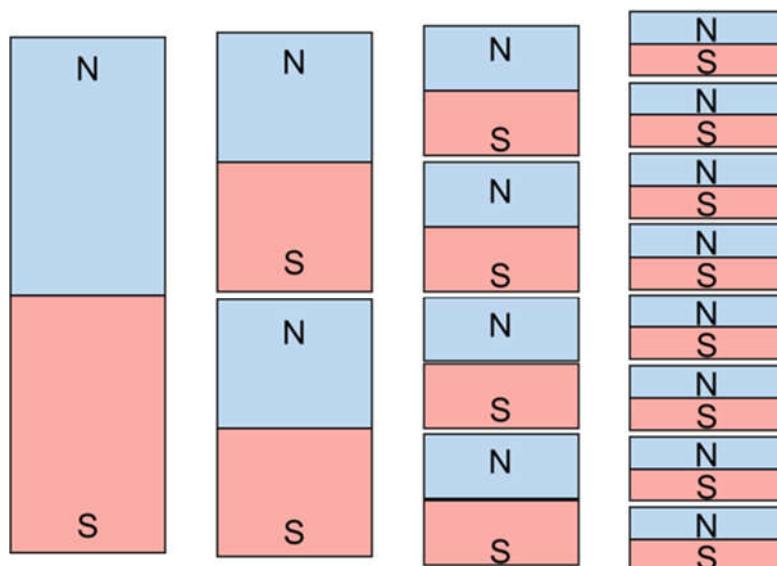
Za razliku od električnih, magnetske su silnice uvijek zatvorene, kao na primjeru polja štapićastoga magneta – *Slika 3.28.b*).



Slika 3.28 – Tok kroz zatvorenu plohu: a) izoliranog električnog naboja  $\Psi_{el} = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$

$$b) \text{štapićastog magneta } \Psi_m = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Uzrok je u nemogućnosti izoliranja magnetskih polova ili, uvjetno rečeno, magnetskih naboja. Kada bismo primjerice štapićasti magnet raspolovili, u namjeri da izdvojimo sjeverni i južni pol, kao posljedicu dobili bismo dva magneta. Novi polovi suprotnoga polariteta formirali bi se na mjestu presjeka, gdje ih prije nije bilo. Svaka polovica imala bi svoj vlastiti sjeverni i južni pol. Dijeljenje u sve manje i manje dijelove mogli bismo nastaviti sve do dimenzija molekule, a da se pritom svaki, pa i najmanji djelić ponaša kao izdvojeni magnet s pripadnim polovima, kako je to prikazano na Slici 3.29.



Slika 3.29 – Dijeljenje štapićastog magneta u niz manjih magneta

Budući da nije moguće razdvojiti sjeverni pol od južnoga pola, zaključujemo kako ne postoji izolirani magnetski naboј. Zbog toga ukupni magnetski tok kroz zatvorenu plohu mora biti jednak nuli. Nijedna silnica ne može početi ni završiti u prostoru ograničenom zatvorenom plohom, tj. sve silnice koje uđu u tu plohu moraju iz nje i izaći. Dakle:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3-62)$$

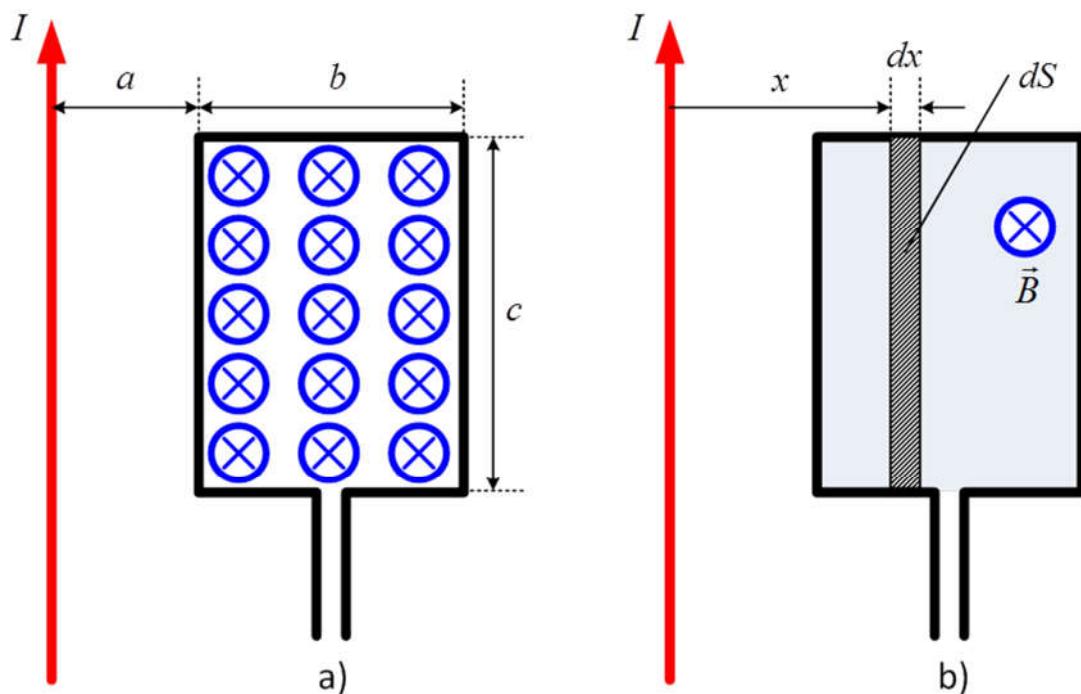
Ta jednadžba je *zakon o sačuvanju magnetskoga toka* ili *Gaussov zakon za magnetostatička polja*, što je jedan od temeljnih zakona elektromagnetskih polja.

Zakonom je utvrđen opisani princip neprekinitosti silnica magnetskoga polja, odnosno činjenica da je magnetsko polje bezizvorno polje.

### 3.2.2. Primjeri izračuna magnetskoga toka

Tok vektora  $\vec{B}$  kroz neku otvorenu plohu ne ovisi o obliku te plohe, već samo o obliku konture na koju se ta ploha oslanja, pa uvijek možemo odabratи onu plohu koja poteškoće u proračunu svodi na najmanju moguću mjeru. Proučit ćemo nekoliko tipičnih primjera određivanja toka, koji će nam potom poslužiti za proračun induktivnosti i međuinduktivnosti.

a) Tok kroz pravokutnu petlju koja leži u ravnini vodiča protjecanog strujom



Slika 3.30 – Tok kroz pravokutnu petlju u ravnini vodiča protjecanog strujom

Petlja dimenzija  $b \times c$  i dugi ravni vodič kojim teče struja  $I$  nalaze se istoj ravnini, kao na Slici 3.30.a). Petlja je na udaljenosti  $a$  od ravnine. Oko vodiča stvara se nehomogeno magnetsko polje koje opada s udaljenošću  $x$  od vodiča. U svrhu određivanja toka koji prožima zadalu petlju, označit ćemo element površine  $dS$  kao na Slici 3.30.b). Jakost polja vodiča i element površine definirani su kao:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} ; \quad dS = cdx.$$

Kako su vektori  $\vec{B}$  i  $d\vec{S}$  kolinearni, element toka kroz element površine je:

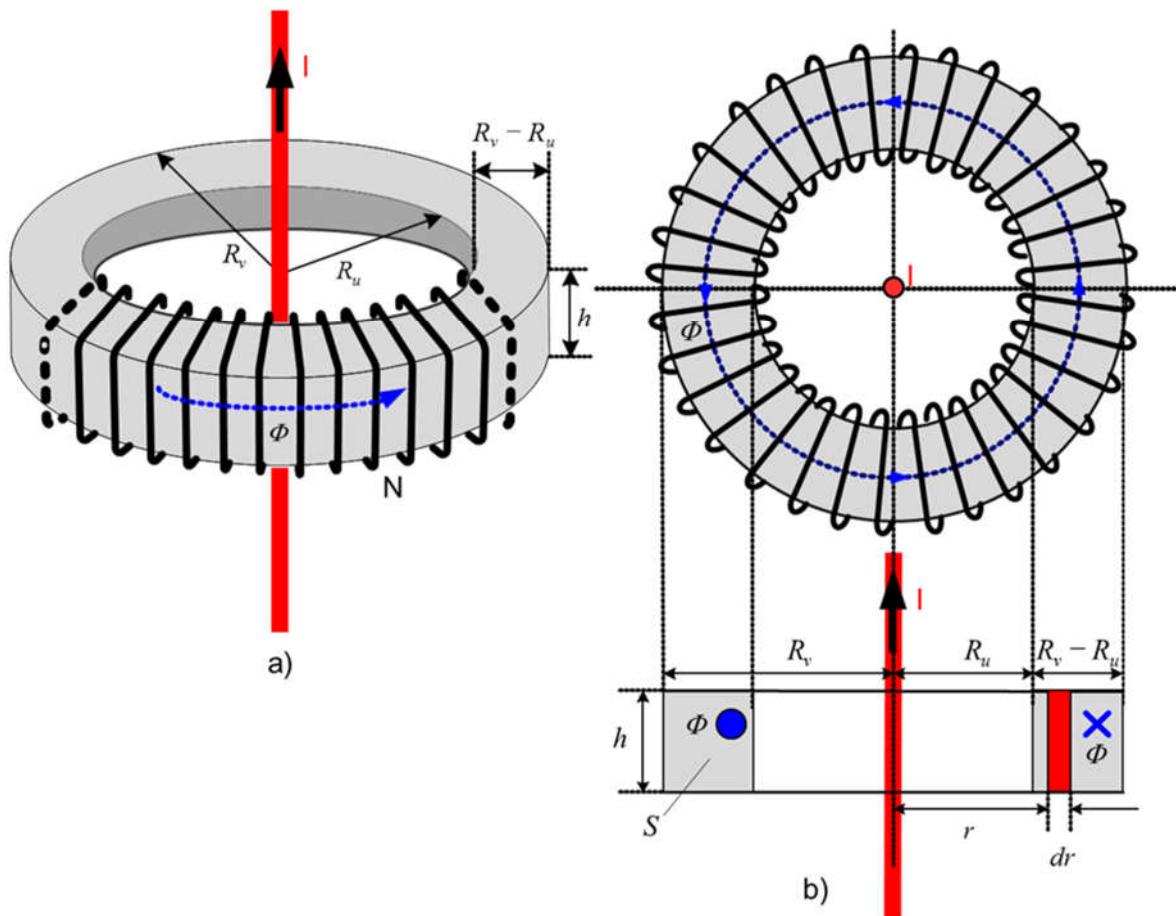
$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \frac{dx}{x}. \quad (3-63)$$

Ukupni se tok kroz petlju dobije zbrajanjem elementarnih tokova od  $x = a$  do  $x = a+b$ :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}. \quad (3-64)$$

b) Tok kroz toroidni svitak kojemu se u osi nalazi vodič protjecan strujom

Na tijelu toroidna oblika od neferomagnetskoga materijala pravokutnoga presjeka  $S = a \cdot (R_v - R_u)$  namotano je ravnomjerno gusto  $N$  zavoja. Uzduž osi svitka postavljen je dugi ravni vodič protjecan strujom  $I$ , kao na Slici 3.31.a).



Slika 3.31 – Tok kroz toroidni svitak s vodičem u osi svitka

Tok kroz svitak je tok kroz presjek  $S$ , pa je prema analizi u prethodnome primjeru, uzveši u obzir parametre zadane na *Slici 3.31.b*):

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot h dr. \quad (3-65)$$

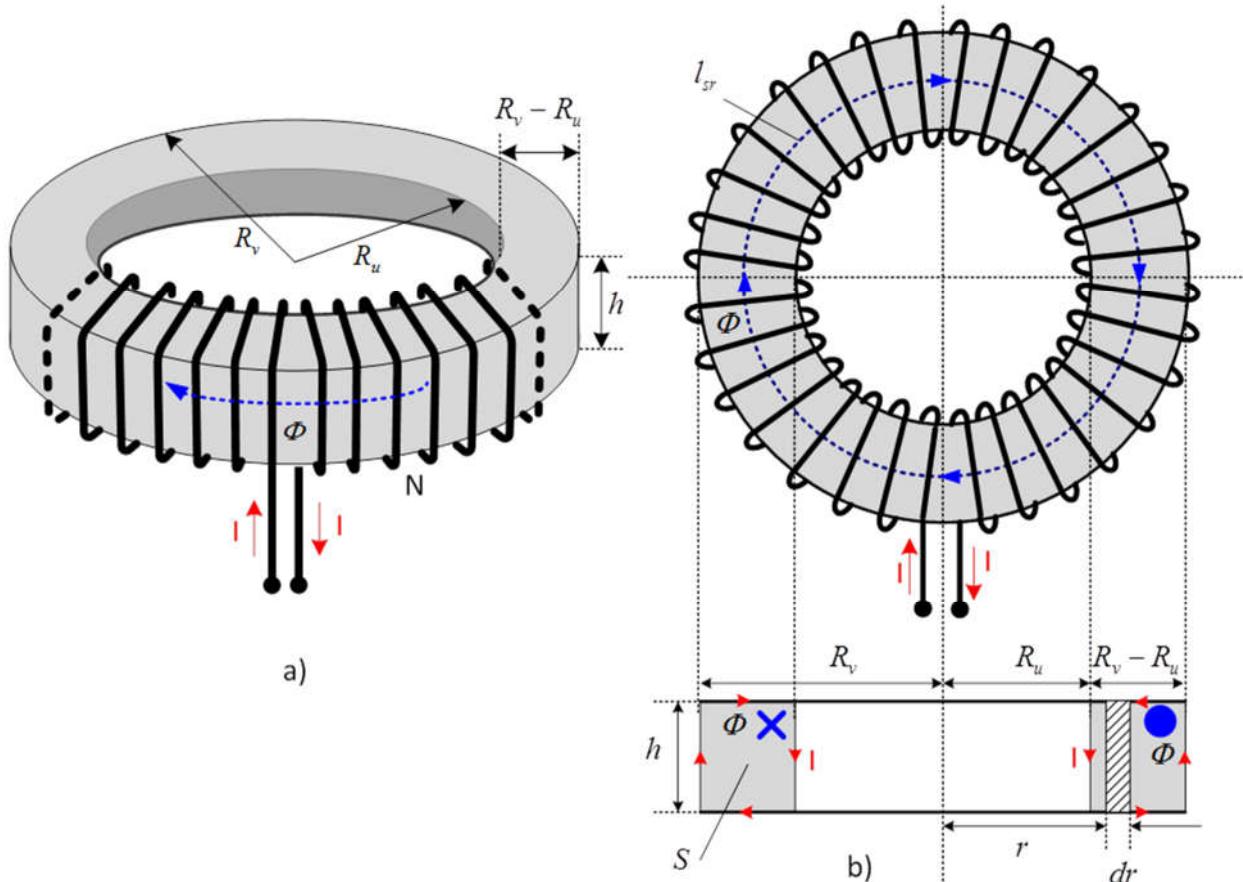
Zbrajanjem doprinosa tokova od  $r = R_u$  do  $r = R_v$  dobije se:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_{R_u}^{R_v} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{R_v}{R_u}. \quad (3-66)$$

Ukupno ulančeni tok je  $\Psi = N\Phi$ .

c) Tok kroz toroidni svitak s  $N$  zavoja kroz koje teče struja  $I$

Razmotrimo primjer toroidnoga svitka iz prethodnog primjera s tim da je sada uzročnik polja struja  $I$  što teče kroz  $N$  zavoja svitka, kao na *Slici 3.32.a*). Presjek svitka s pripadnim dimenzijama dan je na *Slici 3.32.b*).



*Slika 3.32 – Tok kroz toroidni svitak protjecan strujom*

U *Pogl. 3.1.4.6.* analizirali smo polje u toroidnom svitku kružnoga presjeka uz pretpostavku da je polje homogeno. Ako za svitak pravokutnoga presjeka pretpostavimo homogeno polje, dobije se:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l_{sr}} = \frac{\mu_0 NI}{(R_u + R_v)\pi} \quad ; \quad S = h(R_v - R_u) \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\mu_0 NIh(R_v - R_u)}{\pi(R_u + R_v)}. \quad (3-67)$$

Ako nije ispunjena pretpostavka o homogenosti polja, jakost polja ovisi o udaljenosti od osi svitka i općenito je dana izrazom:

$$H = \frac{NI}{l} = \frac{NI}{2r\pi}, \quad (3-68)$$

pa je element toka:

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot hdr. \quad (3-69)$$

Ukupni tok kroz svitak tada je:

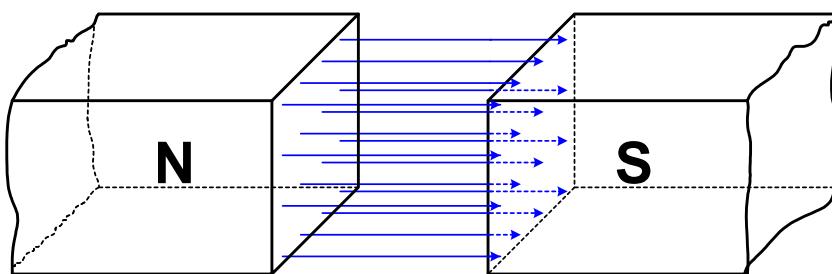
$$\Phi = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \int_{R_u}^{R_v} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{R_v}{R_u}. \quad (3-70)$$

Ako je poprečna dimenzija svitka znatno manja od njegove duljine, jednadžbe koje opisuju tok u slučaju homogenog odnosno nehomogenog polja daju približno jednak rezultat.

## 4. UČINCI MAGNETSKOGA POLJA

Premda magnetsko polje ne registriramo svojim osjetilima, ono zadire u sva područja ljudskog djelovanja i s njim se susrećemo praktički na svakom koraku. Ovo poglavlje važno je za razumijevanje niza pojava u elektrotehničkoj praksi. Na učincima polja, koja ćemo analizirati, temelji se rad raznovrsnih strojeva, sprava, osjetila i drugih dijelova električnih krugova i sustava. U proučavanju učinaka magnetskoga polja uvest ćemo radi jednostavnosti i lakšeg uočavanja stvarnih fizikalnih pojava neke dopuštene prepostavke:

- a) Vanjsko magnetsko polje, u kojemu se nalazi vodič kojim teče struja ili vodič koji se u tom polju giba, smatrat ćemo homogenim. Magnetsko polje je homogeno ako vektori magnetske indukcije imaju u svakoj točki iste veličine i pravce. Homogeno polje grafički se prikazuje silnicama istog pravca, smjera i gustoće. Približno homogeno polje postiže se između blisko udaljenih polova ravnoga magneta, kao na *Slici 4.1.*



*Slika 4.1 – Homogeno magnetsko polje između polova ravnoga magneta*

Polje unutar gusto motanog ravnog svitka može se smatrati približno homogenim, a također i polje između dvaju blisko postavljenih svitaka (Helmholtzovi svitci).

Većinom su polja nehomogena. Primjer nehomogenog polja je raspodjela polja između polova potkovičastog magneta, polje ravnog dugog vodiča i dr.

Nehomogenost polja znatno bi otežala egzaktnu analizu stvarne raspodjele polja, a da pri tomu ne bismo imali baš pravi uvid u stvarne procese koji se zbivaju u polju i vodičima koji se u tom polju nalaze.

- b) Pri gibanju vodiča u magnetskome polju analizirat ćemo samo slučajeve jednolikoga gibanja. To znači da će se translacija (jednoliko gibanje po pravcu) ili rotacija izvoditi konstantnom brzinom. U protivnom bi ovisnosti magnetskih i električnih veličina imale znatno složeniji oblik.

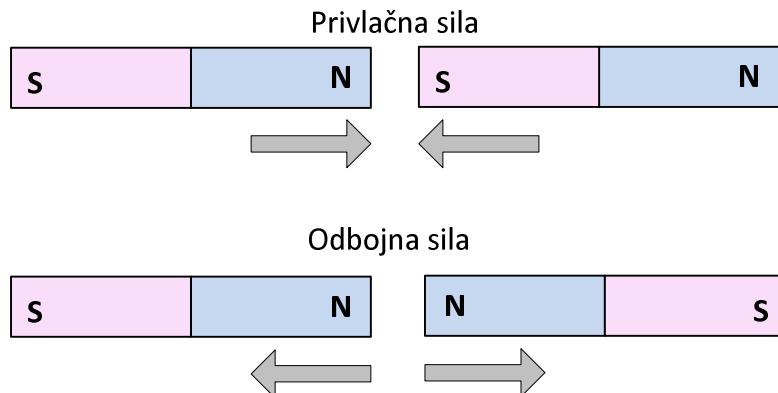
Magnetsko polje je posrednik u transformaciji mehaničke energije u električnu energiju i obratno. U ovom ćemo poglavlju, zbog velike važnosti za elektrotehničku praksu, detaljno obraditi dva učinka u kojima glavnu ulogu ima magnetsko polje:

- *stvaranje električnih napona* – djelovanjem mehaničke sile na vodič koji je u magnetskome polju inducira se na krajevima vodiča razlika potencijala (inducirani električni napon);
- *stvaranje mehaničkih sila* – kada se vodič kojim teče struja nalazi u stranome magnetskom polju, na vodič djeluje mehanička sila.

Na dobivanju induciranih napona, posebno onih harmonijskoga, tj. sinusoidnoga tipa, temelji se uporaba magnetskoga polja u generatorima izmjenične struje i transformatorima te raznim električkim uređajima i instrumentima. S druge strane, dobivanje mehaničkih sila uz pomoć magnetskoga polja omogućuje rad elektromotora i elektromagneta.

## 4.1. SILE U MAGNETSKOME POLJU

Do sada smo proučavali izračun magnetskih veličina u polju stvorenome konstantnom strujom. Postavlja se pitanje, što će se dogoditi kada imamo interakciju magnetskih polja što su rezultat protjecanja struje i/ili djelovanja permanentnih magneta ili kretanja naboja u polju. Rezultat te interakcije jedan je od dvaju temeljnih učinaka magnetskog polja, a to je učinak mehaničkih sila. U elementarnim razmatranjima taj se učinak vidi kod privlačnog ili odbojnog djelovanja dvaju permanentnih magneta, kao na *Slici 4.2*.



*Slika 4.2 – Sile između dvaju štapićastih magneta*

Sila stalnih magneta ili elektromagneta bit će detaljnije opisana kada uvedemo izraz za energiju magnetskoga polja.

Izračun magnetskoga polja elemenata protjecanih strujom iskoristit ćemo za određivanje sila koje djeluju na nabijene čestice, dijelove vodiča protjecane strujom i strujne petlje. Opisat ćemo tri karakteristična slučaja stvaranja sile zbog učinka magnetskoga polja: silu na nabijenu česticu koja se giba u magnetskome polju, silu na element vodiča u vanjskome polju i silu između dvaju vodiča protjecanih strujama.

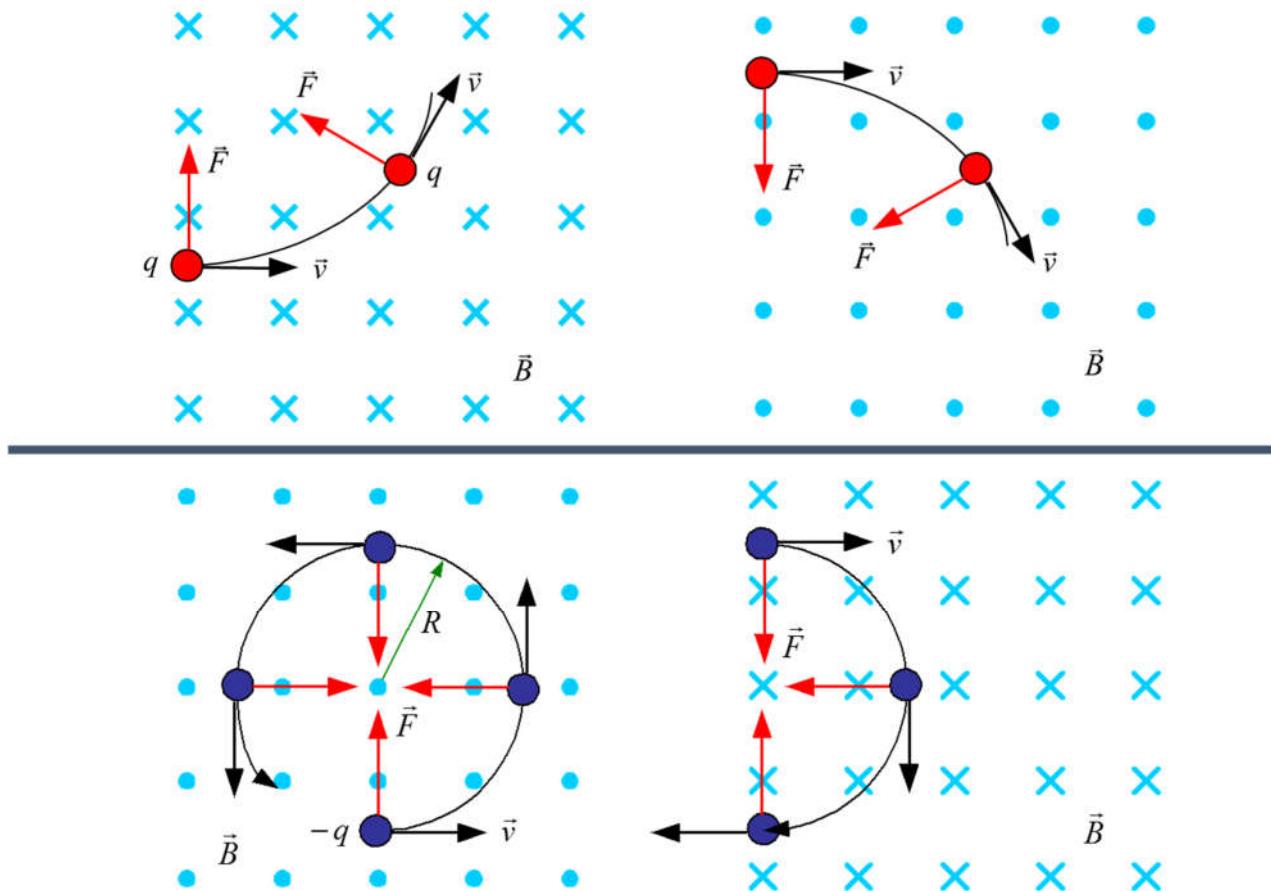
### 4.1.1. Sila na nabijenu česticu

Poznato nam je kako je električna sila na stacionarni naboju u električnometu polju prema Coulombovu eksperimentalnom zakonu razmjerna jakosti polja, tj.:  $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ . Isto vrijedi i za nabijenu česticu  $q$  koja se giba u električnometu polju. Za pozitivni naboju sila i polje jednaka su smjera.

