SVEUČILIŠTE U SPLITU | SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE

OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA U MS EXCELU

BOŽE PLAZIBAT

LADA REIĆ

SVEUČILIŠTE U SPLITU | SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE

OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA U MS EXCELU

BOŽE PLAZIBAT LADA REIĆ

NAKLADNIK

Sveučilište u Splitu
Sveučilišni odjel za stručne studije

UREDNIK

dr. sc. Ado Matoković, prof.v.š.

RECENZENTI

prof. dr. sc. Zoran Babić
mr. sc. Tonko Kovačević, viši predavač
Arijana Burazin Mišura, predavač

LEKTORICA

prof. dr. sc. Jadranka Nemeth-Jajić

Objavljivanje ovog udžbenika odobrilo je Stručno vijeće Sveučilišnog odjela za stručne studije na svojoj sjednici od 25.11. 2015.

ISBN: 978-953-7220-23-5

Predgovor

Ovaj je udžbenik nastao s namjerom da obuhvati, u prvom redu, nastavno gradivo koje se u kolegiju Operacijska istraživanja u MS Excelu nudi studentima specijalističkih diplomskih stručnih studija Trgovinsko poslovanje, Računovodstvo i financije te Strojarstvo na Sveučilištu u Splitu, Sveučilišnom odjelu za stručne studije.

U prvome, uvodnom dijelu, dane su kratke definicije operacijskih istraživanja, područje moguće primjene i povijesni pregled razvoja te relativno mlade znanstvene discipline. Opisani su, također, neki primjeri uspješne primjene operacijskih istraživanja u širokom spektru djelatnosti.

Na kraju su dani neki osnovni pojmovi vezani uz proces odlučivanja i donošenje poslovnih odluka.

U drugom su dijelu udžbenika obrađeni elementi Excelove „što-ako“ analize. Detaljno su prikazane funkcije *Goal Seek*, *Data Table* s jednom i dvije varijable te procedura kreiranja scenarija (*Scenario Manager*). Mogućnosti primjene navedenih funkcija, odnosno procedura prikazane su na brojnim primjerima iz područja ekonomije, opsegom i brojem podataka prilagođenima nastavnom procesu. Na kraju svakog poglavlja dani su zadatci s konačnim rješenjima, koje studenti u procesu učenja trebaju samostalno riješiti.

Rješavanje problema linearnog programiranja grafičkim postupkom detaljno je obrađeno u poglavljima trećega dijela udžbenika.

U prvim dvama poglavljima ovog dijela obrađene su linearne jednadžbe i linearne nejednadžbe s jednom i dvije varijable. Postupci rješavanja tih jednadžbi i nejednadžbi prikazani su na izabranim primjerima. Nakon riješenih primjera slijedi, gdje je to ocijenjeno potrebnim, niz zadataka za vježbu.

U trećem poglavlju ovog dijela obrađeni su pojmovi i definicije vezane uz standardni problem linearnog programiranja, bilo da je riječ o traženju maksimuma ili minimuma funkcije cilja. Objašnjena je egzistencija rješenja i temeljni teorem linearnog programiranja, nakon čega je dan postupak grafičkog rješavanja tog problema. Sve je to prikazano na riješenim primjerima zadanima u matematičkom i verbalnom obliku (dijetni problem, problem proizvodnje, problem smjese, problem ulaganja…).

Analiza osjetljivosti optimalnog rješenja problema linearnog programiranja prikazana je u četvrtom poglavlju ovog dijela. Razmatrane su promjene koeficijenata funkcije cilja i slobodnih koeficijenata desnih strana ograničenja. Pojašnjen je pojam marginalnog troška (cijene u sjeni) i oportunitetnog troška. Na kraju je poglavlja detaljno obrađen veći broj primjera, a studentima su ponuđeni zadatci za vježbu koje trebaju samostalno riješiti.

U četvrtom je dijelu udžbenika prikazan postupak rješavanja problema linearnog programiranja uz pomoć Excelova alata *Solver*: od pojašnjenja pripremljenog predloška SOLVER, niza detaljno riješenih primjera zadataka s dvije i više varijabli, u matematičkom i verbalnom obliku, do analize osjetljivosti rješenja pomoću izvještaja koje *Solver* nudi: *Answer Report* (o rješenju), *Sensitivity Report* (o osjetljivosti) i *Limits Report* (o granicama). Samostalni rad studentima je omogućen određenim brojem zadataka za vježbu s prikazom konačnih rješenja.

Završna poglavlja ovog dijela udžbenika posvećena su dvama posebnim problemima linearnog programiranja: transportnom problemu i problemu asignacije (dodjeljivanja). U oba su poglavlja opisani pripremljeni predlošci TRANSPORT, odnosno ASIGNACIJA, nakon čega su riješeni izabrani primjeri i ponuđeni zadatci za vježbu.

Na kraju, u petom dijelu udžbenika, znakovitog naslova „Za one koji žele znati više", obrađeni su elementi iz područja operacijskih istraživanja koji nisu obuhvaćeni nastavnim planom.

Tako se u prvom poglavlju obrađuje tzv. simpleks metoda kao temeljna metoda za rješavanje problema linearnog programiranja. Prikazan je način kreiranja simpleks tablice i detaljan postupak njena rješavanja. Primjena navedenog postupka pojašnjena je na dvama jednostavnim primjerima.

U drugom je poglavlju opisan dualni problem linearnog programiranja, njegov koncept i značaj, a na jednom su primjeru prikazani međusobni odnosi rješenja primarnog problema (primala) i njegova duala.

Odabrani problemi mrežnog programiranja: transportni problem s pretovarom, problem najkraćeg puta, problem najvećeg mrežnog protoka, problem kritičnog (najdužeg) puta, problem trgovačkog putnika, te problem kineskog poštara, prikazani su u trećem poglavlju.

U četvrtom je poglavlju razmatran problem višestrukih optimuma i način njihove detekcije uz pomoć Solverova izvještaja o osjetljivosti rješenja.

Peto, završno poglavlje ovog dijela posvećeno je teoriji igara. Uz kratak osvrt na nastanak i značaj te teorije prikazane su najčešće citirane igre i njihova primjena na nekim poznatim, realnim problemima.

Koristimo prigodu zahvaliti recenzentima prof. dr. sc. Zoranu Babiću, mr. sc. Tonku Kovačeviću, višem predavaču i kolegici Arijani Burazin Mišura, predavačici na pažljivom isčitavanju teksta i korisnim savjetima koje su nam pružili. Zahvaljujemo i dosadašnjim generacijama studenata specijalističkih diplomskih stručnih studija Trgovinsko poslovanje, Računovodstvo i financije te Strojarstvo, čija su pitanja i dileme pridonijeli jasnijem prikazu pojedinih dijelova ovog udžbenika.

Autori

S A D R Ž A J

1. UVOD U OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA

1.1. Što su operacijska istraživanja?

Zanimljivo je knjigu započeti pitanjem, i to pitanjem bez jednostavnog i opće prihvaćenog odgovora, za koji bi bilo lijepo da je uz to i relativno kratak.

Zašto? Pa zato što postoji velik broj definicija te discipline, uz nevoljko prihvaćeni period njezina rađanja krajem tridesetih i početkom četrdesetih godina prošlog stoljeća i bez suglasja o opravdanosti njezina naziva „operacijska istraživanja".

Stoga će se krenuti od definicije Hrvatskog društva za operacijska istraživanja: *Operacijska istraživanja su znanstvena disciplina koja se bavi matematičkim modeliranjem realnih procesa u svrhu donošenja optimalnih odluka*.

Jedan od pionira u razvoju operacijskih istraživanja, C. W. Churchman definira ih kao „*primjenu specifičnih znanstvenih metoda, tehnika i alata na uočene probleme sustava sa svrhom pronalaženja optimalnih rješenja*".

Od ostalih će se definicija navesti samo ona Arthura Clarka: *Operacijska istraživanja su umjetnost dobivanja ratova, a da se oni uopće i ne započnu.*

Što se samoga naziva tiče, sinonimi za operacijska istraživanja među ostalima su: kvantitativne metode (*Quantitive Methods*), menadžerska znanost (*Management Science*), znanost o odlučivanju (*Decision Science*) i sistemska analiza (*System Analysis*).

U svakom slučaju, operacijska istraživanja su interdisciplinarna matematička disciplina kojoj je zadatak istražiti, formulirati, analizirati i riješiti postavljeni problem na znanstven način.

A bez obzira na naziv i/ili definiciju operacijska istraživanja temeljena su na timskom radu u kojem rame uz rame sudjeluju znalci u području primjene operacijskih istraživanja i stručnjaci iz područja u kojem je problem detektiran i opisan. Isto tako, iz navedenih se definicija, u danom ili nešto proširenom obliku, mogu izvući neke ključne riječi koje su sadržane u svakoj od njih: *znanstvena metoda*, *sustav*, *optimalno rješenje* i *odlučivanje*.

1.2. Povijesni pregled razvoja operacijskih istraživanja

Mnogo je primjera, pa i u veoma dalekoj prošlosti, suradnje znanstvenika i vojskovođa s istim konačnim ciljem: donošenje optimalnih odluka u bitkama i time nanošenja što većih gubitaka neprijatelju.

Brojni se autori slažu da se začetak operacijskih istraživanja može vezati uz II. punski rat, koji je vođen u III. stoljeću prije Krista, kada je Arhimed svojim analizama i rješenjima pridonio obrani grada Sirakuze od napada Rimljana.

Uz taj se rat vezuju Arhimedovi izumi katapulta i sustava ogledala kojima je omogućio zapaljenje neprijateljskih brodova korištenjem sunčevih zraka.

Leonardo da Vinci je, kao inženjer, sudjelovao u ratu Firence protiv Pise tako što je korišteno njegovo znanje u konstrukciji i izradi katapulta, oklopljenih vozila, topova te drugih ratnih strojeva i uređaja.

Thomas Edison koristio se operacijskim istraživanjima u protupodmorničkom ratu tako što je realizirao neke od svojih sjajnih ideja kao što je štit za brodove protiv torpeda.

S matematičke točke gledišta, veliki matematičari XVII. i XVIII. stoljeća, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler i Lagrange, rade na određivanju maksimuma i minimuma nekih funkcija. Francuski matematičar Jean Baptiste Joseph Fourier skicira elemente metode koju danas nazivamo linearno programiranje, a pred kraj XVIII. stoljeća Gaspar Monge postavlja ključne temelje grafičke metode rješavanja problema i to zahvaljujući osobnom radu na razvoju deskriptivne geometrije.

Još jedan pokušaj primjene operacijskih istraživanja u prošlosti pripada F. W. Lanchesteru koji je sačinio studiju balističkih potencijala protivnika. On je, koristeći se sustavom diferencijalnih jednadžba, došao do tzv. Lanchesterova zakona kvadrata kojim je pokazao da ukupna snaga dalekometnog oružja ne raste linearno, nego s kvadratom broja dalekometnih jedinica.

Neki začetnikom operacijskih istraživanja drže Charlesa Babaggea (1791.–1871.), znanoga ponajprije kao tvorca diferencijalnog i kasnije analitičkog stroja, i to prvenstveno zbog njegove studije o sortiranju, naplati i transportu u poštanskom prometu, što je navelo sir Rowlanda Hilla da osnuje tvrtku "Penny Post" za cijelu Englesku.

Kasnih tridesetih godina prošlog stoljeća G. J. Stigler obrađuje poseban problem poznat kao specijalna dijetna optimalizacija ili jednostavnije – dijetni problem. Problem se pojavio kao produkt težnje vojske SAD-a da svojim trupama osigura hranu određenih nutritivnih vrijednosti uz najmanje troškove. Problem je riješen tzv. heurističkom metodom, a dobiveno rješenje neznatno se razlikuje od kasnije dobivenoga novootkrivenom simpleks metodom.

Dva matematičara, ruski L. Kantorovič i nizozemski T. Koopmans, razvijaju 1939. matematičku teoriju pod nazivom linearno programiranje, zahvaljujući kojoj su dobili Nobelovu nagradu. Tijekom 1941. i 1942. Kantorovič i Koopmans, neovisno jedan o drugome, prvi put rade na tzv. transportnom problemu koji je poznat i pod imenom Koopmans-Kantorovič problem. Za svoje su rješenje koristili geometrijsku metodu temeljenu na konveksnoj teoriji Minkowskoga.

Godine 1944. John von Neumann, poznat i kao otac suvremene arhitekture računala, ali i kao član projekta Manhattan (razvoj atomske bombe), objavljuje rad „Teorija igara i ekonomsko ponašanje“ što je mnoge matematičare privuklo problemima linearnog programiranja. Kasnije, 1947. godine, Neumann uočava sličnost između programiranja linearnih problema i teorije matrica koju je upravo on i razvio.

Smatra se međutim da je nova znanstvena disciplina, nazvana operacijska istraživanja, nastala u II. svjetskom ratu tijekom bitke za Englesku, kada su Britanci bili izloženi teškim napadima iz zraka zrakoplovstva nacističke Njemačke, Luftwaffe, raspolažući istodobno vrlo slabim vlastitim zračnim snagama usprkos eksperimentima u Combatu. Britanska je vlada, u potrazi za svrsishodnim načinom obrane zemlje, okupila skupinu znanstvenika različitih profila da pokuša pronaći rješenje za najbolje moguće korištenje radara kojima su raspolagali. Zahvaljujući radu navedene skupine određene su optimalne lokacije za antene i dobivena je najbolja distribucija signala čime je udvostručena efikasnost protuzračne obrane.

Kako bi naglasili važnost nove discipline, Britanci su ustrojili niz skupina slične prirode u svrhu pronalaženja optimalnih rješenja u kriznim situacijama. Tako je i vlada SAD-a, kada je ušla u rat 1942. godine, pokrenula projekt za znanstveno pronalaženje optimalnih programa SCOOP (*Scientific Computation Of Optimum Programs*), u kojem je sudjelovao i G. B. Dantzig, koji je 1947. godine razvio *simpleks algoritam* (*simpleks metodu*).

Za vrijeme Hladnog rata tadašnji Sovjetski Savez, koji nije bio obuhvaćen tzv. Maršalovim planom, želio je preuzeti kontrolu nad kopnenim komunikacijama s Berlinom, uključujući i riječne rute. Kako bi se omogućio koliko toliko normalan život, Engleska i SAD odlučile su opskrbljivati grad, bilo konvojima pod pratnjom (što je moglo dovesti do razvoja novih sukoba) bilo zračnim putem, razbijajući i onemogućujući blokadu Berlina. Izabrana je druga opcija te je 25. 7. 1948. uspostavljen zračni most. Izbor te opcije produkt je rada grupe SCOOP. Pri tom je u prosincu te godine dnevno prevoženo 4500 tona da bi nakon optimalizacije transporta (operacijska istraživanja) ta količina dosegnula 8000 – 9000 tona u ožujku 1949. Budući da je na taj način dnevna količina robe dostigla vrijednost koja bi se i inače transportirala kopnenim putovima, Sovjeti su tada prekinuli s blokadom grada.

Nakon II. svjetskog rata u SAD-u su se ključni resursi kao što su energija, oružane snage i razni vidovi opskrbe „podvrgnuli“ modelima optimalizacije koji su uglavnom rješavani tehnikama linearnog programiranja.

Paralelno s razvojem doktrine operacijskih istraživanja razvijale su se i tehnike računanja i računala, zahvaljujući čemu se vrijeme potrebno za rješavanje problema linearnog programiranja sve više skraćivalo.

Prvi rezultati ove tehnike rješavanja nastali su 1952. godine, kada se Nacionalni ured za standarde za dobivanje rješenja koristio računalom SEAC. Zadovoljstvo kratkim vremenom rješavanja ohrabrilo je korisnike za primjenu u svim vrstama problema oružanih snaga: određivanje optimalne visine leta aviona sa svrhom otkrivanja neprijateljskih podmornica, upravljanje dijelom proračuna za vojsku i logistiku, uključujući i dubinu na koju treba uputiti projektile na protivničke podmornice kako bi gubitci neprijatelja bili što veći. Sve je to rezultiralo peterostruko većom efikasnosti zračnih snaga.

Tijekom pedesetih i šezdesetih godina prošlog stoljeća značajno raste interes za primjenom operacijskih istraživanja u području ekonomije i industrije, a samim time i njihov daljnji razvoj. Tako se, na primjer, može navesti plan transporta šljunka za izgradnju Moskve, koji je s 10 različitih ishodišta trebalo razvoziti na 230 gradilišta. Za rješavanje tog problema korišteno je računalo STRENA, kojemu je trebalo 10 dana (srpanj, 1958.), što je dovelo do uštede od 11 %.

Primjena operacijskih istraživanja, osim u rješavanju problema u ratu i problema oružanih snaga, našla je svoje mjesto i u rješavanju problema u sljedećim djelatnostima: nutricionizmu, tovu stoke, rasporedu sjetve u agraru, transportu, asignaciji, lokaciji, marketingu, smanjenju redova čekanja, upravljanju novcem, rješavanju mrežnih problema i tako dalje.

1.3. Pristup korištenju operacijskih istraživanja

Neovisno o karakteru i složenosti problema koji se rješava primjenom operacijskih istraživanja, uspješnost ovisi o ozbiljnosti kojom korisnik pristupa svakoj od nezaobilaznih faza, kako slijedi:

1. formuliranje problema
2. prikupljanje i analiza podataka
3. modeliranje
4. rješavanje modela
5. analiza dobivenih rezultata
6. implementacija rješenja i nadzor.

Formuliranje problema, osjetljiva i vrlo značajna faza operacijskih istraživanja, podrazumijeva definiranje djelokruga problema koji se razmatra i čimbenika koji na njega utječu, opis mogućih alternativnih odluka te specifikaciju svih ograničenja povezanih s pojedinim dijelovima razmatranog problema. U ovoj se fazi definiraju i ciljevi istraživanja, koji moraju biti realni. Ovo je vrlo složen zadatak jer, za razliku od školskih primjera razmatranih u ovom i sličnim priručnicima, stvarne probleme u početnoj fazi operacijskih istraživanja nije baš moguće jasno i precizno opisati.

Faza **prikupljanja i analize podataka** podrazumijeva prikupljanje podataka iz dvaju temeljnih izvora: zapažanja vezanih uz problem koji se razmatra i standarda koji se moraju zadovoljiti, te njihove analize i pripreme za sljedeću fazu istraživanja – modeliranje. Ova je faza značajna utoliko što ne postoji model niti alat za njegovo rješavanje koji može dati dobar izlazni rezultat ako se temelji na lošim ulaznim parametrima; loše prikupljenim podatcima i njihovoj analizi.

U fazi **modeliranja** problem se „pretvara“ u matematički oblik. Model se definira kao idealizirana prezentacija nekog realnog sustava. Modeli, općenito, mogu biti fizički, analogni, simulirani i matematički.

Matematički model obično sadrži jednu ili više funkcija cilja koje su predstavljene jednadžbom, odnosno jednadžbama u kojima figuriraju varijable odlučivanja, te niz ograničenja opisanih najčešće nejednadžbama, a slijede iz uočenih limita (broja ljudi, strojeva, količine raspoloživog materijala, zahtjeva tržišta i slično) razmatranog sustava.

Deset je temeljnih načela dobrog modeliranja:

1. Ne izrađivati kompliciran model ako i jednostavan može poslužiti!
2. Ne podešavati problem kako bi odgovarao tehnici rješavanja!
3. Rigorozno stvarati zaključak o modelu!
4. Provjeriti model prije uporabe!
5. Model ne shvaćati previše doslovno!
6. Ne očekivati da model rješava i probleme za koje nije projektiran!
7. Ne pretjerivati s „prodavanjem“ istog modela!
8. Već sama izrada modela znatno pridonosi rasvjetljavanju problema!
9. Model ne može dati rješenje koje je bolje od ulaznih informacija!
10. Ni jedan model ne može zamijeniti onoga koji na kraju donosi odluku!

Konačni **model rješava se** primjenom različitih matematičkih i statističkih alata, uz korištenje prikupljenih ulaznih podataka. Na istraživanju i razvoju toga područja u proteklom je periodu napravljen najveći napredak, i zbog velikog broja znanstvenika koji su svoj rad usmjerili u tom pravcu i zbog svojevrsne revolucije u području informacijskih tehnologija, što je omogućilo da se tako razvijeni alati implementiraju u moćne računalne aplikacije.

Analiza dobivenih rezultata, osobito kod velikih i složenih matematičkih modela, ujedno je faza testiranja i odabranog modela i ulaznih podataka. Slično pisanju složenog računalnog programa, ova faza služi za pronalaženje i otklanjanje grešaka (*bagova*) i u modelu i u ulaznim podatcima: neka bitna ograničenja nisu uzeta u obzir, a neki ulazni podatci nisu uzeti iz reprezentativnog uzorka. Stoga je, prije konačne uporabe modela, dobro testirati model na poznatim i već provjerenim realnim slučajevima. Ova se faza još naziva i fazom *validacije modela*.

Nakon testiranja i validacije modela slijedi njegova **implementacija u realnom sustavu**, svakako najznačajnija od nabrojenih faza. Instalaciju samog modela treba popratiti odgovarajućim pojašnjenjima i temeljitom dokumentacijom koja će omogućiti da se on višekratno koristi, pa i onda kada se njegovi korisnici mijenjaju. **Nadzor modela** u ovom smislu znači praćenje rezultata njegove implementacije na realnom problemu i analiza benefita koji su nastali s promjenama, kao i stalni monitoring nad okruženjem u kojem je model nastao jer je ono dinamično i podložno promjenama koje mogu imati značajan utjecaj na valjanost tim modelom dobivenih rezultata.

Uspješna primjena operacijskih istraživanja pretpostavlja zadovoljavanje specifičnih zahtjeva svake od navedenih faza, što se može svesti na sljedeće:

- dobro i jasno definiranje problema,
- adekvatno i pouzdano prikupljanje informacija,
- postojanje odgovarajućih metoda i programske podrške za rješavanje problema,
- dobro poznavanje područja primjene i matematičkog aparata,
- stvaranje povoljne psihološke klime za primjenu metoda operacijskih istraživanja.

1.4. Metode operacijskih istraživanja

Neke od najčešće korištenih metoda operacijskih istraživanja su:

a) metode računalne simulacije, koje omogućuju analizu korisnikova pristupa i ocjenu njegove ideje bez ulaska u troškove izgradnje realnog modela;
b) metode optimalizacije, koje omogućuju pronalaženje najboljega između velikog broja mogućih rješenja razmatranog problema, a najpoznatije su:
    1) linearno programiranje
    2) nelinearno programiranje
    3) cjelobrojno programiranje
    4) dinamičko programiranje
    5) mrežno programiranje
    6) višekriterijalno programiranje
    7) modeli repova čekanja
    8) modeli zaliha i tako dalje;
c) teorija igara, koja omogućuje donošenje optimalnih odluka u problemima s većim brojem subjekata suprotstavljenih interesa.

Od svih nabrojenih metoda ovdje će se detaljno opisati samo linearno programiranje i to kroz rješavanje problema grafičkim postupkom (problemi s dvije varijable odlučivanja), odnosno uz pomoć Excelova alata Solver (za probleme s većim brojem varijabli odlučivanja). Obradit će se i dva posebna slučaja linearnog programiranja: transportni problem i problem asignacije.

1.5. Neki primjeri uspješne primjene operacijskih istraživanja

Kako bi se uputilo na raznolikost problema u kojima se mogu primijeniti modeli i metode operacijskih istraživanja, i pokazalo što to u konačnici može značiti u financijskom smislu, u tablici 1.1 prikazani su neki stvarni primjeri primjene operacijskih istraživanja s kratkim opisima rješavanih problema i izvanrednim financijskim efektima.

Tablica 1.1. *Primjeri uspješne primjene operacijskih istraživanja*.