Magnetsko polje, međutim, ne može izazvati silu na mirujući naboju. To je logično jer magnetsko polje stvaraju naboji u gibanju, pa i sila može djelovati samo na naboje koji se gibaju. Eksperimentalno je ustanovljeno kako je magnetska sila  $\vec{F}_m$  koju osjeća naboju  $q$  pri gibanju brzinom  $\vec{v}$  u magnetskome polju indukcije  $\vec{B}$ , dana izrazom:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4-1)$$

Prema pravilu vektorskoga produkta sila je okomita na ravninu koju određuju vektori  $\vec{v}$  i  $\vec{B}$ . Kao primjer djelovanja ove sile prikazana je putanja gibanja čestice što ulazi okomito na magnetsko polje – *Slika 4.3.*



*Slika 4.3 – Sila na nabijenu česticu u magnetskome polju: pozitivnu (gore), negativnu (dolje).*

Kao što se vektor električnoga polja definira električnom silom po jediničnome naboju, tako se i vektor magnetske indukcije može odrediti kao magnetska sila po jediničnome naboju.

Električna sila ne ovisi o brzini naboja, ali može izvršiti rad na naboju, tj. promijeniti njegovu kinetičku energiju – ubrzati ga ili usporiti. S druge strane, magnetska sila ovisi o brzini naboja.

Ona djeluje okomito na smjer gibanja naboja, pa ne može vršiti rad ( $\vec{F}_m \cdot d\vec{l} = 0$ ). Magnetska sila, dakle, ne pridonosi povećanju kinetičke energije, ali djeluje na promjenu putanje naboja u magnetskome polju. Ako naboј (elektron) kao na donjoj lijevoj slici ostane u jednolikome polju, magnetska (centripetalna) sila svinut će putanju elektrona u kružnicu polujera  $R$ :

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{qB}. \quad (4-2)$$

Primjer na donjoj desnoj slici pokazuje kako se negativni naboј koji ulijeće u magnetsko polje, nakon opisane polukružne putanje, vraća jednakom brzinom u suprotnom smjeru pri izljetanju iz polja.

Općenito su iznosi električne sile znatno veći od magnetske, osim za vrlo visoke brzine gibanja naboja. Ukupna sila na naboј koji se giba pod djelovanjem obaju polja jest:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4-3)$$

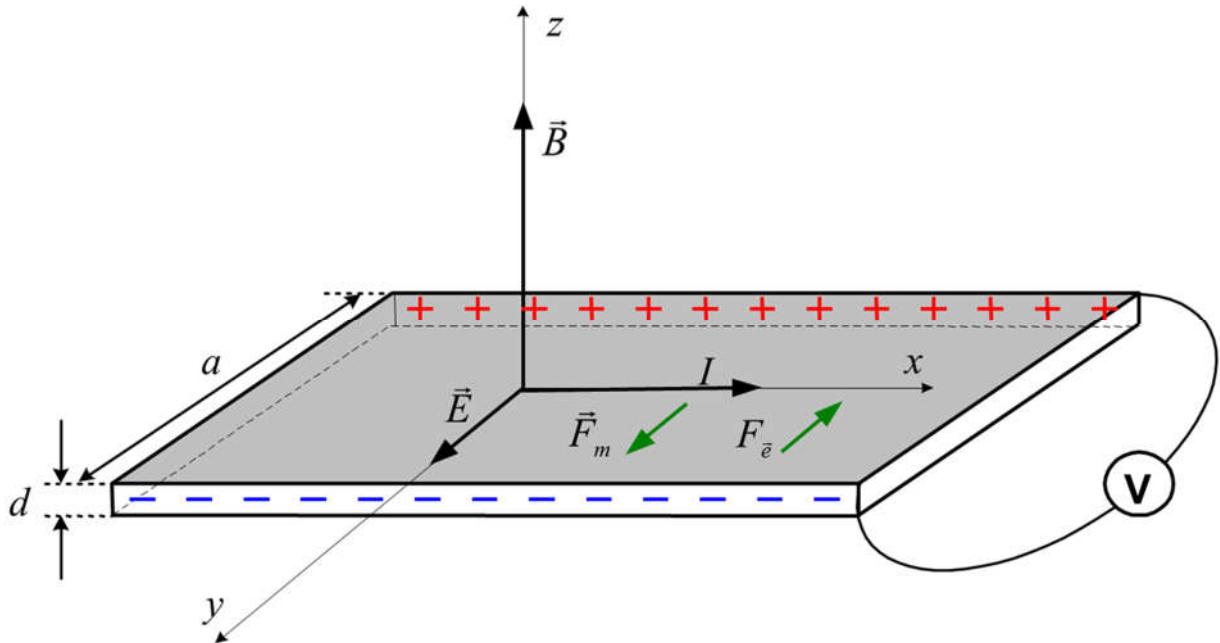
Ta je jednadžba poznata pod nazivom Lorentzova sile.<sup>15</sup> Iz nje se može dobiti odnos električne i mehaničke sile. Naime, ako se nabijena čestica mase  $m$  giba u kombiniranom električnom i magnetskom polju, prema *II. Newtonovu zakonu gibanja* vrijedi:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4-4)$$

Kombinacija učinaka električnoga i magnetskoga polja javlja se, primjerice, u katodnoj cijevi za potrebe otklona i fokusiranja elektronskoga snopa. Valja imati na umu kako se promjena energije može postići samo djelovanjem električnog polja.

### **Hallov efekt**

Američki fizičar Edwin Herbert Hall<sup>16</sup> 1879. godine pokazao je kako se između bočnih rubova tanke metalne trake protjecane strujom i postavljene okomito na smjer magnetskoga polja stvara razlika potencijala. Generiranje Hallova napona simbolički je pokazano na *Slici 4.4*.



*Slika 4.4 – Generiranje Hallova napona*

Struja  $I$  gustoće  $J = I/d \cdot a$  teče u smjeru osi  $x$ . Pločica se nalazi u homogenome magnetskom polju indukcije  $B$ . Polje po smjeru i pravcu odgovara osi  $z$ . Naboji koji se kreću trakom formirajući električnu struju mogu, u općem slučaju, biti pozitivni ili negativni. Električnu struju u vodljivoj pločici tvore elektroni koji se gibaju u smjeru  $-x$ . Pod djelovanjem sile  $\vec{F}_m = -q(\vec{v} \times \vec{B})$  oni se potiskuju prema rubu ploče okomito na smjer svojega gibanja (smjer  $+y$ ). Zbog gomilanja elektrona na jednoj strani ploče druga strana ostaje s manjkom elektrona, tj. viškom pozitivnog naboja. Tako raspodijeljeni naboji stvaraju električno polje  $\vec{E}$  usmjereni u osi  $+y$ . Sila  $\vec{F}_e = -q\vec{E}$

<sup>15</sup> Hendrik Antoon Lorentz – njemački fizičar (1853. – 1928.)

<sup>16</sup> Edwin Herbert Hall (1855. – 1938.)

djeluje na elektrone, kao slobodne nositelje naboja, u smjeru suprotnome u odnosu na električno polje ( $-y$ ) i na magnetsku silu. Proces gomilanja naboja prestaje u trenutku kada se magnetska sila po intenzitetu izjednači s električnom silom. U stanju ravnoteže je  $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$ , tj.:

$$qvB = qE_H \Rightarrow E_H = vB, \quad (4-5)$$

gdje je  $E_H$  Hallovo električno polje.

Razdvojeni naboji na rubovima pločice, udaljeni međusobno za  $a$ , stvaraju razliku potencijala, koja je jednaka Hallovu naponu  $U_H$ :

$$U_H = E_H a = vBa. \quad (4-6)$$

Hallov se napon može izmjeriti preciznim voltmetrom. Temeljem predznaka razlike potencijala može se zaključiti koji je polaritet nositelja naboja. Otprije je poznato:

$$v = \frac{I}{nqS} = \frac{I}{nqad}, \quad n = \frac{N}{V}, \quad (4-7)$$

pa je:

$$U_H = vBa = \frac{I}{nqd} B = \frac{Ja}{nq} B = k \cdot B. \quad (4-8)$$

To je korisna relacija jer pokazuje kako se mjeranjem Hallova napona može realizirati instrument baždaren u vrijednostima magnetske indukcije  $B$ . Primjerice, postavljanjem Hallovih sonda u zračni raspor različitih električnih strojeva može se mjeriti magnetska indukcija. Hallov efekt ima važnu ulogu i u određivanju svojstava poluvodiča.

#### 4.1.2. Sila na vodič protjecan strujom

Prema prethodnome poglavlju diferencijalna sila  $d\vec{F}_m$  na diferencijalni element naboja  $dq$  jest:

$$d\vec{F}_m = dq(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4-9)$$

Element naboja  $dq$  zauzima vrlo mali volumen, ali još uvjek dovoljno velik da u njemu bude velik broj malih diskretnih naboja. Magnetsko polje djeluje gornjom silom na slobodne naboje (elektrone) koji se gibaju u vodiču i trebalo bi uzrokovati otklon putanje. To bi izazvalo pomak centara ravnoteže pozitivnih i negativnih naboja. Coulombove sile između elektrona i pozitivnih iona opiru se takvu pomaku. Bilo koji pokušaj pomaka elektrona izaziva reakciju privlačne sile između elektrona i pozitivnih iona u kristalnoj rešetki materijala od kojeg je napravljen vodič. Zbog toga se magnetska sila na naboje prenosi na kristalnu rešetku odnosno na sam vodič.

Proučit ćemo djelovanje sile na element vodiča  $dl$  protjecan strujom  $I$  ako se vodič nalazi u stacionarnome homogenom magnetskom polju indukcije  $B$ . Struja kroz vodič nastaje usmjerenim gibanjem slobodnih naboja, pa je razumljivo da je sila na vodič, osim s indukcijom, proporcionalna i s jakošću struje. Eksperimentom je utvrđena ovisnost sile o duljini i položaju segmenta vodiča u magnetskome polju. Element sile je:

$$d\vec{F}_m = I(dl \times \vec{B}). \quad (4-10)$$

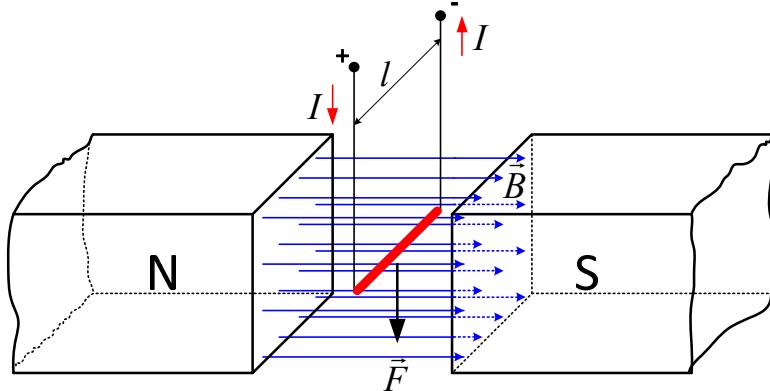
Ukupna sila jednaka je vektorskog zbroju elemenata sile i vrijedi za cijeli zatvoreni krug protjecan strujom:

$$\vec{F}_m = I \cdot \oint_l (\vec{dl} \times \vec{B}). \quad (4-11)$$

U jednostavnom slučaju sila na ravni vodič, čiji je odsječak duljine  $l$  smješten u homogenome magnetskom polju, jest:

$$\vec{F}_m = I(\vec{l} \times \vec{B}). \quad (4-12)$$

Sila djeluje okomito na ravninu koju oblikuju vodič i vektor magnetske indukcije, kao što se vidi na *Slici 4.5*.



*Slika 4.5 – Sila na vodič protjecan strujom*

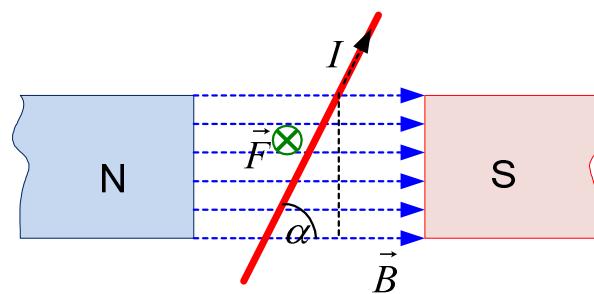
Praktično pravilo kojim se može odrediti smjer sile jest Flemingovo pravilo lijeve ruke. Ono glasi: *Ako se lijeva ruka postavi tako da ispruženi prsti pokazuju smjer struje u vodiču, a magnetske silnice vanjskoga polja udaraju u dlan, tada odvojeni palac pokazuje smjer sile na vodič.*

Promjena smjera djelovanja sile može se postići promjenom smjera struje ili magnetskoga polja. Intenzitet sile je prema poznatom pravilu vektorskog produkta:

$$F_m = IlB \sin \alpha, \quad (4-13)$$

gdje je  $\alpha$  kut između vodiča i vektora magnetske indukcije.

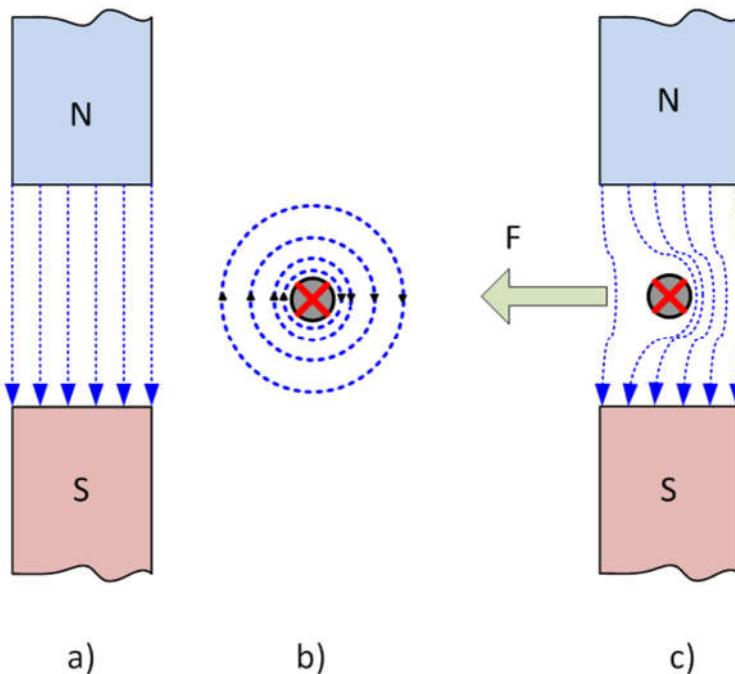
Sila je minimalna,  $F = 0$ , ako se položaj vodiča poklapa s vektorom magnetske indukcije ( $\alpha = 0^\circ$ ). Kada je vodič postavljen okomito na vektor magnetske indukcije ( $\alpha = 90^\circ$ ), sila ima maksimalnu vrijednost  $F = IlB$ . Za sve ostale položaje  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  sila se može izračunati zamjenom odsječka vodiča  $l$  njegovom projekcijom na pravac okomit na magnetske silnice  $l \sin \alpha$ , pa je sila  $F = IlB \sin \alpha$  (*Slika 4.6*).



*Slika 4.6 – Sila na vodič koji zatvara proizvoljni kut  $\alpha$  s magnetskim poljem*

Pokazali smo preko magnetske sile na naboje u kristalnoj rešetki vodiča kako se sila prenosi na sam vodič. Sada ćemo opisati uzrok nastajanja sile preko međudjelovanja vanjskoga magnetskog

polja i polja vodiča. Navedena polja odvojeno su prikazana na *Slici 4.7.a) i b)*. Rezultat interakcije je složeno magnetsko polje na *Slici 4.7.c)*.



*Slika 4.7 – Generiranje sile na vodič protjecan strujom*

Silnice polja magneta i vodiča lijevo od vodiča suprotnog su smjera, pa se djelomice poništavaju. Intenzitet kombiniranog polja slabiji je od svakoga pojedinačnog polja. Desno od vodiča sve su silnice jednakoga smjera, što pojačava ukupno polje. Nejednakost raspodijeljena polja na objema stranama vodiča teže za izjednačavanjem. Silnice zauzimaju položaj minimuma energije, tj. položaj u kojem bi se maksimalno skratile i razmaknule jedna od druge. Kao rezultat, stvara se sila koja potiskuje vodič iz područja jačeg u područje slabijega magnetskog polja. Ta se pojava zove *elektrodinamički efekt*, a stvorena sila je *elektrodinamička sila*.

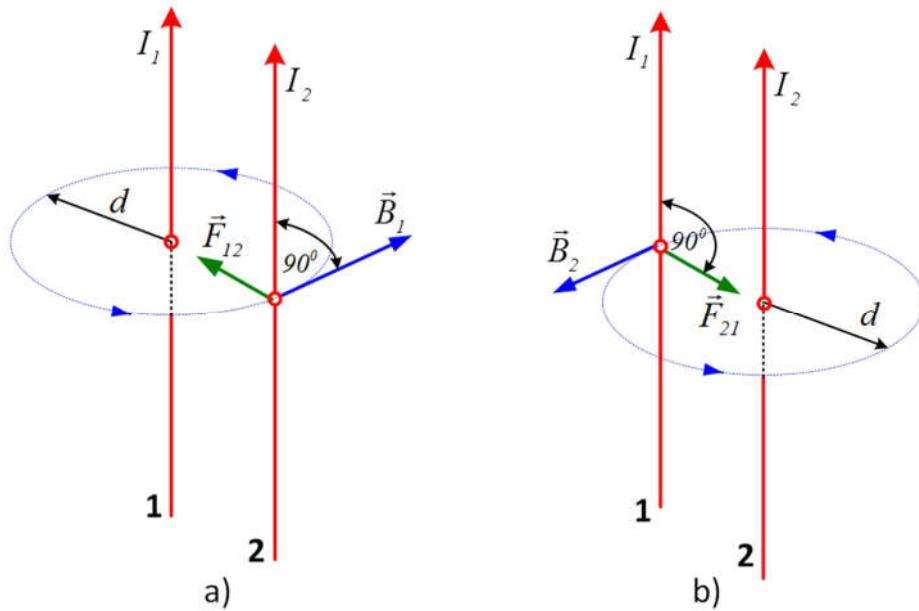
Iz jednadžbe za silu može se na još jedan način definirati magnetska indukcija:

$$B = \frac{F}{I \cdot l}. \quad (4-14)$$

To je sila po jediničnom elementu struje, tj.: *magnetska indukcija je brojčano jednaka sili kojom homogeno magnetsko polje djeluje na vodič duljine 1 m pri struci od 1 A.*

#### 4.1.3. Sila između vodiča protjecanih strujom

Prethodno analizirana sila na strujni element  $Idl$  ne potječe od polja koje taj element stvara, već od nekoga vanjskog polja. Vanjsko polje može biti generirano od nekog drugog strujnog elementa. U tom smislu razmatrat ćemo poseban oblik elektrodinamičke sile koja nastaje između dvaju paralelnih vodiča protjecanih strujama  $I_1$  i  $I_2$  ( $I_1 > I_2$ ), kao na *Slici 4.8*. Ako su vodiči međusobno bliski, njihova se magnetska polja prožimaju. Neka su vodiči jednake duljine  $l_1 = l_2 = l$ , koja je znatno veća od njihove međusobne udaljenosti  $d$ .



Slika 4.8 – Sila između paralelnih vodiča protjecanih strujama

Vodič **2** protjecan strujom  $I_2$  nalazi se u magnetskome polju  $B_1$  vodiča **1** (Slika 4.8.a)). Elektrodinamička sila na drugi vodič je:

$$F_{12} = I_2 l B_1. \quad (4-15)$$

Magnetska indukcija koju stvara prvi vodič u drugom vodiču, udaljenom za  $d$ , jest:

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}, \quad (4-16)$$

pa je sila:

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}. \quad (4-17)$$

Na isti način (Slika 4.8.b)) dobije se sila kojom vodič **2** djeluje na vodič **1**:

$$F_{21} = I_1 l B_2 \quad ; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \quad \Rightarrow \quad F_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}. \quad (4-18)$$

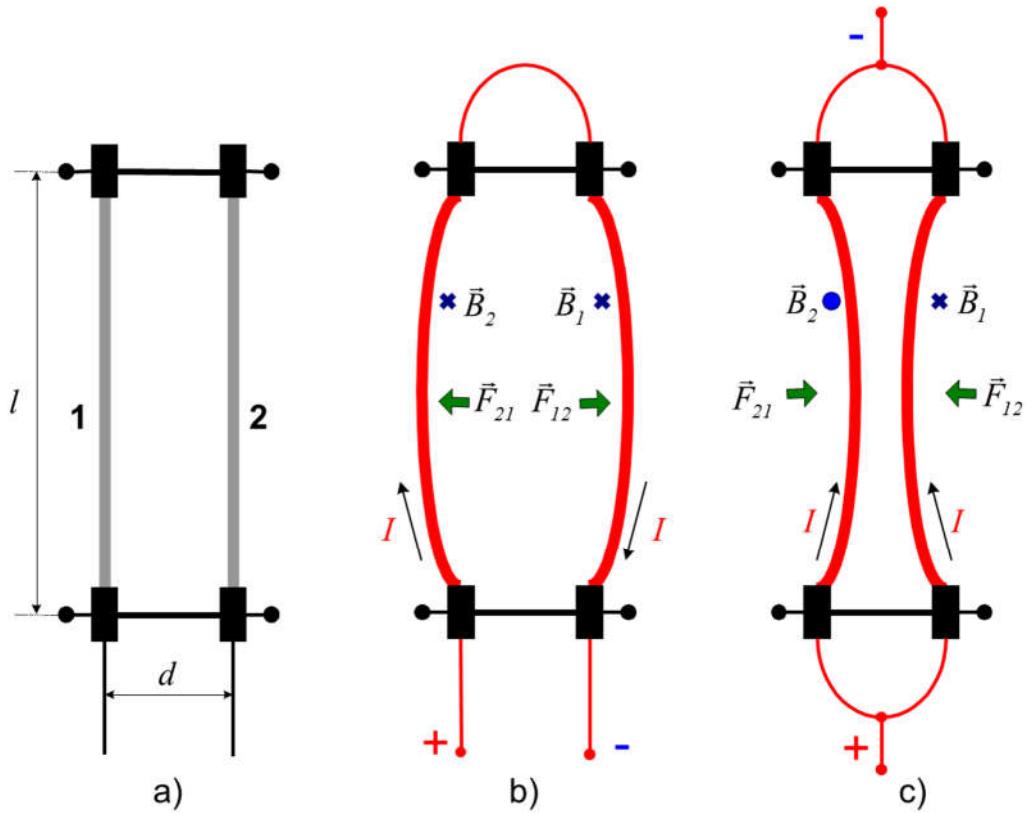
Sile  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{21}$  zadovoljavaju III. Newtonov zakon akcije i reakcije, tj. jednake su po iznosu i suprotnoga su smjera:  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Obje sile u gornjem primjeru djeluju istovremeno i usmjerene su tako da teže približiti vodiče.

Općenito se smjer djelovanja sile utvrđuje pravilom lijeve ruke ili pravilom vektorskog produkta. Pri tomu se mogu analizirati dva slučaja:

- paralelni vodiči protjecani strujama istoga smjera međusobno se privlače
- paralelni vodiči protjecani strujama suprotnoga smjera međusobno se odbijaju.

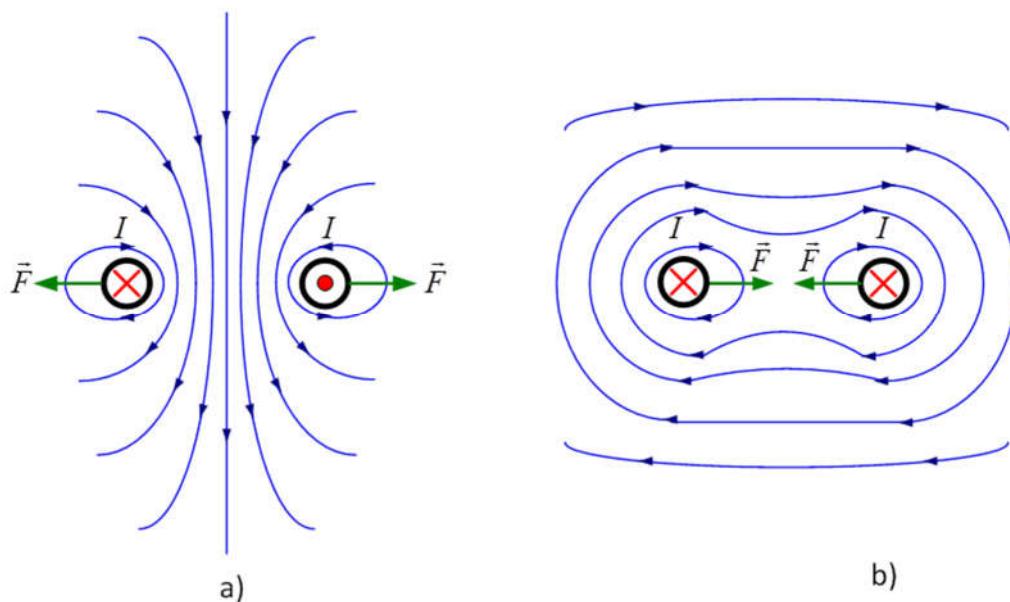
Ako vodiči protjecani strujama međusobno zatvaraju neki kut, posljedica djelovanja sile je težnja da se postave paralelno.

Na Slici 4.9.a) prikazana su dva paralelna masivna vodiča (sabirnice), svaki duljine  $l$  i razmaka  $d$ . Kada su vodiči spojeni serijski, njima teku jednake struje suprotnoga smjera (b), a sila je odbojna. Primjer c) prikazuje paralelno spojene vodiče. Struje su jednake i istog su smjera, a rezultirajuća sila je privlačna.



Slika 4.9 – Generiranje sile između sabirnica

Na Slici 4.10 prikazana je približna raspodjela silnica ukupnoga magnetskog polja u gore analiziranim slučajevima.



Slika 4.10 – Raspodjela silnica između vodiča

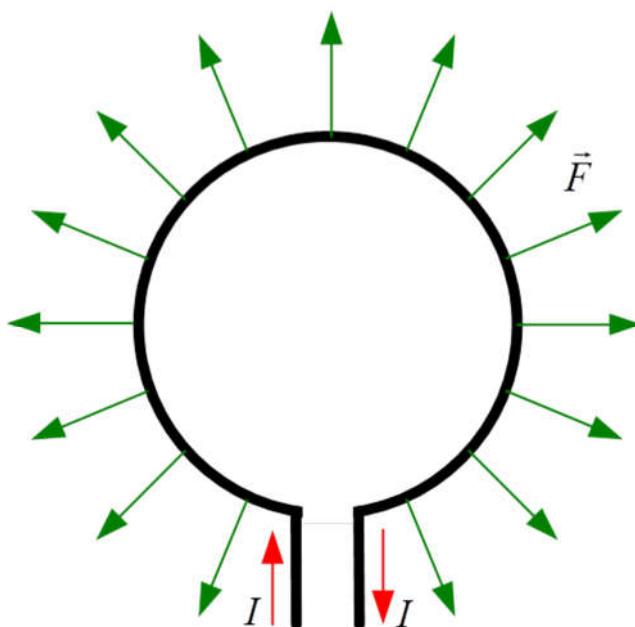
U primjeru *a*) polja između sabirnica imaju isti smjer, pa ukupno polje jača. Lijevo i desno od sabirnica pojedinačna se polja slabe, jer su suprotno usmjerena. Težnja silnica da zauzmu položaj minimuma energije ima za rezultat silu koja teži raširiti sabirnice.

U primjeru *b*) djelomična polja između vodiča suprotno su usmjerena, pa je ukupno polje oslabljeno. Lijevo i desno od sabirnica ukupno polje jača, jer su pojedinačna polja istog smjera. Stvorena sila djeluje u smislu približavanja sabirnica.

Kako je  $I_1 = I_2 = I$ , iznos sile je:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}. \quad (4-19)$$

Polje jednog ravnog vodiča ne može djelovati silom na sam vodič koji je stvorio polje. Međutim, elektrodinamičke sile djeluju i na pojedine dijelove jednog te istog vodiča, ako je on zakrivljen. Temeljni oblik zatvorenog strujnog kruga je zavoj. Svaki djelić zavoja podvrgnut je djelovanju sile od ostalih dijelova zavoja. Sile imaju radijalan smjer i teže rastegnuti zavoj, kao na *Slici 4.11*.



*Slika 4.11 – Sila na kružni zavoj*

Sila raste s „kvadratom“ struje, kao i s približavanjem vodiča. Stoga treba paziti da sabirni vodovi i zavoji kojima teku snažne struje budu dobro učvršćeni, kako ih ne bi deformirale elektrodinamičke sile. Visoke struje kratkoga spoja, primjerice u trafostanicama, mogu proizvesti tako jake sile da izobliče kabele ili šine sabirnica. Djelovanje sile na vodiče protjecane strujama iskorištava se i u mjernim instrumentima (tzv. elektrodinamički mjerni sustavi).

Sila po jedinici duljine je:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}. \quad (4-20)$$

Primjenom te jednadžbe definira se u SI sustavu jedinica za jakost električne struje 1 A kao četvrta jedinica MKSA sustava. Naime, ako je  $l = 1 \text{ m}$ ,  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ ,  $d = 1 \text{ m}$ , dobije se  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ . Dakle:

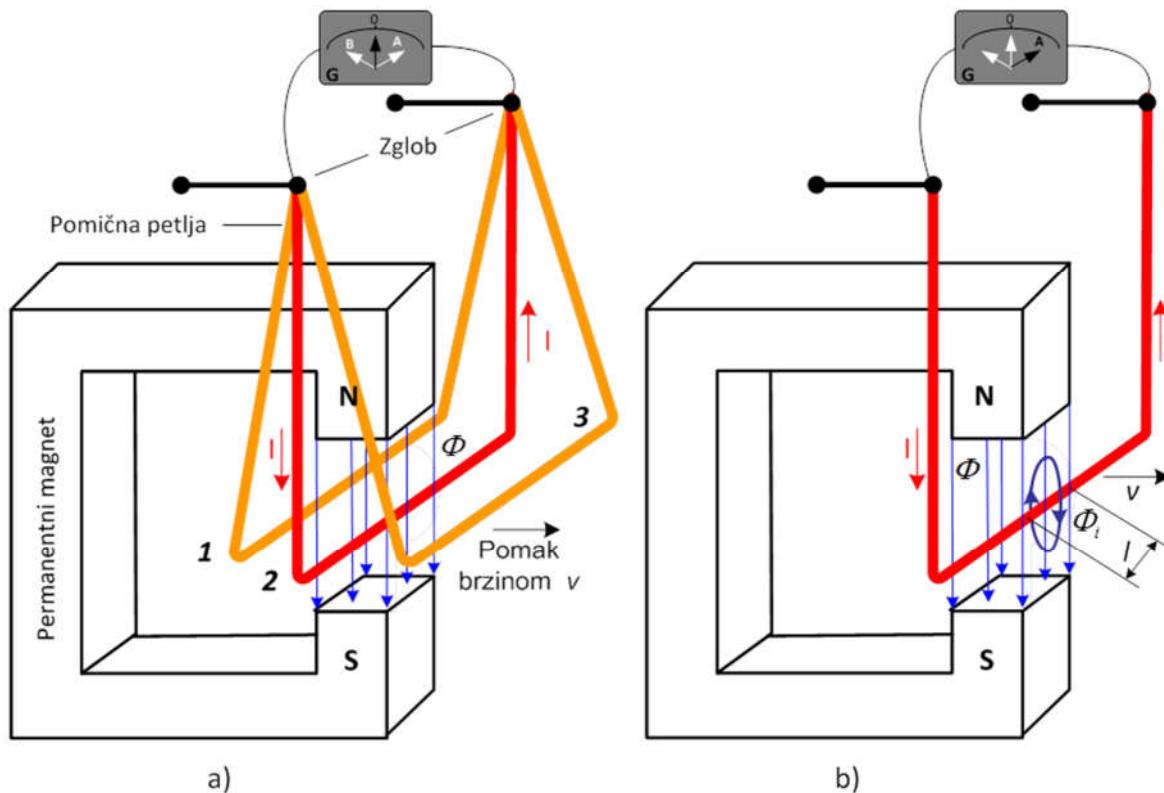
1 amper je jakost konstantne struje koja protjecanjem kroz dva paralelna ravna beskonačno duga vodiča zanemarivo malog kružnog presjeka, smještena u vakuumu na međusobnoj udaljenosti od 1 m, izaziva silu između vodiča od  $2 \cdot 10^{-7}$  N po svakom metru duljine vodiča.

## 4.2. FARADAYEV ZAKON ELEKTROMAGNETSKE INDUKCIJE

Oerstedova eksperimentalna istraživanja, na kojima se temelje Amperov i Biot-Savartov zakon, pokazala su da konstantne struje stvaraju magnetsko polje. Prirodno je i logično postaviti pitanje: je li moguć i obratan proces, tj. da se pod određenim uvjetima uz pomoć magnetskoga polja proizvede električna struja? Nakon niza istraživanja i eksperimenata koje je proveo Michael Faraday mogao se dati pozitivan odgovor na to pitanje. Na rješenju ovog fenomena temelji se pretvorba mehaničke u električnu energiju počevši od malog dinamo motora bicikle do velikih generatora u elektranama.

Jedanaest godina nakon Oerstedovih istraživanja, 1831. godine, Faraday je dokazao kako vremenski promjenljivo magnetsko polje stvara električnu struju. On je izveo niz pokusa s dvama svitcima namotanima na zajedničku jezgru. Na krajeve prvog svitka spojio je galvanometar, a drugi svitak spojio je serijski s baterijom i sklopkom. Otvarajući i zatvarajući sklopku, primijetio je poskakivanje igle galvanometra. Zaključio je kako su vremenske promjene magnetskoga toka odgovorne za inducirani napon (struju) u prvoj svitku. Faraday je također zamijetio da se napon inducira i pri kretanju vodljive petlje u konstantnom magnetskom polju.

Prikazat ćemo potonje istraživanje u obliku školskog pokusa, kao na *Slici 4.12.*



*Slika 4.12 – Induciranje napona u pomičnoj petlji*

Vodljiva petlja objesena je tako da, pomicanjem oko zglobova, može zauzimati različite položaje (1, 2, 3) u zračnom rasporu permanentnoga magneta (*Slika 4.12.a*). Homogeno polje određeno tokom  $\Phi$  zove se još i *uzbudno polje*. Petlja je zatvorena galvanometrom s nulom u sredini skale. Za vrijeme gibanja petlje u smjeru 1-2-3 na njezinim krajevima inducira se napon nazvan

elektromotorna sila – EMS, pa galvanometar registrira protok struje (*Slika 4.12.b*). Ako se petlja pomije konstantnom brzinom, teče struja  $I$  konstantne jakosti. Ona stvara svoje magnetsko polje određeno tokom  $\Phi_i$  koje se suprotstavlja izvornome toku  $\Phi$ . Ako se petlja giba u suprotnome smjeru (3-2-1), inducirani napon mijenja polaritet, pa se i kazaljka galvanometra otklanja u suprotnome smjeru.

Inducirana elektromotorna sila –  $EMS e_{ind}$  proporcionalna je brzini promjena magnetskoga toka  $\Phi$ . Vodljiva petlja „siječe“ silnice polja svojim aktivnim dijelom  $l$  (odsječak vodiča koji se nalazi u magnetskome polju), koji se giba brzinom  $v$ .

Pretpostavimo da u nekom trenutku  $t_1$  petlja siječe tok  $\Phi_1$ , a u sljedećem trenutku  $t_2$  tok  $\Phi_2$ . Razlika vrijednosti obično se prikazuje grčkim slovom  $\Delta$  (delta). U vremenskom intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$  ostvarena je promjena toka  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ . Mjera promjene toka je brzina promjene toka, pa je inducirani napon proporcionalan s  $\Delta\Phi/\Delta t$ .

Inducirani napon takva je smjera da se njime uzrokovana struja protivi promjenama toka  $\Delta\Phi$ , tj.:

$$e_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (4-21)$$

Ako se polje petlja sastoji od više zavoja  $N$ , tada svaki zavoj pri micanju petlje siječe silnice polja i pridonosi induciranom naponu. Brzina promjene neke veličine u općem se slučaju definira kao derivacija po vremenu ( $d/dt$ ), pa je:

$$e_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4-22)$$

gdje je  $N$  broj zavoja u krugu, a  $\Phi$  tok kroz pojedini zavoj.

Prema Faradayevim pokusima statičko (konstantno) magnetsko polje ne stvara protok struje. Međutim, vremenski promjenljivo polje u mirujućoj petlji stvara inducirani napon.

Gornja jednadžba rezultat je Faradayevih istraživanja. To je zakon indukcije koji je po njemu nazvan *Faradayev zakon elektromagnetske indukcije*, a glasi:

***Inducirana elektromotorna sila – EMS u bilo kojem zatvorenom krugu jednaka je brzini promjene obuhvaćenoga magnetskog toka.***

### Lentzov zakon

Negativan predznak u gornjoj jednadžbi pokazuje kako inducirani napon djeluje u smislu opiranja toku koji ga je proizveo. Ta je tvrdnja poznata kao **Lentzov zakon**,<sup>17</sup> čime se naglašava činjenica kako je smjer protjecanja struje u krugu takav da se magnetsko polje stvorenog induciranom strujom opire izvornome polju. Prema Faradayevu zakonu polaritet inducirane elektromotorne sile je takav da ona stvara struju koja se opire promjeni što ju je izazvala. Inducirano magnetsko polje u bilo kojem zavodu svitka djeluje tako da nastoji magnetski tok u zavodu održati konstantnim, odnosno zadržati u prethodnom stanju.

U primjerima na *Slici 4.13* vidljivo je da ako tok raste, inducirani tok mu se suprotstavlja. Ako tok opada, inducirano polje djeluje u smjeru postojećega polja nastojeći ga zadržati konstantnim. Mijenjamo smjer magnetskog toka promjenom polariteta štapićastog magneta. Prirast ili smanjivanje toka ostvaruje se približavanjem, odnosno udaljavanjem magneta od svitka.

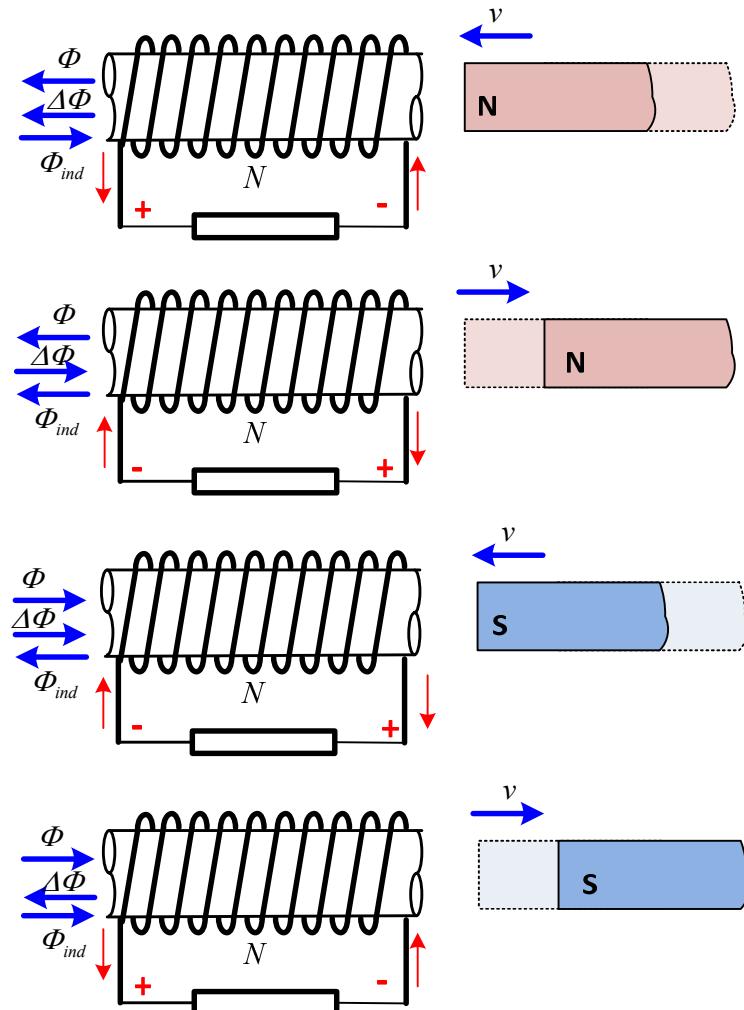
Bilo koja promjena magnetskoga okruženja vodiča ili vodljivog svitka uzrokovat će induciranje napona, a može se ostvariti na tri načina:

- nepokretan svitak u vremenski promjenljivome magnetskom polju – promjena toka u vremenu dobije se promjenama jakosti magnetskoga polja ili gibanjem magneta prema svitku ili od svitka;

<sup>17</sup> Heinrich Friedrich Emil Lentz – ruski fizičar (1804. – 1865.)

- svitak koji se giba u konstantnome magnetskom polju – promjena toka dobije se gibanjem svitka prema polju ili iz njega (translacijsko gibanje), ili vrtnjom svitka u polju (rotacijsko gibanje);
- petlja koja se giba u vremenski promjenljivome magnetskom polju.

Analizirat ćemo prva dva slučaja s pripadnim primjerima. Treći slučaj je složeniji i slijedi iz prvih dvaju.



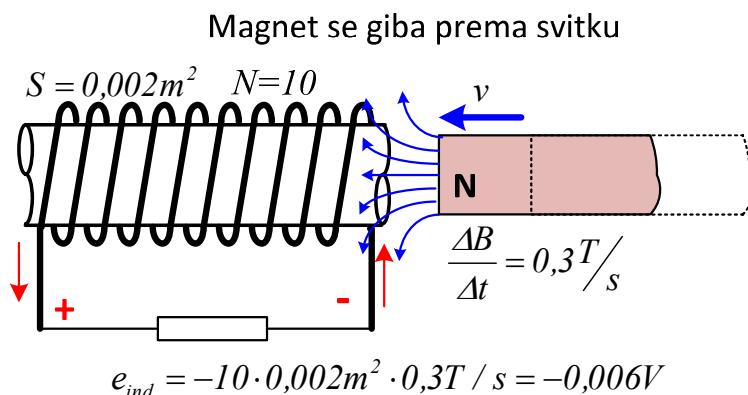
Slika 4.13 – Ilustracija Lenzova zakona

#### 4.2.1. Nepokretan svitak u vremenski promjenljivome magnetskom polju

U primjeru prema *Slici 4.14* napon se inducira u nepokretnome svitku zbog gibanja permanentnoga magneta prema svitku. Promjena toka ostvaruje se zbog promjena gustoće toka  $B$ , uz konstantan presjek  $S$ , pa je:

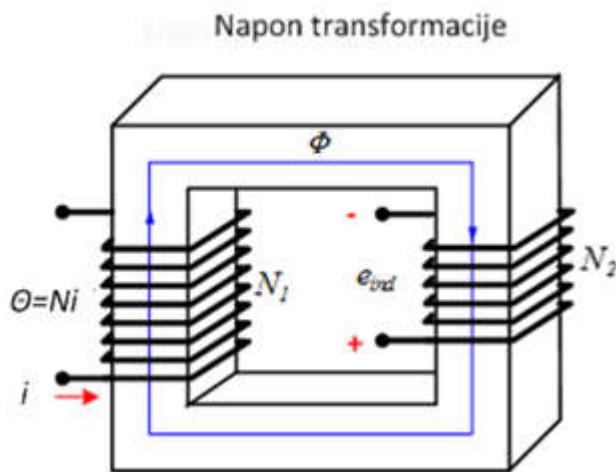
$$e_{ind} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -N \cdot S \frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (4-23)$$

Smjer induciranih napona prema Lenzovu zakonu je takav da bi struja koja bi potekla u zatvorenome krugu stvorila svoje magnetsko polje koje se suprotstavlja izvornome polju koje je stvorilo tu struju. U tomu je smisao negativnog predznaka induciranih napona.



*Slika 4.14 – Inducirani napon u mirujućem svitku zbog gibanja magneta*

Na Slici 4.15 prikazan je primjer generiranja tzv. *napon transformacije* na čemu se temelji rad transformatora. Magnetski tok stvara se u željeznoj jezgri kao posljedica toka struje kroz primarni svitak. U sekundarnome svitku se zbog promjena magnetskoga toka inducira sekundarni napon. U danom primjeru radi se o transformaciji s visokog na niski napon (silazni *step-down transformer*).

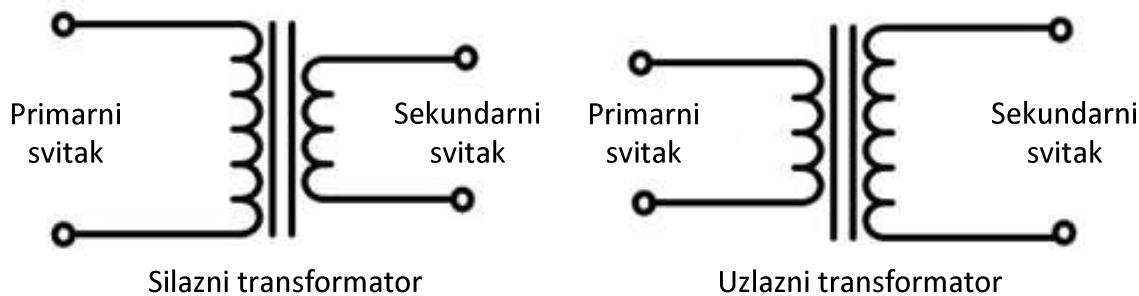


*Slika 4.15 – Inducirani napon transformacije*

Transformacija može biti i s niskog na visoki napon (uzlazni *step-up transformer*).

Na Slici 4.16 dan je shematski prikaz silaznog i uzlaznog transformatora.

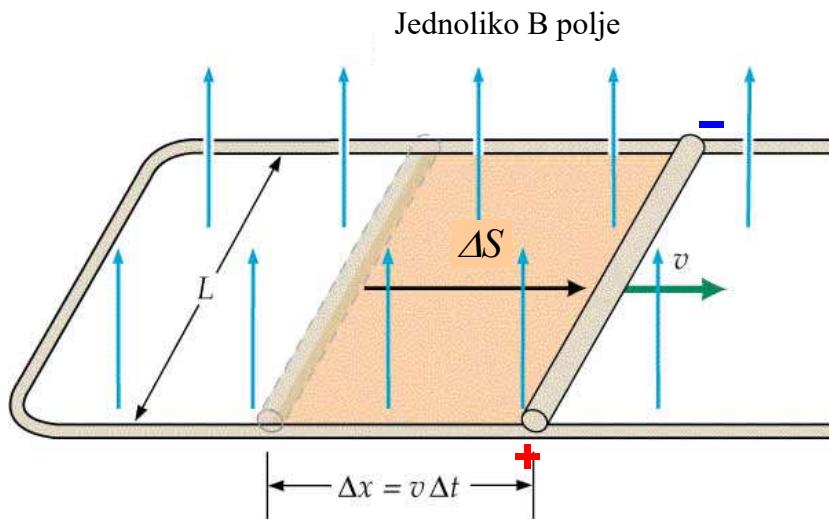
Fenomen transformacije napona detaljnije se obrađuje unutar predmeta Osnove elektrotehnike II.



Slika 4.16 – Shema silaznog i uzlaznog transformatora

#### 4.2.2. Svitak se translacijski giba u konstantnome magnetskom polju – napon pomicanja

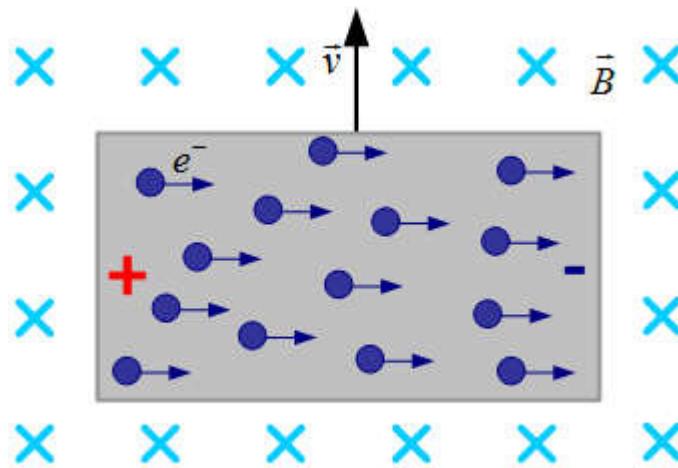
Primjer vodiča duljine  $L$  koji klizi brzinom  $v$  po paralelnim stranicama vodljivoga okvira u homogenome polju indukcije  $B$ , dan je na Slici 4.17. Vodič gibanjem u intervalu  $\Delta t$  prebrisuje površinu  $\Delta S = L\Delta x = Lv\Delta t$ .



Slika 4.17 – Gibanje vodiča u homogenome magnetskom polju

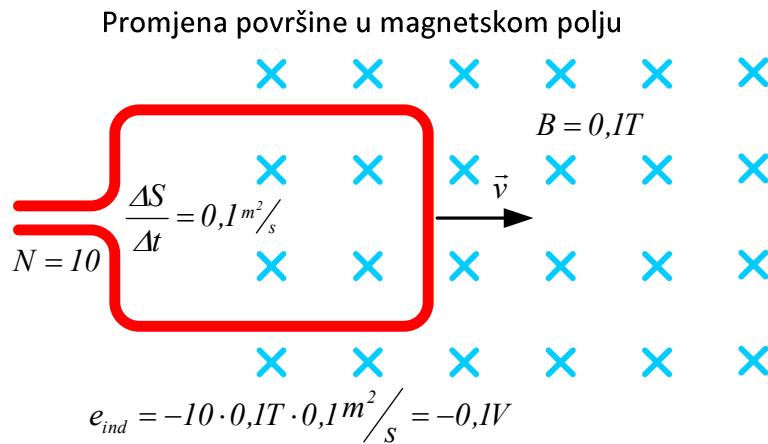
Zbog „presijecanja“ magnetskih silnica u vodiču se inducira EMS.