Organizacija	Područje primjene	Godina	Godišnja dobit/ušteda
Ministarstvo za vode Nizozemske	Razvoj nacionalne politike upravljanja vodama, uključujući interakciju novih objekata, poslovnih procedura i financiranja.	1985.	$15 milijuna
Monsanto Corp.	Optimalizacija proizvodnih procedura sa svrhom realizacije cilja s minimalizacijom troškova.	1985.	$2 milijuna
Weyerhauser Co.	Optimalizacija u sječi drva i finalnoj proizvodnji.	1986.	$15 milijuna

Electrobas/CEPAL Brasil	Optimalan raspored vodenih i termičkih resursa u nacionalnom energetskom sustavu.	1986.	$43 milijuna
United Airlines	Raspodjela radnog vremena u prodavaonicama karata i u zračnim lukama sa svrhom zadovoljenja potreba kupaca uz minimalne troškove.	1986.	$6 milijuna
Citgo Petroleum Corp.	Optimalizacija prerade, ponude, distribucije i oglašavanja.	1987.	$70 milijuna
SANTOS, Ltd., Australia	Optimalizacija investiranja kapitala u proizvodnju prirodnog plina kroz period od 25 godina.	1987.	$3 milijuna
Harris Corporation – Semiconductor Section	Planiranje nabave repromaterijala, proizvodnje i isporuke poluvodiča.	1988.	$40 milijuna
Electric Power Research Institute	Upravljanje zalihama nafte i ugljena za proizvodnju električne energije sa svrhom uravnoteživanja troškova zaliha i rizika od nestašice.	1989.	$59 milijuna
San Francisco Police Department	Optimalizacija rasporeda policijskih ophodnja.	1989.	$11 milijuna
Texaco Inc.	Optimalizacija raspoloživih sastojaka kako bi goriva (benzini, dizeli) zadovoljila zahtjeve prodaje i kvalitete.	1989.	$30 milijuna
IBM	Nacionalna integracija zaliha rezervnih dijelova i organizacija mreže opskrbe.	1990.	$20 milijuna
Yellow Freight System, Inc.	Optimalizacija dizajna nacionalnih transportnih mreža i programiranje brodskih ruta.	1992.	$17.3 milijuna
New Haven Health Dept.	Razvoj efikasnog programa zamjene injekcijskih igala u borbi protiv širenja AIDS-a.	1993.	33 % manje zaraženih
Delta Airlines	Maksimalizacija dobiti preraspodjelom različitih tipova aviona na 2500 domaćih letova.	1993.	$100 milijuna
Digital Equipment Corp.	Reorganizacija lanca opskrbe između dobavljača, tvornica, distributivnih centara i prodaje.	1995.	$800 milijuna

China	Selekcija i optimalno programiranje velikih projekata za zadovoljavanje budućih energetskih potreba zemlje.	1995.	$425 milijuna
Cuerpo de defensa de Sudáfrica	Optimalizacija reorganizacije oružanih snaga, u veličini i obliku, te odabira vrste naoružanja.	1997.	$1.100 milijuna
Procter and Gamble	Redizajn sjevernoameričkog proizvodnog i distribucijskog sustava s ciljem što bržeg pristupa tržištu.	1997.	$200 milijuna
Hewlett-Packard	Reorganizacija i optimalizacija veličine zaliha i njihovih lokacija na linijama za proizvodnju pisača u svrhu ostvarivanja proizvodnih ciljeva.	1998.	$280 milijuna dodatnog prihoda

U nastavku će se pobliže opisati tri od prikazanih slučajeva uspješne primjene operacijskih istraživanja: proizvodnja poluvodiča u Harris Corporation, miješanje goriva u gigantu Texaco te raspored zrakoplova na domaćim linijama avioprijevoznika Delta Airlines (SAD).

Slučaj Harris Corporation. Odjel poluvodiča tvrtke Harris Corporation imao je vrlo mali udio u tržištu poluvodiča, koje je proizvodio prvenstveno za potrebe vojske i zrakoplovne industrije. No godine 1988. menadžment tvrtke donio je stratešku odluku o ulaganju u proizvodni dio tog odjela sa svrhom plasmana proizvoda u automobilsku i telekomunikacijsku industriju. Kako bi se što bolje pozicionirali na tržištu, nisu se smjeli osloniti na sustave kojima se koristi konkurencija. Stoga su razvili svoj sustav upravljanja nabavom, proizvodnjom i distribucijom, koji se temeljio na složenom matematičkom modelu. Model je rješavan korištenjem linearnog programiranja i sofisticirane baze podataka s prognozama, cijenama, narudžbama, tokovima materijala i dinamičkim podatcima o raspoloživim kapacitetima. Njihov je sustav postigao izvanredne rezultate: ubrzali su prosječno vrijeme isporuke za 75-95 % bez potrebe za povećavanjem količine zalihe što je, od godišnjeg gubitka od cca 75 milijuna dolara, dovelo do čiste dobiti od cca 40 milijuna dolara.

Slučaj Texaco. Naftni gigant Texaco iskoristio je činjenicu da se modeli i metode operacijskih istraživanja vrlo često koriste upravo u rješavanju problema mješavina goriva u naftnoj industriji.

Naime, sve rafinerije u svom postupku proizvodnje dobivaju na različitim temperaturama niz naftnih derivata različitih svojstava. Ti se derivati kasnije miješaju u određenim omjerima te se dobiju različite vrste benzina, dizela, zrakoplovnih goriva i ulja za loženje. To rezultira vrlo složenim problemom s velikim brojem ograničenja.

Razvojem svog sustava Omega temeljenog na modelu nelinearne optimalizacije, i kasnijim proširenjem sustavom nazvanim StarBlend, Texaco je ostvario godišnje uštede u visini od 30 milijuna dolara.

Slučaj Delta Airlines. Zrakoplovna industrija zasigurno je područje u kojem se može pronaći ponajveći broj primjera uspješne primjene operacijskih istraživanja. Slučaj Delta Airlinesa jedan je od najčešće spominjanih.

Tvrtka je dnevno imala više od 2500 domaćih letova za što je koristila 450 zrakoplova koji su, prema svom kapacitetu, bili podijeljeni u 10 skupina. Uočen je sljedeći problem: ako je za neku od linija određen prevelik zrakoplov, ostat će u njemu slobodnih mjesta od kojih kompanija neće imati koristi, a ako je premalen, neće moći prevesti sve putnike i kompanija će ostati uskraćena za potencijalni prihod.

Stoga je definiran cilj da se na svim linijama osiguraju zrakoplovi optimalnog kapaciteta uz maksimalan mogući prihod i minimizaciju operativnih troškova. Kao rezultat duge analize i prikupljanja relevantnih podataka kreiran je model s oko 60 tisuća varijabli odlučivanja i 40 tisuća ograničenja. Vodilo se računa o troškovima posade zrakoplova, goriva, nepopunjenog kapaciteta i naknadama zračnih luka, ali i o različitim regulacijskim mehanizmima u različitim saveznim državama. Naravno da se bez primjene računala takav problem ne bi mogao riješiti.

A financijski rezultat na kraju je bio spektakularan. U prva tri mjeseca implementacije dobivenog optimalnog rješenja (lipanj, srpanj i kolovoz 1993.) dnevni rezultat poslovanja bio je za 220 tisuća dolara bolji u odnosu na ranije korišteni raspored letenja.

Usprkos nizu uspješnih rezultata primjene postoji i dosta kritičara koji operacijska istraživanja smatraju pomalo zamagljenom znanstvenom disciplinom u kojoj se „*istražuju tehnike i postupci pronalaženja problema koje ona može riješiti*“. Međutim, ti su kritičari u pravu samo onda kada se operacijska istraživanja koriste „sama za sebe“, bez sustavnog pristupa u svim predviđenim fazama, od definiranja modela do implementacije rješenja.

1.6. Područje primjene i poslovna korist od operacijskih istraživanja

Nešto više od pola stoljeća od kada su operacijska istraživanja zauzela svoje mjesto u potpori odlučivanju, može se reći kako gotovo da i nema područja u kojem se ona ne mogu uspješno primijeniti. Neka od najznačajnijih su:

- proizvodnja
- financiranje
- budžetiranje
- upravljanje prihodima
- upravljanje zalihama
- planiranje
- transport
- raspoređivanje radne snage.

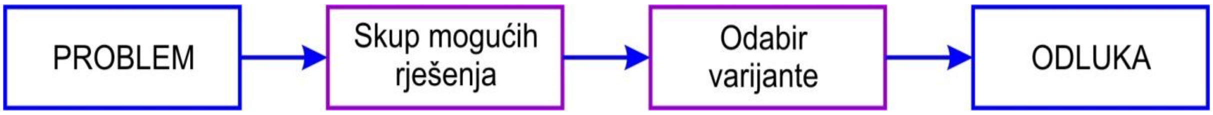
Istodobno, za razliku od drugih metoda, poslovne koristi od primjene operacijskih istraživanja najčešće se mogu kvantitativno izmjeriti i izraziti. Najznačajnije su:

- povećani prihodi
- smanjeni troškovi
- povećana produktivnost
- bolja iskoristivost resursa
- smanjen rizik
- povećana brzina i smanjeni zastoji proizvodnih procesa.

1.7. Načini donošenja poslovnih odluka

Odlučivanje je, prema najčešće korištenoj definiciji, proces koji traje određeno vrijeme (duže ili kraće), a završava donošenjem odluke.

Odluka je, u širem smislu, prihvaćanje jedne od varijanata mogućih rješenja, tj. rezultat izbora jednoga između više mogućih rješenja nekog problema, što se može prikazati modelom na slici 1.1.



Slika 1.1. *Grafički prikaz modela donošenja odluke*

S obzirom na aspekt s kojega se razmatra, postoji velik broj podjela načina i stilova donošenja odluka.

Sa stanovišta broja čimbenika koji utječu na razmatrani poslovni problem razlikuju se sljedeći načini donošenja poslovnih odluka:

- intuicijom
- iskustvom
- logičkom analizom
- uz pomoć neke od kvantitativnih metoda.

Intuicija je osjećaj („nos“), dakle spoznaja bez pomoći iskustva ili pak logičkog zaključivanja. Temelji se na prirodnoj sposobnosti pojedinca da uočava i spoznaje bitne značajke nekog problema i njegova rješenja. Korištenje intuicije može biti prihvatljivo u donošenju odluka kad su posrijedi problemi s relativno malim brojem informacija. Međutim, u slučaju velikog broja informacija i podataka ovaj način odlučivanja nije pouzdan i lako može dovesti do negativnih posljedica loše donesene odluke.

Iskustvo je način odlučivanja na temelju empirijskih podataka, tj. podataka, problema i odluka donesenih u prošlosti.

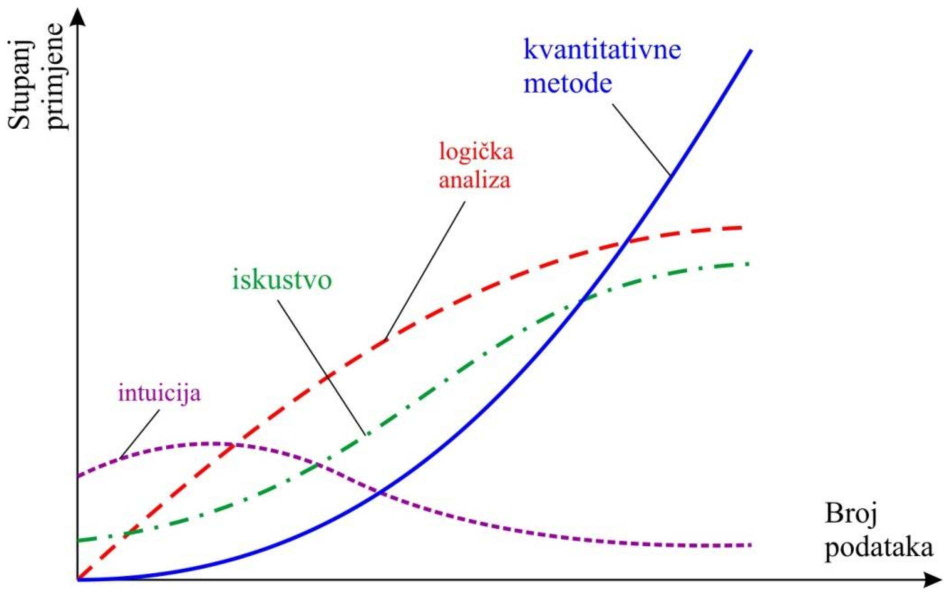
Metoda logičkog zaključivanja (logička analiza) uspoređuje pojedine informacije u svezi sa zadanim problemom i daje prijedlog za njegovo rješenje.

Ako je riječ o problemu s velikim brojem utjecajnih čimbenika koji su s jedne strane promjenljivi, a s druge strane izloženi mnogobrojnim ograničenjima, tada izbor najboljeg rješenja nije moguć bez primjene kvantitativnih metoda, tj. metoda kojima su podatci i informacije opisani brojevima. Te metode omogućuju pronalaženje egzaktnih, kvantitativnih pokazatelja vezanih uz zadani problem.

Kvantitativne metode svrstavaju se u dvije temeljne skupine:

- metode operacijskih istraživanja i klasične parametarske statistike,
- metode višedimenzionalne statističke analize i neparametarske statistike.

Na slici 1.2 dan je grafički prikaz ovisnosti stupnja primjene pojedinog načina donošenja odluka o broju podataka koji definiraju zadani problem.



Slika 1.2. *Ovisnost stupnja primjene načina donošenja odluka o broju podataka* [10]

2. ELEMENTI EXCELOVE „ŠTO-AKO“ ANALIZE

Za analizu rezultata proračuna, ekonomske ili tehničke prirode, MS Excel nudi vrlo učinkovite mogućnosti s pomoću naredaba, odnosno procedura:

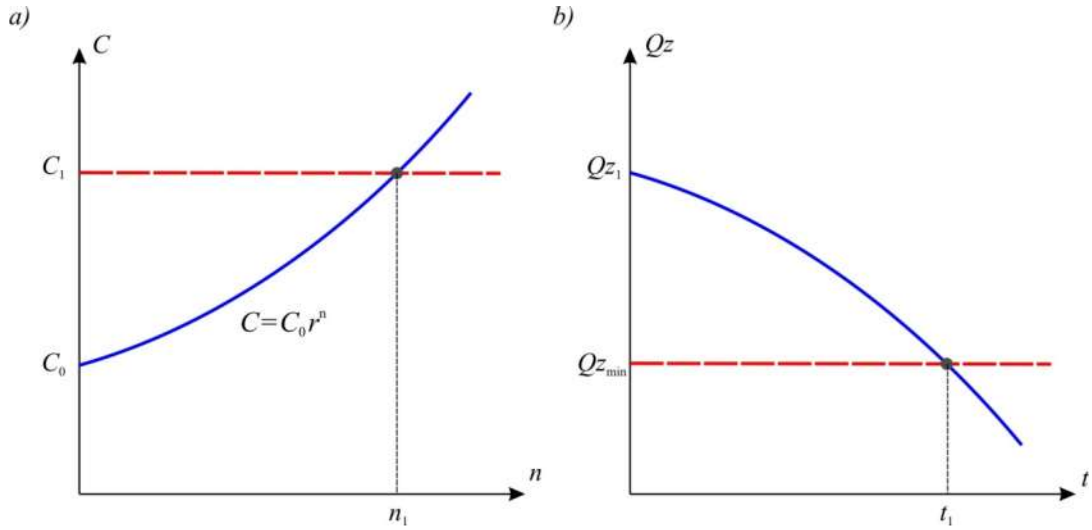
- traženje rješenja (*Goal Seek*),
- podatkovne tablice (*Data Table*),
- scenarij (*Scenario*).

2.1. Traženje rješenja (*Goal Seek*)

Naredba *Goal Seek* pronalazi onu brojčanu vrijednost u ćeliji X za koju će funkcija ili formula u ćeliji Y poprimiti poznati (željeni, ciljani) iznos.

Dakle, u ćeliji X mora biti brojčana vrijednost jer će u suprotnom Excel javiti grešku. U ćeliji Y treba biti funkcija ili formula kojoj rezultat, izravno ili posredno, ovisi o brojčanoj vrijednosti ćelije X.

Na ovaj se način može, na primjer, odrediti nakon kojeg će vremena n_1 ulaganje (štednja) glavnice C_0, uz godišnju kamatu p (pri čemu je kamatni faktor r=1+p), postići vrijednost C_1 ako je ukamaćivanje složeno i dekurzivno (slika 2.1.a) ili kada će količina zaliha Qz nekog repromaterijala dosegnuti minimalnu dopuštenu vrijednost koja osigurava neometano odvijanje proizvodnje (slika 2.1.b).



Slika 2.1. *Moguća primjena naredbe* Goal Seek*: a) primjer ukamaćivanja, b) primjer zaliha.*

Matematičkim jezikom kazano, temeljna zadaća naredbe *Goal Seek* jest pronalaženje točke presjecišta dviju funkcija.

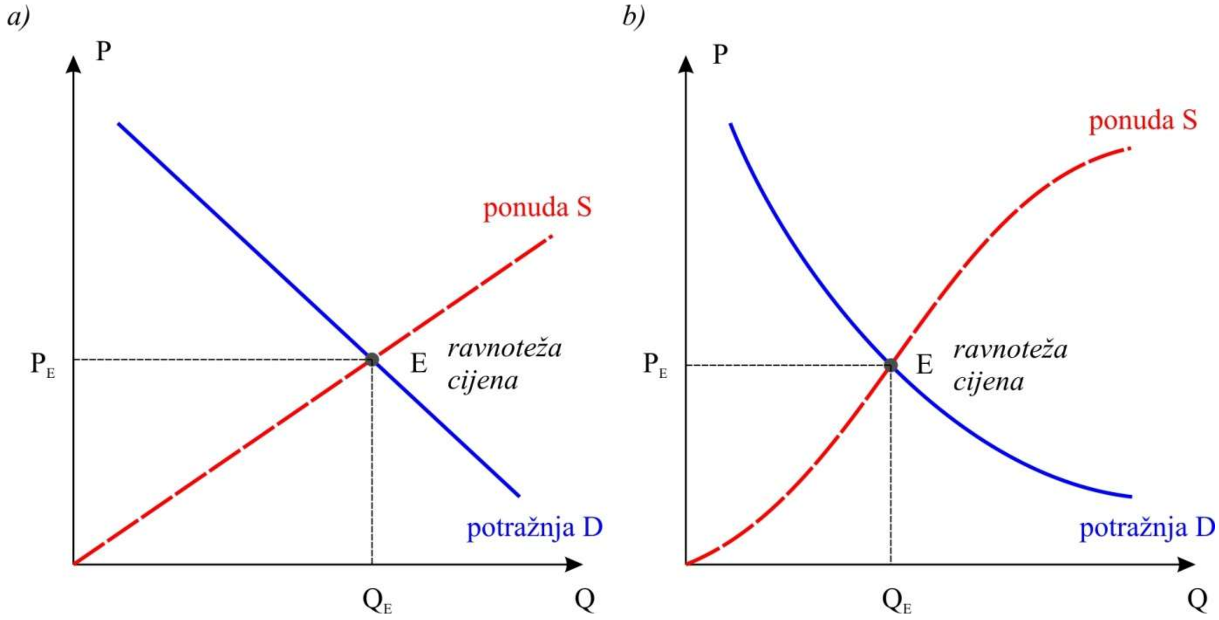
Ako su zadane dvije funkcije:

$$y_1 = f_1(x) \text{ i } y_2 = f_2(x),$$

tada se njihovo presjecište, ukoliko postoji, nalazi iz uvjeta da za $x = x_0$ mora biti

$$y_1(x_0) = y_2(x_0).$$

To se zorno može prikazati na funkcijama ponude i potražnje, odnosno kod problema određivanja ravnoteže cijena.



Slika 2.2. Ravnoteža cijena: *a) krivulje S i D linearne, b) krivulje S i D nelinearne.*

Na slici 2.2.a prikazan je idealizirani slučaj kada su funkcije ponude i potražnje linearne:

$$Q_S = \mathrm{a} + \mathrm{b} \cdot P; \; Q_D = \mathrm{c} - \mathrm{d} \cdot P$$

i kada je jednostavno analitički odrediti ravnotežu cijena kao presjecište pravaca *S* i *D* jer iz uvjeta $Q_S = Q_D$ slijedi:

$$P_E = \frac{\mathrm{c} - \mathrm{a}}{\mathrm{b} + \mathrm{d}}; \quad Q_E = \frac{\mathrm{a} \cdot \mathrm{d} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{c}}{\mathrm{b} + \mathrm{d}}.$$

Primjer 2.1.

Neka je zadana tjedna ponuda S i potražnja D za proizvodom A na području Splita:

$$Q_S = \text{-}100 + 40P; \; Q_D = 150 - 10P.$$

Odrediti analitičkim putem ravnotežu cijena.

Rješenje:

Sukladno gore navedenim oznakama vrijednosti konstanta a, b, c i d su: a=-100; b=40; c=150 i d=10, pa slijedi:

$$P_E = \frac{\mathrm{c} - \mathrm{a}}{\mathrm{b} + \mathrm{d}} = \frac{150 - (-100)}{40 + 10} = \frac{250}{50} = 5; \quad Q_E = \frac{\mathrm{a} \cdot \mathrm{d} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{c}}{\mathrm{b} + \mathrm{d}} = \frac{(-100) \cdot 10 + 40 \cdot 150}{40 + 10} = 100.$$

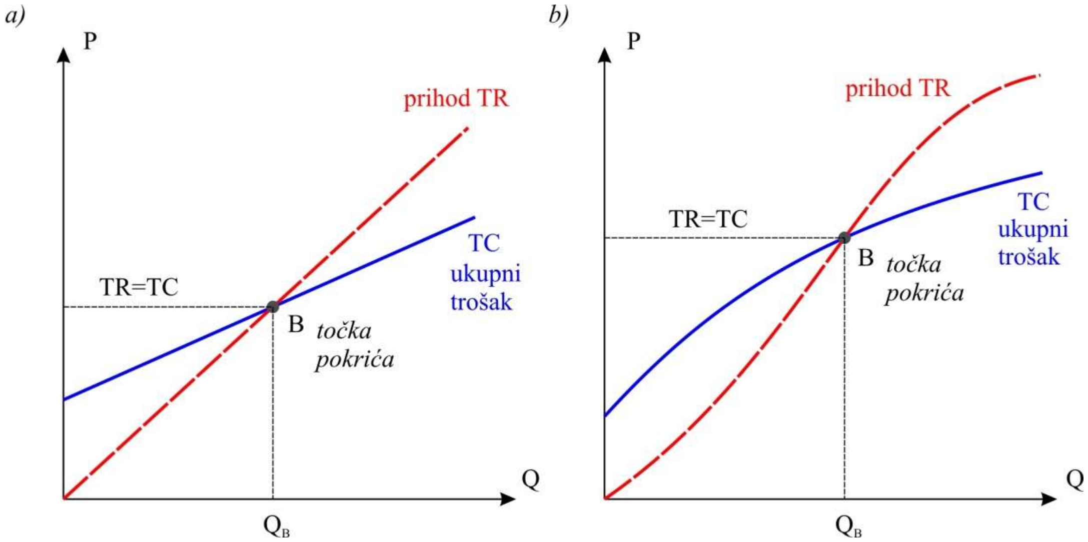
Određivanje ravnoteže cijena može biti puno složenije ako funkcije S i D nisu linearne, kao na slici 2.2.b.

U oba se slučaja može primijeniti naredba *Goal Seek*, i to uvođenjem nove funkcije

$$Q_{nova} = Q_S - Q_D$$

koja u točki ravnoteže cijena (za $P = P_E$) mora biti jednaka nuli.

Na isti se način može rješavati problem pronalaženja točke pokrića (*break even point*) u slučaju funkcija prihoda i troškova (slika 2.3.a – funkcije TR i TC su linearne; slika 2.3.b – funkcije TR i TC su nelinearne).



Slika 2.3. Točka pokrića: *a) krivulje TR i TC linearne, b) krivulje TR i TC nelinearne.*

Postupak primjene naredbe *Goal Seek* je sljedeći:

1. U radnom listu MS Excela postaviti zadatak sa svim potrebnim veličinama i funkcijama/formulama.
2. Kliknuti na ćeliju Y u kojoj je formula rezultat koje treba poprimiti traženu vrijednost (to nije jedini način, ali jest najjednostavniji).
3. Na vrpci izbornika izabrati karticu s alatima ***Data***.

Slika 2.4. *Vrpca s alatima* Data

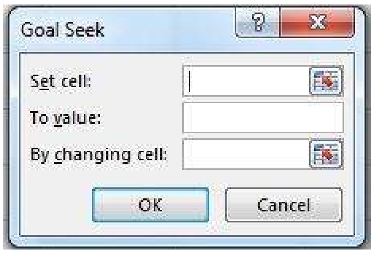
4. Na kartici s alatima ***Data*** kliknuti na alat ***What-If Analysis***.

Slika 2.5. *Ikona izbornika* What-If Analysis

5. Na dobivenom izborniku (slika 2.6) odabrati naredbu ***Goal Seek***.

Slika 2.6. *Mogućnosti izbornika* What-If Analysis.

6. Sada će se pojaviti dijaloški okvir *Goal Seek* prikazan na slici 2.7, a u njegovu polju *Set cell:* adresa ćelije Y (u ovom slučaju B10);
7. U polje *To value:* treba upisati poznatu, odnosno ciljanu vrijednost ćelije Y.
8. U polje *By changing cell:* upisati adresu ćelije X.
9. Klikom na dugme *OK* pokreće se traženje rješenja.



Slika 2.7. *Dijaloški okvir* Goal Seek.

10. Nakon pronalaženja rješenja pojavit će se dijaloški okvir *Goal Seek Status* gdje je potrebno klikom na dugme *OK* prihvatiti dobiveno rješenje ili ga odbaciti klikom na dugme *Cancel*. Ako *Goal Seek* ne može pronaći rješenje, na dijaloškom će se okviru *Goal Seek Status* pojaviti odgovarajuća poruka.

Primjer 2.2.

Odrediti ravnotežu cijena ako je zadana tjedna ponuda S i potražnja D za proizvodom A na području Splita:

$$Q_S = -100 + 20P - 0,5P^2 + 0,05P^3 \,; \qquad Q_D = 300 - 10P - P^2 \,.$$

Rješenje:

U Excelovu radnom listu treba kreirati tablicu prema slici 2.8.