Razmotrit ćemo fizikalnu bit elektromagnetske indukcije. Na Slici 4.18 prikazan je uvećani segment vodiča sa Slike 4.17 koji se giba u magnetskome polju. Pri svakom kretanju vodiča zajedno s njim kreću se i slobodni elektroni u njemu. Na elektrone djeluju Lorentzove sile  $F_m = -e(\vec{v} \times \vec{B})$ . One pomiču elektrone udesno, pa se na toj strani javlja višak negativnoga naboja. Istovremeno se na lijevoj strani stvara manjak elektrona, tj. pozitivan naboј. Preraspodjelom naboja na krajevima vodiča stvorena je razlika potencijala. Uzrok koji stvara i održava razliku potencijala jest elektromotorna sila. Dakle, u vodiču se inducira EMS, a kada spojimo krajeve vodiča izvan magnetskoga polja, kroz vodič teče struja.



Slika 4.18 – Fizikalno tumačenje inducirane elektromotorne sile

Na Slici 4.19 prikazan je slučaj u kojem se pravokutni svitak giba prema području gdje vlada homogeno polje. Prema zadanim parametrima dobije se odgovarajući iznos induciranoga napona.



Slika 4.19 – Inducirani napon pomicanja izražen preko promjene površine  $\Delta S/\Delta t$

Inducirani napon često se naziva i *napon pomicanja*. Proporcionalan je brzini kojom svitak ulazi u polje. Ta se brzina može izraziti i kao mjera promjene površine svitka u polju. Inducirani je napon:

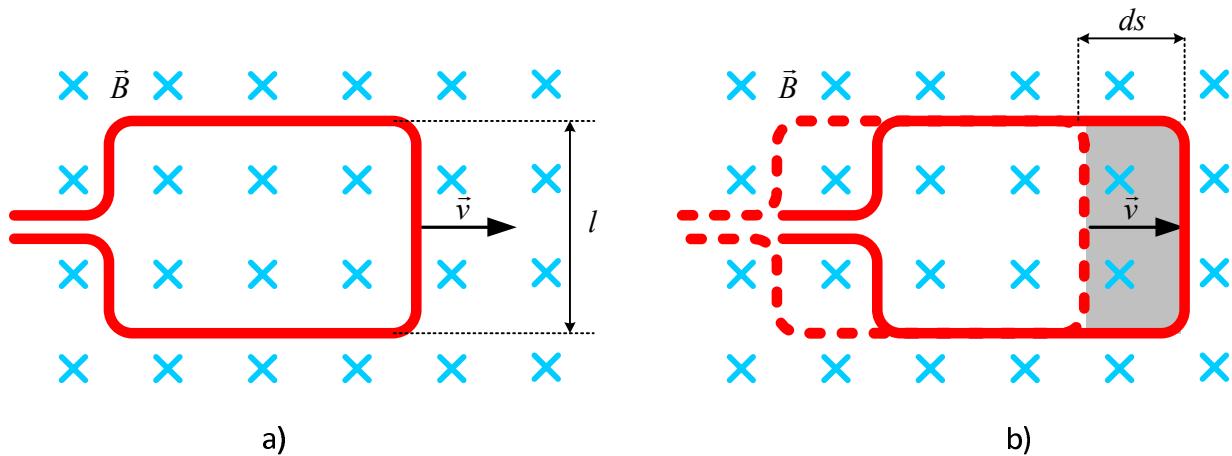
$$e_{ind} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -N \cdot B \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (4-24)$$

Na Slici 4.20 detaljnije je analiziran primjer gibanja pravokutne vodljive petlje u magnetskome polju. U intervalu  $dt$  petlja gibajući se brzinom  $v$  prijeđe put  $ds = vdt$ , pa je prema zakonu indukcije:

$$e_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} = -N \cdot B \frac{dS}{dt} = -N \cdot B \frac{l ds}{dt} = -N \cdot B \cdot l \cdot v \quad (4-25)$$

za petlju s jednim zavojem ( $N = 1$ ) iznos induciranog EMS-a:

$$|e_{ind}| = B \cdot l \cdot v. \quad (4-26)$$



Slika 4.20 – Inducirani napon pomicanja izražen preko brzine gibanja u polju

Gornja jednadžba vrijedi ako se petlja kreće pod pravim kutom u odnosu na silnice polja, tj. postoji samo normalna komponenta brzine. U općem slučaju brzina se može rastaviti na uzdužnu i normalnu komponentu. Pod djelovanjem uzdužne komponente vodič klizi uzduž silnica ne sijekući ih. EMS se inducira samo zbog normalne komponente brzine:

$$v_n = v \sin \alpha, \quad (4-27)$$

gdje je  $\alpha$  kut između vektora brzine i silnica polja. Opća jednadžba za inducirani elektromotornu silu stvorenu pomicanjem vodiča aktivne duljine  $l$  brzinom  $v$  u polju indukcije  $B$  jest:

$$e_{ind} = \vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = Blv \sin \alpha. \quad (4-28)$$

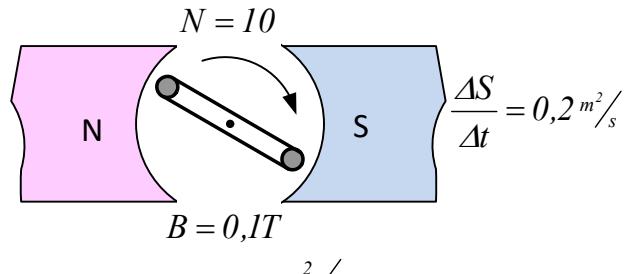
Smjer induciranoga napona određuje se Flemingovim pravilom desne ruke:

*Ako se desna ruka postavi tako da silnice polja ulaze u dlan, a ispruženi palac pokazuje smjer gibanja vodiča, tada ispruženi prsti određuju smjer induciranog EMS-a.*

#### 4.2.3. Svitak rotira u konstantnome magnetskom polju - napon rotacije

U sljedećem je primjeru prikazana petlja koja rotira u magnetskome polju (Slika 4.21). Vrtnja uzrokuje vremenske promjene površine svitka u odnosu na polje, kao u prethodnom slučaju. Pri konstantnoj brzini vrtnje inducirani napon je sinusoidnog oblika, pa je razmatrani primjer u biti pojednostavljen prikaz rada generatora izmjenične struje.

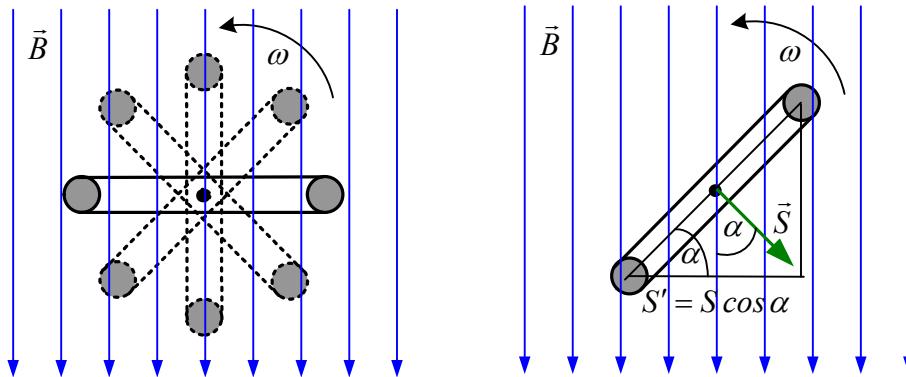
##### Svitak rotira u magnetskom polju



$$e_{ind} = -10 \cdot 0,1T \cdot 0,2 \frac{m^2}{s} = -0,2V$$

Slika 4.21 – Inducirani napon rotacije

Analizirajmo detaljnije gornji slučaj. Pravokutna petlja s  $N$  zavoja, presjeka  $S$ , rotira u homogenome polju kružnom frekvencijom  $\omega$  i pri tomu zauzima različite položaje  $\alpha$  prema magnetskome polju  $B$ , kao na *Slici 4.22*.



*Slika 4.22 – Položaji rotirajuće petlje u magnetskome polju*

Kako je  $\alpha = \omega t$ , magnetski tok postaje:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t. \quad (4-29)$$

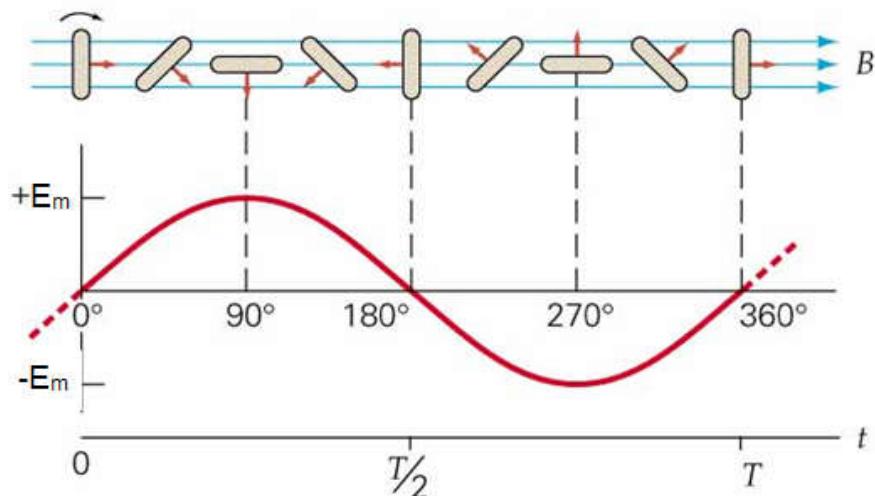
Inducirani EMS je:

$$e_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t = E_m \sin \omega t, \quad (4-30)$$

gdje je  $E_m = NBS\omega$  maksimalna vrijednost induciranih napona.

Inducirani napon mijenja se po sinusoidnom zakonu, kako je to prikazano na *Slici 4.23*.

**Trenutačni položaji rotirajuće petlje**



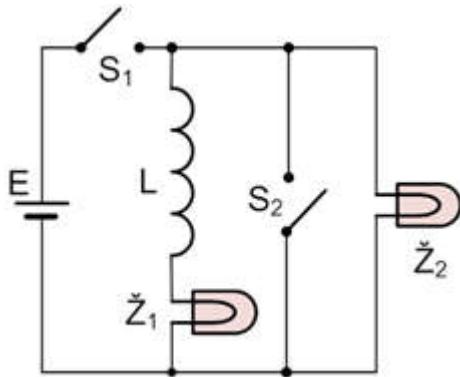
*Slika 4.23 – Sinusoidni inducirani napon rotacije*

### 4.3. SAMOINDUKCIJA I KOEFICIJENT SAMOINDUKCIJE

Zakon elektromagnetske indukcije definira odnos između promjena toka i induciranih napona. Međutim, primarna pojava, tj. uzrok promjenama toka, jest promjena struje. Inducirani napon je sekundarna pojava (posljedica). Pri tomu se magnetsko polje javlja kao posrednik. Ostaje nam istražiti izravnu vezu između uzroka i posljedice, kako je to naznačeno relacijom:

$$\frac{di}{dt} \xrightarrow{\substack{e=f\left(\frac{di}{dt}\right) \\ \underbrace{\frac{d\Phi}{dt}}_{e=-N\frac{d\Phi}{dt}}}} \Rightarrow e_{ind} . \quad (4-31)$$

U tom ćemo cilju razmotriti krug prema *Slici 4.24.*



*Slika 4.24 – Pokus sa žaruljicama*

Na baterijski izvor  $E$  priključene su dvije žaruljice jednakih karakteristika,  $\check{Z}_1$  i  $\check{Z}_2$ . Žaruljica  $\check{Z}_1$  serijski je spojena sa svitkom, čija ćemo unutarnja svojstva opisati oznakom  $L$ . Izvest ćemo dva pokusa s uklapanjem sklopki  $S_1$  i  $S_2$ . U prvom koraku zatvorimo  $S_1$ , a otvorimo  $S_2$ . Time su na izvor spojene obje paralelne grane sa žaruljicama. Žaruljica  $\check{Z}_2$  trenutačno će zasvjetliti normalnim sjajem, dok sjaj žaruljice  $\check{Z}_1$  kontinuirano raste i s određenom vremenskom zadrškom dolazi do punog sjaja. U drugom koraku istovremeno otvorimo  $S_1$ , a zatvorimo  $S_2$ . Obje grane su odspojene od izvora i kratko spojene. Žaruljica  $\check{Z}_2$  trenutačno se ugasi, a svjetlost koju daje  $\check{Z}_1$  postupno trne dok se potpuno ne ugasi.

Kako objasniti uočene pojave?

Žaruljica  $\check{Z}_2$  očekivano se pali i gasi, kao kod uključivanja i isključivanja baterijske svjetiljke. Reakcija žaruljice  $\check{Z}_1$  može se protumačiti jedino postojanjem nekog napona u svitku koji se suprotstavlja protjecanju struje pri uključivanju, odnosno nastoji zadržati protok struje kod isključivanja. Pri uključivanju protjecanje struje automatski uspostavlja magnetski tok u svitku. Po zakonu elektromagnetske indukcije u svitku se inducira napon koji se suprotstavlja struci, odnosno izgradnji magnetskoga toka. Inducirani napon nestaje kada prestane izgradnja magnetskoga polja, tj. kada se uspostavi konstantan magnetski tok ( $d\Phi/dt = 0$ ). Pri isključivanju naglo se prekida protok struje i počinje razgradnja polja svitka praćena opadanjem magnetskoga toka. Sada se inducira napon suprotnoga smjera koji želi potpomoći postojeći protok struje, tj. zadržati prethodno stanje. Kao što je mehanička inercija zadržavanje prethodnih stanja mirovanja ili jednolikoga gibanja, tako i svitak unosi u krug svojstva koja bi se mogla opisati električnom inercijom. Promjenljivi tok inducira EMS u istim zavojima svitka koji su taj tok i proizveli. Zato

opisanoj pojavi pridjeljujemo naziv *samoindukcija*, a inducirani EMS je *elektromotorna sila samoindukcije*.

Koji parametar kruga opisuje navedene pojave?

Ako u inducirani EMS samoindukcije:  $e = -N \frac{d\Phi}{dt}$  uvrstimo relaciju za tok (Ohmov zakon magnetskoga kruga):  $\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{Ni}{R_m}$ , dobije se:

$$e = -N \frac{d}{dt} \left( \frac{Ni}{R_m} \right) = -\frac{N^2}{R_m} \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (4-32)$$

Faktor proporcionalnosti između elektromotorne sile samoindukcije i brzine promjene struje jest:

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (4-33)$$

i naziva se *koeficijent samoindukcije* ili kraće *induktivnost*. Upućuje na činjenicu da vodiči različita oblika (geometrije) pri jednakoj jakosti struje stvaraju različite tokove, pa time i različite elektromotorne sile samoindukcije. Jedinica za induktivnost je *1 henri* (H):<sup>18</sup>

$$1H = \frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A}. \quad (4-34)$$

U energetici se pri niskim frekvencijama induktivnost kreće od nekoliko do stotinjak henrija (H). U visokofrekveničkoj tehnici induktivnosti su reda veličine mH, jer pri porastu frekvencije proporcionalno raste i induktivni otpor.

Provedenom analizom riješili smo problem (uzrok – posljedica) s početka ovog poglavlja:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (4-35)$$

Induktivnost, temeljem gornje jednadžbe, možemo općenito odrediti preko magnetskog toka i struje:  $L = N \frac{d\Phi}{di} = \frac{d\Psi}{di}$ , gdje je  $d\Psi$  ukupno ulančeni element toka. Ako tok linearno raste od 0 do neke završne vrijednosti  $\Phi$ , pri porastu struje od 0 do  $I$ , dobije se jednostavan izraz za izračun induktivnosti:

$$L = N \frac{\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}. \quad (4-36)$$

Do istoga se rezultata dođe izravno iz izraza za induktivnost:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{NI} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\Psi}{I}, \quad (4-37)$$

<sup>18</sup> Joseph Henry – američki fizičar (1798. – 1878.)

gdje je  $\Psi = N\Phi$  ukupno ulančeni magnetski tok. Ta jednadžba vrijedi za bilo koji oblik i vrstu jezgre na koju je namotan svitak. Također se može primijeniti i onda kada u magnetskome krugu postoje zračni raspori, uz uvjet zanemariva rasipanja.

Induktivnost ovisi o dimenzijama i obliku vodiča te permeabilnosti sredstva koje okružuje vodič. U neferomagnetskoj sredini  $L$  je konstanta. Ako jezgra sadrži feromagnetski materijal,  $B$ - $H$  karakteristika je dana petljom histereze, što znači da su  $\mu_r$ , pa time i  $L$  promjenljive veličine. U praksi se najčešće kao elementi električnih krugova javljaju ravni i toroidni svitci, pa ćemo odrediti jednadžbe za izračun induktivnosti tih tipičnih oblika vodiča.

#### 4.3.1. Induktivnost dugoga ravnog svitka

Svitak se sastoji od  $N$  zavoja ravnog jezgra namotanih na jezgru kvadratnoga ili kružnoga presjeka  $S$  (vidi *Sliku 3.21*) u jednom ili više slojeva. Duljina svitka je  $l$ , a može biti namotan na jezgru od feromagnetskog ili neferomagnetskog materijala. Induktivnost je:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu_0 \mu_r S}} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{l}. \quad (4-38)$$

#### 4.3.2. Induktivnost toroidnog svitka

Za svitak prema *Slici 3.25* uz pretpostavku homogenoga polja može se za duljinu svitka uzeti duljina srednje magnetske silnice  $l_{sr} = 2R_S\pi$ , pa je:

$$L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{2R_S\pi} = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r S}{(R_u + R_v)\pi}. \quad (4-39)$$

Za toroidni svitak pravokutnoga presjeka, kao na *Slici 3.32*, uz pretpostavku da je polje homogeno, dobije se:

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h (R_v - R_u)}{\pi (R_u + R_v)}. \quad (4-40)$$

Ako nije ispunjena pretpostavka o homogenosti polja,  $L$  je:

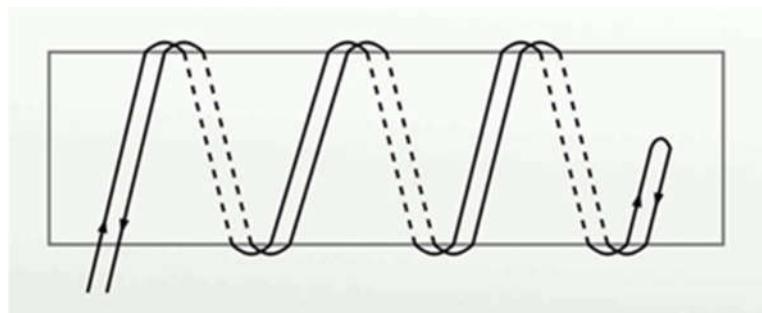
$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_v}{R_u}. \quad (4-41)$$

Iz gornjih jednadžbi za izračun induktivnosti očito je kako se velike vrijednosti mogu postići u prvom redu povišenjem broja zavoja ili unošenjem feromagnetske jezgre s visokim  $\mu_r$ . Svi vodiči, bez obzira na oblik, imaju određenu induktivnost. Induktivnost svitaka je relativno velika, jer im je magnetsko polje koncentrirano na malom volumenu. S druge strane, induktivnost vodova je raspodijeljena po cijeloj duljini. Usporedbe radi, induktivnost elektromagneta slušalice u starijim tipovima telefona je 10 H, a induktivnost 1 km dugog dvožičnog voda tek je nekoliko mH. Dvožični vod načinjen je od dvaju dugih ravnih vodiča polumjera  $R$ , postavljenih na međusobnoj udaljenosti  $d$ . Navest ćemo i jednadžbu za ukupnu *induktivnost dvožičnog voda* po jedinici duljine (izvod preko relacije  $L = \Psi/I$  relativno je složen, pa je izostavljen):

$$L = \left( 1 + 4 \ln \frac{d}{R} \right) \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}. \quad (4-42)$$

Na visokim frekvencijama čak i spojni vodovi imaju značajan induktivni otpor koji može bitno utjecati na rad i remetiti karakteristike određenog uređaja.

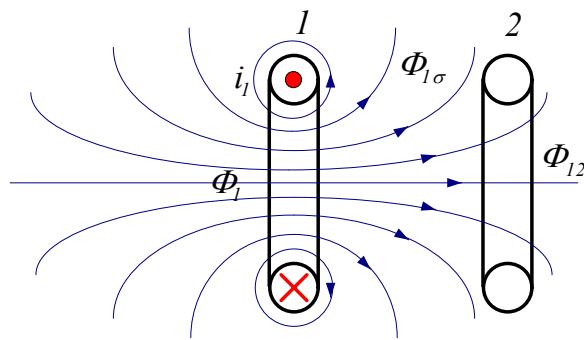
Ponekad je potrebno, kao primjerice kod neinduktivnih žičanih otpornika, u potpunosti eliminirati induktivnost. To se postiže *bifilarnim* namatanjem svitka. Susjedne struje dvaju zavoja suprotnog su smjera, pa se njihovi tokovi kompenziraju – *Slika 4.25*.



*Slika 4.25 – Bifilarno motanje svitka*

#### 4.4. MEĐUINDUKCIJA I KOEFICIJENT MEĐUINDUKCIJE

Pojava generiranja napona u jednom vodiču uzrokovanog fluktuacijama napona u drugome vodiču naziva se *međuindukcija*. Efekt međuindukcije prikazan je na *Slici 4.26*.



*Slika 4.26 – Međuinduktivna sprega dvaju svitaka*

Dva svitka, primarni i sekundarni, namotana su sa  $N_1$ , odnosno  $N_2$  zavoja. Promjenljiva struja  $i_1$  teče kroz svitak 1 i stvara tok  $\Phi_1$ . Dio tog toka  $\Phi_{l2}$  zatvara se u drugom svitku (2), a preostali tok je rasipni tok  $\Phi_{l\sigma}$ , dakle:  $\Phi_1 = \Phi_{l2} + \Phi_{l\sigma}$ . Ako su svitci vrlo blizu jedan drugome, može se pretpostaviti kako sve silnice polja prelaze iz prvoga u drugi svitak, tj. rasipanje toka je zanemarivo ( $\Phi_{l\sigma} = 0$ ). Tada je elektromotorna sila inducirana u drugom svitku:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{l2}}{dt}. \quad (4-43)$$

Tok  $\Phi_{l2}$  stvara se u primarnom svitku i dan je sa  $\Phi_{l2} = \frac{N_l i_l}{R_m}$ . Uvrštenjem u gornju jednadžbu slijedi:

$$e_2 = -\frac{N_l N_2}{R_m} \cdot \frac{di_l}{dt} = -M_{l2} \cdot \frac{di_l}{dt}. \quad (4-44)$$

Prikrata:

$$M_{l2} = \frac{N_l N_2}{R_m} \quad (4-45)$$

naziva se *koeficijent međuindukcije* ili *međuinduktivnost* između svitka 1 i svitka 2.

Možemo analizirati i obratni slučaj. Promjenljiva struja  $i_2$  u svitku 2 stvara tok  $\Phi_2$ , čiji se dio  $\Phi_{2l}$  zatvara u prvom svitku, uz rasipni tok  $\Phi_{l\sigma}$ , pa je  $\Phi_l = \Phi_{l2} + \Phi_{l\sigma}$ . Ako je rasipanje toka zanemarivo ( $\Phi_{2\sigma} = 0$ ), elektromotorna sila inducirana u prvom svitku je:

$$e_l = -N_l \frac{d\Phi_{2l}}{dt}. \quad (4-46)$$

Tok  $\Phi_{2l}$  stvoren u svitku 2 je  $\Phi_{2l} = \frac{N_2 i_2}{R_m}$ , pa uvrštavanjem u gornju jednadžbu slijedi:

$$e_l = -\frac{N_l N_2}{R_m} \cdot \frac{di_2}{dt} = -M_{2l} \cdot \frac{di_2}{dt}, \quad (4-47)$$

gdje je  $M_{2l} = \frac{N_l N_2}{R_m}$  međuinduktivnost svitka 2 i svitka 1.

Iz dobivenih izraza vidljivo je kako vrijedi:

$$M_{l2} = M_{2l} = M = \frac{N_l N_2}{R_m} \Rightarrow e_l = -M \frac{di_2}{dt} ; e_2 = -M \frac{di_l}{dt}. \quad (4-48)$$

Jedinica za međuinduktivnost je 1 H kao i za induktivnost.

Međusobna veza induktivnosti dvaju svitaka i međuinduktivnosti može se dobiti iz izraza:

$$M^2 = \frac{N_l^2 N_2^2}{R_m \cdot R_m} = L_l \cdot L_2 \Rightarrow M = \sqrt{L_l \cdot L_2}. \quad (4-49)$$

To je maksimalna vrijednost međuinduktivnosti, jer je dobivena za slučaj potpunoga ulančenja (sprege) tokova primarnoga i sekundarnoga svitka. U općem slučaju stupanj ulančenja ovisi o omjeru efektivnoga i ukupno proizvedenoga toka  $\Phi_{l2}/\Phi_l$  ili  $\Phi_{2l}/\Phi_2$  i naziva se *faktor magnetske sprege*  $k_M$ :

$$k_M = \frac{\Phi_{l2}}{\Phi_l} = \frac{\Phi_{l2}}{\Phi_{l2} + \Phi_{l\sigma}} = \frac{1}{1 + \frac{\Phi_{l\sigma}}{\Phi_{l2}}} = \frac{1}{1 + \sigma}, \quad (4-50)$$

gdje je  $\sigma$  omjer rasutoga i efektivnoga toka,  $\sigma = \frac{\Phi_{l\sigma}}{\Phi_{l2}}$ , a naziva se *faktor rasipanja*.

Faktor sprege kreće se u granicama:  $0 < k_M < 1$ . Potpuno ulančenje tokova ( $k_M = 1$ ) postiglo bi se kada bi svitci na *Slici 4.26* bili potpuno priljubljeni jedan uz drugi. Kada bi se pak drugi svitak rotirao za  $90^\circ$  i postavio okomito u odnosu na prvi, ne bi bilo prožimanja tokova i faktor sprege bio bi minimalan ( $k_M = 0$ ).

Kako ne postoji idealno ulančenje, u izračunu međuinduktivnosti treba uzeti u obzir i faktor sprege, tj.:

$$M = k_M \sqrt{L_1 \cdot L_2} . \quad (4-51)$$

Kao što smo to napravili u slučaju induktivnosti, možemo i međuinduktivnost izraziti preko ulančenoga toka i struje:

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_m} = \frac{N_1}{I_2} \cdot \underbrace{\frac{N_2 I_2}{R_m}}_{\Phi_{21}} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} \quad \text{ili analogno} \quad M = \frac{N_2}{I_1} \cdot \underbrace{\frac{N_1 I_1}{R_m}}_{\Phi_{12}} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} . \quad (4-52)$$

Međuinduktivnost je kvocijent toka koji uzbuduje struju drugoga svitka, a ulančuju zavoji prvoga svitka i struje drugoga svitka ili kvocijent toka koji uzbuduje struju prvoga svitka, a ulančuju zavoji drugoga svitka i struje prvoga svitka.

Veličina međuinduktivnosti ovisi o dimenzijama i obliku spregnutih vodiča, kao i o magnetskoj sredini u kojoj se nalaze.

Primjeri:

Međuinduktivnost dvaju svitaka motanih na zajedničku jezgru je:

$$M = \frac{N_1 N_2}{R_m} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \mu_r S}{l} . \quad (4-53)$$

Za određivanje međuinduktivnosti ravnog vodiča (1) i toroidnog svitka (2) s  $N_2$  zavoja koristit ćemo se rezultatom izračuna toka za primjer prema *Slici 3.31*:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_v}{R_u} . \quad (4-54)$$

Ukupno ulančeni tok je  $\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12}$ , pa je:

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{R_v}{R_u} . \quad (4-55)$$

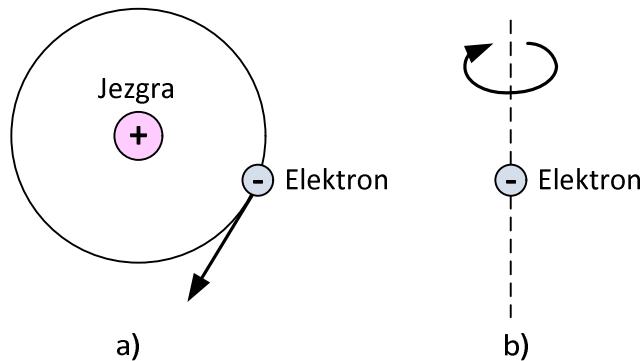
## 5. MAGNETSKO POLJE U FEROMAGNETSKIM MATERIJALIMA

Rad golema broja električnih uređaja temelji se na učincima magnetskoga polja. Stoga ne čudi da timovi istraživača i inženjera rade na proučavanju stvaranja i uporabe jakih magnetskih polja. Međutim, održavanje snažnoga polja prate omski gubitci i rasipanje energije zbog visokih struja u svitcima koji generiraju polje. Zagrijavanje svitaka, a time i gubitci, mogu se smanjiti hlađenjem, ali to predstavlja dodatni trošak. Jedno je od mogućih rješenja u budućnosti uporaba efekta supravodljivosti koju posjeduju neki materijali na vrlo niskim temperaturama. Tada su omski otpori zanemarivi, pa nema ni gubitaka.

Na sreću, postoji i drugi način stvaranja polja pri kojemu nema gubitaka ili su oni vrlo mali. To posebno vrijedi za slučajevе kada se ne traže prevelike jakosti magnetskoga polja. Materijali koji omogućuju stvaranje magnetskih polja bez dodatne energije za njihovo održavanje jesu feromagnetski materijali, željezo u prvoj redu.

### 5.1. MAGNETIZIRANJE MATERIJALA

Istražujući odnose između elektriciteta i magnetizma, Amper je došao do zaključka kako mala strujna petlja i mali magnet stvaraju iste efekte u okolnom prostoru. Postavio je hipotezu da su za takvo djelovanje magneta odgovorne molekularne struje. Da je bio na pravom putu, potvrđeno je stotinjak godina poslije. Amperove molekularne struje u stvari su atomske struje. Dvije su različite vrste struja. Prva struja uzrokovana je orbitalnim kretanjem negativnih elektrona oko matične pozitivne jezgre, a druga rotacijom (spinom) elektrona oko vlastite osi, kao što je prikazano na *Slici 5.1.*



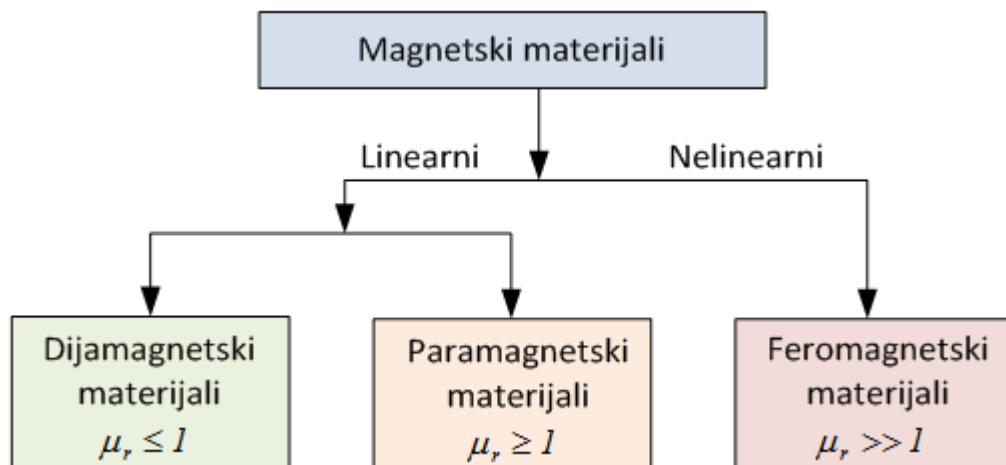
*Slika 5.1 – a) vrtnja elektrona oko jezgre, b) spin elektrona.*

Premda obje struje prati generiranje magnetskoga polja, većina materijala ne iskazuje magnetska svojstva jer se magnetski efekti poništavaju pri udruživanju atoma u molekule. Pri tomu se, ovisno o vrsti materijala, događaju tri pojave nazvane dijamagnetizam, paramagnetizam i feromagnetizam.

### 5.2. PODJELA MATERIJALA PREMA MAGNETSKIM SVOJSTVIMA

Materijali su *nemagnetični* ako im je  $\mu_r = 1$ . U protivnome su *magnetični*. Slobodan prostor (zrak) i svi materijali s  $\mu_r \approx 1$  jesu nemagnetični.

Gruba podjela magnetskih materijala može se izvesti tako da ih se svrsta u tri temeljne grupe, kao na *Slici 5.2.*



*Slika 5.2 – Podjela magnetskih materijala*

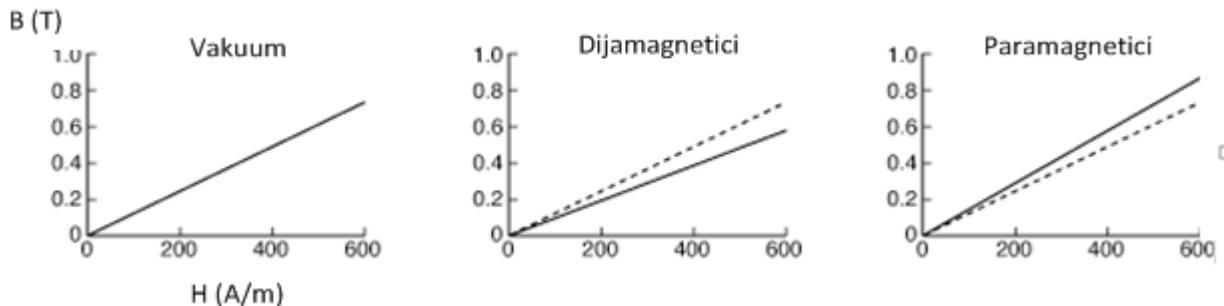
*Dijamagnetski materijali* imaju  $\mu_r$  malo manji od jedan, *paramagnetski materijali* malo veći od jedan, a u *feromagnetskim je materijalima*  $\mu_r$  puno veći od jedan. Za praktične svrhe može se smatrati kako je  $\mu_r \approx 1$  za dija- i paramagnetske materijale i oni su u osnovi nemagnetični i linearni ( $B = \mu_0 H$ ). Feromagnetski materijali uvijek su nelinearni i magnetični, osim za temperature iznad Curieve temperature.

*Dijagnetizam* je pojava kada se magnetska polja zbog orbitalnog kretanja i spina elektrona međusobno poništavaju. Magnetski moment svakog atoma jednak je nuli, a vanjsko magnetsko polje ima zanemariv utjecaj na ove materijale. Dijamagnetski materijali su bizmut, olovo, voda, bakar, srebro, silicij, dijamant, kuhinjska sol i dr. Osim u slučaju supravodiča,<sup>19</sup> ti se materijali rijetko koriste u praksi kao magnetski materijali. U principu svi materijali iskazuju dijamagnetični efekt, ali je on za neke materijale nadvladan drugim, jačim efektima.

Magnetski moment atoma, odnosno pojedinih molekula, različit od nule imaju para- i feromagnetični.

*Paramagnetizam* je pojava pri kojoj se magnetska polja zbog kruženja elektrona oko jezgre i spina ne poništavaju u potpunosti. Za razliku od dijagnetizma, paramagnetizam je temperaturno ovisna pojava. Primjenjuje se u maserima. To su uređaji za dobivanje i pojačanje mikrovalnog zračenja. Paramagnetske efekte iskazuju zrak, platina, aluminij, kisik, kalij, volfram i dr.

Na *Slici 5.3* prikazane su krivulje magnetiziranja para- i dijamagnetskih materijala.



*Slika 5.3 – Krivulje magnetiziranja para- i dijamagnetskih materijala*

<sup>19</sup> Supravodiči na temperaturama blizu absolutne nule idealni su dijamagnetični:  $\mu_r = 0$ ,  $B = 0$ .

Feromagnetizam se zbiva u materijalima s vrlo velikim permanentnim magnetskim momentima. Najpoznatiji feromagnetik, po kojemu su ovi materijali i dobili ime, jest željezo. Drugi su predstavnici kobalt, nikal i njihove legure. Zbog iznimne važnosti u praktičnoj uporabi ovih materijala nabrojiti ćemo njihova temeljna svojstva:

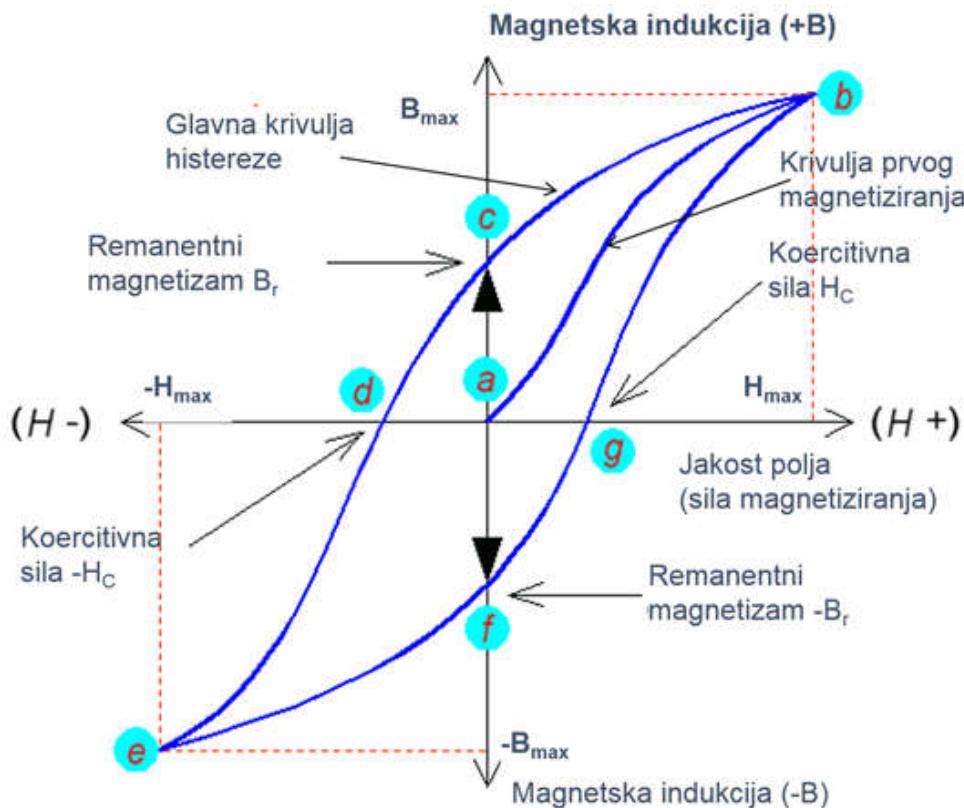
- mogu se vrlo snažno magnetizirati uz pomoć magnetskoga polja;
- zadržavaju magnetiziranost i kada se odstrane iz polja;
- gube feromagnetska svojstva i postaju linearni paramagnetični iznad Curieve temperature;
- kada se željezo zagrije iznad Curieve temperature ( $770^{\circ}\text{C}$ ), prestaje biti magnetično;
- iskazuju nelinearnost jer permeabilnost  $\mu_r$  ovisi o  $B$  i ne može se odrediti jednom vrijednosti.

Za neke legure može se dostići vrijednost  $\mu_r = 10000$ . U tablicama se daju samo tipične vrijednosti, koje se ovisno o uvjetima mogu bitno mijenjati.

### 5.3. KRIVULJA MAGNETIZIRANJA FEROMAGNETSKIH MATERIJALA

Magnetska indukcija i magnetski moment ne ovise samo o trenutačnoj vrijednosti jakosti polja  $H$ , nego i o polju čijem je djelovanju materijal bio prethodno podvrgnut, tzv. povijesti magnetiziranja. Iako uvijek vrijedi  $B = \mu_0\mu_r H$ , odnos  $B$  i  $H$  ovisi o prethodnom magnetiziranju. Ta se pojava, svojstvena samo feromagneticima, naziva *magnetska histereza*.

Proučiti ćemo karakteristiku magnetiziranja feromagnetika koji je nemagnetiziran. Ako postoji prethodna magnetizacija, materijal se demagnetizira pomoću jakoga izmjeničnog magnetskog polja, čija se amplituda postupno smanjuje do nule. Oko materijala čiju karakteristiku želimo snimiti možemo postaviti svitak protjecan strujom koji stvara polje u feromagnetiku. Tipična  $B$ - $H$  krivulja prikazana je na Slici 5.4.

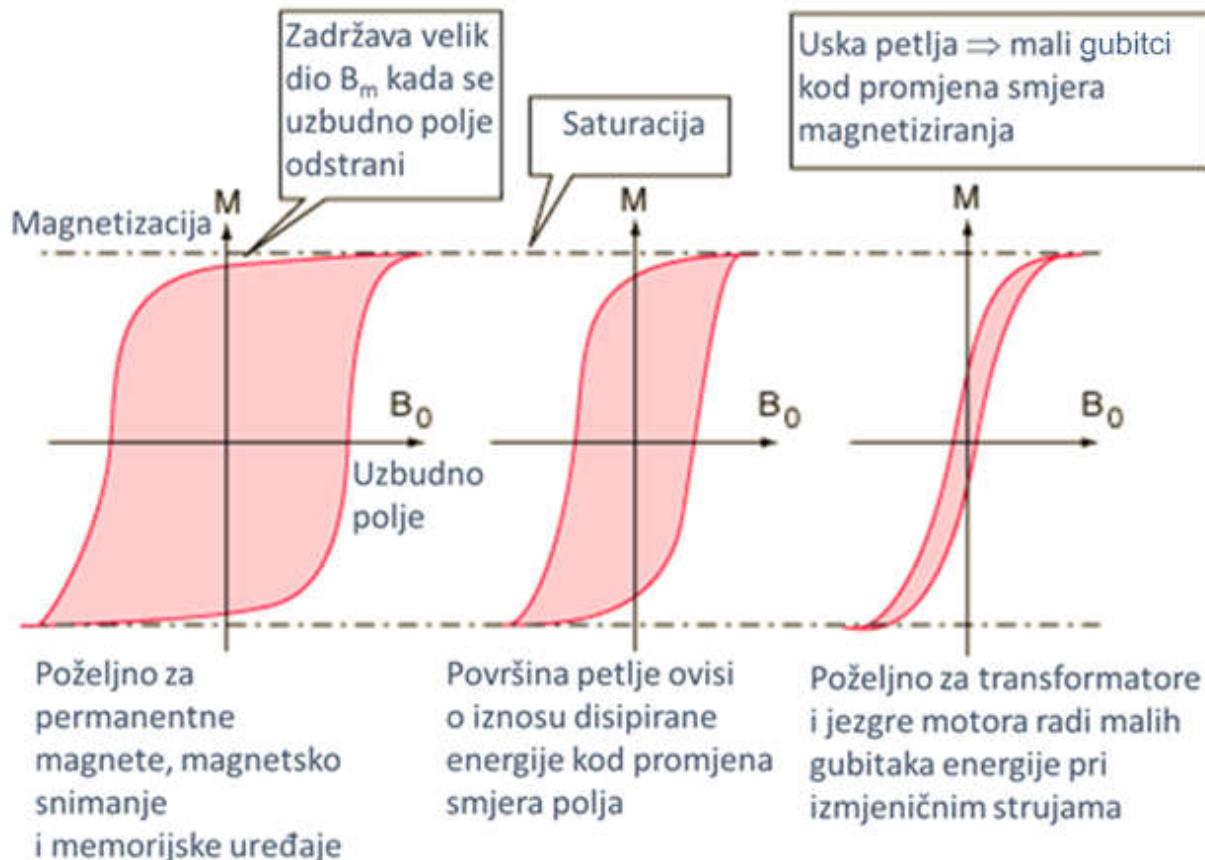


Slika 5.4 – Petlja histereze

Istim postupkom, smanjivanjem jakosti polja do nule (krivulja  $e-f$ ) dobije se remanentna indukcija  $-B_r$ , a promjenom smjera struje (krivulja  $f-g$ ) poništava se remanentni magnetizam pri  $H = H_c$ . Daljim povećanjem uzbudne struje (krivulja  $g-b$ ) dolazi se ponovno u stanje zasićenja ( $H_{max}$ ,  $B_{max}$ ). Time je opisana zatvorena simetrična krivulja koja se zove *petlja histereze*.

Očit je nelinearan odnos  $B$  i  $H$ . U bilo kojoj točki krivulje  $\mu$  određen je omjerom  $B/H$ . Permeabilnost se očitava iz krivulje prvog magnetiziranja.

Oblik petlje histereze ovisi o materijalu, a materijali se odabiru prema svrsi uporabe, kao što je navedeno na *Slici 5.5*.



*Slika 5.5 – Oblici petlje histereze i mogućnosti uporabe*

S obzirom na oblik petlje histereze materijali se u magnetskom smislu dijele na meke (uska petlja) i tvrde (široka petlja).

Površina petlje histereze određuje energetske gubitke (gubitci histereze) po jediničnom volumenu za vrijeme jednog ciklusa periodične magnetizacije. To su toplinski gubitci. Zato se kod svih vrsta izmjeničnih motora i transformatora, energetskih i telekomunikacijskih, uporabljaju meki materijali. Oni osim uske petlje i velikog  $\mu_r$  moraju zadovoljavati još neke uvjete. Naime, izmjenično polje generira i toplinske gubitke zbog pojave vrtložnih struja. Ti se gubitci mogu smanjiti izvedbom magnetskih jezgara od tankih međusobno izoliranih limova (lamela) ili povećanjem električnoga otpora materijala. U telekomunikacijskim transformatorima rabi se fini feromagnetski prah, čija su zrnca izolirana vezivnom masom, pa se tako dobiju veliki specifični otpori. Također je bitno da njihova prijenosna karakteristika bude linearna i neovisna o frekvenciji, čime se izbjegava izobličenje signala. Materijali takvih osobina su *feriti*. Oni imaju gotovo pravokutnu, usku i strmu petlju histereze, a primjenjuju se na visokim frekvencijama. Neki feriti sastavni su dio memorijskih uređaja u računalima. Nedostatak im je mala Curieva temperatura, ali se i to svojstvo može iskoristiti, primjerice za realizaciju beskontaktne sklopke u uređajima za lemljenje (Wellerova lemilica).



Tvrdi su materijali primjerice dobri za permanentne magnete jer imaju veliku koercitivnu silu. Feromagnetični se uporabljaju za magnetsko oklapanje, odnosno zaštitu osjetljivih električnih uređaja od jakih magnetskih polja. Tipičan primjer oklapanja je zaštita kompasa.

## 5.4. PRORAČUN MAGNETSKOGA KRUGA

Magnetski dijelovi uređaja kao što su motori, generatori, transformatori i releji mogu se analizirati kao magnetski krugovi. Analiza takvih krugova postaje jednostavna ako se uspostavi analogija između magnetskih i odgovarajućih električnih krugova. Tada se i u magnetskim krugovima mogu izravno primjeniti temeljni odnosi koji vrijede i za električne krugove. Dopuštene analogije skupno su prikazane u *Tablici 5.1*.

*Tablica 5.1 – Analogije električnih i magnetskih veličina*

ELEKTRIČNE VELIČINE	MAGNETSKE VELIČINE
Vodljivost $\kappa$	Permeabilnost $\mu$
Jakost polja $\vec{E}$	Jakost polja $\vec{H}$
Struja $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$	Magnetski tok $\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Gustoća struje $J = \frac{I}{S} = \kappa \cdot E$	Gustoća toka (indukcija) $B = \frac{\Phi}{S} = \mu \cdot H$
Elektromotorna sila (EMS) $E$	Magnetomotorna sila (MMS) $\Theta$
Električni napon $U$	Magnetski napon $U_m$
Električni otpor $R = \frac{l}{\kappa S}$	Magnetski otpor $R_m = \frac{l}{\mu S}$
Ohmov zakon $U = E \cdot l = I \cdot R$	Ohmov zakon $\Theta = NI = H \cdot l = \Phi \cdot R_m$
Kirchhoffovi zakoni $\sum I = 0$ $\sum E = \sum U = \sum IR$	Kirchhoffovi zakoni $\sum \Phi = 0$ $\sum \Theta = \sum U_m = \sum Hl = \sum \Phi R_m$

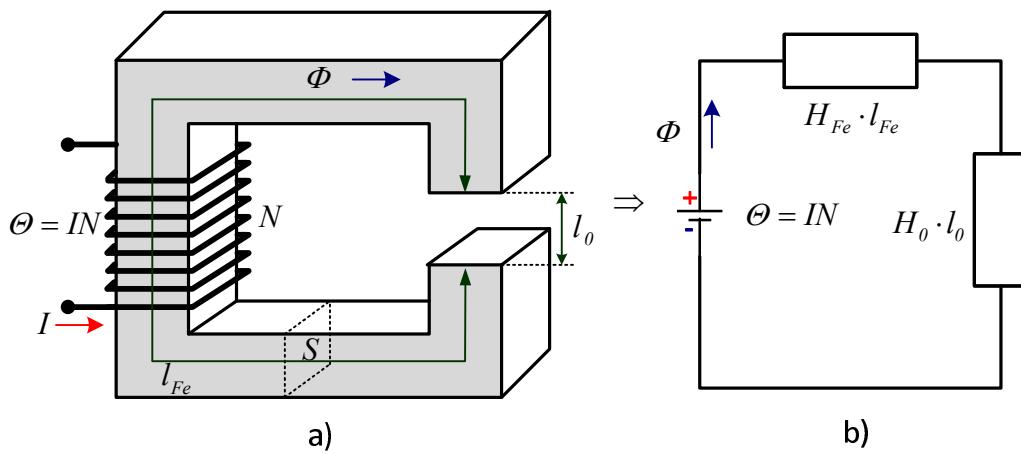
Potrebito je naglasiti neke bitne razlike između električnih i magnetskih krugova. Za razliku od struje koja teče strujnim krugom, magnetski tok ne struji magnetskim krugom. Specifična vodljivost  $\kappa$  ne ovisi o gustoći struje  $J$ , dok permeabilnost  $\mu$  ovisi o magnetskoj indukciji  $B$ . To se odnosi na feromagnetične koji se najviše uporabljaju u praktičnim magnetskim uređajima.