	A	B	C
1	Određivanje ravnoteže cijena		
2			
3	Opis	Oznaka	Iznos
4	Cijena	***P***	
5	Ponuda	Q_S	
6	Potražnja	Q_D	
7			
8	Razlika Q_S i Q_D	Q_r	

Slika 2.8. *Primjer 2.2: Početna tablica.*

U ćeliju C4 upisati početnu (proizvoljno odabranu cijenu) od **3,00 kn**, a potom u ćeliju C5 formulu za izračun ponude **=-100+20*C4-0,5*C4^2+0,05*C4^3**, a u ćeliju C6 formulu za izračun potražnje **=300-10*C4-C4^2**.

U ćeliju C8 treba upisati formulu **=C5-C6**, tj. formulu za izračun razlike količine ponude i količine potražnje.

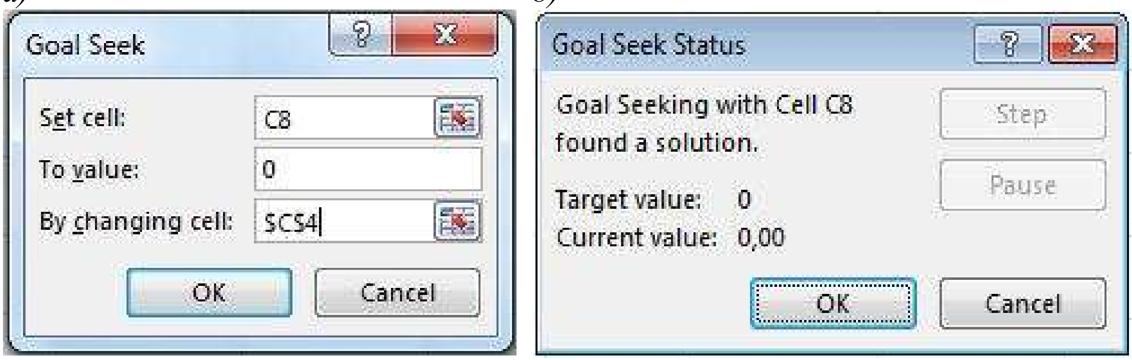
	A	B	C
1	Određivanje ravnoteže cijena		
2			
3	Opis	Oznaka	Iznos
4	Cijena	***P***	3,00 kn
5	Ponuda	Q_S	-43,15
6	Potražnja	Q_D	261,00
7			
8	Razlika Q_S i Q_D	Q_r	**-304,15**

Slika 2.9. *Primjer 2.2: Tablica s izračunanim početnim vrijednostima.*

Ova razlika u točki ravnoteže cijena, u kojoj funkcije ponude i potražnje imaju jednak iznos, mora biti jednaka nuli.

Sada treba kliknuti na ćeliju C8 i izabrati ***Data/What-If Analysis/Goal Seek*** na vrpci izbornika nakon čega će se pojaviti dijaloški okvir *Goal Seek.*

a) *b)*



Slika 2.10. *Primjer 2.2: a) prilagođavanje parametara u dijaloškom okviru* Goal Seek*; b) izvještaj u dijaloškom okviru* Goal Seek Status.

U polje *Set cell*: treba upisati **C8** (ako već nije prikazano), u polje *To value:* upisati **0** (nula), a u polje *By changing cell:* upisati **C4** (ili apsolutnu adresu **$C$4**), kako je to prikazano na slici 2.10.a, a nakon toga kliknuti na dugme *OK* – pojavit će se dijaloški okvir *Goal Seek Status* s porukom da je rješenje pronađeno (slika 2.10.b).

Klikom na dugme *OK* toga dijaloškog okvira završit će se procedura „traženja cilja“ te dobiti rezultat prikazan na slici 2.11.

	A	B	C
1	Određivanje ravnoteže cijena		
2			
3	Opis	Oznaka	Iznos
4	Cijena	***P***	10,00 kn
5	Ponuda	Q_S	100,00
6	Potražnja	Q_D	100,00
7			
8	Razlika Q_S i Q_D	Q_r	**0,00**

Slika 2.11. *Primjer 2.2: Tablica s konačnim rješenjem.*

Dakle, ravnotežna cijena je 10,00 kn, a količine ponude i potražnje su jednake (100).

Primjer 2.3.

Poduzeće Maslina d. o. o. proizvodi ekstra djevičansko maslinovo ulje. Cjelokupnu godišnju proizvodnju proda veletrgovcima po cijeni od 50,00 kn za litru, bez PDV-a.

Godišnji fiksni troškovi poslovanja iznose 82.000,00 kn, dok je trošak prerade i pakiranja jedne litre ulja 18,00 kn.

Potrebno je odrediti:

a) Koliki će biti dobitak/gubitak poduzeća ako godišnje proizvede 1000 litara ulja?
b) Koliko najmanje ulja treba proizvesti da bi poduzeće poslovalo bez gubitka?

Rješenje:

U Excelovu radnom listu kreirati tablicu prikazanu na slici 2.12.

	A	B
1	Analiza poslovanja poduzeća MASLINA d.o.o.	
2	Godišnja proizvodnja (l)	1000
3	Jedinična cijena (kn/l)	50,00 kn
4	Ukupni godišnji prihod (kn)	
5	Trošak prerade i pakiranja po jedinici proizvoda (kn/l)	18,00 kn
6	Ukupni trošak prerade i pakiranja (kn)	
7	Godišnji fiksni troškovi poslovanja (kn)	82.000,00 kn
8	**Rezultat poslovanja (kn)**	

Slika 2.12. *Primjer 2.3: Početna tablica sa zadanim podatcima.*

Za izračun ukupnog godišnjeg prihoda od prodaje ulja, u ćeliju B4 treba upisati formulu **=B2*B3**, dok će se ukupni trošak prerade i pakiranja dobiti unosom formule **=B2*B5** u ćeliju B6. Rezultat poslovanja jest ostvareni prihod umanjen za troškove prerade i pakiranja, te za godišnje fiksne troškove poslovanja, što znači da u ćeliju B8 treba upisati formulu **=B4-B6-B7**, nakon čega će tablica poprimiti izgled prikazan na slici 2.13.

	A	B
1	Analiza poslovanja poduzeća MASLINA d.o.o.	
2	Godišnja proizvodnja (l)	1000
3	Jedinična cijena (kn/l)	50,00 kn
4	Ukupni godišnji prihod (kn)	50.000,00 kn
5	Trošak prerade i pakiranja po jedinici proizvoda (kn/l)	18,00 kn
6	Ukupni trošak prerade i pakiranja (kn)	18.000,00 kn
7	Godišnji fiksni troškovi poslovanja (kn)	82.000,00 kn
8	**Rezultat poslovanja (kn)**	**- 50.000,00 kn**

Slika 2.13. *Primjer 2.3: Tablica s izračunanim početnim rješenjem.*

Na ovaj je način dobiven odgovor na pitanje pod a): Maslina d. o. o. posluje s gubitkom koji iznosi 50.000,00 kn.

Za određivanje količine ulja koju treba proizvesti da bi se poslovalo bez gubitka ("na pozitivnoj nuli") koristit će se naredba *Goal Seek*: treba kliknuti na ćeliju B8 i zatim odabrati ***Data/What-If Analysis/Goal Seek*** na vrpci izbornika.

U polje *To value:* treba upisati 0 (nulu), a u polje *By changing cell:* **B2** (rješenje se traži mijenjanjem količine proizvedenog ulja).

Klikom na dugme *OK* dijaloškog okvira *Goal Seek* pokrenut će se traženje rješenja, a nakon pronalaženja rješenja pojavit će se dijaloški okvir *Goal Seek Status* u kojem je obavijest da je pronađeno rješenje, te da trenutačna vrijednost u ćeliji B8 (0,00) odgovara ciljanoj (0). Rješenje se prihvaća klikom na dugme *OK*.

	A	B
1	Analiza poslovanja poduzeća MASLINA d.o.o.	
2	Godišnja proizvodnja (l)	2562,5
3	Jedinična cijena (kn/l)	50,00 kn
4	Ukupni godišnji prihod (kn)	128.125,00 kn
5	Trošak prerade i pakiranja po jedinici proizvoda (kn/l)	18,00 kn
6	Ukupni trošak prerade i pakiranja (kn)	46.125,00 kn
7	Godišnji fiksni troškovi poslovanja (kn)	82.000,00 kn
8	**Rezultat poslovanja (kn)**	**- kn**

Slika 2.14. *Primjer 2.3: Tablica s konačnim rješenjem.*

Dobivene vrijednosti analize poslovanja Masline d. o. o. prikazane su u tablici na slici 2.14 odakle slijedi da će Maslina d. o. o. poslovati bez gubitka ako godišnje proizvede najmanje 2562,5 litara maslinova ulja.

Kako Maslina d. o. o. pakira maslinovo ulje samo u boce od jedne litre, konačno se može kazati da je za poslovanje bez gubitaka potrebno proizvesti **2563** litre ulja (rješenje zadatka mora biti cjelobrojno).

Primjer 2.4.

Osoba A odlučila je kupiti automobil. U tu svrhu osigurala je učešće u gotovini u iznosu od 25.000,00 kn. Ostatak novca namaknut će iz kredita na rok od 5 godina uz kamatu od 7,5 % godišnje. Kredit će otplaćivati jednakim anuitetima krajem svakog mjeseca, a obračun anuiteta se vrši po relativnoj kamatnoj stopi. Najveći iznos koji mjesečno može izdvojiti iz svojih prihoda za servisiranje kredita jest 1.500,00 kn. Kolika je najveća vrijednost automobila koji osoba A može kupiti na ovaj način?

Rješenje:

U Excelovu radnom listu potrebno je kreirati tablicu (slika 2.15), pretpostavljajući da je ukupna cijena koštanja automobila npr. 70.000,00 kn:

	A	B
1	Kupnja automobila - analiza	
2	Ukupna cijena koštanja automobila	70.000,00 kn
3	Iznos plaćanja u gotovini	25.000,00 kn
4	Potreban iznos kredita	
5	Godišnja kamatna stopa	8%
6	Mjesečna kamatna stopa	
7	Broj otplatnih rata	60,00
8	**Iznos mjesečnog anuiteta**	

Slika 2.15. *Primjer 2.4: Tablica s početnim zadanim i pretpostavljenim podatcima.*

Kako je potreban iznos kredita jednak razlici ukupne cijene i iznosa plaćanja u gotovini, u ćeliju B4 treba upisati formulu **=B2-B3**.

Mjesečna relativna kamatna stopa dobije se dijeljenjem godišnje s 12, što znači da u ćeliju B6 treba upisati **=B5/12**.

Iznos mjesečnog anuiteta dobije se pomoću Excelove funkcije PMT, odnosno upisivanjem **=PMT(B6;B7;-B4)** u ćeliju B8. Kako je plaćanje krajem mjeseca, ostale parametre funkcije PMT ne treba upisivati jer se podrazumijevaju. Predznak uz **B4** je negativan jer taj iznos predstavlja zaduženje kupca.

U ćeliji B8 dobije se da je uz pretpostavljenu cijenu automobila mjesečna rata 901,71 kn, što znači da je kupac u mogućnosti kupiti skuplji automobil.

Nadalje, treba kliknuti na ćeliju B8 i odabrati ***Data/What-If Analysis/Goal Seek*** na vrpci izbornika.

U polje *To value:* treba upisati 1500,00 (jer je to najveći iznos rate kredita koji kupac može uredno servisirati), a u polje *By changing cell:* upisati B2.

Klikom na dugme *OK* započet će traženje rješenja, a zatim će se pojaviti dijaloški okvir *Goal Seek Status* gdje se klikom na dugme *OK* prihvati rješenje jer postignuta vrijednost u ćeliji B8 odgovara ciljanoj.

Konačno, može se zaključiti da je najveća cijena automobila koju može platiti kupac u zadanim uvjetima 99.857,96 kn.

Primjer 2.5.

Trgovina na malo nabavila je od proizvođača duhanskih proizvoda veći broj paketića cigareta Marlboro Flavor čija je maloprodajna cijena 26 kuna po paketiću. Proizvođač odobrava kupcu rabat od 8 % na maloprodajnu cijenu.

Izraditi kalkulaciju cijene trgovine na malo. Kolika je razlika u cijeni? Koliki bi trebao biti rabat proizvođača pa da razlika u cijeni bude točno dvije kune?

Rješenje:

U Excelovu radnom listu treba najprije kreirati tablicu prikazanu na slici 2.16.

	A	B
1	Kalkulacija cijene paketića cigareta	
2		
3	Maloprodajna cijena	26,00 kn
4	Rabat u %	8%
5	Iznos rabata	
6		
7	Fakturna cijena s PDV-om (za platiti)	
8	PDV u %	25,00%
9	Iznos PDV-a	
10	Nabavna cijena bez PDV-a	
11		
12	Maloprodajna cijena bez PDV-a	
13	Iznos PDV-a u maloprodajnoj cijeni	
14	**Razlika u cijeni**	

Slika 2.16. *Primjer 2.5: Tablica s početnim (zadanim) podatcima.*

U ćeliju B5 potrebno je upisati formulu **=B3*B4** kako bi se izračunao iznos rabata, nakon čega je moguće izračunati fakturnu cijenu proizvođača (s uključenim PDV-om) unosom formule **=B3-B5** u ćeliju B7.

Iznos PDV-a u fakturnoj cijeni određuje se uz pomoć izraza

$$IznosPDV = FakturnaCijena \cdot \frac{PDV\%}{1 + PDV\%}$$

što znači da u ćeliju B9 treba upisati formulu **=B7*B8/(1+B8)**, nakon čega slijedi izračun nabavne cijene bez PDV-a unosom formule **=B7-B9** u ćeliju B10.

Neto maloprodajna cijena (cijena bez PDV-a) određuje se uz pomoć izraza

$$NetoMaloprodajnaCijena = \frac{MaloprodajnaCijena}{1 + PDV\%}$$

što znači da u ćeliju B12 treba upisati formulu **=B3/(1+B8)**, nakon čega slijedi izračun iznosa PDV-a u maloprodajnoj cijeni unosom formule **=B3-B12** u ćeliju B13.

Konačno, razlika u cijeni trgovca na malo je razlika između maloprodajne cijene bez PDV-a i nabavne cijene, što znači da u ćeliju B14 treba upisati formulu **=B15-B10**, te se dobije da je razlika u cijeni 1,66 kuna (slika 2.17.a).

a)

	A	B
1	Kalkulacija cijene paketića cigareta	
2		
3	Maloprodajna cijena	26,00 kn
4	Rabat u %	8%
5	Iznos rabata	2,08 kn
6		
7	Fakturna cijena s PDV-om (za platiti)	23,92 kn
8	PDV u %	25,00%
9	Iznos PDV-a	4,78 kn
10	Nabavna cijena bez PDV-a	19,14 kn
11		
12	Maloprodajna cijena bez PDV-a	20,80 kn
13	Iznos PDV-a u maloprodajnoj cijeni	5,20 kn
14	**Razlika u cijeni**	**1,66 kn**

b)

	A	B
1	Kalkulacija cijene paketića cigareta	
2		
3	Maloprodajna cijena	26,00 kn
4	Rabat u %	9,62%
5	Iznos rabata	2,50 kn
6		
7	Fakturna cijena s PDV-om (za platiti)	23,50 kn
8	PDV u %	25,00%
9	Iznos PDV-a	4,70 kn
10	Nabavna cijena bez PDV-a	18,80 kn
11		
12	Maloprodajna cijena bez PDV-a	20,80 kn
13	Iznos PDV-a u maloprodajnoj cijeni	5,20 kn
14	**Razlika u cijeni**	**2,00 kn**

Slika 2.17. *Primjer 2.5: a) izračun RUC-a sa zadanim početnim podatcima; b) rješenje za traženi RUC od 2,00 kn.*

Za izračun potrebnog rabata koji će rezultirati razlikom u cijeni od 2 kn treba kliknuti na ćeliju B14 pa odabrati *Data/What-If Analysis/Goal Seek* na vrpci izbornika.

U polje *To value:* dijaloškog okvira *Goal Seek* treba upisati 2 (željena razlika u cijeni u kunama), a u polje *By changing cell:* adresu ćelije u kojoj je rabat u %, dakle B4, pa zatim kliknuti na dugme *OK*.

Dobiveno rješenje (slika 2.17.b) pokazuje da će trgovac imati razliku u cijeni u iznosu od 2 kune ako mu proizvođač da rabat od 9,62 % na maloprodajnu cijenu paketića.

Primjer 2.6.

Učeniku Fisku Fiziću zaključene su ocjene iz sedam od osam predmeta, kako je to prikazano u tablici 2.1.

Koju najmanju ocjenu treba dobiti iz predmeta Matematika pa da prođe s vrlo dobrim uspjehom (tj. da ostvari prosjek barem 3,5)?

Tablica 2.1 *Prikaz Fiskovih ocjena.*

Predmet	**Ocjena**
Hrvatski jezik	2
Engleski jezik	3
Povijest	3
Matematika	
Biologija	3
Zemljopis	3
Tjelesni	5
Glazbeni	5
Prosjek:	

Rješenje:

U Excelovu radnom listu treba kreirati tablicu prema zadanoj, pretpostavljajući bilo koju ocjenu iz Matematike, npr. 2, a zatim u ćeliju B11 upisati **=AVERAGE(B3:B10)**. Dobit će se da je prosjek ocjena 3,25 (slika 2.18).

	A	B
1	Svjedodžba učenika Fiska Fizića	
2	Predmet	Ocjena
3	Hrvatski jezik	2
4	Engleski jezik	3
5	Povijest	3
6	Matematika	2
7	Biologija	3
8	Zemljopis	3
9	Tjelesni	5
10	Glazbeni	5
11	**Prosjek**	**3,25**

Slika 2.18. *Primjer 2.6: Prosjek ocjena s pretpostavljenom ocjenom (2) iz Matematike.*

Sada treba odabrati *Data/What-If Analysis/Goal Seek* na vrpci izbornika.

U polje *Set cell:* dijaloškog okvira *Goal Seek* upisati B11 (ćelija u kojoj se računa prosjek) , u polje *To value:* upisati zatim 3,5 (minimalni potrebni prosjek ocjena), a u polje *By changing cell:* adresu ćelije u kojoj je ocjena iz matematike, dakle B6, pa zatim kliknuti na dugme *OK*.

Dobiveno rješenje pokazuje da Fisko iz Matematike treba dobiti ocjenu 4 da ostvari prosjek 3,50.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 2_01:

Fiksni troškovi proizvođača iznose FC=1.190.000,00 kuna, a varijabilni mu se troškovi mijenjaju prema zakonu

$$VC = 115 \cdot Q - 10,5 \cdot Q^{0,2},$$

dok je njegov ukupni prihod

$$TR = 300 \cdot Q + 0,5 \cdot Q^{0,35},$$

gdje je Q količina proizvoda. Odrediti točku pokrića ($Q_B = ?$).

Odgovor: Točka pokrića je $Q_B = 6.432$ (količina za koju je $TR = TC = FC + VC$).

Zadatak 2_02:

Investitor je istoga dana uložio 81.800,00 kuna u rizični fond gdje je očekivani prinos 13 % godišnje i 120.000,00 kn u državne obveznice gdje je očekivani prinos 6 % godišnje.

Nakon koliko će se godina ukupni iznosi (glavnica + prinosi) u rizičnom fondu i u državnim obveznicama izjednačiti ako je ukamaćivanje složeno?

Odgovor: Ukupni će se iznosi izjednačiti nakon 5,99 (okruglo 6) godina.

Zadatak 2_03:

Trgovac na malo nabavlja od dobavljača bonove mobilnog operatera čija je maloprodajna cijena 100 kuna. Dobavljač trgovcu odobrava rabat od 12 % na maloprodajnu cijenu.

a) Izračunati neto fakturnu vrijednost bona i razliku u cijeni trgovca.
b) Koliki bi trebao biti rabat na prodajnu cijenu da razlika u cijeni trgovca bude 10 kn?

Odgovor:

a) Neto fakturna cijena bona je 70,40 kn, a razlika u cijeni trgovca je 9,60 kn.
b) Razlika u cijeni trgovca bit će 10 kn ako mu dobavljač odobri rabat od 12,5 %.

Zadatak 2_04:

Lanac trgovina na malo nabavio je od dobavljača 4000 kutija praška za pranje posuđa. Račun R-1 dobavljača glasi na 200.000,00 kuna s uključenim PDV-om od 25 %. Dobavljač trgovcu odobrava rabat od 10 % na fakturnu cijenu (bez PDV-a). Troškovi prijevoza iznose 4.000,00 kuna (bez PDV-a), a troškovi atestiranja 1.200,00 kuna (s uključenim PDV-om).

Razlika u cijeni koju lanac trgovina obračunava je 25 % nabavne cijene robe.

a) Napraviti kalkulaciju maloprodajne cijene za 1 kutiju praška.
b) Za koju će razliku u cijeni (u %) maloprodajna cijena kutije praška biti 65,00 kuna?

Odgovor:

a) Maloprodajna cijena kutije praška (s PDV-om) je 58,19 kuna.
b) Razlika u cijeni trgovca mora biti 39,63 % da bi MPC (s PDV-om) bio 65,00 kuna.

Zadatak 2_05:

Trgovac na malo nabavlja od dobavljača 300 kg jabuka i 120 kg krušaka. Poznato je da račun dobavljača za robu iznosi 1.500,00 kuna (bez PDV-a), pri čemu je cijena krušaka 5,00 kuna po kilogramu (bez PDV-a). Račun prijevoznika iznosi 210,00 kuna (također bez PDV-a).

Trgovac zaračunava maržu od 20 % na nabavne cijene i jabuka i krušaka.

a) Napraviti kalkulaciju prodajne cijene po kilogramu jabuka odnosno krušaka, bez PDV-a i s PDV-om, ako se trgovac u raspodjeli troškova transporta koristi težinskom metodom. Za izračun koristiti tablicu oblika prikazanoga na slici 2.Z.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Red. br.	Naziv	Jedinica mjere	Količina	Fakturna cijena (bez PDV-a)	Fakturna cijena po kg (bez PDV-a)	Cijena transporta	Cijena transporta po kg	Nabavna cijena po kg (bez PDV-a)	Marža %	Iznos marže po kg	Prodajna cijena po kg (bez PDV-a)	PDV %	Iznos PDV-a po kg	Maloprodajna cijena po kg
2	1.	Jabuke	kg	300									25%		
3	2.	Kruške	kg	120		5,00 kn							25%		
4		**Ukupno:**			**1.500,00 kn**		**210,00 kn**								

Slika 2.Z.1. *Zadatak 2_05: Izgled tablice za kalkulaciju maloprodajnih cijena.*

b) Primjenom naredbe *Goal Seek* odrediti zatim kolika bi trebala biti marža trgovca na nabavnu cijenu jabuka odnosno krušaka ako jabuke želi prodavati po cijeni od 5 kn po kilogramu, a kruške po cijeni od 9,00 kn po kilogramu (sve s uključenim PDV-om).

Odgovor:

a) Prodajna cijena jabuka je 5,25 kn, a krušaka 8,25 kn po kilogramu.
b) Tražena marža iznosi 14,3 % na jabuke, a 30,9 % na kruške.

Zadatak 2_06:

Zadana je funkcija ponude S i funkcija potražnje D za proizvodom A.

$$Q_S = 1400 \cdot P + 1,5 \cdot P^{2,2}; \qquad Q_D = 300.000 - 50 \cdot P^{1,2} - 0,05 \cdot P^3,$$

gdje je P cijena proizvoda. Potrebno je:

a) Odrediti ravnotežnu cijenu proizvoda A.
b) Kod koje će cijene proizvoda A potražnja biti dvostruko veća od ponude?

Odgovor:

a) Ravnotežna cijena proizvoda A, tj. cijena pri kojoj je ponuda jednaka potražnji je 114,30 kn.
b) Cijena proizvoda pri kojoj će potražnja biti dvostruko veća od ponude je 78,96 kn.

2.2. Podatkovne tablice (*Data Table*)

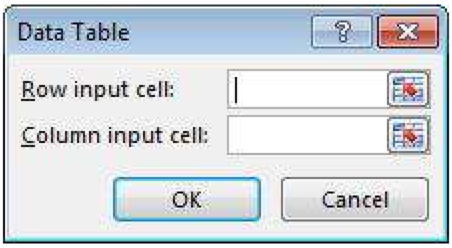
Data table jest raspon ćelija u radnom listu MS Excela koje prikazuju korisniku kako promjena vrijednosti jedne ili dviju varijabla, koje su argumenti neke funkcije odnosno formule, utječe na konačan rezultat koji daje ta funkcija, odnosno formula.

2.2.1. Podatkovna tablica s jednom varijablom

Podatkovna tablica s jednom varijablom koristi se kada se želi vidjeti kako će različite vrijednosti jedne varijable u jednoj ili više formula utjecati na promjenu rezultata te jedne ili više tih formula. Razlikuju se pritom podatkovne tablice s jednom varijablom orijentirane na redak (ako se vrijednosti varijable koja se mijenja nalaze u jednom retku), odnosno orijentirane na stupac (ako se vrijednosti varijable koja se mijenja nalaze u jednom stupcu).