U proračunu magnetskoga kruga obično se polazi od poznatih dimenzija magnetske jezgre i zadanoga materijala. Pri tomu se problem obično svodi na jedan od dvaju zahtjeva: izračun uzbude za stvaranje traženoga toka ili određivanje magnetskoga toka za zadanu uzbudu (amperzavoje).

Problem je rješiv ako se put, tj. raspored toka, može odrediti. Glavni put toka slijedi iz oblika magnetskoga materijala. Paralelni tok kroz zrak najčešće je zanemariv. U proračunu se pretpostavlja idealno homogeno polje u materijalu. Pogreška koju time unosimo obično je vrlo malena.

Na primjeru prema *Slici 5.6* obradit ćemo jednostavan slučaj proračuna tražene magnetomotorne sile ako se zahtijeva određeni tok u serijskome magnetskom krugu. Zadan je poprečni presjek jezgre  $S$ , a iz dimenzija jezgre može se odrediti srednja duljina magnetske silnice u jezgri  $l_{Fe}$ .

U mjerne ili druge svrhe, u magnetske se krugove postavlja zračni raspor širine  $l_0$ .



Slika 5.6 – Pretvorba magnetskoga u analogni električni krug

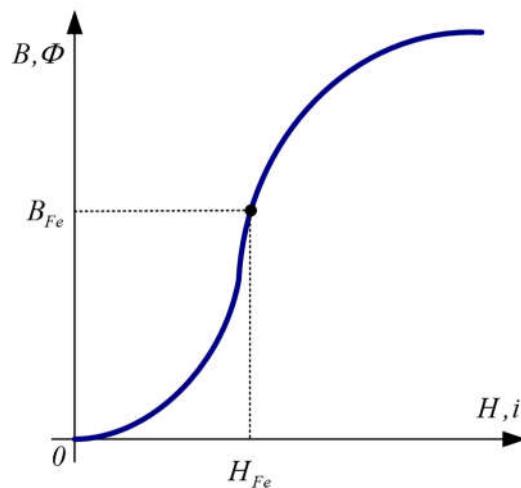
Uzbuđna struja  $I$  na  $N$  zavoja svitka stvara MMS  $\Theta$ , koji potjera magnetski tok  $\Phi$ , Slika 5.6.a). Dostignuta jakost polja u jezgri je  $H_{Fe}$ , a u rasporu  $H_0$ . Odgovarajući padovi magnetskoga napona su  $H_{Fe} \cdot l_{Fe}$ , odnosno  $H_0 \cdot l_0$ . Ako se zanemari rasipanje toka u zračnom rasporu, magnetski krug može se smatrati serijskim  $\Phi = \Phi_{Fe} = \Phi_0$ .

Analogni električni krug prikazan je na Slici 5.6.b). Ukupna uzbuda dobije se prema II. Kirchhoffovu zakonu kao zbroj magnetskih napona na magnetskim otporima kruga:

$$\Theta = NI = H_{Fe} l_{Fe} + H_0 l_0. \quad (5-1)$$

Budući da jezgra unosi nelinearnost, potrebno je problem riješiti grafoanalitičkom metodom.

Unutarnje karakteristike materijala određene su zadanim krivuljom prvoga magnetiziranja, kao na Slici 5.7.



Slika 5.7 – Krivulja prvoga magnetiziranja

Iz zadatoga toka određuje se indukcija u jezgri:  $B_{Fe} = \frac{\Phi_{Fe}}{S}$ , a iz krivulje magnetiziranja pripadna jakost polja  $H_{Fe}$ . Jakost polja u zračnom rasporu zbog velika magnetskog otpora značajno raste. U zraku je  $B-H$  odnos linearan, pa je, uz  $B_{Fe} = B_0$ :

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}. \quad (5-2)$$

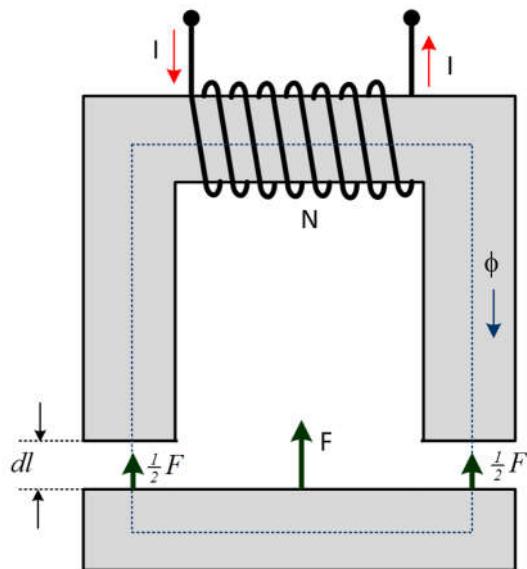
Time su određene sve veličine potrebne za dobivanje tražene uzbude.

Ako je faktor rasipanja (engl. *leakage factor*) veći od nule, rasipanje toka može se uzeti u obzir tako da se za određeni postotak uveća efektivna površina zračnoga raspora. U slučaju jezgre od izoliranih transformatorskih limova treba uzeti u obzir i odgovarajući faktor punjenja (engl. *stacking factor*), pa se uzima nešto manja površina poprečnog presjeka jezgre od izmjerene. Na sličan način kao u navedenome primjeru rješavaju se magnetski krugovi s grananjem toka i višestrukim uzbudama, pri čemu se treba uporabiti i I. Kirchhoffov zakon.

## 5.5. SILA NA MAGNETSKI MATERIJAL

Analizirat ćemo силу која дјелује на комад feromagnetskoga materijala (kotvu) што се налази у magnetskome пољу. Та је сила osobito важна у elektromehaničkim sustavима као што су elektromagneti, releji, rotacijski strojevi te u sustавима који раде на principu magnetske levitacije. Razmatrajmo elektromagnet sa željezном jezgrom konstantне relativne permeabilnosti, као на *Slici 5.8*.

Struja  $I$  kroz svitak с N zavoja ствара ујарму magnetski tok  $\Phi$ . Ако занемаримо rubne ефекте (rasipanje), indukcija у зрачном распору једнака је оног у жељезу,  $B_{Fe} = B_0$ . Сила између јарма и котве је привлачна и тежи смањити размак између полова elektromagneta. Silu ćemo одредити темељем промјене ukupne energije када се ова два комада жељеза раздвоје на диференцијално мали размак  $dl$ . Енергија се, за мале помаке, mijenja једино због промјена volumena зрачнога распора.



*Slika 5.8 – Nosiva sila elektromagneta*

Energija magnetskoga polja je, prema analogiji s energijom elektrostatičkoga polja, dana izrazom:

$$W_m = \frac{BHV}{2} = \frac{B^2V}{2\mu_0}. \quad (5-3)$$

Napomena: Energija magnetskoga polja detaljno se analizira u sljedećem poglavlju.

Rad potreban za ostvarivanje pomaka  $dl$  jednak je promjeni akumulirane energije u zračnim rasporima:

$$F \cdot dl = dW_m = 2 \cdot \left( \frac{B^2 S dl}{2\mu_0} \right), \quad (5-4)$$

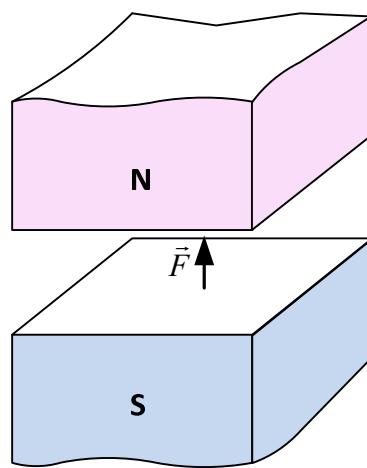
gdje je  $dV = Sdl$  prirast volumena, a  $S$  površina poprečnoga presjeka. Energija se množi s 2 zbog dva zračna raspora. Privlačna sila koja djeluje na kotvu jest:

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S}. \quad (5-5)$$

Sila je neovisna o smjeru struje u svitku i uvijek je privlačna.

Sila između polova permanentnog magneta (*Slika 5.9*) ili elektromagneta s jednim zračnim rasporom jest:

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 S}. \quad (5-6)$$



*Slika 5.9 – Sila u polju permanentnoga magneta*

Tlak na magnetiziranu površinu u  $\text{N/m}^2$  je:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{BH}{2} \quad (5-7)$$

i odgovara gustoći magnetske energije  $w_m$  u rasporu.

## 6. ENERGIJA MAGNETSKOGA POLJA

Pokazano je da magnetsko polje djeluje silom, ima određenu snagu, pa stoga mora sadržavati i određenu energiju. Energija se akumulira pri izgradnji magnetskoga polja i gubi se u razgradnji polja. Ako je polje stvoreno oko vodiča spojenoga na napon  $u$ , protjecanoga strujom  $i$ , izvor je u intervalu  $dt$  isporučio energiju:  $dW = uidt$ . Zbog djelovanja magnetskoga polja u vodiču se inducira EMS, koji drži ravnotežu narinutom naponu:

$$u = -e = L \frac{di}{dt} = N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (6-1)$$

Ukupna energija je tada:

$$W_m = \int_0^W dW = \int_0^I L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \int_0^I i \cdot di = \frac{L \cdot I^2}{2}. \quad (6-2)$$

Magnetska energija ovisi o završnoj vrijednosti struje, a ne o načinu postizanja te vrijednosti. Gornja jednadžba omogućuje i izračun induktivnosti:

$$L = \frac{2W_m}{I^2}. \quad (6-3)$$

Magnetska energija može se usporediti s kinetičkom energijom u mehanici. Pri tomu  $L$  je analogan masi  $m$  koja unosi inerciju, a struja  $I$  odgovara brzini  $v$ :

$$\frac{L \cdot I^2}{2} \Leftrightarrow \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad (6-4)$$

Naziv elektromotorna sila (EMS) dolazi iz analogije između sile  $F$  i induciranih napona  $e$ :

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow i = \frac{dq}{dt} \\ F &= -m \cdot \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow e = -L \cdot \frac{di}{dt}. \end{aligned} \quad (6-5)$$

Ako magnetsku energiju želimo izraziti veličinama polja, izrazit ćemo napon  $u$  preko magnetskoga toka:

$$dW_m = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot i \cdot dt = N \cdot i \cdot d\Phi. \quad (6-6)$$

Uvrstimo li za element toka  $d\Phi = S \cdot dB$  i  $\theta = Ni = H \cdot l$ , dobije se element magnetske energije:

$$dW_m = H \cdot l \cdot S \cdot dB, \quad (6-7)$$

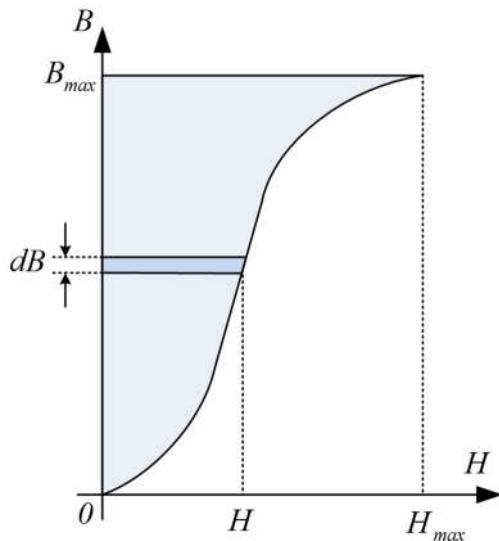
pa je uz  $V = Sl$ :

$$W_m = V \int_B H \cdot dB. \quad (6-8)$$

Često se u praksi daje podatak o gustoći magnetske energije:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \int_B H \cdot dB. \quad (6-9)$$

Ako materijal nije bio prethodno magnetiziran, gustoća energije jednaka je površini između ordinate i krivulje prvoga magnetiziranja, kao na *Slici 6.1.*



*Slika 6.1 – Magnetska energija po jedinici obujma*

U linearnim sredinama, gdje permeabilnost ne ovisi o jakosti polja ( $B = \mu H$ ), vrijedi:

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}. \quad (6-10)$$

Ako je polje nehomogeno (intenzitet polja mijenja se u prostoru od točke do točke) i linearno (zrak), ukupna magnetska energija dobije se iz izraza:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V H \cdot B \cdot dV. \quad (6-11)$$

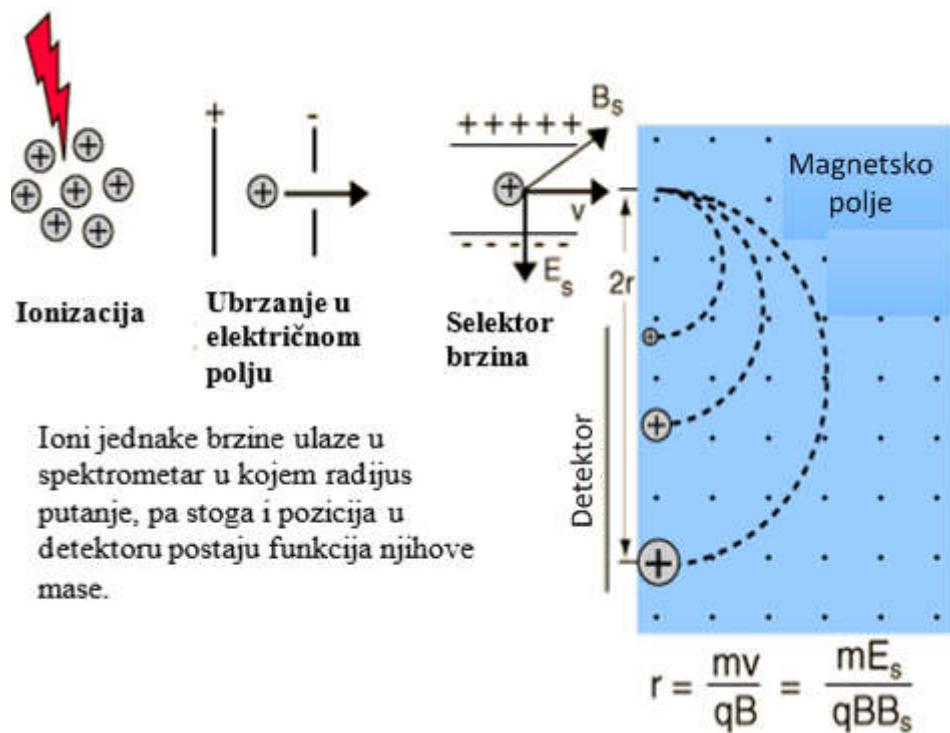
Energija je neovisna o izvoru polja, tj. električnoj struji.

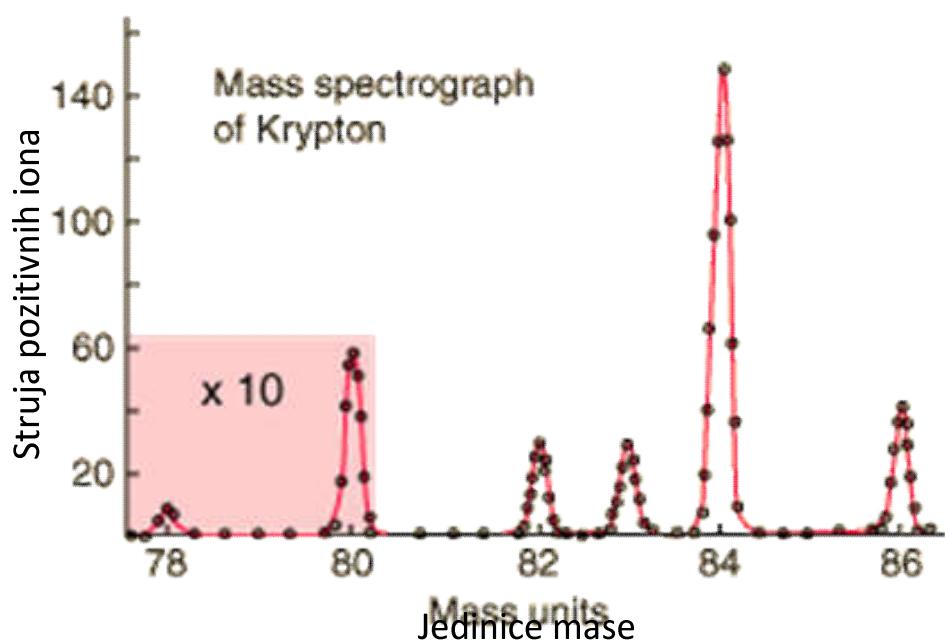
## 7. PRIMJERI PRIMJENE UČINAKA MAGNETSKOGA POLJA

Velik je broj praktičnih primjera uporabe, ali i štetnih posljedica, koje prate generiranje sila u magnetskome polju s jedne strane, odnosno pojavu elektromagnetske indukcije s druge strane. Navest ćemo samo neke primjere bez detaljnog opisa, jer se rade u sklopu ostalih kolegija tijekom studija.

- **Maseni spektrometar**

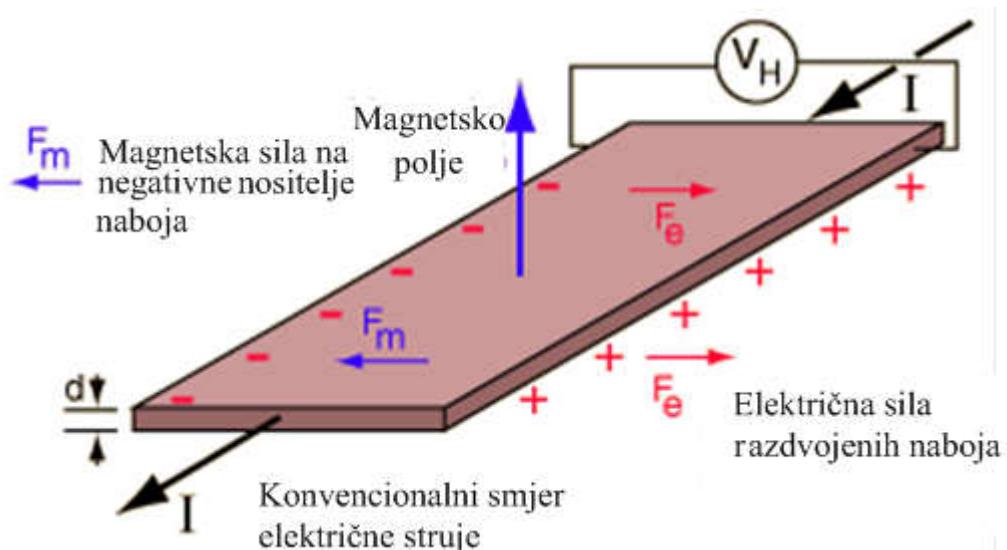
Iskorištava princip djelovanja magnetskoga polja na naboju u gibanju. Funkcija mu je odvajanje nabijenih čestica (najčešće iona) na temelju iznosa njihove mase. Izvodi se u tri koraka: *ubrzanje* – ioni se podvrgavaju djelovanju jakog električnog polja i ulaze na sljedeći stupanj s različitim brzinama ovisno o svojim masama; *selektor brzina* – kombinacija djelovanja električnoga i magnetskoga polja omogućuje da samo ionи točno određene brzine ne budu otklonjeni, tj. prolaze pravocrtno; *separator masa* – ionи jednaka naboja i brzine ulaze pod pravim kutom u jednoliko magnetsko polje koje ih zakreće u polukružnu putanju. Kako se ioni razlikuju samo po masi, teže čestice kretat će se putanjom većeg radijusa od lakših čestica. Ako čestica mase  $m_1$  opisuje polukružnu putanju radijusa  $r_1$ , a čestica mase  $m_2$  putanju radijusa  $r_2$ , na izlazu iz polja bit će separirane razlikom u promjerima svojih putanja:  $s = 2(r_2 - r_1)$ . Maseni spektrometri uporabljaju se kao vrlo osjetljivi detektori izotopa, u procesima datiranja (po sadržaju ugljika ili radioaktivnosti) materijala, analizi sadržaja plinova, satelitskoj analizi sunčeva vjetra i dr. U kombinaciji s plinskim kromatografom spektrometar omogućuje određivanje tragova kontaminacije ili prisutnosti toksina.

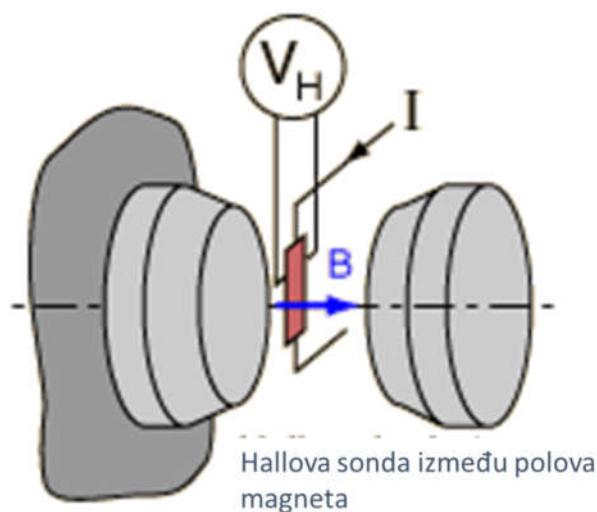
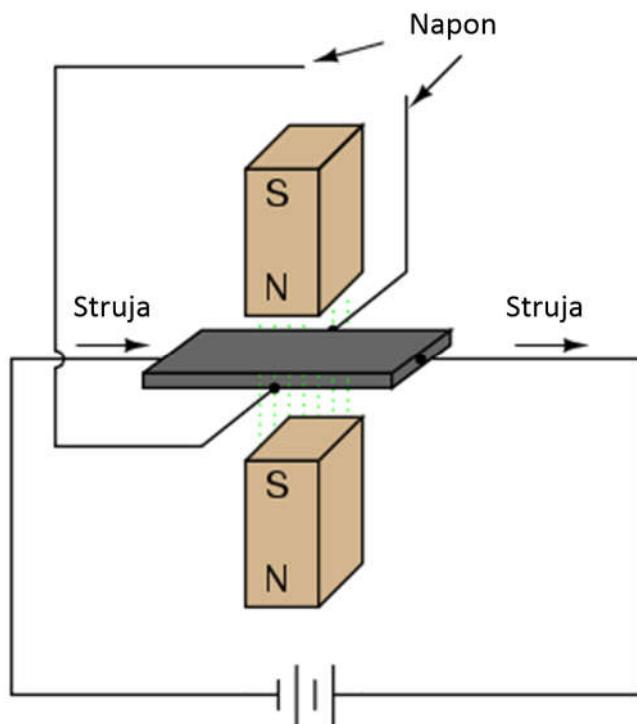




- **Hallov efekt**

Omogućuje određivanje polariteta naboja koji teče vodičem, jer je uspostavljena razlika potencijala na krajevima Hallove pločice jednoga predznaka za negativne naboje, a drugoga za pozitivne naboje. Također, Hallov napon je proporcionalan s magnetskim poljem, pa se Hallove sonde uporabljaju za mjerjenje magnetskoga polja.

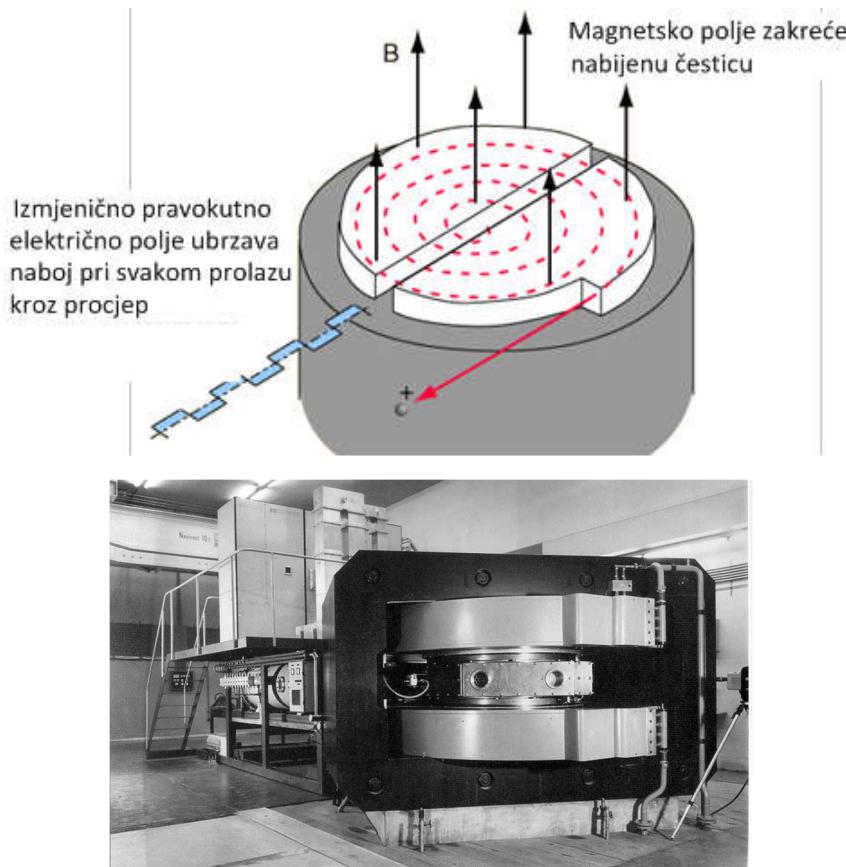




Polaritet Halova napona za bakrenu probu pokazuje da su elektroni nositelji naboja

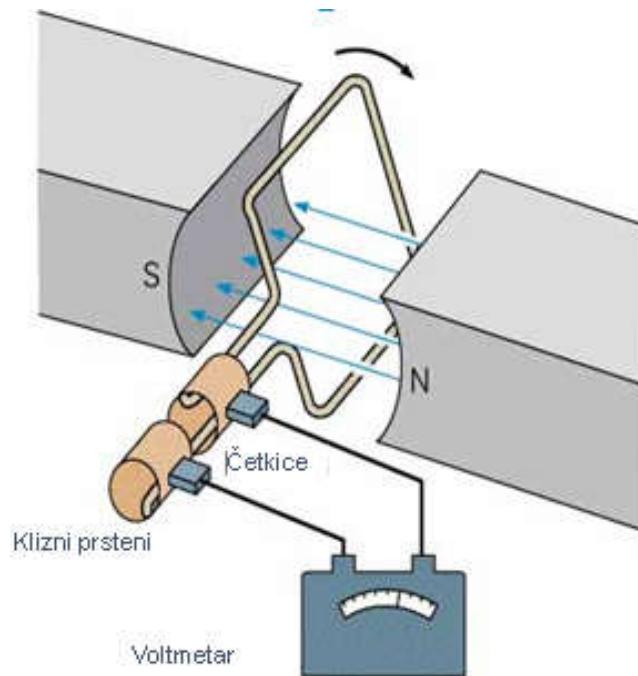
- **Ciklotron**

Ciklotron je jedan od prvih tipova ubrzivača čestica, a još se uporabljuje kao prvi stupanj velikih ubrzivača s više stupnjeva. Kombinacijom djelovanja električnoga i magnetskoga polja elektron se ubrzava od nekog početnog položaja ispisujući spiralnu putanju. Na izlazu se formira snop elektrona velike brzine.



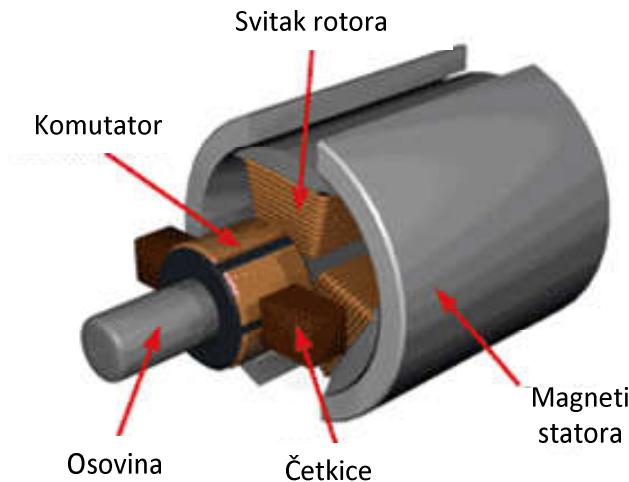
### • Izmjenični generatori

Pretvaraju mehaničku energiju u električnu. Uložimo li mehaničku energiju za rotiranje svitka u konstantnom magnetskom polju, na krajevima svitka inducira se sinusoidni napon. Napon, odnosno proizvedena električna energija, preuzima s četkica spojenih na klizne prstenove. To je primjer izravne primjene Faradayeva zakona elektromagnetske indukcije.



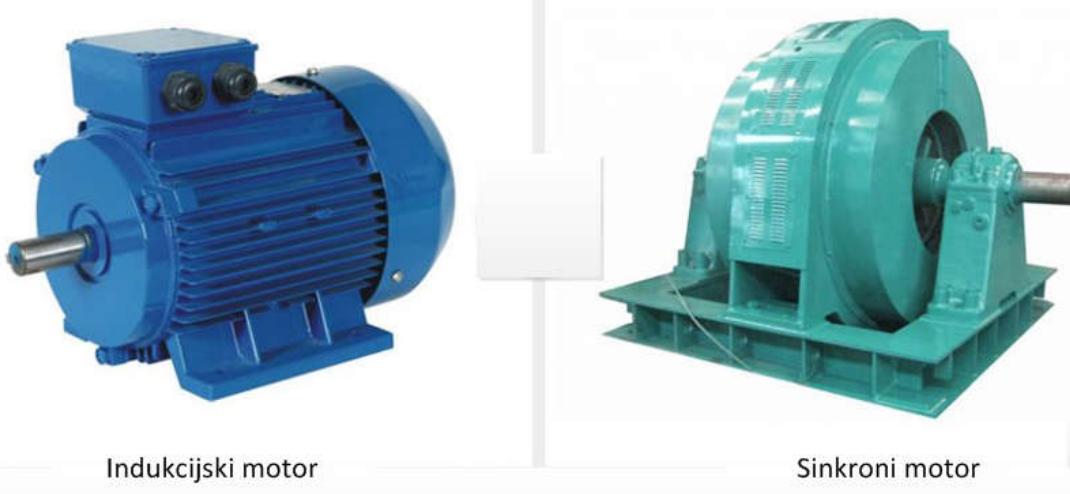
- **Istosmjerni generatori**

Isti je princip generiranja napona kao i kod izmjeničnoga generatora, ali poseban uređaj (komutator) omogućuje da se polaritet induciranoga napona ne mijenja.



- **Izmjenični motori**

Pretvaraju električnu energiju u mehaničku. Isti se uređaj može uporabiti i kao generator i kao motor. Umjesto voltmatra na slici izmjeničnoga generatora potrebno je spojiti vanjski izvor izmjenične elektromotorne sile. Prolaskom struje kroz svitak koji se nalazi u magnetskome polju na zavoje svitka djeluje sila  $F = IBl$ . Sile djeluju u suprotnome smjeru na dijelove svitka koji efektivno sijeku magnetski tok, stvarajući tako moment sila koji uzrokuje rotaciju svitka. Motor radi na istoj frekvenciji kao i sinusoidni izvor, pa se zove *sinkroni motor*. Češće se rabe *indukcijski (asinkroni) motori*, gdje se struja inducira u rotirajućem svitku umjesto da se dovodi izravno.

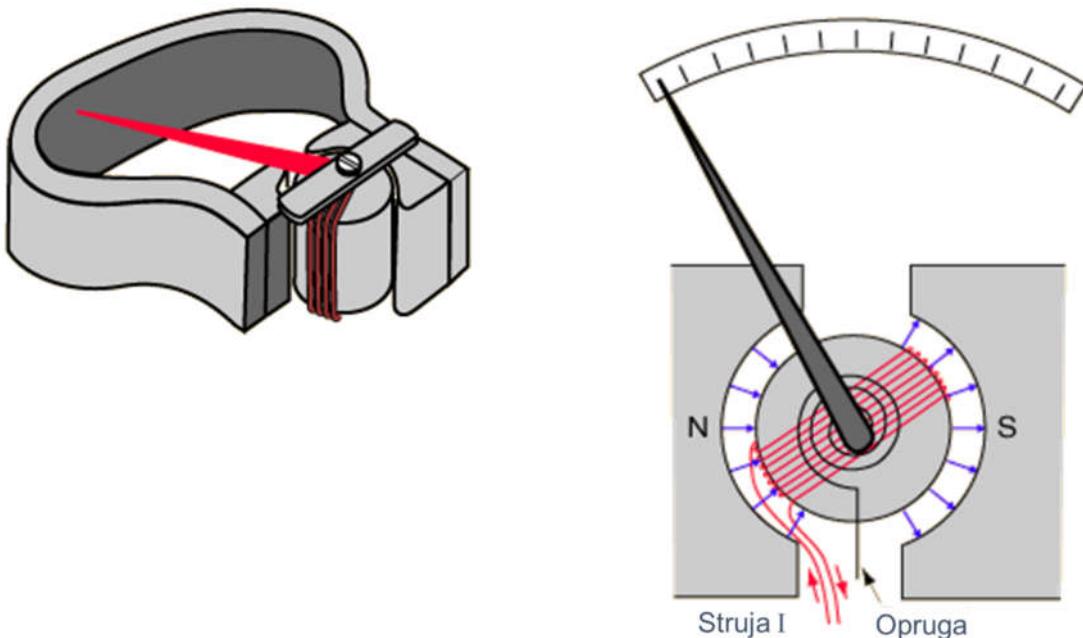


- **Istosmjerni motori**

Umjesto preko prstena i kliznih četkica struja se u svitak dovodi preko komutatora. Komutator obrće smjer struje nakon svake polovice okretaja, da bi se zadržao isti smjer zakretnog momenta koji okreće svitak.

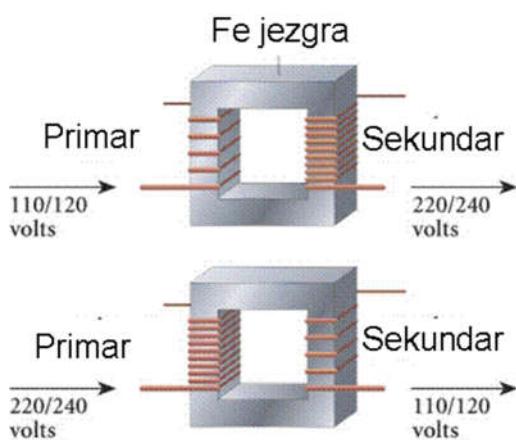
### • Galvanometar

To je povijesni naziv instrumenata za mjerjenje električne struje pomoću pomicnoga svitka. Prolaskom struje kroz svitak u magnetskome polju stvara se moment sila proporcionalan jakosti struje. Pomicanjem svitka opire se spiralna opruga spojena s indikacijskom kazaljkom instrumenta. Otklon igle proporcionalan je sa strujom koja teče kroz svitak, čija se vrijednost može očitati na odgovarajuće baždarenoj skali. To je princip rada svih instrumenata s pomicnim svitkom (ampermetri, voltmetri, ohmometri), koji su danas uglavnom zamjenjeni poluvodičkim (digitalnim) instrumentima.



### • Transformatori

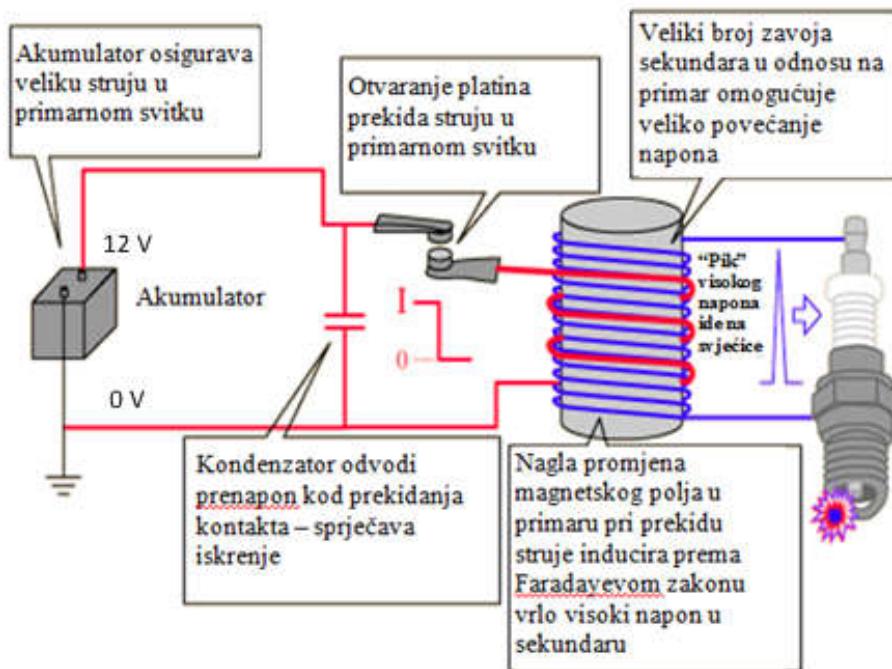
Uređaji koji izravno primjenjuju Faradayev zakon – inducirani napon transformacije. Omogućuju pretvorbu niskog napona i velike struje u visoki napon pri maloj struci i obratno. Uporabljaju se posebno u energetskim postrojenjima, ali i u svim vrstama elektroničkih krugova.





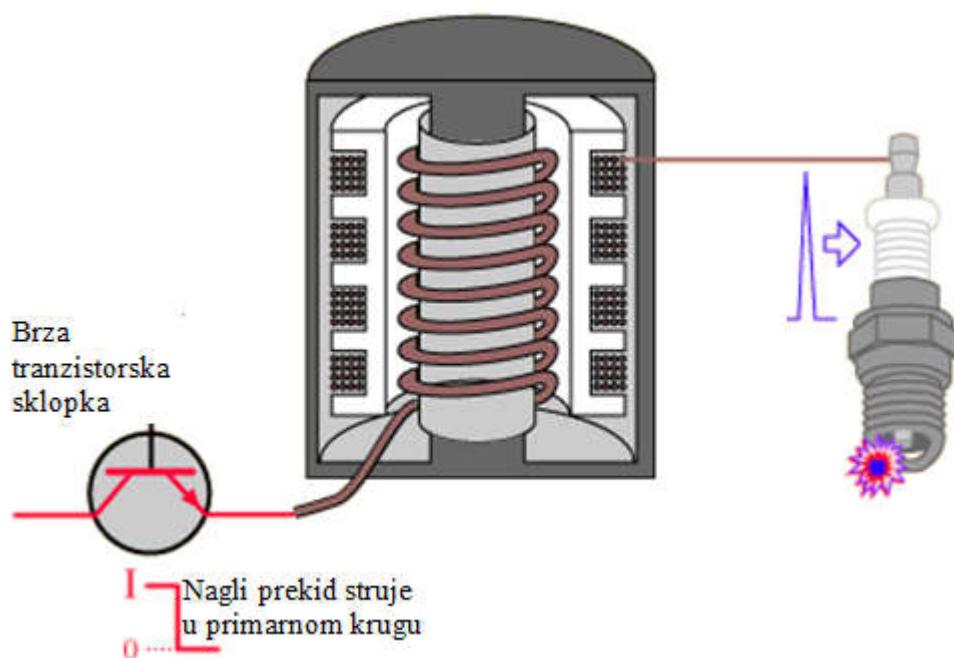
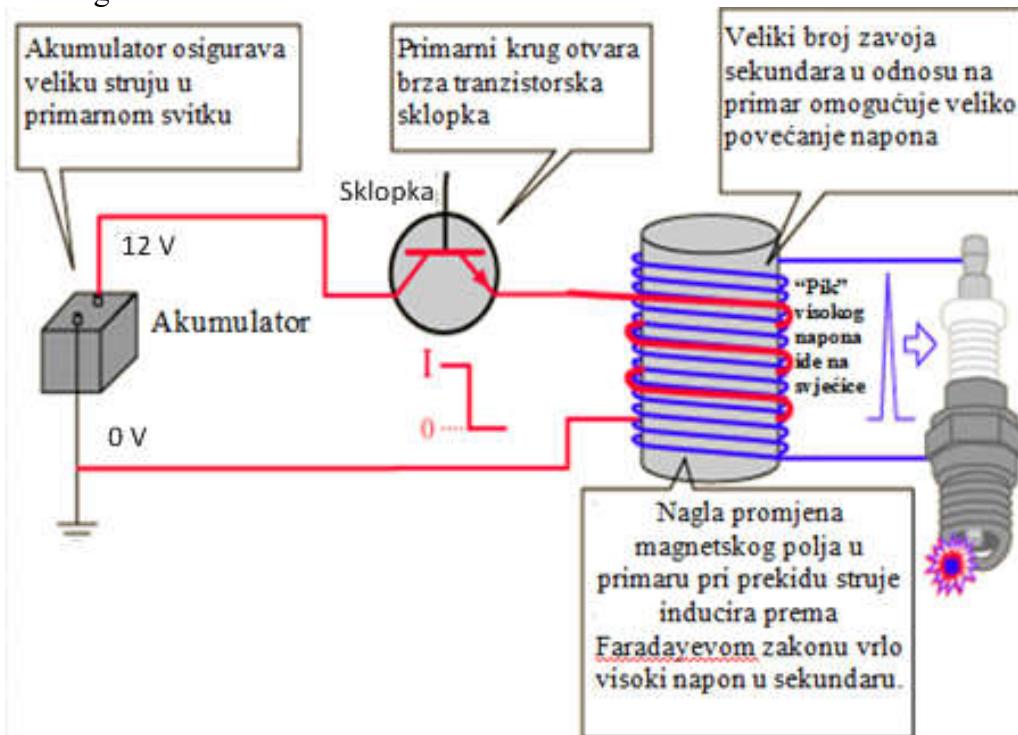
### • Visokonaponski indukcijski svitak (bobina)

Posebna vrsta transformatora potrebna za generiranje iskre koja će zapaliti smjesu benzina i zraka u motoru automobila. Potreban je napon od 40 kV, a na raspolaganju je akumulator od 12 V.



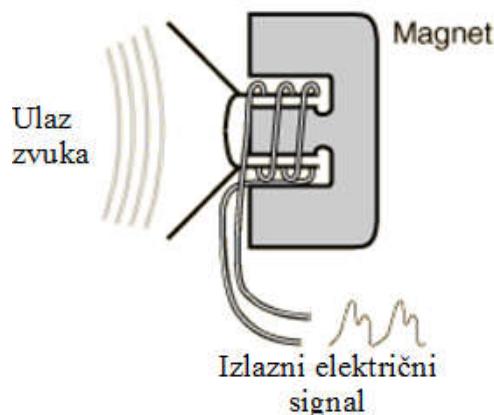
Primarni svitak bobine ima mali broj zavoja i mali otpor. Priključen je na akumulator i njime teče određena istosmjerna struja. Sekundarni svitak ima puno veći broj zavoja. Nije predviđen za rad s izmjeničnim naponima, nego mu je funkcija generiranje visokonaponskog impulsa u trenutku prekida struje u primarnome svitku. Trenutačni prekid struje u primarnome krugu izaziva veliku brzinu promjene magnetskoga toka, pa se, prema Faradayevu zakonu u sekundarnome svitku inducira vrlo visoki napon. Taj napon uzrokuje stvaranje iskre u svjećici kojom se pali mješavina goriva. Donedavno je prekid struje u primarnom krugu bio realiziran mehaničkim otvaranjem kontaktata – platina. Sinkroniziranim otvaranjem kontaktata upravlja je rotacijski prekidač (razvodnik paljenja) koji je distribuirao visokonaponske impulse na svjećice.

Moderni elektronički sustavi paljenja koriste se brzim tranzistorskim sklopkama za prekid struje u primarnome krugu.



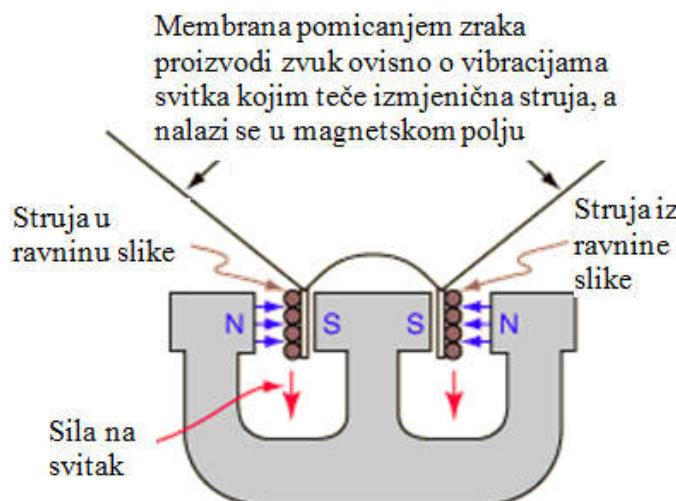
### • Dinamički mikrofon

Mikrofoni su pretvarači koji detektiraju zvučne signale i stvaraju električnu sliku zvuka, tj. generiraju napon ili struju proporcionalnu zvučnom signalu. Kod dinamičkih mikrofona zvučne oscilacije pomicu elastičnu membranu spojenu na svitak koji se nalazi u magnetskom polju elektromagneta. „Efekt generatora“ stvara napon koji je slika promjena zvučnoga tlaka.



### • Dinamički zvučnik

Papirna membrana zvučnika povezana je sa svitkom koji je u magnetskome polju. Svitkom teče strujni signal koji proizvodi zvučnu sliku koristeći se „efektom motora“. Vibracije svitka prenose se na membranu čije se oscilacije pretvaraju u zvuk.



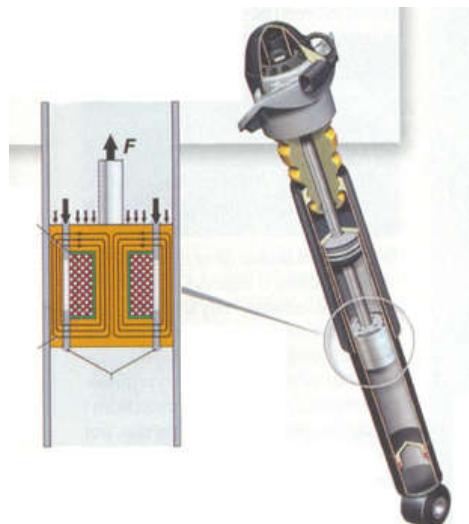
### • Baterijska svjetiljka



Uvijek svijetli, neovisno o bateriji. Jedna minuta okretanja omogućuje 30 minuta svjetla. Punjiva baterija litij-ionska ima kapacitet 120 mAh.

### • Magnetski amortizeri

Amortizeri s aktivnom hidrauličnom tekućinom (uljem) koja magnetiziranjem mijenja viskoznost, te se svojstva ovjesa prilagođavaju stilu vožnje. Time se, ovisno o uvjetima vožnje, mijenja tvrdoća ovjesa i postiže najbolje prianjanje kotača uz najmanje nagnjanje karoserije (Ferrari F 575M, Corvette C6, Audi TT).



Princip rada: Elektromagnetski vijenac u klipovima amortizera stvara jako magnetsko polje u kanalima kojima struji specijalno ulje, obogaćeno sitnim česticama čelika. Magnetsko polje mijenja raspored čestica, a time i viskoznost, odnosno brzinu i otpor strujanja ulja kroz klipove u amortizerima. Posljedica je različita tvrdoća amortizera.

Kada su potrebni mekši amortizeri, elektromagnet djeluje na čestice tako da se postavljuju u lance u smjeru cjevčica za strujanje ulja, čime se ne usporava protok ulja.

U uvjetima sportske vožnje, elektromagnet formira u ulju lance čeličnih čestica poprečno na smjer strujanja i tako ukrućuje amortizere. Rezultat je manje nagnjanje tijekom sportske vožnje, poboljšana stabilnost, upravljivost i kočna svojstva.

Sustavom elektromagneta upravlja središnja elektronska jedinica, koja temeljem informacije od senzora (o uzdužnom i poprečnom nagnjanju karoserije i frekvenciji ljudjanja) podešava rad elektromagnetskog mehanizma.

Tipkom na središnjoj konzoli vozač može izabrati mehanički, normalni ili sportski ovjes. Time mijenja parametre elektromagnetskog sklopa te viskoznost hidraulične tekućine i tvrdoću ovjesa.



- **Vrtložne struje** – javljaju se unutar masivnih vodiča kao reakcija na promjenljivo magnetsko polje. Opiranje promjenama toka uzrokuje pretvorbu električne energije u toplinu. U većini slučajeva (električni strojevi, transformatori, ...) energetski gubitci su nepoželjni, jer smanjuju stupanj korisnosti. Primjerice transformatori se, u svrhu reduciranja vrtložnih struja, izvode od međusobno izoliranih tankih limova postavljenih uzduž silnica magnetskoga polja. Vrtložne se struje tada zatvaraju unutar pojedinačnih limova i ne mogu postići značajne vrijednosti.

Efekt stvaranja vrtložnih struja iskorištava se za realizaciju magnetskih kočnica. Sustav kočnica sastoji se od permanentnog magneta i metalne ploče. Princip rada vrlo je jednostavan. Kada se vodljiva ploča okreće u odnosu na permanentni magnet, u ploči se stvaraju vrtložne struje. Te struje u sprezi s magnetskim poljem stvaraju силу koja se opire pogonskoj sili ploče. Posljedica je kočenje ploče. Sila kočenja proporcionalna je brzini – veća je pri većim, a smanjuje se pri manjim brzinama. Konačni efekt je postupno (bez trzaja) smanjivanje brzine objekta koji je povezan s vodljivom pločom. Takav sustav vrlo je efikasan, ne zahtijeva dodatnu potrošnju energije i lako ga je održavati. Primjenjuje se u sustavima za prijenos prtljage, u zabavnim parkovima (tobogani), pokretnim trakama za prijevoz ljudi i materijala.

Primjenjuju se i u kočničkim sustavima vlakova. Kada se aktivira kočenje, na metalne kotače djeluje magnetsko polje elektromagneta koje u kotačima generira vrtložne struje. Interakcija magnetskoga polja i vrtložnih struja stvara kočnu силу koja usporava okretanje kotača. Što je veća brzina, efekt kočne sile je jači. Usporavanjem vlaka sila kočenja slabi, pa se operacija kočenja izvodi glatko bez trzaja. Nedostatak je što ne mogu potpuno zaustaviti vlak. Neophodni su dodatni sustavi kočenja temeljeni na trenju.

Postoje i druge praktične primjene kao što je visokofrekventno kaljenje, gdje vrtložne struje zagrijavaju površinu koja se kali.