Da bi se kreirala podatkovna tablica s jednom varijablom orijentirana na stupac, potrebno je:

1. U radnom listu MS Excela postaviti zadatak sa svim potrebnim veličinama i funkcijama/formulama.
2. U odabranom stupcu unijeti sve vrijednosti varijable koja se mijenja.
3. U ćeliji smještenoj redak iznad i stupac desno od stupca u kojem su unijete vrijednosti varijable koja se mijenja treba upisati formulu kojoj se analizira konačan rezultat.
4. Ako se istražuje utjecaj odabrane varijable na rezultat više formula, tada se svaka sljedeća formula dodaje u ćeliju desno od prethodno unijete formule.
5. Odabrati raspon ćelija koji obuhvaća sve formule čiji se rezultat analizira i sve vrijednosti varijable koja se mijenja.
6. Odabrati ***Data/What-If Analysis/Data Table*** na vrpci izbornika pa na dobivenom dijaloškom okviru *Data Table*



Slika 2.19. *Dijaloški okvir* Data Table.

   u polje *Column input cell:* upisati adresu ćelije u kojoj se nalazi početna vrijednost varijable koja se mijenja (u postavljanju zadatka pod točkom 1).
7. Kliknuti na dugme *OK* dijaloškog okvira *Data Table*.

Da bi se kreirala podatkovna tablica s jednom varijablom orijentirana na redak, potrebno je:

1. U radnom listu MS Excela postaviti zadatak sa svim potrebnim veličinama i funkcijama/formulama.
2. U odabranom retku unijeti sve vrijednosti varijable koja se mijenja.
3. U ćeliji smještenoj stupac lijevo i redak ispod retka u kojem su unijete vrijednosti varijable koja se mijenja treba upisati formulu kojoj se analizira konačan rezultat.

4. Ako se istražuje utjecaj odabrane varijable na rezultat više formula, tada se svaka sljedeća formula dodaje u ćeliju ispod prethodno unijete formule.
5. Odabrati raspon ćelija koji obuhvaća sve formule čiji se rezultat analizira i sve vrijednosti varijable koja se mijenja.
6. Odabrati ***Data/What-If Analysis/Data Table*** na vrpci izbornika pa na dobivenom dijaloškom okviru *Data Table* u polje *Row input cell:* upisati adresu ćelije u kojoj se nalazi početna vrijednost varijable koja se mijenja (u zadatku pod točkom 1).
7. Kliknuti na dugme *OK* dijaloškog okvira *Data Table*.

Primjer 2.7.

Poduzeće Veritas d. o. o. proizvodi vrhunsko vino Pl@vac. Cjelokupnu godišnju proizvodnju (5000 boca od 0,7 litara) proda kupcima po cijeni od 45,00 kn (bez PDV-a) po boci. Godišnji fiksni troškovi poslovanja iznose 144.000,00 kn, dok je trošak prerade, pakiranja i distribucije jedne boce vina 17,50 kn.

Sastaviti podatkovnu tablicu koja će pokazati kako se mijenja rezultat poslovanja Veritasa d. o. o. promjenom količine proizvedenog vina, u rasponu od 4500 boca do 8000 boca, s prirastom od 250 boca.

Rješenje:

U Excelovu radnom listu treba kreirati tablicu prikazanu na slici 2.20.

	A	B
1	**Analiza poslovanja poduzeća VERITAS d.o.o.**	
2	Godišnja proizvodnja (kom)	5000
3	Jedinična cijena (kn/kom)	45,00 kn
4	Ukupni godišnji prihod (kn)	
5	Trošak prerade i pakiranja po komadu (kn/kom)	17,50 kn
6	Ukupni trošak pakiranja (kn)	
7	Godišnji fiksni troškovi poslovanja (kn)	144.000,00 kn
8	**Rezultat poslovanja (kn)**	

Slika 2.20. *Primjer 2.7: Početna tablica sa zadanim vrijednostima.*

Za zadanu godišnju proizvodnju ukupni godišnji prihod će se dobiti unošenjem formule **=B2*B3** u ćeliju B4, a ukupni trošak pakiranja unošenjem formule **=B2*B5** u ćeliju B6.

Unosom formule **=B4-B6-B7** u ćeliju B8 dobit će se rezultat poslovanja za pretpostavljenu količinu proizvodnje: Veritas d. o. o. posluje s gubitkom od 6.500 kn.

Kreiranje podatkovne tablice započinje unosom zadanog raspona količina u stupac D: u ćeliju D10 treba upisati 4500 (donja granica raspona), u ćeliju D11 4750.

Označiti ćelije D10 i D11 pa povlačenjem križića u donjem desnom kutu kreirati niz količina do 8000 (gornja granica raspona).

U ćeliju E9, koja se nalazi redak iznad i stupac desno od kreiranog niza količina, treba upisati **=B8** (isti bi se rezultat dobio upisivanjem formule **=B4-B6-B7** u E9).

Ćelije E9 do E24 treba uvjetno oblikovati tako da u slučaju poslovanja s gubitkom (rezultat poslovanja negativan) ispis rezultata bude podebljanim crvenim brojevima.

Označiti sada raspon ćelija D9:E24 pa odabrati ***Data/What-If Analysis/Data Table*** na vrpci izbornika – pojavit će se dijaloški okvir *Data Table*.

Kako je podatkovna tablica koja se kreira orijentirana na stupac, treba u polje *Column input cell:* upisati **B2** (adresa ćelije koju posredno ili neposredno koristi formula u ćeliji E9) i pritisnuti na dugme *OK*.

Konačni rezultat prikazan je na slici 2.21.

	A	B	C	D	E
1	**Analiza poslovanja poduzeća VERITAS d.o.o.**				
2	Godišnja proizvodnja (kom)	5000			
3	Jedinična cijena (kn/kom)	45,00 kn			
4	Ukupni godišnji prihod (kn)	225.000,00 kn			
5	Trošak prerade i pakiranja po komadu (kn/kom)	17,50 kn			
6	Ukupni trošak pakiranja (kn)	87.500,00 kn			
7	Godišnji fiksni troškovi poslovanja (kn)	144.000,00 kn			
8	**Rezultat poslovanja (kn)**	**-6.500,00 kn**			
9					
10				Godišnja proizvodnja	Rezultat poslovanja
11					-6.500,00 kn
12				4500	-20.250,00 kn
13				4750	-13.375,00 kn
14				5000	-6.500,00 kn
15				5250	375,00 kn
16				5500	7.250,00 kn
17				5750	14.125,00 kn
18				6000	21.000,00 kn
19				6250	27.875,00 kn
20				6500	34.750,00 kn
21				6750	41.625,00 kn
22				7000	48.500,00 kn
23				7250	55.375,00 kn
24				7500	62.250,00 kn
25				7750	69.125,00 kn
26				8000	76.000,00 kn

Slika 2.21. *Primjer 2.7: Tablica s konačnim izračunom i tražena podatkovna tablica s jednom varijablom.*

Primjer 2.8.

Konoba "Marenda" nabavlja vrhunsko vino Pl@vac od 0,7 l po cijeni od 45,00 kn po boci. Ugostitelj na tu cijenu obračunava maržu u iznosu od 120 %.

Ako je porez na dodanu vrijednost 13 %, a porez na potrošnju 3 % (obračunava se na prodajnu cijenu bez PDV-a), izračunati prodajnu cijenu vina s porezom.

Kolika je marža ugostitelja ako prodajnu cijenu vina s porezom zaokruži na 120 kn?
Uz pomoć podatkovne tablice izračunati kako će se mijenjati prodajna cijena s porezom ako je marža 100 %, 110 %, 120 %, ... , 200 %. Koliki će biti iznos PDV-a, a koliki poreza na potrošnju u svim tim slučajevima?

Rješenje:

Najprije treba u Excelovu radnom listu kreirati sljedeću tablicu (slika 2.22).

	A	B	C
1	**Konoba "Marenda"** Kalkulacija cijene vina Pl@vac		
2		Postotak	Iznos
3	Nabavna cijena		45,00 kn
4	Marža	120,00%	
5	Prodajna cijena bez poreza		
6	Porez na dodatnu vrijednost	25%	
7	Porez na potrošnju	3%	
8	**Prodajna cijena s porezom**		

Slika 2.22. *Primjer 2.8: Početna tablica sa zadanim vrijednostima.*

Iznos marže dobit će se unosom formule **=C3*B4** u ćeliju C4, prodajna cijena bez poreza unosom formule **=SUM(C3:C4)** u ćeliju C5, iznos poreza na dodanu vrijednost unosom formule **=C5*B6** u ćeliju C6, a iznos poreza na potrošnju unosom formule **=C5*B7** u ćeliju C7.
Za dobivanje prodajne cijene s porezom potrebno je zbrojiti prodajnu cijenu bez poreza s porezima: na dodanu vrijednost i na potrošnju, dakle unosom formule **=SUM(C5:C7)** u ćeliju C8. Konačni izgled tablice prikazan je na slici 2.23.

	A	B	C
1	**Konoba "Marenda"** Kalkulacija cijene vina Pl@vac		
2		Postotak	Iznos
3	Nabavna cijena		45,00 kn
4	Marža	120,00%	54,00 kn
5	Prodajna cijena bez poreza		99,00 kn
6	Porez na dodatnu vrijednost	25%	24,75 kn
7	Porez na potrošnju	3%	2,97 kn
8	**Prodajna cijena s porezom**		**126,72 kn**

Slika 2.23. *Primjer 2.8: Izračun prodajne cijene s porezom za zadane veličine.*

Da bi se odredilo kolika je marža ako ugostitelj zaokruži cijenu vina s porezom na 120 kn, treba kliknuti na ćeliju C8 (u kojoj je formula čiji je rezultat prodajna cijena vina s porezom) i odabrati *Data/What-If Analysis/Goal Seek* na vrpci izbornika.

U polju *Set cell:* već jest adresa ćelije (**C8**) pa u polje *To value:* treba upisati **120**, a u polje *By changing cell:* treba upisati **B4** (adresa ćelije u kojoj je marža ugostitelja izražena u postotcima).

Klikom na dugme *OK* dijaloškog okvira *Goal Seek* pa na dugme *OK* dijaloškog okvira *Goal Seek Status*, koji će se nakon toga pojaviti, dolazi se do tražene marže. Dakle, ako ugostitelj zaokruži prodajnu cijenu vina s porezom na 120,00 kn, njegova će marža iznositi 108,33 % (slika 2.24).

Prodajna cijena vina s porezom, iznos PDV-a i iznos poreza na potrošnju, za različite iznose marže, dobit će se uz pomoć podatkovne tablice. Stoga najprije treba kreirati zadani niz marži za koje se želi izračunati navedene veličine.

U ćeliju D13 treba upisati 100 %, u ćeliju D14 110 %, označiti obje te ćelije pa povlačenjem križića u donjem desnom kutu kreirati zadani niz (do 200 %).

U ćeliju E12 upisati formulu **=C8** (ćelija u kojoj je formula pomoću koje se izračunava prodajna cijena s porezom).

U ćeliju F12 upisati formulu **=C6**, a u ćeliju G12 formulu **=C7** (adrese ćelija u kojima se izračunava porez na dodanu vrijednost, odnosno porez na potrošnju).

Označiti zatim raspon ćelija D12:G23, odabrati *Data/What-If Analysis/Data Table* na vrpci izbornika pa u polje *Column input cell:* upisati B4 (adresa ćelije u kojoj je marža u %) i kliknuti na dugme *OK*. Konačni rezultat prikazan je na slici 2.24.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Konoba "Marenda"** Kalkulacija cijene vina Pl@vac						
2		Postotak	Iznos				
3	Nabavna cijena		45,00 kn				
4	Marža	108,33%	48,75 kn				
5	Prodajna cijena bez poreza		93,75 kn				
6	Porez na dodatnu vrijednost	25%	23,44 kn				
7	Porez na potrošnju	3%	2,81 kn				
8	**Prodajna cijena s porezom**		**120,00 kn**				
9							
10							
11				Marža	MPC	PDV	PP
12					120,00 kn	23,44 kn	2,81 kn
13				100%	115,20 kn	22,50 kn	2,70 kn
14				110%	120,96 kn	23,63 kn	2,84 kn
15				120%	126,72 kn	24,75 kn	2,97 kn
16				130%	132,48 kn	25,88 kn	3,11 kn
17				140%	138,24 kn	27,00 kn	3,24 kn
18				150%	144,00 kn	28,13 kn	3,38 kn
19				160%	149,76 kn	29,25 kn	3,51 kn
20				170%	155,52 kn	30,38 kn	3,65 kn
21				180%	161,28 kn	31,50 kn	3,78 kn
22				190%	167,04 kn	32,63 kn	3,92 kn
23				200%	172,80 kn	33,75 kn	4,05 kn

Slika 2.24. *Primjer 2.8: Tražena podatkovna tablica s jednom varijablom i više razmatranih izlaznih veličina.*

2.2.2. Podatkovna tablica s dvije varijable

Podatkovna tablica s dvije varijable koristi se kada se želi vidjeti kako će različite vrijednosti dviju varijabla u jednoj (samo jednoj) formuli utjecati na promjenu rezultata te formule.

Da bi se kreirala podatkovna tablica s dvije varijable, potrebno je:

1. U radnom listu MS Excela postaviti zadatak sa svim potrebnim veličinama i formulama.
2. U odabranu ćeliju (koja će predstavljati gornji lijevi kut podatkovne tablice) upiše se formula po kojoj se izračunava veličina čiju promjenu analiziramo ili adresa ćelije u kojoj se ta formula nalazi.
3. Vrijednosti jedne od varijabla koje se mijenjaju treba smjestiti u ćelije stupca ispod ćelije s formulom, a vrijednosti druge od varijabla koje se mijenjaju do ćelije s formulom tako da je ćelija s formulom presjecište retka i stupca s vrijednostima varijabla.
4. Odabrati raspon ćelija koji obuhvaća sve formule čiji se rezultat analizira i sve vrijednosti obiju varijabla koje se mijenjaju.
5. Odabrati ***Data/What-If Analysis/Data Table*** na vrpci izbornika pa na dobivenom dijaloškom okviru *Data Table* u polje *Row input cell:* upisati adresu ćelije u kojoj se nalazi početna vrijednost varijable smještene u redak tablice, a u polje *Column input cell:* upisati adresu ćelije u kojoj se nalazi početna vrijednost varijable smještene u stupac tablice.
6. Kliknuti na dugme *OK* dijaloškog okvira *Data Table*.

Primjer 2.9.

Kupac kupuje stan vrijednosti 650.000,00 kn. Cjelokupni iznos osigurava bankovnim kreditom. Kredit je uzeo na rok od 20 godina uz godišnju kamatu od 6,75 %, a otplaćuje ga u jednakim mjesečnim anuitetima krajem mjeseca.

Odrediti visinu otplatne rate kredita. Potrebno je uz pomoć podatkovne tablice (s dvije varijable) razmotriti visine otplatnih rata kredita za niz različitih godišnjih kamata (5,5 %, 5,75 %, 6 %, ..., 7,5 %) te za različite rokove otplate kredita (15, 20, 25, 30 i 35 godina).

Rješenje:

Za izračun iznosa rate kredita treba u Excelovu radnom listu kreirati tablicu prikazanu na slici 2.25.a.

Kako bi se dobio iznos mjesečne kamate, potrebno je u ćeliju B4 upisati formulu **=B3/12**, dok za izračun broja otplatnih rata u ćeliju B6 treba upisati **=B5*12**.

Iznos mjesečnog anuiteta sada se dobije upisivanjem **=PMT(B4;B6;-B2)** u ćeliju B7 (slika 2.25.b).

a)

	A	B
1	Kredit za kupnju stana	
2	Ukupna cijena stana	650.000,00 kn
3	Godišnja kamatna stopa	6,75%
4	Mjesečna kamatna stopa	
5	Broj godina otplate kredita	20
6	Broj otplatnih rata	
7	**Iznos mjesečnog anuiteta**	

b)

	A	B
1	Kredit za kupnju stana	
2	Ukupna cijena stana	650.000,00 kn
3	Godišnja kamatna stopa	6,75%
4	Mjesečna kamatna stopa	0,005625
5	Broj godina otplate kredita	20
6	Broj otplatnih rata	240
7	**Iznos mjesečnog anuiteta**	**4942,366063**

Slika 2.25. *Primjer 2.9: a) početna tablica, b) tablica s izračunanim mjesečnim anuitetom.*

Za kreiranje podatkovne tablice treba upisati **=B7** u ćeliju D11 (isto tako se može upisati **=PMT(B4;B6;-B2)**), pa u istom stupcu, počevši od ćelije D12, kreirati niz različitih godišnjih kamata (5,5 %, 5,75 %, 6 %, ..., 7,5 %) kako je to zadatkom zadano.

Podatke o broju godina otplate kredita treba upisati u ćelije u retku desno od D11: u ćeliju E11 upisati 15, u ćeliju F11 20, ..., te u ćeliju I11 35.

Nadalje, treba označiti raspon ćelija D11:I21 pa odabrati *Data/What-If Analysis/Data Table* na vrpci izbornika i u polje *Row input cell:* na dobivenom dijaloškom okviru *Table* upisati B5 (ćelija u kojoj su godine otplate kredita), a u polje *Column input cell:* B3 (ćelija u kojoj je godišnja kamata).

Klikom na dugme *OK* dijaloškog okvira *Data Table* dobit će se tražena tablica izračunanih mjesečnih anuiteta (slika 2.26).

	C	D	E	F	G	H	I
10		kamata					
11	rok otplate	4.942,37 kn	15	20	25	30	35
12		5,50%	5.311,04 kn	4.471,27 kn	3.991,57 kn	3.690,63 kn	3.490,61 kn
13		5,75%	5.397,67 kn	4.563,54 kn	4.089,19 kn	3.793,22 kn	3.597,75 kn
14		6,00%	5.485,07 kn	4.656,80 kn	4.187,96 kn	3.897,08 kn	3.706,23 kn
15		6,25%	5.573,25 kn	4.751,03 kn	4.287,85 kn	4.002,16 kn	3.816,00 kn
16		6,50%	5.662,20 kn	4.846,23 kn	4.388,85 kn	4.108,44 kn	3.927,00 kn
17		6,75%	5.751,91 kn	4.942,37 kn	4.490,92 kn	4.215,89 kn	4.039,21 kn
18		7,00%	5.842,38 kn	5.039,44 kn	4.594,06 kn	4.324,47 kn	4.152,57 kn
19		7,25%	5.933,61 kn	5.137,44 kn	4.698,24 kn	4.434,15 kn	4.267,04 kn
20		7,50%	6.025,58 kn	5.236,36 kn	4.803,44 kn	4.544,89 kn	4.382,58 kn
21		7,75%	6.118,29 kn	5.336,17 kn	4.909,64 kn	4.656,68 kn	4.499,14 kn

Slika 2.26. *Primjer 2.9: Tražena podatkovna tablica s dvije varijable.*

Primjer 2.10.

Zrakoplovna kompanija obavlja 50 letova dnevno prevozeći prosječno 62 putnika po letu. Prosječna cijena karte iznosi 235,00 kn, a ukupni trošak po prodanoj karti iznosi 209,75 kn.

S obzirom na složenu situaciju na tržištu kompanija se nalazi pred odlukom o promjeni cijena karata, i to na račun svoje dobiti.

Sastaviti podatkovnu tablicu s dvije varijable koja će analizirati utjecaj promjene prosječne cijene karte (podatke smjestiti u stupac), odnosno broja prevezenih putnika (podatke smjestiti u redak) na dnevno ostvarenu dobit. Prosječnu cijenu karte varirati u rasponu od 220,00 kn do 235,00 kn s prirastom od 2,5 kn, a prosječan broj putnika po letu u granicama od 56 do 70 s prirastom 2.

Rješenje:

Izračunat će se najprije dnevna dobit kompanije s postojećim podatcima, za što je potrebno kreirati tablicu prikazanu na slici 2.27.

	A	B	
1	**Dnevna dobit zrakoplovne kompanije True-Fly**		
2	Broj letova u jednom danu	50	
3	Prosječan broj putnika po letu	62	
4	Prosječna cijena prodane karte	235,00 kn	
5	Ukupni prosječni troškovi (po prodanoj karti)	209,75 kn	
6	Prosječna dobit po prodanoj karti		=B5-B4
7	**Dnevna dobit kompanije**		=B2*B3*B6

Slika 2.27. *Primjer 2.10: Dnevna dobit kompanije sa zadanim ulaznim podatcima.*

Prosječna dobit po prodanoj karti i dnevna dobit kompanije dobiveni su unosom formula prikazanih desno od odgovarajućih ćelija (B6 i B7) na slici 2.27.

Upisati potom formulu **=B7** u ćeliju D13 pa niže u tom istom stupcu, s početkom u ćeliji D14, raspon prosječne cijene karte (220,00; 222,50; ...; 235,00 kn), a raspon prosječnog broja putnika (56, 58, ..., 70) u redak 13, s početkom u ćeliji E13.

Označiti raspon ćelija D13:L20, odabrati *Data/What-If Analysis/Data Table* na vrpci izbornika pa u polje *Row input cell:* dobivenog dijaloškog okvira *Table* upisati B3 (adresa ćelije u kojoj je izvorno upisan prosječan broj putnika), a u polje *Column input cell:* upisati B4 (adresa ćelije u kojoj je izvorno upisana prosječna cijena zrakoplovne karte) te kliknuti na dugme *OK* nakon čega će se dobiti traženi rezultat (slika 2.28).

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
12		Cijena karte								
13	Broj putnika	78.275,00 kn	56	58	60	62	64	66	68	70
14		220,00 kn	28.700,00 kn	29.725,00 kn	30.750,00 kn	31.775,00 kn	32.800,00 kn	33.825,00 kn	34.850,00 kn	35.875,00 kn
15		222,50 kn	35.700,00 kn	36.975,00 kn	38.250,00 kn	39.525,00 kn	40.800,00 kn	42.075,00 kn	43.350,00 kn	44.625,00 kn
16		225,00 kn	42.700,00 kn	44.225,00 kn	45.750,00 kn	47.275,00 kn	48.800,00 kn	50.325,00 kn	51.850,00 kn	53.375,00 kn
17		227,50 kn	49.700,00 kn	51.475,00 kn	53.250,00 kn	55.025,00 kn	56.800,00 kn	58.575,00 kn	60.350,00 kn	62.125,00 kn
18		230,00 kn	56.700,00 kn	58.725,00 kn	60.750,00 kn	62.775,00 kn	64.800,00 kn	66.825,00 kn	68.850,00 kn	70.875,00 kn
19		232,50 kn	63.700,00 kn	65.975,00 kn	68.250,00 kn	70.525,00 kn	72.800,00 kn	75.075,00 kn	77.350,00 kn	79.625,00 kn
20		235,00 kn	70.700,00 kn	73.225,00 kn	75.750,00 kn	78.275,00 kn	80.800,00 kn	83.325,00 kn	85.850,00 kn	88.375,00 kn

Slika 2.28. *Primjer 2.10: Tražena podatkovna tablica s dvije varijable.*

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 2_07:

Trgovina na malo nabavlja od mljekare 400 kg sira i 150 kg skute. Fakturna cijena sira je 16.000,00 kuna, a skute 2.000,00 kuna (sve bez PDV-a). U cijenu su uračunani i troškovi transporta. Mljekara odobrava trgovcu količinski rabat u iznosu od 10 %, a trgovina zaračunava maržu od 20 % na nabavnu cijenu.

Izraditi kalkulaciju maloprodajne cijene sira odnosno skute po kilogramu, a zatim:

a) Prikazati kako bi se mijenjala maloprodajna cijena sira, a kako skute promjenom rabata mljekare od 8 % do 16 % s prirastom od 2 % (podatkovna tablica s jednom varijablom).
b) Prikazati kako bi se mijenjala maloprodajna cijena sira promjenom rabata mljekare od 8 % do 16 % s prirastom od 2 % te promjenom marže trgovca od 17,5 % do 25 % s prirastom od 2,5 % (podatkovna tablica s dvije varijable).

Odgovor: *a)*

Rabat %	MPC sira	MPC skute
	54,00 kn	27,00 kn
8%	55,20 kn	27,60 kn
10%	54,00 kn	27,00 kn
12%	52,80 kn	26,40 kn
14%	51,60 kn	25,80 kn
16%	50,40 kn	25,20 kn

b)

	Rabat %				
Marža %	54,00 kn	17,5%	20,0%	22,5%	25,0%
	8%	54,05 kn	55,20 kn	56,35 kn	57,50 kn
	10%	52,88 kn	54,00 kn	55,13 kn	56,25 kn
	12%	51,70 kn	52,80 kn	53,90 kn	55,00 kn
	14%	50,53 kn	51,60 kn	52,68 kn	53,75 kn
	16%	49,35 kn	50,40 kn	51,45 kn	52,50 kn

Slika 2.Z.2. *Uz zadatak 2_07: a) podatkovna tablica s jednom varijablom, b) podatkovna tablica s dvije varijable.*

Zadatak 2_08:

Pogon informatičke tvrtke sklapa 300 prijenosnih računala sa zaslonom od 15″ (PR15) i 250 sa zaslonom od 17″ (PR17) mjesečno. Fiksni troškovi poslovanja pogona iznose 150.000,00 kuna mjesečno, dok varijabilni troškovi materijala i rada iznose 800,00 kuna po računalu PR15 te 875,00 kuna po računalu PR17. Prihod od prodaje jednog PR15 je 1.100,00 kuna, a od prodaje jednog PR17 1.200,00 kuna. Izračunati rezultat poslovanja pogona, a zatim:

a) Prikazati kako bi se mijenjao rezultat poslovanja pogona promjenom broja sklopljenih računala PR15 od 250 do 350 s prirastom od 25 (podatkovna tablica s jednom varijablom).
b) Prikazati kako bi se mijenjao rezultat poslovanja pogona promjenom broja sklopljenih računala PR15 od 250 do 350 s prirastom 25 te promjenom cijene računala PR17 od 1.120 do 1.240 kuna s prirastom od 40 kuna (podatkovna tablica s dvije varijable).

Odgovor: *a)*

Broj PR15	Ukupni prihod	Rezultat posl.
	630.000,00 kn	21.250,00 kn
250	575.000,00 kn	6.250,00 kn
275	602.500,00 kn	13.750,00 kn
300	630.000,00 kn	21.250,00 kn
325	657.500,00 kn	28.750,00 kn
350	685.000,00 kn	36.250,00 kn

b)

	Broj PR15				
Pr. po kom. PR17	21.250,00 kn	1.120,00 kn	1.160,00 kn	1.200,00 kn	1.240,00 kn
	250	-13.750,00 kn	- 3.750,00 kn	6.250,00 kn	16.250,00 kn
	275	- 6.250,00 kn	3.750,00 kn	13.750,00 kn	23.750,00 kn
	300	1.250,00 kn	11.250,00 kn	21.250,00 kn	31.250,00 kn
	325	8.750,00 kn	18.750,00 kn	28.750,00 kn	38.750,00 kn
	350	16.250,00 kn	26.250,00 kn	36.250,00 kn	46.250,00 kn

Slika 2.Z.3. *Zadatak 2_08: a) podatkovna tablica s jednom varijablom, b) podatkovna tablica s dvije varijable.*

2.3. Scenarij (*Scenario*)

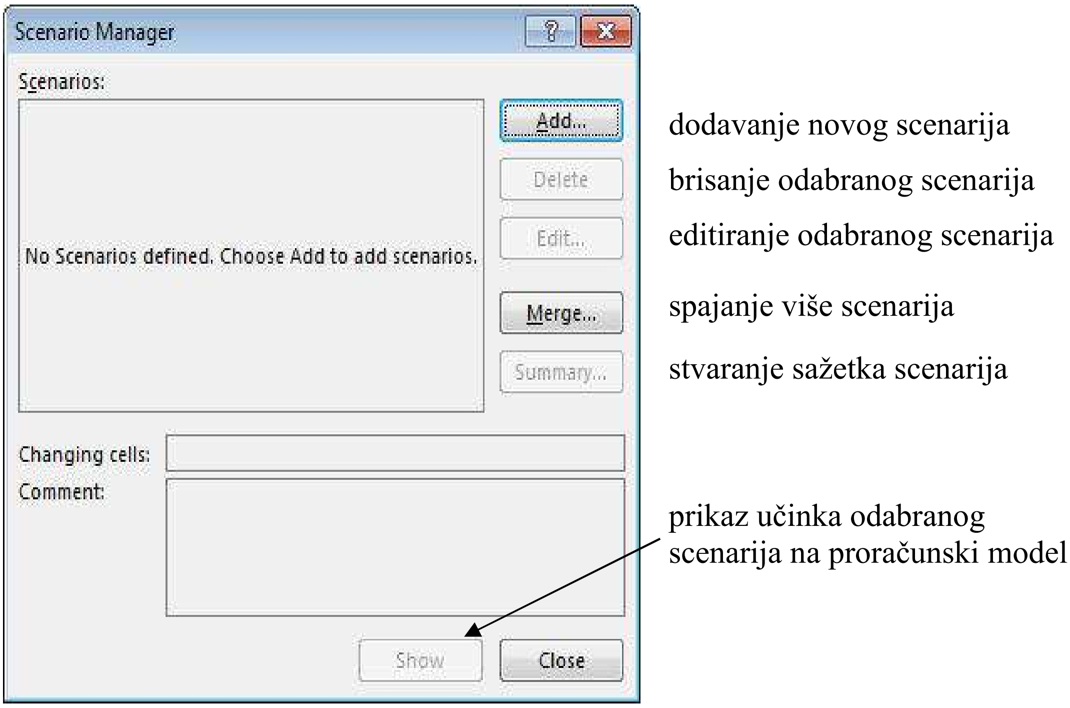
Scenarij je procedura u MS Excelu koja omogućuje korisniku da razmotri kako promjena jedne, dviju ili više varijabla utječe na rezultat proračunskog modela u nekom radnom listu. Jedan ili više korisnika može kreirati jedan ili više scenarija, koje je sve moguće pohraniti, pod različitim imenima, te model s podatcima vezanima uz neki od tih scenarija prikazati kad to poželi.

Svaki kreirani scenarij je skup podataka (vrijednosti) koje Excel pohranjuje i može automatski zamijeniti u radnom listu. Najveći broj scenarija koji se mogu kreirati u radnoj knjizi je 32.

Početni proračunski model potrebno je, prije kreiranja nekog drugog scenarija, pohraniti pod nekim imenom (Početni_scenarij, Izvorni_scenarij ili nekim drugim) jer će se pokretanjem nekog drugog scenarija trajno izbrisati vrijednosti početnog modela.

Za stvaranje novog scenarija potrebno je:

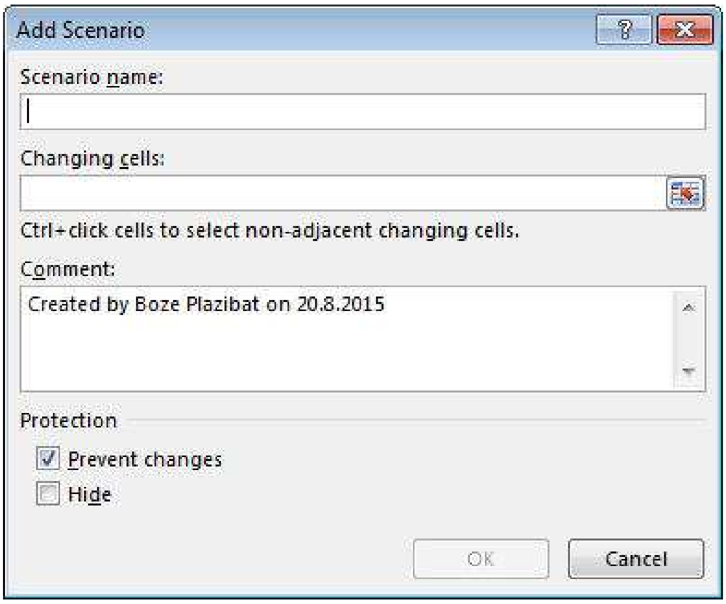
1. U radnom listu Excela kreirati početni proračunski model.
2. Odabrati ***Data/What-If Analysis/Scenario Manager*** na vrpci izbornika nakon čega će se pojaviti dijaloški okvir *Scenario Manager* (slika 2.29).



Slika 2.29. *Dijaloški okvir* Scenario Manager.

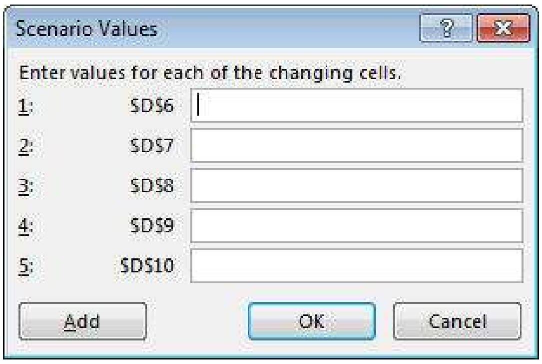
3. Klikom na dugme *Add* (dodaj) otvorit će se dijaloški okvir *Add Scenario*, gdje se u polje *Scenario name:* upisuje ime novog scenarija, u polje *Changing cells:* adrese svih ćelija vrijednosti kojih će se mijenjati za potrebe ovog scenarija, a u polje *Comment:* komentar u svezi s ovim scenarijem (slika 2.30).

   U dnu ovog dijaloškog okvira su polja vezana uz moguću zaštitu scenarija.



Slika 2.30. *Dijaloški okvir* Add Scenario.

4. Nakon klika na dugme *OK* dijaloškog okvira *Add Scenario* pojavit će se novi dijaloški okvir, *Scenario Values*, koji omogućuje definiranje novih vrijednosti u ćelijama koje su ranije deklarirane kao one čije se vrijednosti mijenjaju (slika 2.31).



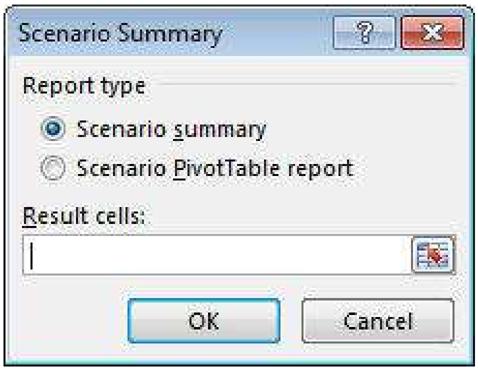
Slika 2.31. *Dijaloški okvir* Scenario Values.

5. Unosom odgovarajućih vrijednosti u ponuđena polja dijaloškog okvira *Scenario Values* te klikom na dugme *OK* ponovno se pojavljuje dijaloški okvir *Scenario Manager* gdje se bira neka od ponuđenih opcija – ***Close*** će značiti prekid daljnjeg rada na kreiranju novih ili izmjenama postojećih scenarija.

Nakon kreiranja jednog ili više scenarija prema odgovarajućem proračunskom modelu Excel omogućuje stvaranje izvještaja scenarija na sljedeći način:

1. Odabirom ***Data/What-If Analysis/Scenario Manager*** otvoriti dijaloški okvir *Scenario Manager*.

2. Na dijaloškom okviru *Scenario Manager* kliknuti na dugme ***Summary*** – pojavit će se novi dijaloški okvir *Scenario Summary* (slika 2.32) gdje se odabire tip izvještaja: izvještaj u obliku sažetka scenarija (*Scenario summary*) ili pak u obliku pivot-tablice (*Scenario PivotTable report*).



Slika 2.32. *Dijaloški okvir* Scenario Summary.

3. U polje *Result cells:* upisuju se adrese ćelija koje prikazuju konačne rezultate proračunskog modela, a koje korisnik želi u izvještaju scenarija.
4. Klikom na dugme *OK* dijaloškog okvira *Scenario Summary* stvorit će se izvještaj scenarija (svih kreiranih) na novom radnom listu, pri čemu će u stupcu svakog od scenarija biti naznačene ćelije (bojom pozadine ćelije) koje sadržavaju vrijednosti koje su se u tom scenariju mijenjale.

Primjer 2.11.

Zrakoplovna kompanija obavlja 50 letova dnevno prevozeći prosječno 62 putnika po letu. Prosječna cijena karte iznosi 235,00 kn, a ukupni trošak po prodanoj karti iznosi 209,75 kn (sve kao i u primjeru 2.10). Kreirati u radnom listu početni model izračuna dnevne dobiti. Taj model pohraniti kao scenarij naziva **Izvorni_let**.

Dodati zatim dva nova scenarija.

U prvom, s nazivom **Optimist_let**, analizirati kako će na dnevnu dobit kompanije utjecati povećanje broja letova za 10 dnevno, smanjenje prosječnog broja putnika za 2 te smanjenje ukupnog troška po prodanoj karti za 3 kn. Prosječna cijena prodane karte ne mijenja se pri tom u odnosu na scenarij **Izvorni _let**.

U drugom scenariju, imena **Pesimist_let**, analizirati što će biti s dnevnom dobiti ako se broj letova smanji za 5 dnevno, prosječan broj putnika smanji za 5, a prosječna cijena karte smanji za 7 kn. Ukupni prosječni troškovi po prodanoj karti jednaki su onima u scenariju **Izvorni _let**.

Kreirati kratki izvještaj scenarija s prikazom dnevne dobiti kompanije.

Rješenje:

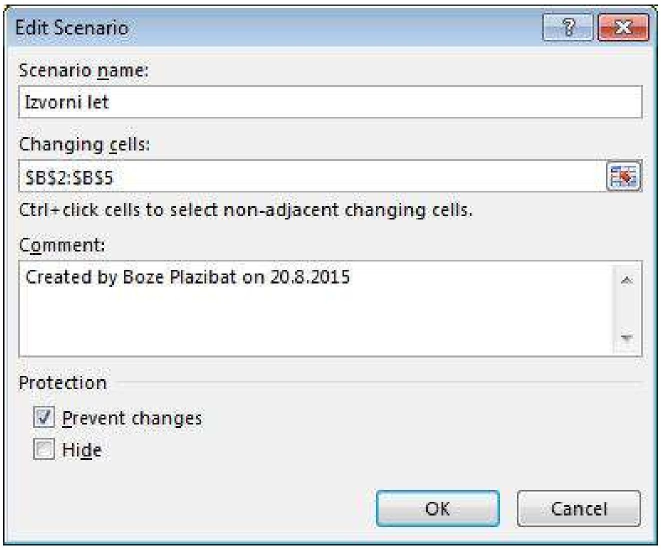
Potrebno je najprije, kao u primjeru 2.10., kreirati tablicu prikazanu na slici 2.27 a potom, unosom formule =B4-B5 u ćeliji B6 izračunati dobit po jednom putniku, te unosom formule =B2*B3*B6 u ćeliji B7 izračunati ukupnu dnevnu dobit kompanije (sl. 2.33).

Odabrati zatim ***Data/What-If Analysis/Scenario Manager*** na vrpci izbornika pa na dobivenom dijaloškom okviru *Scenario Manager* kliknuti na dugme *Add*.

	A	B
1	**Dnevna dobit zrakoplovne kompanije True-Fly**	
2	Broj letova u jednom danu	50
3	Prosječan broj putnika po letu	62
4	Prosječna cijena prodane karte	235,00 kn
5	Ukupni prosječni troškovi (po prodanoj karti)	209,75 kn
6	Prosječna dobit po prodanoj karti	25,25 kn
7	**Dnevna dobit kompanije**	78.275,00 kn

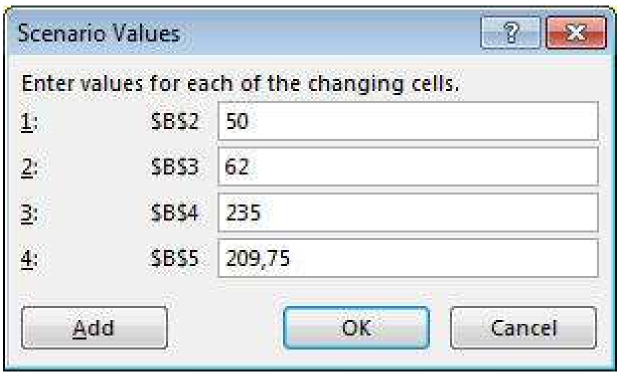
Slika 2.33. *Primjer 2.11: Dnevna dobit sa zadanim početnim podatcima.*

Na dobivenom dijaloškom okviru *Add Scenario* upisati **Izvorni_let** u polje *Scenario name:* te raspon ćelija **B2:B5** u polje *Changing cells:* (kao na slici 2.34).



Slika 2.34. *Primjer 2.11: Postavke u dijaloškom okviru* Add Scenario.

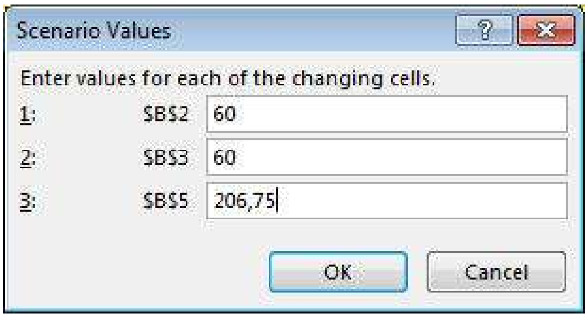
Klikom na dugme *OK* dobit će se novi dijaloški okvir *Scenario Values* gdje je potrebno klikom na dugme *OK* prihvatiti ponuđene izvorne vrijednosti (slika 2.35).



Slika 2.35. *Primjer 2.11: Postavke u dijaloškom okviru* Scenario Values *za izvorni scenarij.*

Sada će se ponovo javiti dijaloški okvir *Table Scenario* kojemu će u polju *Scenarios:* biti ime upravo kreiranog scenarija **Izvorni_let**.

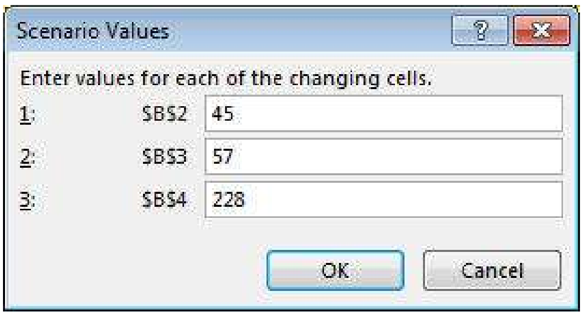
Zatim će se, klikom na dugme *Add*, pokrenuti stvaranje novog scenarija. Pojavit će se dijaloški okvir *Add Scenario* gdje u polje *Scenario name:* treba upisati **Optimist_let**, a u polje *Changing cells:* adrese ćelija koje se mijenjaju u ovom scenariju: **B2; B3; B5.**, a zatim klikom na dugme *OK* aktivirati dijaloški okvir *Scenario Values*, gdje u ponuđena polja trebamo upisati vrijednosti kao na slici 2.36.



Slika 2.36. *Primjer 2.11: Postavke u dijaloškom okviru* Scenario Values *za Optimist_let.*

Sada se klikom na dugme *OK* treba vratiti na dijaloški okvir *Scenario Manager*, kojem će se u polju *Scenario*, uz scenarij Izvorni_let, pojaviti i novi – **Optimist_let**.

Scenarij Pesimist_let stvorit će se klikom na dugme *Add* pa upisom **Pesimist_let** u polje *Scenario name:* i upisom adresa ćelija koje se mijenjaju: **B2:B4** u polje *Changing cells:* dijaloškog okvira *Add Scenario*. Nakon klika na dugme *OK* pojavit će se dijaloški okvir *Scenario Values*, gdje u ponuđena polja trebamo upisati vrijednosti kao na slici 2.37.



Slika 2.37. *Primjer 2.11: Postavke u dijaloškom okviru* Scenario Values *za Pesimist_let.*

Klikom na dugme *OK* prihvatit će se upisane vrijednosti i opet se vratiti u dijaloški okvir *Scenario Manager* (s imenima triju scenarija u polju *Scenarios*).

Ako se želi vidjeti učinak nekog od scenarija na model u radnom listu, treba kliknuti na ime tog scenarija (npr. **Optimist_let**), a zatim na dugme *Show* (slika 2.38).

Stvaranje izvještaja scenarija započinje klikom na dugme *Summary* dijaloškog okvira *Scenario Manager*, kada će se pojaviti dijaloški okvir *Scenario Summary*, gdje je potrebno kliknuti na opciju *Scenario summary*, a u polje *Result cells:* upisati **B7** (adresa ćelije u kojoj je prikazana dnevna dobit kompanije). Klikom na dugme *OK* Excel će na posebnom radnom listu *Scenario summary* prikazati kreirani izvještaj (slika 2.39).

	A	B
1	**Dnevna dobit zrakoplovne kompanije True-Fly**	
2	Broj letova u jednom danu	60
3	Prosječan broj putnika po letu	60
4	Prosječna cijena prodane karte	235,00 kn
5	Ukupni prosječni troškovi (po prodanoj karti)	206,75 kn
6	Prosječna dobit po prodanoj karti	28,25 kn
7	**Dnevna dobit kompanije**	101.700,00 kn

Slika 2.38. *Primjer 2.11: Dnevna dobit kompanije prema scenariju Optimist_let.*

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Scenario Summary**					
3				Current Values:	Izvorni_let	Optimist_let	Pesimist_let
5		Changing Cells:					
6			$B$2	50	50	60	45
7			$B$3	62	62	60	57
8			$B$4	235,00 kn	235,00 kn	235,00 kn	228,00 kn
9			$B$5	209,75 kn	209,75 kn	206,75 kn	209,75 kn
10		Result Cells:					
11			$B$7	78.275,00 kn	78.275,00 kn	101.700,00 kn	46.811,25 kn
12		Notes: Current Values column represents values of changing cells at					
13		time Scenario Summary Report was created. Changing cells for each					
14		scenario are highlighted in gray.					

Slika 2.39. *Primjer 2.11: Kratki izvještaj scenarija.*

Važna napomena:

U polju *Scenarios:* dijaloškog okvira ***Scenario Manager*** nalazi se popis svih kreiranih scenarija vezanih uz problem koji se razmatra.

Rezultat koji daje svaki od tih scenarija može se prikazati klikom na ime tog scenarija u polju *Scenarios:* te pritiskom na dugme ***Show*** toga dijaloškog okvira. Excel se u tom prikazu koristi vrijednostima ćelija koje se u tom scenariju mijenjaju i koje smo pri kreiranju tog scenarija pridodali tim ćelijama, ali i vrijednosti nekih ćelija koje za taj scenarij nismo mijenjali.

Za vrijednosti tih ćelija Excel uzima upravo one koje su korištene u prethodnom prikazu nekog od scenarija, što može dovesti do pogreške u prikazu rezultata, što se zorno može prikazati upravo na primjeru koji je ovdje riješen.

Naime, ako kliknemo na scenarij **Izvorni_let** i na dugme ***Show***, a zatim na scenarij **Optimist_let** i na dugme ***Show***, Excel će za prosječnu cijenu prodane karte, čija promjena nije predviđena scenarijem **Optimist_let**, uzeti onu iz scenarija **Izvorni_let** (235,00 kn). Da smo, međutim, nakon scenarija **Izvorni_let** prikazali scenarij **Pesimist_let**, a tek nakon toga scenarij **Optimist_let**, Excel bi za prosječnu cijenu prodane karte uzeo onu iz prethodno prikazanog scenarija, dakle iz scenarija **Pesimist_let** gdje ta cijena iznosi 228,00 kn. Samim tim prikazani konačni rezultat (76.500,00 kn) ne bi bio u skladu sa zadanim uvjetima pod kojima dnevna dobit iznosi 101.700,00 kn.

Ovakve se pogreške mogu izbjeći na dva načina:

1. Sve ćelije u kojima su ulazni podatci (podatci koji se ne izračunavaju uz pomoć funkcija ili formula) definirati kao promjenjive, pa one koje su jednake kao u početnom scenariju takvima i ostaviti. U ovom slučaju u sažetku scenarija neće se jasno vidjeti iznosi kojih ćelija su se mijenjali u odnosu na početni scenarij (sve se mijenjaju!).
2. Prije prikaza bilo kojeg od kreiranih scenarija, najprije prikazati početni scenarij (odnosno scenarij u odnosu na koji se vrše promjene, a zadržavaju njegove vrijednosti u ćelijama koje se ne mijenjaju). Dakle, ako se želi korektno prikazati rezultat svakog od kreiranih scenarija iz prethodnog primjera, tada najprije treba prikazati scenarij **Izvorni_let** pa scenarij **Optimist_let**, zatim opet scenarij **Izvorni_let** i konačno scenarij **Pesimist_let**.

   Osim točnih rezultata na ovaj će se način osigurati i prikaz (osjenčan) onih ćelija vrijednosti kojih se mijenjaju u svakom od scenarija.

Primjer 2.12.

Mjesečni budžet mladog bračnog para prikazan je u tablici na slici 2.40.a.

Supružnici su odlučili otići na sedmodnevno putovanje u Pariz, što bi im budžet opteretilo s dodatnih 1.500,00 kn u sljedećih šest mjeseci.

Uvidom u mjesečni ostatak složili su se kako bi trebalo značajno smanjiti troškove, te da svatko od njih ponudi svoj scenarij ušteda.

ONA je zaključila kako bi ON mogao manje voziti automobil, a više pješačiti, što bi omogućilo dvostruku uštedu: smanjenje rashoda na automobil od 220 kn i na njegov sport i rekreaciju za 160 kn. ON bi se mogao odijevati u *second-hand* prodavaonicama – ušteda 190 kn. Nadalje, angažiranjem osobe za čišćenje i peglanje 2 umjesto 4 puta mjesečno uštedjelo bi se novih 240 kn.

Zbog višeg cilja odricat će se i ONA smanjenjem rashoda na kozmetiku za 75 kn te rashoda na odjeću i obuću za 125 kn. Dodatne uštede vidi u smanjenju režijskih troškova (dio struje i vode) za 110 kn te troškova prehrane za 390 kn.

ON pak razmišlja malo drugačije. Ako ONA bude sama čistila i peglala, uštedjet će se 480 kn, ako frizeru bude odlazila jednom mjesečno, uštedjet će 125 kn. Troškove kozmetike, odjeće i obuće ONA može srezati na pola što znači uštedu od 205, odnosno 310 kn.

Svoje troškove odjeće i obuće, kao i svoje troškove rekreacije smanjit će na pola – ušteda 105, odnosno 145 kn. Promjenom telefon-TV-internet operatera kani uštedjeti dodatnih 150 kn mjesečno.

Kreirati gornju tablicu u Excelovu radnom listu pa izračunati neprikazane stavke mjesečnog budžeta. To pohraniti kao scenarij imena Naš_budžet.