Uzu kočnica

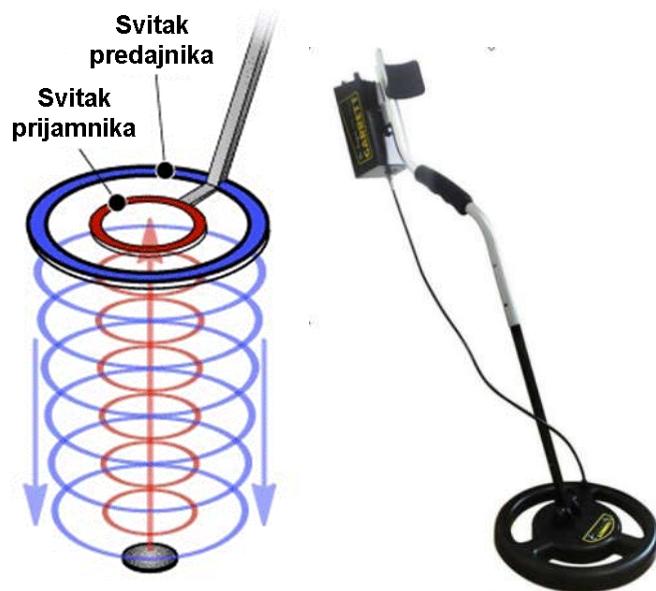


Goliath kočnica



Kočnica temeljena na vrtložnim strujama na visokobrzinskom njemačkom ICE3 vlaku

## • Detektori metala



### Princip rada:

- oscilator izmjenične struje u svitku predajnika (vanska petlja) stvara promjenljivo magnetsko polje
- u kontaktu s površinom metalnoga objekta u njemu se inducira napon koji stvara slabe vrtložne struje
- vrtložne struje generiraju sekundarno magnetsko polje suprotno smjeru primarnoga polja
- u namotajima prijamnog svitka (unutarnja petlja) inducira se struja kada detektor prolazi iznad vodljivoga objekta
- polje predajnika izolirano je od polja prijamnog svitka
- signal se obrađuje u elektroničkom krugu kontrolne kutije
- zvučni i/ili video odziv upućuje na lociranje metalnoga objekta
- ovisno o jakosti polja koje stvara metalni objekt može se približno odrediti na kojoj je dubini.

### Primjena:

- otkrivanje skrivenih metalnih naprava (pištolji, puške, noževi, ...) u zračnim lukama, zatvorima, izložbenim dvoranama, sudovima i dr.
- ručni detektori
- *walk-through* sigurnosni detektori
- razminiranje
- rudarstvo i geologija (sadržaj metala u zemlji i stijenama)
- industrija (otkrivanje stranih – metalnih tijela u tekstilnoj, farmaceutskoj, drvnoj, kemijskoj, industriji hrane, pića, plastike, ...)
- graditeljstvo (detektiranje čelične armature u betonskim građevinama, cijevi u zidovima i podovima, ...)
- arheologija (otkrivanje povijesnih artefakata)
- hobи (traženje zakopanoga blaga, zlata, starog novca, izgubljenih dragocjenosti, ...)
- kriminalistika
- i drugo.



56

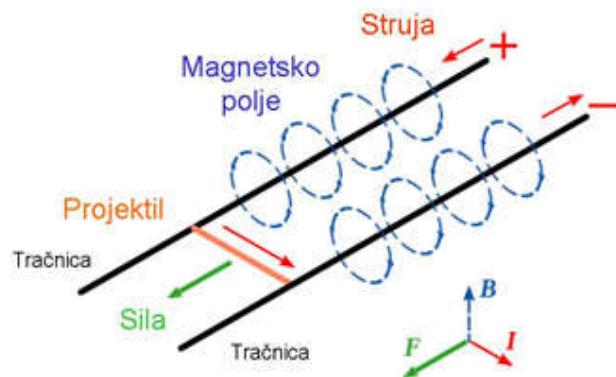
Razminiranje

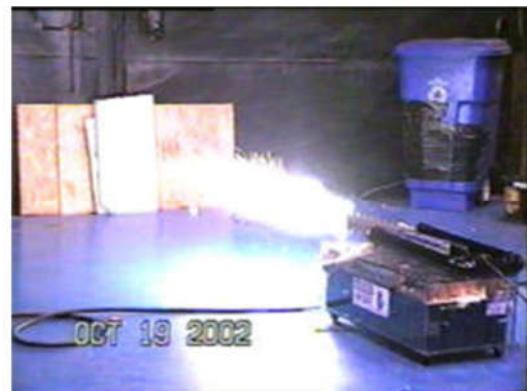


Walk-through sigurnosni detektori

- **Elektromagnetski top**

Elektromagnetski top je elektromagnetski sustav za lansiranje projektila (engl. *railgun*) brzinama većim od 5 maha. Domet je 200 kilometara. Planirano je postavljanje na brodove i zamjena dosadašnjih teških brodskih oruđa.





### Izračun sile na projektil

Magnetsko polje u okolišu polovice dugog ravnog (*semi infinite*) vodiča-tračnice:

$$B = \frac{I}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Polje između dva poluvodiča ( $d$  – razmak između tračnica):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$

Srednja vrijednost polja za tračnice kružnog presjeka  $r$  uz uvjet  $r \ll d$ :

$$B_{sr} = \frac{I}{d} \int_r^{d-r} B(x) dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} \int_r^{d-r} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \ln \frac{d-r}{r}$$

Lorentzova sila na vodič duljine  $d$ :

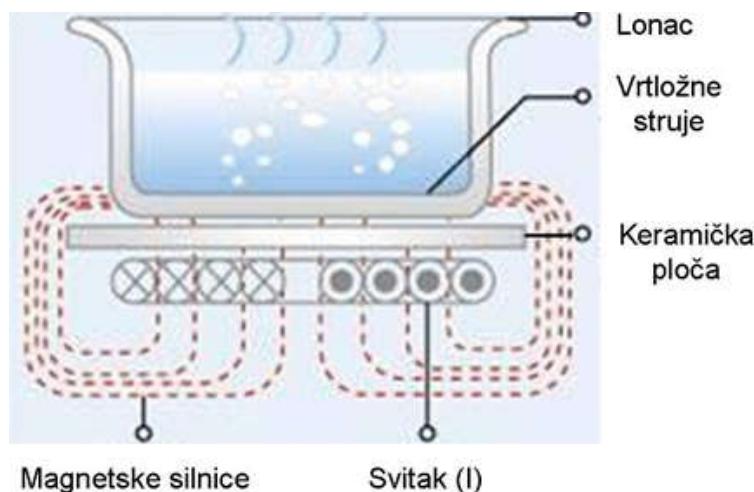
$$F = IdB_{sr} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{d-r}{r}$$

Pretpostavka:  $l > 3d$  ( $l$  – udaljenost od početka tračnica do mjesta gdje se mjeri sila).

- **Uporaba sile amortizera**

Na sveučilištu State University of NY razvijen je sustav generatora postavljen na amortizere automobila. Pomicanje amortizera po principu elektromagnetske indukcije generira napon i puni akumulator. Dio energije potrošen na savladavanje povećanih otpora u vožnji po neravninama vraća se u akumulator. Alternator se određeno vrijeme može isključiti i time uštedjeti na gorivu.

- Indukcijska kuhala



Princip rada:

- Uporaba elektromagnetske indukcije za grijanje feromagnetske posude (tava, posuda, lonac, ...).
- Keramički panel služi kao ploča za kuhanje.
- Svitak ispod ploče protjecan visokofrekveničkom (40-100 kHz) izmjeničnom strujom generira snažno magnetsko polje.
- Promjenljivo polje prolazi kroz panel i stvara vrtložne struje.
- Vrtložne struje zagrijavaju dno posude.
- Stvorena toplina brzo se s dna prenosi na sadržaj posude (hranu).
- Zagrijavanju pridonosi i efekt histereze (otpor feromagnetskoga materijala na brze promjene magnetizacije).
- Sustav djeluje kao transformator s kratko spojenim sekundarom (posudom).
- Kada se posuda otkloni s panela, prestaje stvaranje topline – sekundar je u praznome hodu, upravljačka elektronika isključuje uređaj.
- Posuđe mora imati ravno dno.

Prednosti:

- posuda je izvor topline
- gubitci su mali
- $\eta$  je visok (90 %)
- hrana se ne lijepi
- magnetsko polje ne utječe na okoliš posude.

Neferomagnetsko posuđe (aluminijsko, bakreno i stakleno vatrostalno) nije upotrebljivo, osim ako se ne postave ispod njih tzv. „indukcijski diskovi“.

- Magnetni levitacijski vlak – maglev

Svojstva maglev vlaka:

- Lebdi (levitira) iznad podlage (vodilice) pomoću magnetske sile.
- Pogon – princip linearnoga motora.
- Skup za uvođenje – potreba građenja vozne trase.
- Smanjeno trenje i troškovi održavanja trase.
- Vozi tiho i bez trzaja.
- Eksploatacija jeftina i profitabilna.
- Najveća brzina 581 km/h (japanski supravodljivi maglev) – veća od konvencionalnog TGV-a.

Temeljne funkcije:



Shanghai – maglev

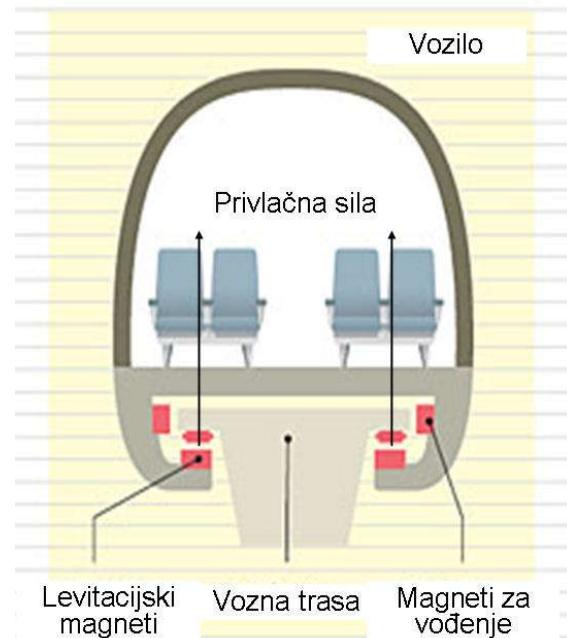


Njemački Transrapid

### Temeljni principi levitacije

#### 1. EMS – elektromagnetska suspenzija (lebdjenje)

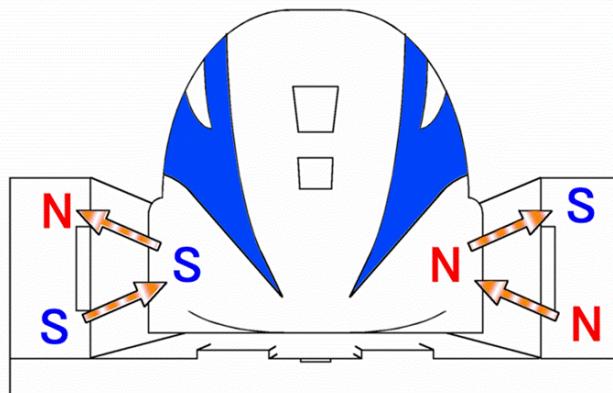
- Između elektromagneta u vozilu i feromagnetskih (čeličnih) tračnica na vodilici djeluje privlačna sila koja podiže vozilo.
- Upravljačka elektronika održava zračni raspor između vozila i vodilice – sprječava kontakt.



#### 2. EDS – elektrodinamička suspenzija

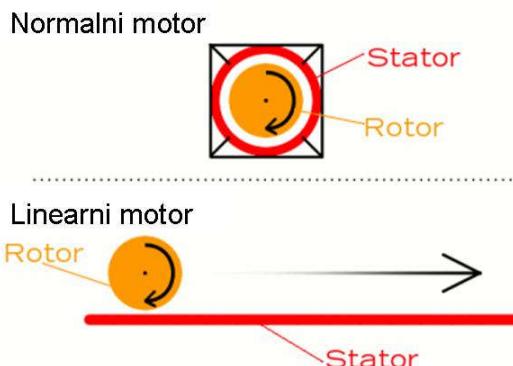
- Elektromagneti u bočnim stranama vozila koje se giba induciraju struje u vodilici.
- Posljedica su odbojne sile koje podižu vozilo.
- EDS zahtijeva jaka polja – supravodljive magnete.

- Inherentna je stabilnost – nije potrebno električko upravljanje visinom levitacije (veći raspor – slabija sila i obratno).
- Vozilo se koristi gumenim kotačima u postupku ubrzavanja – postizanja uvjeta za levitiranje i kočenje („slijetanje” i „uzlijetanje”).
- Svitci u bočnim stranama vodilice stvaraju odbojne i privlačne sile – obje podižu vozilo.
- Iste privlačne/odbojne sile omogućuju bočno vođenje vozila po trasi.

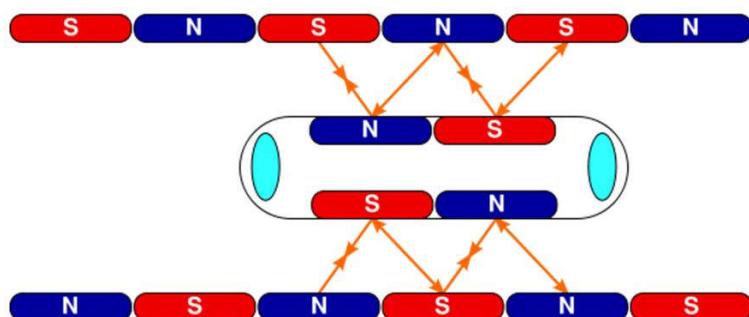


### Porivni sustav – propulzija

- EMS – vozilo samo lebdi (nema vuče naprijed).
- Za propulziju potreban je linearni motor – propulzijski svitci su u tračnicama.

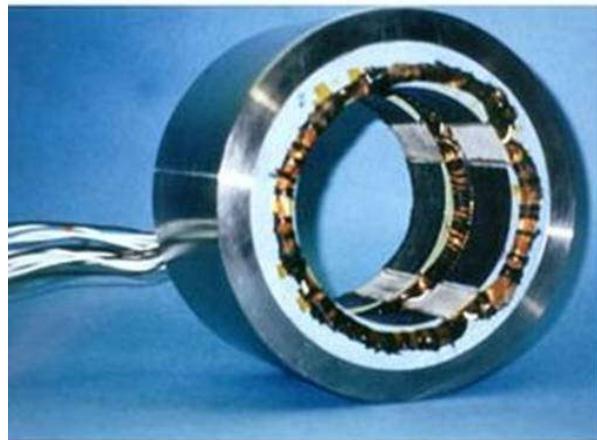


- EDS – omogućuje istovremeno levitaciju i propulziju.
- Linearni sinkroni motor – trofazna izmjenična struja stvara pomično magnetsko polje.
- Polje privlači ili odbija supravodljivi magnet u vozilu.



- **Magnetski ležaj**

Vođenje pokretnih dijelova stroja uporabom magnetske levitacije – nema trenja.







# Literatura

1. Alexander, C. K., Sadiku, M. N. O.: **Fundamentals of electric circuits**, McGraw-Hill, 2004.
2. Attia, J. O.: **Electronics and Circuit Analysis Using MATLAB**, CRC Press LLC, 1999.
3. Beaty, H. W.: **Standard handbook for electrical engineers**, downloaded from Digital Engineering Library @ McGraw-Hill, 2006.
4. Bego, V.: **Mjerenja u elektrotehnici**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.
5. Bird, J.: **Electrical circuit Theory and Technology**, Newnes - Elsevier, 2003.
6. Bobrow, L. S.: **Fundamentals of Electrical Engineering**, Oxford University Press, 2nd Edition, 1996.
7. Bobrow, L. S.: **Instructor's Manual for Fundamentals of Electrical Engineering**, Oxford University Press, 1996.
8. Booker, H. G.: **An Approach to Electrical Science**, Mc Graw Hill, New York, 1959.
9. Brechmann, G., et al.: **Westermannov elektrotehnički priručnik**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1991.
10. Brookes, A. M. P.: **Advanced Electric Circuits**, The Commonwealth and International Library: Applied Electricity and Electronics Division, 1966.
11. Brookes, A. M. P.: **Basic Electric Circuits**, 2nd Edition, Pergamon Press, 1975.
12. Chen, W. K. – Editor-in-Chief: **The Electrical Engineering Handbook**, Academic Press, 2004.
13. Craver, W. L., Schroder D. C., Tarquin, A. J.: **Introduction to Engineering**, Oxford University Press, 1995.
14. DeCarlo, R., A., Pen-Min Lin: Linear Circuit Analysis: **Time Domain, Phasor, and Laplace Transform Approaches**, Oxford University Press, 2001.
15. DOE Fundamentals Handbook, **Electrical science**, Volume 1-4, U.S. Department of Energy, 1992.
16. Giancoli, D. C.: **Physics for Scientists & engineers with Modern Physics**, International edition, 3rd Edition, Pentice Hall International, 2000.
17. Gibilisco, S., Monk S.: **Teach Yourself Electricity and Electronics**, Sixth Edition, Mc Graw Hill, 2016.
18. Grant, I. S., Phillips, W. R.: **Electromagnetism**, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1990.
19. Guru, B. S., Hiziroglu, H. R.: **Electromagnetic Field Theory Fundamentals**, 2nd edition, Cambridge University Press, 2009.
20. Hambley, A.R.: **Electrical Engineering: Principles & Applications**, 7th Edition, Pearson Education, 2015.
21. Hammond, P., Sykulski, J. K.: **Engineering Electromagnetism: Physical Processes and Computation**, Oxford University Press, 1994.
22. Hammond, P.: **Electromagnetism for Engineers, An Introductory Course**, Fourth Edition, Oxford University Press, 1999.
23. Hayt, W., Buck, J.: **Engineering Electromagnetics**, 8th Edition, Mc Graw Hill, 2012.

24. Hickey, R. B.: **Electrical Engineer's Portable Handbook**, Mc Graw-Hill, 2002.
25. Howatson, M.: **Electrical circuits and systems - An introduction for engineers and physical scientists**, Oxford University Press, 1996.
26. Hubscher, H., et al.: **Osnove elektrotehnike**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1981.
27. Hunt, B. R., Lipsman, R. L., Rosenberg, J. M.: **A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users**, Cambridge University Press, 2001.
28. Irodov, I. E.: **Problems in General Physics**, Mir Publishers, Moscow, 1983.
29. Irwin, J. D., Nelms, R. M.: **Basic Engineering Circuit Analysis**, 11th Edition, International student version, John Wiley & Sons, 2008.
30. Jajac, B.: **Teorijske osnove elektrotehnike, svezak I**, udžbenik Sveučilišta u Splitu, Graphis, 2002.
31. Jajac, B.: **Teorijske osnove elektrotehnike, svezak II**, udžbenik Sveučilišta u Splitu, Graphis, 1977.
32. Jones, Ian P.: **Material Science for Electrical and Electronic Engineers**, Oxford University Press, New York, 2001.
33. Jordan, D., Smith, P.: **Mathematical Techniques - An Introduction for the Engineering, Physical, and Mathematical Sciences**, Oxford University Press, New York, 2008.
34. Kemper, J. D.: **Introduction to the engineering profession**, 2nd edition, Sounders College Publishing, 1993.
35. Kraus, A. D.: **Allan's Circuits Problems**, Oxford University Press, 2001.
36. Kuzmanović, B.: **Osnove elektrotehnike I**, Element, Zagreb, 2000.
37. Lyshevski, S. E.: **Engineering and Scientific Computations Using MATLAB**, John Wiley & Sons, 2003.
38. Meluzin, H.: **Elektrotehnika na lak način**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1982.
39. Miner, G. F.: **Lines and Electromagnetic Fields for Engineers**, Oxford University Press, 1996.
40. Muller-Schwarz, W.: **Basic Electrical Theory and Practice**, Heyden & Sons, London, 1981.
41. Nahvi, M., Edminister, J. A.: **Theory and Problems of Electric Circuits**, Fourth Edition, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill, 2003.
42. Neff, H. P. Jr.: **Introductory electromagnetics**, John Wiley & Sons, 1991.
43. O'Malley, J.: **Schaum's Outline of Theory and Problems of Basic Circuit Analysis**, Second Edition, Mc Graw-Hill, 1992.
44. Paschal, J. M. Jr.: **EC&M's Electrical Calculations Handbook**, Mc Graw-Hill, 2001.
45. Pinter, V.: **Osnove elektrotehnike I**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
46. Purcell, E. M.: **Elektricitet i magnetizam**, Tehnička knjiga, Zagreb, 1988.
47. Ratnajeevan, S., Hoole, H.: **A Modern Short Course In Engineering Electromagnetics**, Oxford University Press, 1996.
48. Rizzoni, G., Kearns J.: **Principles and Applications of Electrical Engineering**, 6th Edition, Mc Graw-Hill, 2016.
49. Rosenberg P.: **Audel Questions and Answers for Electrician's Examinations**, 15th Edition, John Wiley & Sons, 2011.
50. Sadiku, M., Sagliocca, J., Soriyan, O.: **Solutions Manual Accompanying "Elements of Electromagnetics"**, 3rd edition, Oxford University Press, 2001.
51. Sadiku, M.: **Elements of Electromagnetics**, Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, 6th Edition, 2014.

52. Sarma, M. S.: **Introduction to Electrical Engineering**, Oxford University Press, 2001.
53. Sarma, M. S.: **Solutions manual for introduction to electrical engineering**, Oxford University Press, 2000.
54. Schmitt, R.: **Electromagnetics Explained**, Newnes – Elsevier, 2002.
55. Schwarz, S. E., Oldham, W. G.: **Electrical Engineering: An Introduction**, 2nd Edition, Oxford University Press, 1993.
56. Smith, G. S.: **An Introduction to Classical Electromagnetic Radiation**, Cambridge University Press, 1997.
57. Solymar L., Walsh, D., Syms, R. A.: **Electrical Properties of Materials**, Ninth Edition, Oxford University Press, 2001.
58. Svoboda, J. A., Dorf, R. C.: **Introduction to Electric Circuits**, 9th Edition, John Wiley & Sons, 2014.
59. Šehović, E. i drugi: **Osnove elektrotehnike, zbirka primjera**, Školska knjiga, Zagreb, 1989.
60. Thomas R. E., Rosa A. J., Toussaint, G. J.: **The Analysis and Design of Linear Circuits**, 7th Edition, John Wiley & Sons, 2012.
61. Tuck, D., Tuck, G.: **Electrician's Instant Answers**, Mc Graw Hill, 2003.
62. Tucker, D. G.: **Elementary Electrical Network Theory**, Pergamon Press / The Macmillan Company, 1964.
63. Williams, T.: **The Circuit Designer's Companion**, Second edition, Newnes – Elsevier, 2005.
64. Wolff, I.: **Grundlagen der elektrotechnik**, band 1-4, Verlagsbuchhandlung Dr Wolff GmbH, 2003.

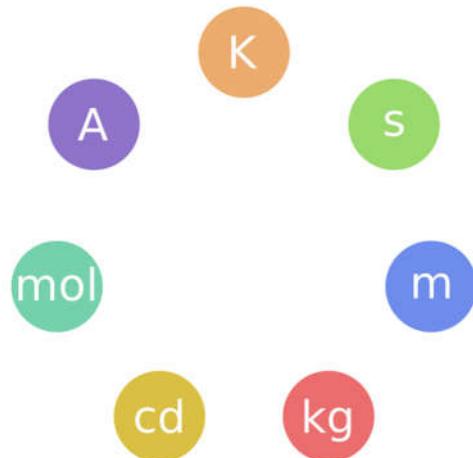
# Prilozi

---

## Predmetci za tvorbu decimalnih jedinica

Predmetak (Prefiks)	Znak	Vrijednost
jota	Y	$10^{24}$
zeta	Z	$10^{21}$
eksa	E	$10^{18}$
peta	P	$10^{15}$
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
kilo	k	$10^3$
hekto	h	$10^2$
deka	da	10
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
mili	m	$10^{-3}$
mikro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
piko	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$
ato	a	$10^{-18}$
zepto	z	$10^{-21}$
jokto	y	$10^{-24}$

## Temeljne fizikalne veličine SI sustava



Veličine	Jedinice
Duljina	Metar (m)
Masa	Kilogram (kg)
Vrijeme	Sekunda (s)
Jakost električne struje	Amper (A)
Termodinamička temeperatura	Kelvin (K)
Količina tvari	Mol (mol)
Jakost izvora svjetlosti	Kandela (cd)

## Grčki alfabet

A α	alfa
B β	beta
Γ γ	gama
Δ δ	delta
Ε ε	epsilon
Z ζ	zeta
H η	eta
Θ θ	theta
Kκ	kapa
Λ λ	lambda
M μ	mi
N ν	ni
Ξ ξ	ksi
Π π	pi
Pρ	ro
Σ σ	sigma
T τ	tau
Φ φ	fi
X χ	hi
Ψ ψ	psi
Ω ω	omega

## Fizikalne konstante

Naziv konstante	Znak	Vrijednost konstante
brzina svjetlosti u vakuumu	c	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
dielektričnost vakuma	$\epsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
permeabilnost vakuma	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$

Coulombova konstanta	$\kappa$	$9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$
opća (Newtonova) gravitacijska konstanta	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
masa protona	$m_p$	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $938,27 \text{ MeV} \cdot c^2$
masa neutrona	$m_n$	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $939,57 \text{ MeV} \cdot c^2$
masa elektrona	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $0,511 \text{ MeV} \cdot c^2$
elementarni naboј	$Q_e$ ili $e$	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
standardni atmosferski tlak	$p_0$	101325 Pa
standardna temperatura	$T_0$	273,15 K
apsolutna nula	$\theta_0$	-273,15 °C
brzina zvuka u zraku pri 20 °C	$v$	340 m · s <sup>-1</sup>
ubrzanje Zemljine sile teže	$g$	9,80665 m · s <sup>-2</sup>
polumjer Zemlje	$r_Z$	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
masa Zemlje	$m_Z$	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$