Kreirati zatim scenarije Naš_budžet_ONA i Naš_budžet_ON prema njenim, odnosno njegovim prijedlozima smanjenja troškova te kratki izvještaj scenarija s prikazom vrijednosti ukupnih troškova i mjesečnog ostatka.

a)

	A	B
1	NAŠ BUDŽET	
2	UKUPNA PRIMANJA:	11.160,00 kn
3	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI:	
4	KREDIT ZA STAN	3.125,00 kn
5	REŽIJE	1.452,00 kn
6	PREHRANA	3.012,00 kn
7	HIGIJENA	289,00 kn
8	TV TEL INT	335,00 kn
9	AUTO (GORIVO+ODRŽ)	422,00 kn
10	ČIŠĆENJE I PEGLANJE	480,00 kn
11	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI UKUPNO:	
12	OSOBNI TROŠKOVI - ONA:	
13	KOZMETIKA	410,00 kn
14	ODJEĆA I OBUĆA	620,00 kn
15	SPORT I REKREACIJA	120,00 kn
16	FRIZURA	250,00 kn
17	UKUPNO - ONA:	
18	OSOBNI TROŠKOVI - ON:	
19	KOZMETIKA	104,00 kn
20	ODJEĆA I OBUĆA	210,00 kn
21	SPORT I REKREACIJA	290,00 kn
22	FRIZURA	40,00 kn
23	UKUPNO - ON:	
24	UKUPNI TROŠKOVI:	
25	MJESEČNI OSTATAK:	

b)

	A	B
1	NAŠ BUDŽET	
2	UKUPNA PRIMANJA:	11.160,00 kn
3	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI:	
4	KREDIT ZA STAN	3.125,00 kn
5	REŽIJE	1.452,00 kn
6	PREHRANA	3.012,00 kn
7	HIGIJENA	289,00 kn
8	TV TEL INT	335,00 kn
9	AUTO (GORIVO+ODRŽ)	422,00 kn
10	ČIŠĆENJE I PEGLANJE	480,00 kn
11	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI UKUPNO:	9.115,00 kn
12	OSOBNI TROŠKOVI - ONA:	
13	KOZMETIKA	410,00 kn
14	ODJEĆA I OBUĆA	620,00 kn
15	SPORT I REKREACIJA	120,00 kn
16	FRIZURA	250,00 kn
17	UKUPNO - ONA:	1.400,00 kn
18	OSOBNI TROŠKOVI - ON:	
19	KOZMETIKA	104,00 kn
20	ODJEĆA I OBUĆA	210,00 kn
21	SPORT I REKREACIJA	290,00 kn
22	FRIZURA	40,00 kn
23	UKUPNO - ON:	644,00 kn
24	UKUPNI TROŠKOVI:	11.159,00 kn
25	MJESEČNI OSTATAK:	1,00 kn

Slika 2.40. *Primjer 2.12: a) tablica s početnim podatcima, b) tablica s izračunom ukupnih troškova i mjesečnog ostatka.*

Rješenje:

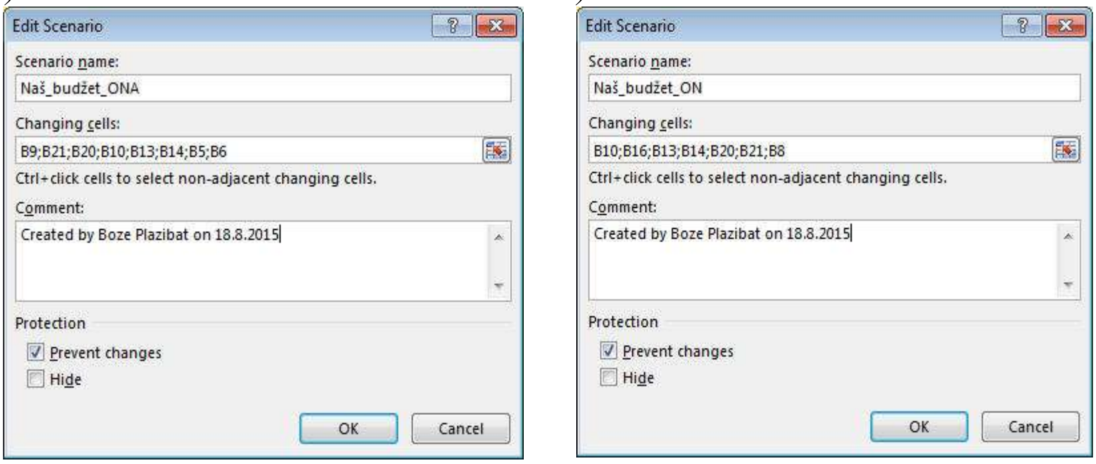
Najprije je potrebno unijeti formule kojima će se upotpuniti zadana tablica njegovim, njenim i ukupnim troškovima te mjesečnim ostatkom: u ćeliju B11 treba upisati **=SUM(B4:B10)**, u ćeliju B17 **=SUM(B13:B16)**, u ćeliju B23 **=SUM(B19:B22)**, u ćeliju B24 **=SUM(B1;B17;B23)** te u ćeliju B25 **=B2-B24**. Tako će se dobiti tablica prikazana na slici 2.40.b.

Odabrati zatim *Data/What-If Analysis/Scenario Manager* na vrpci izbornika pa na dijaloškom okviru *Scenario Manager* kliknuti na dugme *Add* – pojavit će se dijaloški okvir *Add Scenario* gdje u polje *Scenario name:* treba upisati ime scenarija (**Naš_budžet**), a u polju *Changing cells:* treba navesti adrese ćelija koje se mogu mijenjati: **B4:B10;B13:B16;B19:B22**.

Klikom na dugme *OK* dobit će se dijaloški okvir *Scenario Values* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti ponuđene vrijednosti.

Slijedi povratak u dijaloški okvir *Scenario Manager* gdje treba kliknuti na dugme *Add* i nakon toga započeti kreiranje scenarija Naš_budžet_ONA popunjavanjem polja dijaloškog okvira *Add Scenario* kako je to prikazano na slici 2.41.a.

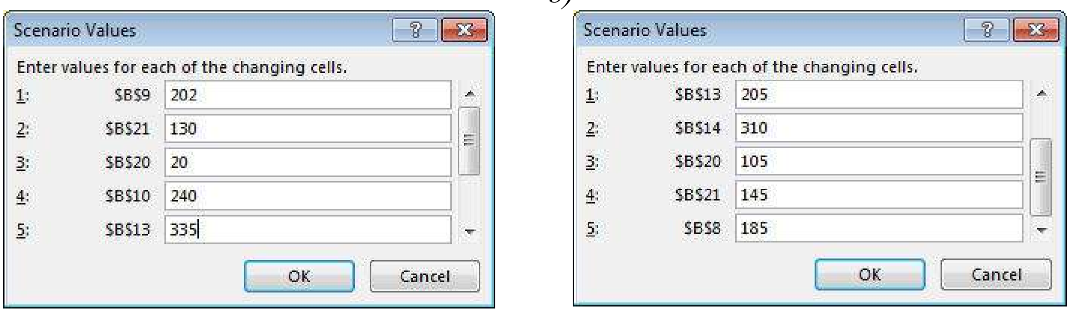
a) *b)*



Slika 2.41. *Primjer 2.12:* Add Scenario*: a) Naš_budžet_ONA, b) Naš_budžet_ON.*

Klikom na dugme *OK* prelazi se u dijaloški okvir *Scenario Values* gdje ponuđena polja treba popuniti vrijednostima prikazanima na slici 2.42.a.

a) *b)*



Slika 2.42. *Primjer 2.12:* Scenario Values*: a) Naš_budžet_ONA, b) Naš_budžet_ON.*

Nakon klika na dugme *OK* slijedi povratak u dijaloški okvir *Scenario Manager*, gdje se klikom na dugme *Add* otvara dijaloški okvir *Add Scenario* koji treba popuniti podatcima kako je to prikazano na slici 2.41.b.

Klikom na dugme *OK* prelazi se u dijaloški okvir Scenario Values polja kojega treba popuniti podatcima kako je to prikazano slici 2.42.b.

Konačno, nakon klika na dugme *OK* slijedi povratak u dijaloški okvir *Scenario Manager* gdje su navedena sva tri kreirana scenarija.

Klikom na naziv nekog od scenarija i zatim na dugme *Show* u radnom nam se listu prikaže utjecaj tog scenarija na proračunski model (voditi računa da se prije prikaza učinka bilo kojeg scenarija treba prikazati scenarij Naš_budžet).

Na slici 2.43 prikazani su rezultati scenarija Naš_budžet_ONA (2.43.a) i Naš_budžet_ON (2.43.b).

a)

	A	B
1	NAŠ BUDŽET	
2	UKUPNA PRIMANJA:	11.160,00 kn
3	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI:	
4	KREDIT ZA STAN	3.125,00 kn
5	REŽIJE	1.342,00 kn
6	PREHRANA	2.622,00 kn
7	HIGIJENA	289,00 kn
8	TV TEL INT	335,00 kn
9	AUTO (GORIVO+ODRŽ)	202,00 kn
10	ČIŠĆENJE I PEGLANJE	240,00 kn
11	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI UKUPNO:	8.155,00 kn
12	OSOBNI TROŠKOVI - ONA:	
13	KOZMETIKA	335,00 kn
14	ODJEĆA I OBUĆA	495,00 kn
15	SPORT I REKREACIJA	120,00 kn
16	FRIZURA	250,00 kn
17	UKUPNO - ONA:	1.200,00 kn
18	OSOBNI TROŠKOVI - ON:	
19	KOZMETIKA	104,00 kn
20	ODJEĆA I OBUĆA	20,00 kn
21	SPORT I REKREACIJA	130,00 kn
22	FRIZURA	40,00 kn
23	UKUPNO - ON:	294,00 kn
24	UKUPNI TROŠKOVI:	9.649,00 kn
25	MJESEČNI OSTATAK:	1.511,00 kn

b)

	A	B
1	NAŠ BUDŽET	
2	UKUPNA PRIMANJA:	11.160,00 kn
3	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI:	
4	KREDIT ZA STAN	3.125,00 kn
5	REŽIJE	1.452,00 kn
6	PREHRANA	3.012,00 kn
7	HIGIJENA	289,00 kn
8	TV TEL INT	185,00 kn
9	AUTO (GORIVO+ODRŽ)	422,00 kn
10	ČIŠĆENJE I PEGLANJE	0,00 kn
11	ZAJEDNIČKI TROŠKOVI UKUPNO:	8.485,00 kn
12	OSOBNI TROŠKOVI - ONA:	
13	KOZMETIKA	205,00 kn
14	ODJEĆA I OBUĆA	310,00 kn
15	SPORT I REKREACIJA	120,00 kn
16	FRIZURA	125,00 kn
17	UKUPNO - ONA:	760,00 kn
18	OSOBNI TROŠKOVI - ON:	
19	KOZMETIKA	104,00 kn
20	ODJEĆA I OBUĆA	105,00 kn
21	SPORT I REKREACIJA	145,00 kn
22	FRIZURA	40,00 kn
23	UKUPNO - ON:	394,00 kn
24	UKUPNI TROŠKOVI:	9.639,00 kn
25	MJESEČNI OSTATAK:	1.521,00 kn

Slika 2.43. *Primjer 2.12: Rezultat scenarija: a) Naš_budžet_ONA, b) Naš_budžet_ON.*

Za stvaranje kratkog izvještaja kreiranih scenarija treba kliknuti na dugme ***Summary*** dijaloškog okvira *Scenario Manager* pa na dobivenom dijaloškom okviru izabrati opciju *Scenario summary*, zatim u polje *Result cells:* upisati **B24; B25** (adrese ćelije u kojima su prikazani ukupni troškovi, odnosno mjesečni ostatak) i nakon toga kliknuti na dugme *OK*. Na posebnom radnom listu kreiran je željeni izvještaj (slika 2.44).

	A	B	C	D	E	F	G
2		Scenario Summary					
3				Current Values:	Naš_budžet	Naš_budžet_ONA	Naš_budžet_ON
5		Changing Cells:					
6			$B$2	11.160,00 kn	11.160,00 kn	11.160,00 kn	11.160,00 kn
7			$B$4	3.125,00 kn	3.125,00 kn	3.125,00 kn	3.125,00 kn
8			$B$5	1.452,00 kn	1.452,00 kn	1.342,00 kn	1.452,00 kn
9			$B$6	3.012,00 kn	3.012,00 kn	2.622,00 kn	3.012,00 kn
10			$B$7	289,00 kn	289,00 kn	289,00 kn	289,00 kn
11			$B$8	335,00 kn	335,00 kn	335,00 kn	185,00 kn
12			$B$9	422,00 kn	422,00 kn	202,00 kn	422,00 kn
13			$B$10	480,00 kn	480,00 kn	240,00 kn	0,00 kn
14			$B$13	410,00 kn	410,00 kn	335,00 kn	205,00 kn
15			$B$14	620,00 kn	620,00 kn	495,00 kn	310,00 kn
16			$B$15	120,00 kn	120,00 kn	120,00 kn	120,00 kn
17			$B$16	250,00 kn	250,00 kn	250,00 kn	125,00 kn
18			$B$19	104,00 kn	104,00 kn	104,00 kn	104,00 kn
19			$B$20	210,00 kn	210,00 kn	20,00 kn	105,00 kn
20			$B$21	290,00 kn	290,00 kn	130,00 kn	145,00 kn
21			$B$22	40,00 kn	40,00 kn	40,00 kn	40,00 kn
22		Result Cells:					
23			$B$24	11.159,00 kn	11.159,00 kn	9.649,00 kn	9.639,00 kn
24			$B$25	1,00 kn	1,00 kn	1.511,00 kn	1.521,00 kn

Slika 2.44. *Primjer 2.12: Sažetak scenarija.*

P.S.: *Zbog sitnih nesuglasica u svezi s predloženim modelima odustalo se od putovanja u Pariz, a brakorazvodna parnica je u tijeku.*

__Primjer 2.13.__

Trgovina na malo nabavlja od proizvođača ovčji i kravlji sir. U tablici (slika 2.45) prikazana je količina kupljenog sira, fakturna cijena sira (bez PDV-a), rabat proizvođača, troškovi transporta sira koje trgovac na malo raspoređuje prema težinskoj (ponderiranoj) metodi (bez PDV-a) i marža u % koju trgovac obračunava pri kalkulaciji maloprodajne cijene.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a) kalkulacija za sav kupljeni sir											
2	Vrsta sira	količina /kg/	fakturna cijena	rabat %	neto fakt. cijena	trošak transporta	nabavna cijena	marža %	iznos marže (RUC)	MPC bez PDV-a	PDV%	MPC
3	Kravlji sir	400	14.000,00 kn	12%				25,0%			25%	
4	Ovčji sir	300	18.000,00 kn	15%				30,0%			25%	
5												
6	Trošak transporta bez PDV-a	1.400,00 kn										
7												
8	b) kalkulacija jediničnih cijena sira (cijena po kg sira)											
9		Vrsta sira	fakturna cijena	rabat %	neto fakt. cijena	trošak transporta	nabavna cijena	marža %	iznos marže (RUC)	MPC bez PDV-a	PDV%	MPC
10		Kravlji sir										
11		Ovčji sir										

Slika 2.45. *Primjer 2.13: Radni list sa zadanim podatcima.*

Potrebno je izračunati sve elemente kalkulacije koji su navedeni u tablici, i za ukupno kupljeni ovčji odnosno kravlji sir i jediničnu cijenu pojedinog sira. Ovaj radni list nazvati **Kalkulacija**.

Kopirati radni list **Kalkulacija**, kopiju preimenovati u ***Goal*** pa na tom radnom listu s pomoću funkcije *Goal Seek* odrediti potrebne marže (u %) za koje bi maloprodajna cijena kravljeg sira bila 50,00 kuna, a ovčjega 90,00 kuna.

Kopirati ponovno radni list **Kalkulacija**, kopiju preimenovati u ***Data*** pa na tom radnom listu, s pomoću funkcije *Data Table* s jednom varijablom, prikazati kako će se mijenjati nabavna cijena po kilogramu kravljeg sira, a kako njegova jedinična maloprodajna cijena promjenom rabata proizvođača u granicama od 9 % do 18 % s prirastom od 1,5 %.

Još jednom kopirati radni list **Kalkulacija**, kopiju preimenovati u ***Scenario*** pa na tom radnom listu kreirati dva scenarija: prvi pod imenom Scenarij_1 sa zadanim podatcima i izvršenim izračunima te drugi, pod imenom Scenarij_2, kod kojega će rabat proizvođača na kravlji sir biti 14 %, a na ovčji 18 %, dok će se troškovi transporta smanjiti za 350 kuna. Kreirati kratki sažetak scenarija s prikazom jediničnih maloprodajnih cijena sireva.

Rješenje:

Krenut će se od izračuna kalkulacije za sav kupljeni sir. Najprije će se kopirati podatci koji se ponavljaju (rabati, marže u % i PDV u %): u ćeliju D10 treba upisati **=D3**, u D11 **=D4**, u H10 **=H3**, u H11 **=H4** te u ćelije K10 i K11 **=K3**.

Neto fakturnu cijenu kravljeg sira dobit će se unosom formule **=C3*(1-D3)** u ćeliju E3, pa se neto fakturna cijena ovčjeg sira može dobiti kopiranjem te formule u ćeliju E4 (ili pak upisivanjem formule **=C4*(1-D4)** u tu ćeliju).

Trošak transporta raspoređuje se ponderiranom metodom što znači da će se trošak transporta kravljeg sira dobiti upisivanjem formule **=B6*B3/(B3+B4)** u ćeliju F3, a trošak transporta ovčjeg sira upisivanjem **=B6*B4/(B3+B4)** u ćeliju F4.

Nabavna cijena sira jednaka je neto fakturnoj cijeni uvećanoj za troškove transporta pa u ćeliju G3 treba upisati **=E3+F3**, a u ćeliju G4 **=E4+F4**.

Iznos marže dobije se množenjem nabavne cijene s maržom u % pa je u ćeliju I3 potrebno unijeti formulu **=G3*H3**, a u ćeliju I4 **=G4*H4**.

Maloprodajna cijena bez PDV-a je zbroj nabavne cijene i marže, za što je potrebno u ćeliju J3 upisati **=G3+I3**, a u ćeliju J4 **=G4+I4**. Slijedi izračun maloprodajnih cijena s uključenim PDV-om upisom **=J3*(1+K3)** u ćeliju L3, odnosno **=J4*(1+K4)** u L4.

Kalkulacija maloprodajnih cijena po kilogramu sira u tablici b) dobije se korištenjem formula navedenih u točkama 1-5 (naravno, uz promjene adresa odgovarajućih ćelija). Jedina razlika jest u troškovima transporta za izračun kojih je potrebno upisati formulu **=B6/(B3+B4)** u ćeliju F10, a **=F10** u ćeliju F11. Konačni izgled radnog lista s traženim izračunima prikazan je na slici 2.46.

Ovaj radni list treba sada preimenovati u **Kalkulacija**, a zatim ga kopirati pa kopiju preimenovati u ***Goal***.

Za izračun marže (u %) za koji će maloprodajna cijena kravljeg sira po kilogramu iznositi 50 kuna pokrenut ćemo naredbu *Goal Seek* pa u dobivenom dijaloškom okviru upisati **L10** u polje *Set cell:*, **50** u polje *To value:* te **H3** u polje *By changing cell:*. Dobije se da je tražena marža 22,0 %.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a) kalkulacija za sav kupljeni sir											
2	Vrsta sira	količina /kg/	fakturna cijena	rabat %	neto fakt. cijena	trošak transporta	nabavna cijena	marža %	iznos marže (RUC)	MPC bez PDV-a	PDV%	MPC
3	Kravlji sir	400	14.000,00 kn	12%	12.320,00 kn	800,00 kn	13.120,00 kn	22,0%	2.880,00 kn	16.000,00 kn	25%	20.000,00 kn
4	Ovčji sir	300	18.000,00 kn	15%	15.300,00 kn	600,00 kn	15.900,00 kn	35,8%	5.700,00 kn	21.600,00 kn	25%	27.000,00 kn
5												
6	Trošak transporta bez PDV-a	1.400,00 kn										
7												
8	b) kalkulacija jediničnih cijena sira (cijena po kg sira)											
9		Vrsta sira	fakturna cijena	rabat %	neto fakt. cijena	trošak transporta	nabavna cijena	marža %	iznos marže (RUC)	MPC bez PDV-a	PDV%	MPC
10		Kravlji sir	35,00 kn	12%	30,80 kn	2,00 kn	32,80 kn	22,0%	7,20 kn	40,00 kn	25%	50,00 kn
11		Ovčji sir	60,00 kn	15%	51,00 kn	2,00 kn	53,00 kn	35,8%	19,00 kn	72,00 kn	25%	90,00 kn

Slika 2.46. *Primjer 2.13: Radni list s izračunanim vrijednostima.*

Za izračun marže (u %) za koji će maloprodajna cijena ovčjeg sira po kilogramu iznositi 80 kuna treba pokrenuti naredbu *Goal Seek* pa u dobivenom dijaloškom okviru upisati **L11** u polje *Set cell:*, **90** u polje *To value:* te **H4** u polje *By changing cell:*. Dobije se da je tražena marža 35,8 %.

Nadalje, treba ponovno kopirati radni list **Kalkulacija**, a kopiju preimenovati u ***Data***. Vrijednosti rabata na kravlji sir smjestit će se u stupac D na način da se početnu vrijednost od 9 % upiše u ćeliju D15, sljedeću od 10,5 % u ćeliju D16, a zatim se kreira niz do vrijednosti 18 % u ćeliji D21.

Dalje je potrebno u ćeliju E14 unijeti formulu **=G10** (nabavna cijena), a u ćeliju F14 **=L10** (MPC). Nakon toga treba označiti blok ćelija D14:F21, pokrenuti naredbu *Data Table* te u dobivenom dijaloškom okviru upisati D10 u polju *Column input cell:*. Dobiveni rezultat prikazan je na slici 2.47.

Rabat	NC kravljeg sira	MPC kravljeg sira
	32,80 kn	51,25 kn
9,0%	33,85 kn	52,89 kn
10,5%	33,33 kn	52,07 kn
12,0%	32,80 kn	51,25 kn
13,5%	32,28 kn	50,43 kn
15,0%	31,75 kn	49,61 kn
16,5%	31,23 kn	48,79 kn
18,0%	30,70 kn	47,97 kn

Slika 2.47. *Primjer 2.13: Podatkovna tablica s jednom varijablom i dvije izlazne veličine.*

Sada je potrebno ponovno kopirati radni list **Kalkulacija** pa kopiju preimenovati u ***Scenario***, zatim odabrati *Data/What-If Analysis/Scenario Manager* na vrpci izbornika te na dobivenom dijaloškom okviru *Scenario Manager* kliknuti na dugme *Add*. Na dobivenom dijaloškom okviru *Add Scenario* upisati Scenarij_1 u polje *Scenario name:* te adrese svih ćelija u kojima su zadani numerički podatci (podatci koji se mogu mijenjati) u polje *Changing cells:*, a to su redom: **B3:D4;H3:H4;K3:K4;B6**.

Klikom na dugme *OK* dobit će se dijaloški okvir *Scenario Values* gdje treba, klikom na dugme *OK*, prihvatiti ponuđene vrijednosti i ponovno se vratiti u dijaloški okvir *Scenario Manager*.

Tu kliknuti na dugme *Add* pa na dobivenom dijaloškom okviru *Add Scenario* upisati Scenarij_2 u polje *Scenario name:* te u polje *Changing cells:* adrese ćelija kojima se vrijednosti mijenjaju u ovom scenariju, a to su ćelije: **B3:B4;B6**.

Klikom na dugme *OK* prelazi se potom u dijaloški okvir *Scenario Values* gdje redom treba upisati vrijednosti koje se mijenjaju u ovom scenariju: u polje $B$3 upisati **14 %**, u polje $B$4 **18 %**, a u polje $B$6 **1050** (nova cijena transporta). Kreiranje scenarija završit će se klikom na dugme *OK* dijaloškog okvira *Scenario Values*.

Kratki izvještaj razmatranih scenarija kreira se klikom na dugme ***Summary*** dijaloškog okvira *Scenario Manager*.

Pojavit će se dijaloški okvir *Scenario Summary* u kojem je potrebno odabrati opciju *Scenario summary*, a u polje *Result cells:* upisati **L10:L11** (adrese ćelije u kojima su izračunane jedinične maloprodajne cijene sireva), nakon čega treba kliknuti na dugme *OK*.

Na posebnom radnom listu kreiran je traženi izvještaj, prikazan na slici 2.48.

Scenario Summary	Current Values:	Scenarij_1	Scenarij_2
Changing Cells:			
$B$3	400	400	400
$C$3	14.000,00 kn	14.000,00 kn	14.000,00 kn
$D$3	12%	12%	14%
$B$4	300	300	300
$C$4	18.000,00 kn	18.000,00 kn	18.000,00 kn
$D$4	15%	15%	18%
$H$3	25,0%	25,0%	25,0%
$H$4	30,0%	30,0%	30,0%
$K$3	25%	25%	25%
$B$6	1.400,00 kn	1.400,00 kn	1.050,00 kn
Result Cells:			
$L$10	51,25 kn	51,25 kn	49,38 kn
$L$11	86,13 kn	86,13 kn	82,39 kn

Slika 2.48. *Primjer 2.13: Kratki sažetak kreiranih scenarija.*

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 2_09:

Proizvođač bijele tehnike proizvodi tri modela perilica rublja: model PER_1 s brzinom vrtnje od 600 okretaja, PER_2 s 900 okretaja i PER_3 s 1200 okretaja, pri čemu uspijeva prodati svu proizvedenu količinu. Prodajne cijene po komadu su: 1.150 kuna za PER_1, 1.400 kuna za PER_2, a 1.600 kuna za PER_3.

Fiksni troškovi proizvođača su 859.600 kuna, dok su varijabilni troškovi po pojedinom modelu: 750 kuna po komadu PER_1, a proizvede ih se 600, 890 kuna po komadu PER_2, a proizvede ih se 950, te po komadu PER_3 970 kuna, a proizvede ih se 850.

Ako proizvođač ulaže u marketing 8 % ukupnog prihoda, potrebno je izračunati rezultat poslovanja pa taj izračun pohraniti kao **Scena_0**.

Kreirati zatim dva nova scenarija: prvi pod imenom **Scena_1**, u kojem će poduzeće u marketing uložiti 12 % prihoda očekujući da će to poboljšati plasman svih modela perilica za 10 %, te drugi pod imenom **Scena_2**, u kojem će se smanjiti fiksni troškovi poslovanja za 10 %, varijabilni modela PER_1 i PER_2 smanjiti za 20 kuna po komadu, a prodajna cijena modela PER_3 smanjiti za 50 kuna.

Kreirati kratki sadržaj scenarija u kojem treba prikazati ukupni prihod, ukupni trošak i rezultat poslovanja.

Odgovor:

Scenario Summary				
	Current Values:	Scena_0	Scena_1	Scena_2
Changing Cells:				
$B$4	600	600	660	600
$B$5	950	950	1045	950
$B$6	850	850	935	850
$B$7	1.150,00 kn	1.150,00 kn	1.150,00 kn	1.150,00 kn
$B$8	1.400,00 kn	1.400,00 kn	1.400,00 kn	1.400,00 kn
$B$9	1.600,00 kn	1.600,00 kn	1.600,00 kn	1.550,00 kn
$B$10	750,00 kn	750,00 kn	750,00 kn	730,00 kn
$B$11	890,00 kn	890,00 kn	890,00 kn	870,00 kn
$B$12	970,00 kn	970,00 kn	970,00 kn	970,00 kn
$B$16	8%	8%	12%	8%
$B$19	859.600,00 kn	859.600,00 kn	859.600,00 kn	773.640,00 kn
Result Cells:				
$B$14	3.380.000,00 kn	3.380.000,00 kn	3.718.000,00 kn	3.337.500,00 kn
$B$20	3.250.000,00 kn	3.250.000,00 kn	3.637.760,00 kn	3.129.640,00 kn
$B$22	130.000,00 kn	130.000,00 kn	80.240,00 kn	207.860,00 kn

Slika 2.Z.4. *Zadatak 2_09: Sažetak scenarija.*

Zadatak 2_10:

Pogon proizvodne tvrtke finalizira četiri proizvoda: PA, PB, PC i PD, za koje ima osigurano tržište. U tablici na slici 2.Z.5 prikazana je cijena sata rada i jedinične cijene ugrađenog materijala te potreban broj sati, potrebna količina materijala i prodajna cijena pojedinog proizvoda. Prikazane su i količine pojedinih proizvoda koji se finaliziraju.

	A	B	C	D	E
1	Cijena resursa				
2	Cijena sata rada	95,00 kn			
3	Jedinična cijena materijala	55,00 kn			
4					
5		PA	PB	PC	PD
6	Potrebni sati rada po kom	3	4	5	7
7	Potrebna količina materijala po kom	4	3	4	3
8	Jedinična prodajna cijena	550,00 kn	590,00 kn	710,00 kn	890,00 kn
9	Trošak rada po kom				
10	Trošak materijala po kom				
11	Dobit po kom				
12	Količina proizvedenih komada	110	180	60	80
13	Ukupna dobit po svakom tipu proizvoda				
14					
15					
16	UKUPNA DOBIT PROIZVOĐAČA				

Slika 2.Z.5. *Zadatak 2_10: Radni list sa zadanim podatcima.*

Odrediti dobit po pojedinom tipu proizvoda i ukupnu dobit proizvođača. Provedeni izračun pohraniti pod imenom **Očekivano**.

Kreirati zatim dva nova scenarija: prvi pod imenom **Bolje** u kojem će cijena rada iznositi 87 kuna po satu, dok će jedinična cijena materijala biti 50 kuna, te drugi, pod imenom **Lošije**, u kojem će cijena rada iznositi 98 kuna po satu, dok će jedinična cijena materijala biti 64 kune.

Kreirati kratki sadržaj scenarija u kojem treba prikazati ukupne dobiti po svakom tipu proizvoda i ukupnu dobit proizvođača.

Odgovor:

Scenario Summary				
	Current Values:	Očekivano	Bolje	Lošije
Changing Cells:				
$B$2	95,00 kn	95,00 kn	87,00 kn	98,00 kn
$B$3	55,00 kn	55,00 kn	50,00 kn	64,00 kn
$B$6	3	3	3	3
$C$6	4	4	4	4
$D$6	5	5	5	5
$E$6	7	7	7	7
$B$7	4	4	4	4
$C$7	3	3	3	3
$D$7	4	4	4	4
$E$7	3	3	3	3
$B$8	550,00 kn	550,00 kn	550,00 kn	550,00 kn
$C$8	590,00 kn	590,00 kn	590,00 kn	590,00 kn
$D$8	710,00 kn	710,00 kn	710,00 kn	710,00 kn
$E$8	890,00 kn	890,00 kn	890,00 kn	890,00 kn
$B$12	110	110	110	110
$C$12	180	180	180	180
$D$12	60	60	60	60
$E$12	80	80	80	80
Result Cells:				
$B$13	4.950,00 kn	4.950,00 kn	9.790,00 kn	- kn
$C$13	8.100,00 kn	8.100,00 kn	16.560,00 kn	1.080,00 kn
$D$13	900,00 kn	900,00 kn	4.500,00 kn	- 2.160,00 kn
$E$13	4.800,00 kn	4.800,00 kn	10.480,00 kn	960,00 kn
$B$16	18.750,00 kn	18.750,00 kn	41.330,00 kn	- 120,00 kn

Slika 2.Z.6. *Zadatak 2_10: Sažetak scenarija.*

3. LINEARNO PROGRAMIRANJE: Grafički pristup

3.1. Linearne jednadžbe

Jednadžba je matematički pojam, a njome se izražava veza između poznatih i nepoznatih veličina uz pomoć znaka jednakosti.

Ovisno o broju nepoznatih veličina sadržanih u jednadžbi razlikuju se jednadžbe s jednom, dvije ili više nepoznanica.

Linearne jednadžbe su one jednadžbe u kojima se sve nepoznate veličine (nepoznanice, varijable) pojavljuju isključivo na 1. potenciju.

Rješenja linearnih jednadžba mogu se prikazati grafički, što je važno i u analizi veličine koja se jednadžbom izračunava i varijabla koje na te veličine utječu.

Grafom se, nažalost, veličine mogu prikazati samo u ograničenom broju problema i to onda kada na te veličine utječu do najviše tri varijable.

3.1.1. Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom

Linearnom jednadžbom s jednom nepoznanicom naziva se jednadžba oblika

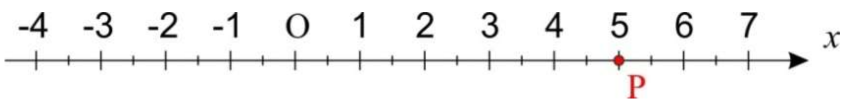
$$\mathrm{A} \cdot x = \mathrm{B} \qquad \textbf{(3.1)}$$

gdje je x nepoznata veličina koja se traži (varijabla), a A i B zadane veličine (A i B su parametri jednadžbe; A je različit od nule).

Rješenje linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom jest ona vrijednost (realan broj) koju treba poprimiti varijabla x pa da ta jednadžba bude zadovoljena, tj.

$$x = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$

i može se prikazati jednom jedinstvenom točkom (npr. P=5,0) na brojevnom pravcu



Slika 3.1. *Brojevni pravac.*

Tablica 3.1. *Primjeri linearnih jednadžba s jednom nepoznanicom.*

Jednadžba	Rješenje
a) $7 \cdot x - 56 = 0$	$7 \cdot x = 56, \quad x = \frac{56}{7} = 8$
b) $3 \cdot (2 \cdot x - 8) = -16$	$6 \cdot x - 24 = -16, \quad 6 \cdot x = 8, \quad x = \frac{4}{3}$
c) $(2 \cdot x - 3)^2 - 4 \cdot x^2 = 6$	$4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 - 4 \cdot x^2 = 6, \ -12 \cdot x = -3, \quad x = \frac{1}{4}$

3.1.2. Linearne jednadžbe s dvije nepoznanice

Linearnom jednadžbom s dvije nepoznanice naziva se jednadžba oblika

$$\mathrm{A}\cdot x+\mathrm{B}\cdot y=\mathrm{C} \tag{3.2}$$

gdje su x i y nepoznate veličine (varijable, nepoznanice), a A, B i C su zadane veličine (parametri jednadžbe; $\mathrm{A}\neq 0;\ \mathrm{B}\neq 0$).

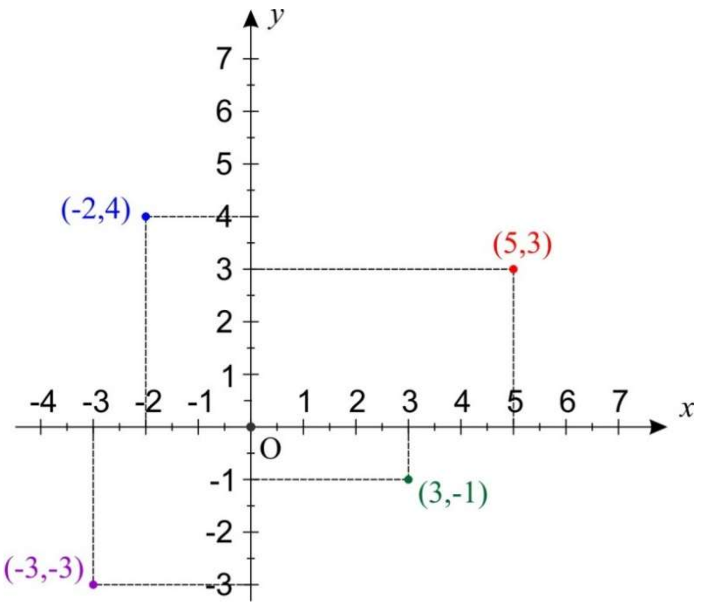
Tablica 3.2. *Primjeri linearnih jednadžba s dvije nepoznanice.*

Jednadžba	Parametri
a) $3\cdot x-5\cdot y=6$	$\mathrm{A}=3,\quad \mathrm{B}=-5,\quad \mathrm{C}=6$
b) $-3\cdot x=2\cdot y-1$	$\mathrm{A}=-3,\quad \mathrm{B}=-2,\quad \mathrm{C}=-1$
c) $y=\frac{3}{4}\cdot x-5$	$\mathrm{A}=-\frac{3}{4},\quad \mathrm{B}=1,\quad \mathrm{C}=-5$

Rješenje linearne jednadžbe s dvije nepoznanice je skup svih vrijednosti nepoznanica x i y za koje će jednadžba (3.2) biti zadovoljena. Svaka kombinacija nepoznanica x i y koja zadovoljava jednadžbu (3.2) može se prikazati točkom u ravnini.

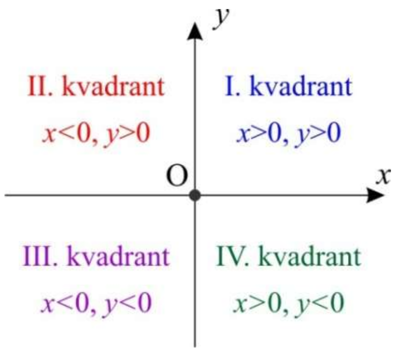
Kada je naime riječ o dvodimenzionalnom problemu, tada je točka određena s dva realna broja (dvjema koordinatama): jednim na horizontalnoj liniji (os x, odnosno koordinatna os x), a drugim na vertikalnoj liniji (os y, odnosno koordinatna os y).

Presjecište tih dviju koordinatnih osi naziva se ishodištem O, a koordinatni sustav Oxy naziva se pravokutni ili Cartesiev (Descartesov) koordinatni sustav (slika 3.2).



Slika 3.2. *Pravokutni koordinatni sustav.*

Koordinatne osi x i y dijele ravninu koordinatnog sustava sustava Oxy na četiri dijela – četiri kvadranta, sa svojstvima prikazanima na slici 3.3.



Slika 3.3. *Kvadranti pravokutnog koordinatnog sustava i njihova svojstva.*

Nadalje, može se pokazati da sve točke koje zadovoljavaju jednadžbu (3.2), dakle sve kombinacije x-eva i y-a za koje je ta jednadžba zadovoljena, leže na istom pravcu. Stoga se linearna jednadžba (3.2) naziva i jednadžbom pravca. Zaključuje se da je pravac u ravnini potpuno određen s tri neovisna podatka (A, B i C).

Budući da je pravac definiran dvjema točkama koje na njemu leže, za crtanje pravca – rješenja linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, potrebno je odrediti koordinate dviju njegovih točaka.

Dvije točke koje se obično najlakše odrede su one u kojima pravac presijeca osi koordinatnog sustava jer je u presjecištu pravca s osi x koordinata y jednaka nuli, dok je u presjecištu pravca s osi y koordinata x jednaka nuli.

Presjecište zadanog pravca s osi x dobije se uvrštenjem vrijednosti koordinate $y=0$ u jednadžbu (3.2):

$$\mathrm{A}\cdot x+\mathrm{B}\cdot 0=\mathrm{C}$$

odakle je x_0= C/A.

Presjecište zadanog pravca s osi y dobije se uvrštenjem vrijednosti koordinate $x=0$ u jednadžbu (3.2):

$$\mathrm{A}\cdot 0+\mathrm{B}\cdot y=\mathrm{C}$$

odakle je y_0= C/B.

Ako je u jednadžbi (3.2) B=0, tada je:

$$\mathrm{A}\cdot x+0\cdot y=\mathrm{C} \text{ pa je}$$

$$\mathrm{A}\cdot x=\mathrm{C} \quad \textit{ili} \quad x=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}=\mathrm{D}_1 \tag{3.3}$$

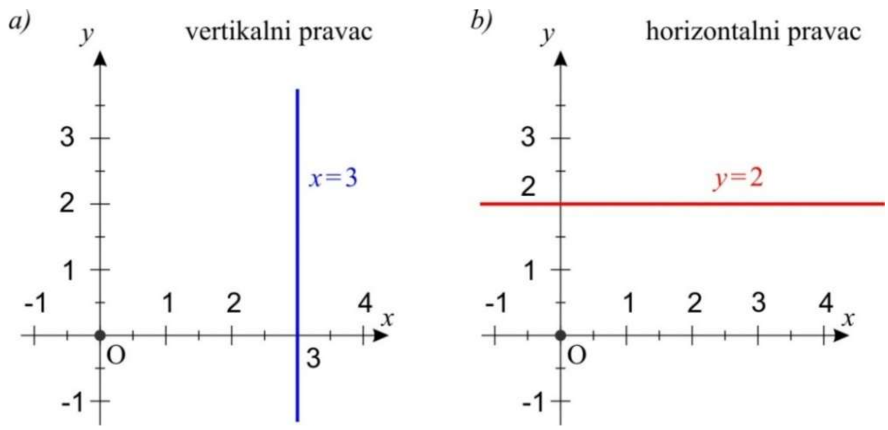
što je jednadžba vertikalnog pravca (pravca paralelnog s osi y – slika 3.4.a).

Ako je u jednadžbi (3.2) A=0, tada je:

$$0\cdot x+\mathrm{B}\cdot y=\mathrm{C} \text{ pa je}$$

$$\mathrm{B}\cdot y=\mathrm{C} \quad \textit{ili} \quad y=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}=\mathrm{D}_2 \tag{3.4}$$

što je jednadžba horizontalnog pravca (pravca paralelnog s osi x – slika 3.4.b).



Slika 3.4. *Pravci paralelni s koordinatnim osima: a) vertikalni pravac, b) horizontalni pravac.*

Ako je u jednadžbi (3.2) C=0, tada je:

$$\mathrm{A}\cdot x+\mathrm{B}\cdot y=0.$$

Uzme li se sada da je $x=0$, mora biti i $y=0$ kako bi se zadovoljila promatrana jednadžba, pa se zaključuje da taj pravac prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava.

Druga točka neophodna za crtanje ovog pravca dobije se uzimanjem da je $x=x_1$ (x_1 je po volji odabran broj), kada iz gornje jednadžbe slijedi:

$$\mathrm{A}\cdot x_1+\mathrm{B}\cdot y=0 \quad ili \quad y=-\frac{\mathrm{A}\cdot x_1}{\mathrm{B}}=y_1. \qquad \textbf{(3.5)}$$

Postupak crtanja pravca zadanog linearnom jednadžbom je sljedeći:

1. Odabrati mjerila varijabla koje se nanose na horizontalnu, odnosno na vertikalnu os. Ta mjerila ne moraju biti jednaka, a najčešće to i nisu. Odabiru se tako da korisnik u vidljivom području dobije onaj dio grafa koji ga zanima.
2. Kreirati tablicu koja će pomoći da se odrede presjecišta zadanog pravca s koordinatnim osima:

x	y
0	y_0
x_0	0

   Napomena:
   - ako neko od presjecišta ne pada u vidljivo područje grafa, tada se traži dodatna točka (x_1, y_1) koja se nalazi na zadanom pravcu i u vidljivom području;
   - ako pravac prolazi ishodištem, također se traži dodatna točka koja se nalazi na promatranom pravcu (prema 3.5) i u vidljivom području grafa.
3. Provući pravac dobivenim točkama.

Primjer 3.1.

Nacrtati pravac (odnosno skup svih točaka ravnine O*xy*) koji predstavlja rješenje zadane linearne jednadžbe. Nacrtati dio pravca u I. kvadrantu.

a) $5 \cdot x + 6 \cdot y = 30$

b) $200 \cdot x + 3 \cdot y = 1800$

c) $-x + 1{,}5 \cdot y = 150$

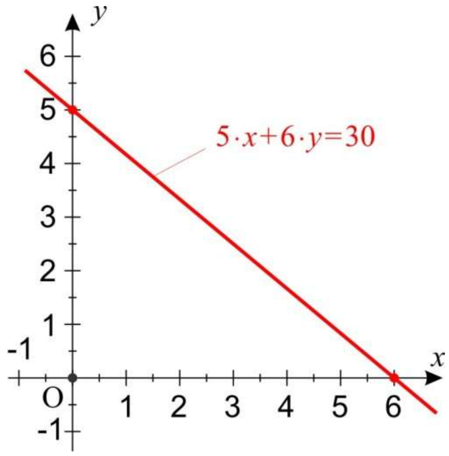
d) $y = 0{,}75 \cdot x$

Rješenje:

a) Presjecišta pravca $5 \cdot x + 6 \cdot y = 30$ s koordinatnim osima su:

x	y
0	5
6	0

Odabirom jednakog mjerila za obje koordinatne osi (vrijednost 1 odgovara 1 cm na crtežu) dobije se rješenje prikazano na slici 3.5.

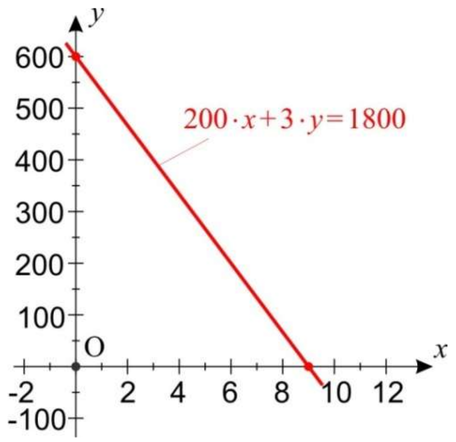


Slika 3.5. *Pravac: Rješenje jednadžbe 3.1.a.*

b) Presjecišta pravca $200 \cdot x + 3 \cdot y = 1800$ s koordinatnim osima su:

x	y
0	600
9	0

Odabirom mjerila za os x (vrijednost 1 odgovara 0,5 cm na crtežu) i os y (vrijednost 100 odgovara 1 cm na crtežu) dobije se rješenje prikazano na slici 3.6.



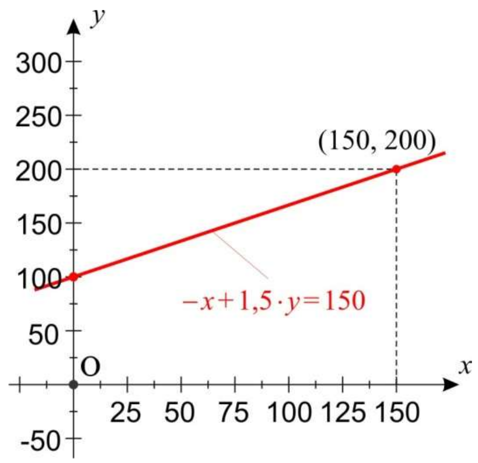
Slika 3.6. *Pravac: Rješenje jednadžbe 3.1.b.*

c) Presjecišta pravca $-x+1,5\cdot y=150$ s koordinatnim osima su:

x	y
0	100
-150	0

Kako je druga točka daleko izvan I. kvadranta, umjesto nje potrebno je odabrati novu točku: ako se uzme da je $y_1=200$, tada je $-x=150-1,5\cdot 200=-150$ ili $x=x_1=150$.

Odabirom mjerila za os x (vrijednost 25 odgovara 1 cm na crtežu) i os y (vrijednost 50 odgovara 1 cm na crtežu) dobije se rješenje prikazano na slici 3.7.

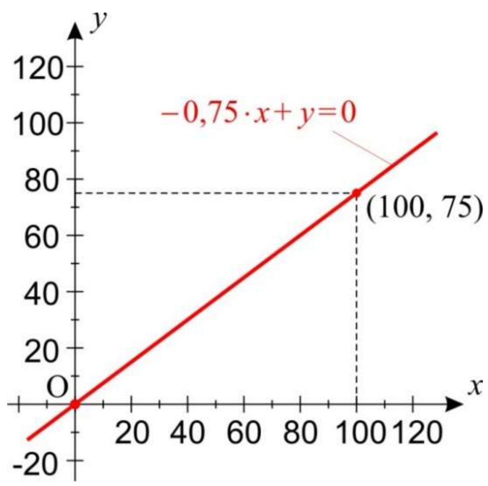


Slika 3.7. *Pravac: Rješenje jednadžbe 3.1.c.*

d) Jednadžba $y=0,75\cdot x$ može se napisati u obliku $-0,75\cdot x+y=0$ što znači da je rješenje te jednadžbe pravac koji prolazi kroz ishodište (za $x=0$ bit će i $y=0$).

Za crtanje traženog pravca potrebno je pronaći koordinate još jedne njegove točke: ako se uzme da je $x_1=100$, tada je $y=0,75\cdot 100=75=y_1$.

Odabirom jednakog mjerila za obje koordinatne osi (vrijednost 20 odgovara 1 cm na crtežu) dobije se rješenje prikazano na slici 3.8.



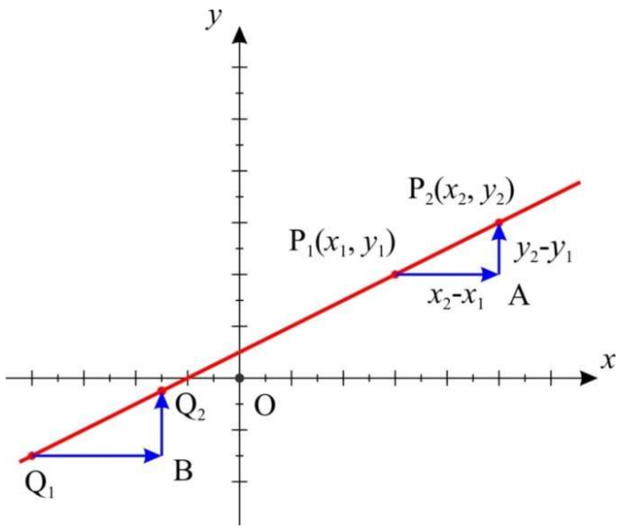
Slika 3.8. *Pravac: Rješenje jednadžbe 3.1.d.*

3.1.2.1. Paralelnost i okomitost pravaca

Nagibom pravca (koeficijentom smjera) k naziva se omjer prirasta vrijednosti varijable y (Δy) i prirasta varijable x (Δx) između dviju po volji odabranih točaka pravca (slika 3.9):

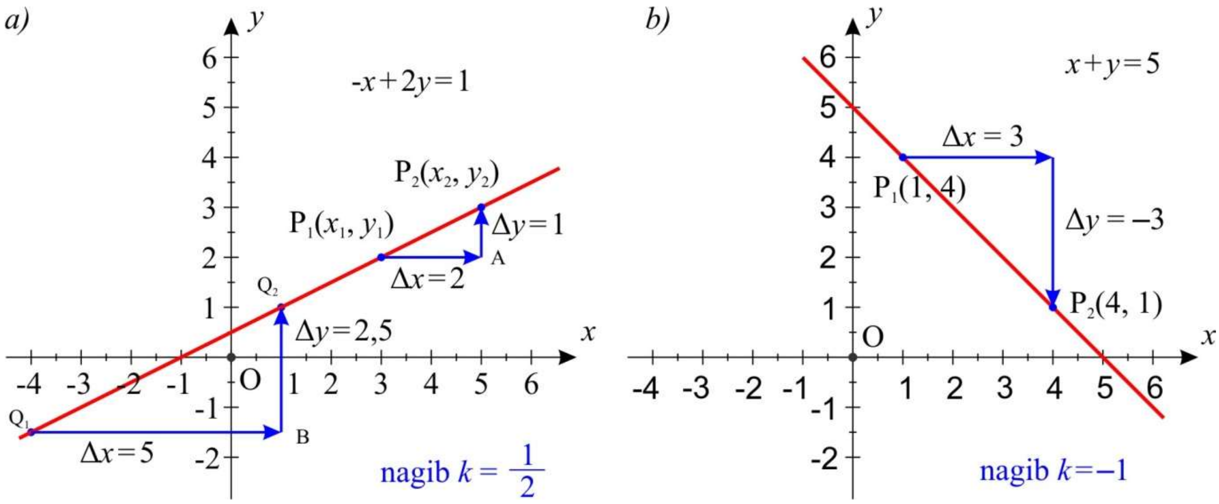
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\mathrm{A}x_2 + \mathrm{C}}{\mathrm{B}} - \frac{-\mathrm{A}x_1 + \mathrm{C}}{\mathrm{B}}}{x_2 - x_1} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \qquad \textbf{(3.6)}$$

uz uvjet da je $x_2 - x_1 \neq 0$, tj. da se ne radi o vertikalnom pravcu



Slika 3.9. *Koeficijent smjera pravca.*

Iz izraza **(3.6)** proizlazi da je nagib horizontalnog pravca jednak nuli (jer je $y_2 - y_1 = 0$).



Slika 3.10. *Predznak koeficijenta smjera pravca: a) pozitivan, b) negativan.*

Ako s porastom vrijednosti varijable x raste i varijabla y, odnosno ako se sa smanjivanjem vrijednosti x-a smanjuje i vrijednost y-a, tada je nagib pravca pozitivan (k>0, slika 3.10.a).

Ako se s porastom vrijednosti varijable x smanjuje varijabla y, odnosno ako se sa smanjivanjem vrijednosti x-a povećava vrijednost y-a, tada je nagib pravca negativan (k<0, slika 3.10.b).

Jednadžba pravca se, osim izrazom (3.2), a ovisno o veličinama koje su poznate, prikazuje na različite načine (kako je to prikazano u tablici 3.3).

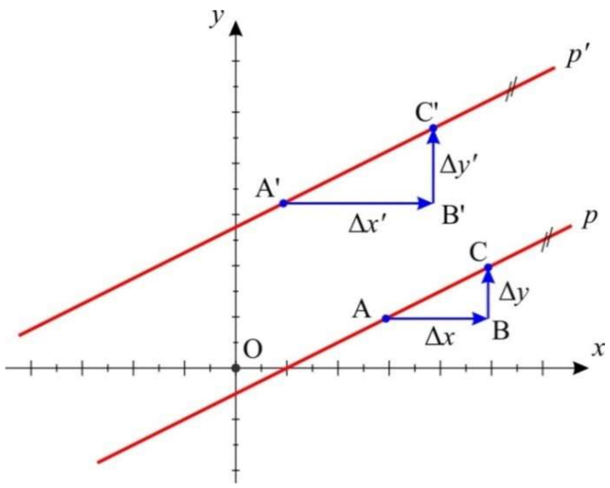
Tablica 3.3. *Različiti načini definiranja jednadžbe pravca.*

Poznate veličine	Jednadžba pravca
1. nagib k i koordinate točke $P_1(x_1; y_1)$	- odabirom proizvoljne točke pravca $P(x; y)$, prema (3.6) je $k = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$, pa slijedi $y - y_1 = k(x - x_1)$ **(3.7)**
2. nagib k i presjecište pravca s osi y, tj. točka $P_y(0; y_0)$	- uvrštenjem koordinata točke P_y u jednadžbu (3.7) $y - y_0 = k(x - 0)$ dobije se $y = k \cdot x + y_0$ **(3.8)** (to je tzv. eksplicitni oblik jednadžbe pravca)
3. poznate koordinate dviju točaka pravca, $P_1(x_1; y_1)$ i $P_2(x_2; y_2)$	- iz zadanih koordinata može se prema (3.6) odrediti k: $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pa slijedi $y - y_1 = k(x - x_1)$ **(3.9)**

Paralelnost pravaca: Dva su pravca p i p' paralelna onda i samo onda ako imaju jednake nagibe (jednake koeficijente smjera), tj. ako vrijedi

$$k = k'. \tag{3.10}$$

To se može dokazati uz pomoć sličnosti trokuta na slici 3.11.



Slika 3.11. *Paralelnost pravaca.*

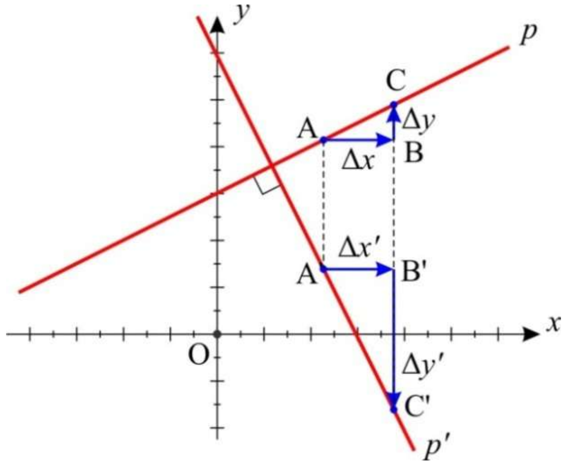
Naime, ako su pravci p i p' na slici paralelni, tada su trokuti ABC i A'B'C' slični (trokuti s međusobno paralelnim stranicama) pa su omjeri duljina stranica jednaki. Zato se može pisati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}, \quad \text{odakle slijedi} \quad k = k'.$$

Paralelni pravci nemaju nijednu zajedničku točku ili su im, ako se preklapaju, sve točke zajedničke.

Okomitost pravaca: Dva su pravca p i p' okomita onda i samo onda ako je nagib jednog pravca jednak negativnoj recipročnoj vrijednosti nagiba drugog pravca, tj. ako je

$$k = -\frac{1}{k'}. \qquad \textbf{(3.11)}$$



Slika 3.12. *Okomitost pravaca.*

Ako su pravci p i p' na gornjoj slici okomiti, tada su trokuti ABC i A'B'C' slični i zakrenuti za 90° (trokuti s međusobno okomitim stranicama, slika 3.12) pa se, imajući u vidu da je $\Delta y' < 0$ može pisati:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x'}{|\Delta y'|} = k, \text{ a kako je } \frac{|\Delta y'|}{\Delta x'} = -k' \text{ jer je } \Delta y' < 0, \text{ slijedi da je } \quad k = -\frac{1}{k'}.$$

Primjer 3.2.

Pravac je zadan jednadžbom:

$$5 \cdot x + 6 \cdot y = 30.$$

Odrediti jednadžbu pravca:

a) koji je paralelan sa zadanim pravcem i prolazi točkom T(12, 10);

b) koji je okomit na zadani pravac i presijeca os y u točki $y_0 = 10$.

Rješenje:

a) Koeficijent smjera zadanog pravca je $k = -\mathrm{A} / \mathrm{B} = -5/6$, a iz uvjeta paralelnosti slijedi da je i koeficijent smjera traženog paralelnog pravca jednak: $k_p = k = -5/6$.

   Sada je poznat koeficijent smjera pravca i točka T(12, 10) kojom taj pravac prolazi, pa se može primijeniti izraz **(7)**:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad \text{odnosno}$$

$$y - 10 = -\frac{5}{6}(x - 12),$$

što nakon sređivanja daje:

$$5 \cdot x + 6 \cdot y = 120.$$

b) Koeficijent smjera zadanog pravca je $k = -\mathrm{A}/\mathrm{B} = -5/6$, a iz uvjeta okomitosti slijedi da je koeficijent smjera traženog okomitog pravca:

$$k_o = -\frac{1}{k} = \frac{6}{5}.$$

Sada je poznat koeficijent smjera pravca i točka $y_0 = 10$ u kojoj taj pravac presijeca os *y*, pa se može primijeniti izraz **(8)**:

$$y = k_o \cdot x + y_0, \quad \text{odnosno}$$

$$y = \frac{6}{5}x + 10$$

što se može prikazati i u obliku:

$$-6 \cdot x + 5 \cdot y = 50.$$

3.2. Linearne nejednadžbe

Nejednadžba je matematički pojam, a njome se izražava veza između poznatih i nepoznatih veličina uz pomoć znaka nejednakosti.

Nejednadžba se dobije kada se znak jednakosti u jednadžbi zamijeni znakom $<$ (manje od), $\leq$ (jednako ili manje od), $>$ (veće od) ili $\geq$ (jednako ili veće od).

Nejednakosti sa znakom < i > nazivaju se strogim nejednakostima jer ne dopuštaju jednakost desne i lijeve strane nejednadžbe.

Linearne nejednadžbe su one u kojima se sve varijable pojavljuju isključivo na 1. potenciju.

Ovisno o broju nepoznatih veličina sadržanih u nejednadžbi razlikuju se nejednadžbe s jednom, dvije ili više nepoznanica.

Rješenje linearne nejednadžbe je skup svih kombinacija varijabla (nepoznanica) koje zadovoljavaju zadanu nejednadžbu, a mogu se kao i kod jednadžba prikazati grafički.

Ako varijable moraju istodobno zadovoljiti više od jedne nejednadžbe, tada je riječ o sustavu nejednadžba pri čemu je rješenje sustava presjek rješenja svake od nejednadžba.

3.2.1. Linearne nejednadžbe s jednom nepoznanicom

Linearnom nejednadžbom s jednom nepoznanicom naziva se nejednadžba oblika

$$\mathrm{A} \cdot x < \mathrm{B} \quad \text{ili} \quad \mathrm{A} \cdot x \leq \mathrm{B} \quad \text{ili} \quad \mathrm{A} \cdot x \geq \mathrm{B} \quad \text{ili} \quad \mathrm{A} \cdot x > \mathrm{B} \qquad \textbf{(3.12)}$$

gdje je *x* nepoznata veličina (varijabla), a A i B zadane veličine (parametri nejednadžbe).

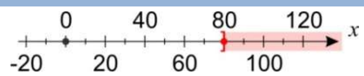
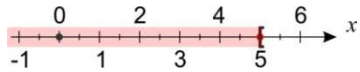
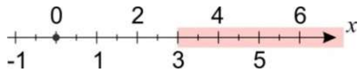
Rješenje linearne nejednadžbe s jednom nepoznanicom (3.12) jest skup svih točaka na brojevnom pravcu koje zadovoljavaju zadanu nejednadžbu.

Zamijeni li se znak nejednakosti u zadanoj nejednadžbi znakom jednakosti, dobit će se točka P na brojevnom pravcu kojoj je $x = \mathrm{B}/\mathrm{A}$. Ta se točka naziva graničnom točkom, a skup rješenja zadane nejednadžbe, ovisno o znaku nejednakosti, čine:

- $<$ – sve točke brojevnog pravca lijevo od granične točke, bez točke P;
- $\leq$ – sve točke brojevnog pravca lijevo od granične točke, uključujući i točku P;
- $\geq$ – sve točke brojevnog pravca desno od granične točke, uključujući i točku P;
- $>$ – sve točke brojevnog pravca desno od granične točke, bez točke P.

Primjeri rješenja linearnih nejednadžba s jednom nepoznanicom dan je tablici 3.4 (sjenčen je dio koji ne pripada skupu rješenja zadane nejednadžbe).

Tablica 3.4. *Rješenja nejednadžba s jednom nepoznanicom.*

Nejednadžba		Rješenje	
a)	$4 \cdot x \leq 320$	$x \leq 80$,	
b)	$5 \cdot x - 25 \geq 0$	$x \geq 5$,	
c)	$7 \cdot (2 \cdot x - 3) < 21$	$x < 3$,	

3.2.2. Linearne nejednadžbe s dvije nepoznanice

Linearnom nejednadžbom s dvije nepoznanice naziva se nejednadžba oblika

$$\mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y < \mathrm{C} \text{ ili } \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y \leq \mathrm{C} \text{ ili } \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y \geq \mathrm{C} \text{ ili } \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y > \mathrm{C} \qquad \textbf{(3.13)}$$

gdje su x i y nepoznate veličine (varijable, nepoznanice), a A, B i C su zadane veličine (parametri nejednadžbe).

Rješenje linearne nejednadžbe s dvije nepoznanice je skup svih kombinacija nepoznanica x i y (svih točaka ravnine Oxy) za koje će jednadžba (3.13) biti zadovoljena.

Zamijeni li se znak nejednakosti u zadanoj nejednadžbi znakom jednakosti, dobit će se linearna jednadžba s dvije nepoznanice

$$\mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y = \mathrm{C}$$

rješenje koje je pravac. Taj se pravac naziva graničnim pravcem zadane nejednadžbe.

Rješenje svake linearne nejednadžbe je poluravnina iznad ili ispod graničnog pravca te nejednadžbe. To se grafički prikazuje na način da se osjenča ona poluravnina koja ne pripada skupu rješenja.

Da bi se odredilo koja od poluravnina zadovoljava promatranu nejednadžbu, odabire se kontrolna točka koja se ne nalazi na graničnom pravcu te nejednadžbe. Ako koordinate kontrolne točke zadovoljavaju zadanu nejednadžbu, tada je rješenje poluravnina kojoj pripada i kontrolna točka, u suprotnom je rješenje druga poluravnina (poluravnina kojoj ne pripada kontrolna točka).

Za kontrolnu je točku najjednostavnije odabrati ishodište O s koordinatama (0,0), kada će lijeva strana nejednadžbe biti jednaka nuli i lako je utvrditi zadovoljava li ta točka promatranu nejednadžbu, ili ne. Ishodište se ne može uzeti za kontrolnu točku samo tada kada granični pravac promatrane nejednadžbe upravo prolazi ishodištem (tj. kada je C=0). U tom je slučaju najjednostavnije za kontrolnu točku odabrati neku točku na jednoj od koordinatnih osi: ako se odabere točka na osi x, bit će pripadajući y jednak nuli, a odabere li se točka na osi y, bit će pripadajući x jednak nuli.

Ako je znak nejednakosti u zadanoj nejednadžbi < ili >, takva se nejednakost naziva strogom pa granični pravac ne pripada skupu rješenja te nejednadžbe i crta se crtkano. U suprotnom, tj. ako je znak nejednakosti u zadanoj nejednadžbi $\leq$ ili $\geq$, tada granični pravac pripada skupu rješenja te nejednadžbe i crta se punom crtom.

Sustav linearnih nejednadžba čine dvije ili više nejednadžba koje istodobno moraju zadovoljiti kombinacije varijable x i y.

Rješenje sustava linearnih nejednadžba jest presjek pojedinačnih rješenja svih nejednadžba sustava, te predstavlja dio ravnine Oxy definiran segmentima graničnih pravaca, a može biti omeđen, neomeđen ili prazan (ne postoji niti jedna kombinacija varijabla x i y koja istodobno zadovoljava sve nejednadžbe sustava).

Tablica 3.5. *Pravila u postupcima rješavanja nejednadžba.*

Pravilo	Primjer
1. Svakoj se strani nejednadžbe može dodati ili oduzeti isti broj: ako je $x > y$, tada je i $x + a > y + a$ za bilo koji realni broj a.	$x > y$ implicira $x+12 > y+12$
2. Obje se strane nejednadžbe mogu pomnožiti ili podijeliti pozitivnom konstantom: ako je $x \leq y$, tada je i $a \cdot x > a \cdot y$ za bilo koji pozitivni broj a.	$x \leq y$ implicira $7 \cdot x \leq 7 \cdot y$
3. Obje se strane nejednadžbe mogu pomnožiti ili podijeliti negativnom konstantom ako se pri tom promijeni znak nejednakosti: ako je $x \leq y$ i a negativan, tada je $a \cdot x \geq a \cdot y$.	$x \leq y$ implicira $-4 \cdot x \geq -4 \cdot y$
4. Strane nejednadžbe mogu zamijeniti svoja mjesta ako se pri tom promijeni znak nejednakosti: ako je $x \leq y$, tada je $y \geq x$.	$2 \cdot x \leq 5 \cdot y$ implicira $5 \cdot y \geq 2 \cdot x$
5. Strane nejednadžbe mogu se zapisati u recipročnom obliku ako se pri tom promijeni znak nejednakosti: ako je $x \leq y$, tada je $(1/x) \geq (1/y)$.	$\frac{x}{3} \leq \frac{y}{2}$ implicira $\frac{3}{x} \geq \frac{2}{y}$

U izvođenju matematičkih operacija nad linearnim nejednadžbama vrijede pravila prikazana u tablici 3.5.

Primjer 3.3.

Riješiti sljedeće nejednadžbe:

a) $2\cdot x+3\cdot y>12$ b) $2\cdot x-y\leq -4$

Rješenje:

a) Jednadžba graničnog pravca nejednadžbe $2\cdot x+3\cdot y>12$ glasi

$$2\cdot x+3\cdot y=12,$$

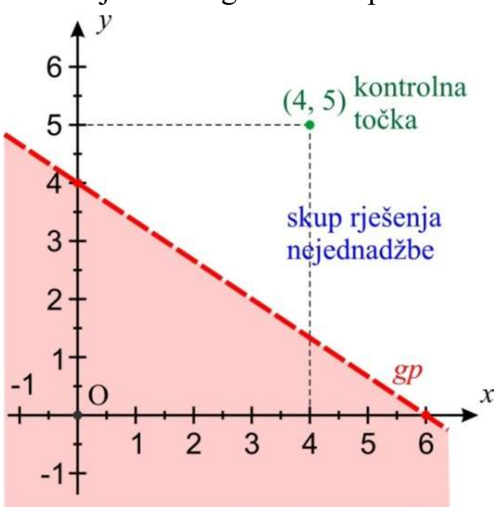
a točke u kojima taj pravac presijeca osi *x* odnosno *y* su

x	*y*
0	4
6	0

Na slici 3.13 granični pravac prikazan je crtkanom linijom jer je nejednakost stroga pa točke pravca ne pripadaju skupu rješenja nejednadžbe.
Uvrštenjem koordinata kontrolne točke, npr. točke (4, 5) u nejednadžbu dobije se

$$2\cdot 4+3\cdot 5=23$$

što je veće od 12, pa se zaključuje da je odabrana kontrolna točka u skupu rješenja zadane nejednadžbe; slijedi zaključak da sve točke poluravnine u kojoj se nalazi kontrolna točka (poluravnina iznad graničnog pravca) pripadaju skupu rješenja te se sjenči druga, donja poluravnina (slika 3.13).
Da je za kontrolnu točku odabrano ishodište (0, 0), lako bi se pokazalo da ta točka ne pripada skupu rješenja, kao niti jedna druga točka iz poluravnine u kojoj je ishodište.



Slika 3.13. *Primjer 3.3.a.*

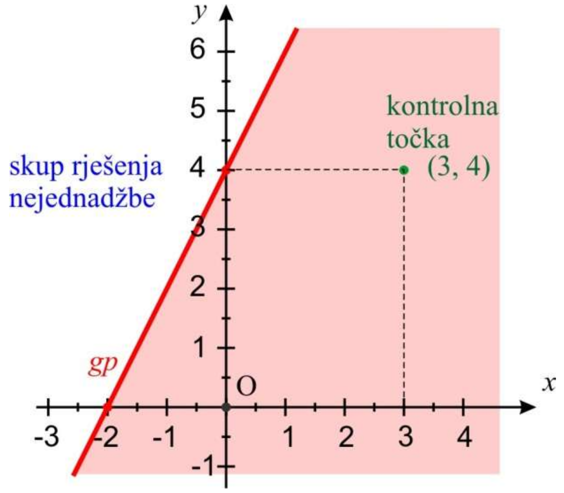
b) Jednadžba graničnog pravca nejednadžbe $2\cdot x-y\leq -4$ glasi

$$2\cdot x-y=-4,$$

a točke u kojima taj pravac presijeca osi *x* odnosno *y* su

x	y
0	4
-2	0

Na slici 3.14 granični pravac prikazan je punom linijom jer nejednakost nije stroga pa i sve točke pravca pripadaju skupu rješenja nejednadžbe.



Slika 3.14. *Primjer 3.3.b.*

Uvrštenjem koordinata kontrolne točke, npr. točke (3, 4) u nejednadžbu dobije se

$$2 \cdot 3 - 4 = 2$$

što nije manje ili jednako od -4, pa se zaključuje da odabrana kontrolna točka nije u skupu rješenja zadane nejednadžbe. Slijedi zaključak da sve točke poluravnine u kojoj se ne nalazi kontrolna točka (poluravnina iznad graničnog pravca) pripadaju skupu rješenja te se sjenči donja poluravnina (slika 3.14).

Primjer 3.4.

Odrediti skup točaka ravnine Oxy koje zadovoljavaju zadani sustav nejednadžba:

a) $$2 \cdot x + y \geq 6$$
$$x - 2 \cdot y \geq 2$$

b) $$x + 2 \cdot y \leq 280$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y \leq 480$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Rješenje:

a) Odgovarajući granični pravci nejednadžba zadanog sustava su:

$2 \cdot x + y = 6$ (gp1); $x - 2 \cdot y = 2$ (gp2).

Ti pravci imaju s osima x i y sljedeća presjecišta

gp1:

x	y
0	6
3	0

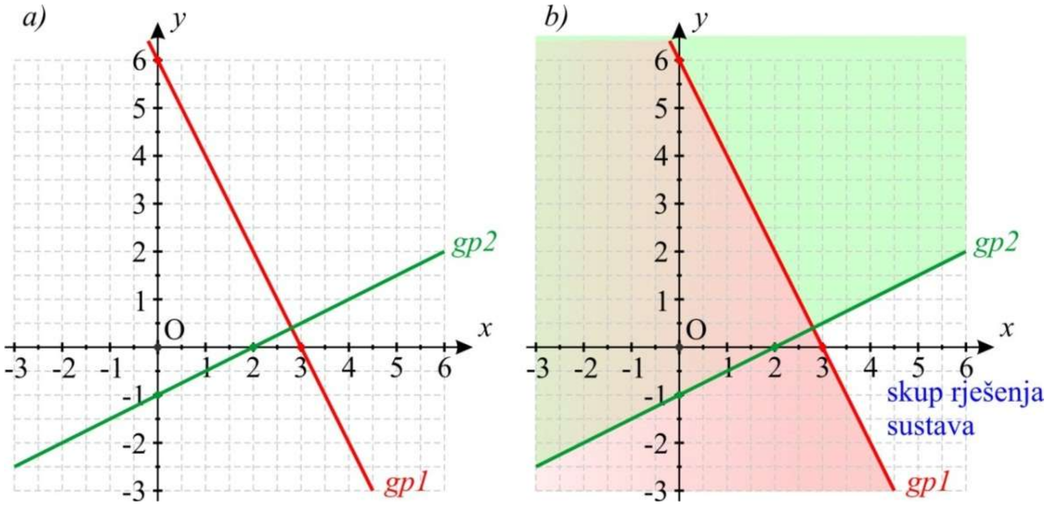
gp2:

x	y
0	-1
2	0

Pravci su nacrtani punom crtom (slika 3.15.a) jer nejednakosti nisu stroge, tj. u rješenja ulaze i sve točke tih pravaca.

Kako bi se odredilo koje poluravnine čine skup rješenja pojedine nejednadžbe, kao kontrolna točka odabrano je ishodište O(0, 0) koje ne pripada ni jednom od zadanih pravaca. Provjereno je zatim zadovoljavaju li koordinate te točke zadane nejednadžbe.

Uvrste li se koordinate kontrolne točke O(0, 0) u prvu od nejednadžba, dobije se: $2\cdot 0+0=0<6$, što znači da kontrolna točka ne pripada skupu rješenja te nejednadžbe; rješenje prve nejednadžbe je poluravnina iznad graničnog pravca 1.



Slika 3.15. *Primjer 3.4.a: a) granični pravci, b) rješenje zadanog sustava.*

Ako se koordinate kontrolne točke (0, 0) uvrste u drugu od nejednadžba, dobije se: $0-2\cdot 0=0<2$, što znači da kontrolna točka ne pripada skupu rješenja te nejednadžbe; rješenje druge nejednadžbe je poluravnina ispod graničnog pravca *gp2*.

Konačno rješenje prikazano je na slici 3.15.b. Riječ je o području u I. i II. kvadrantu između graničnih pravaca 1 i 2, koji nije omeđen.

b) Odgovarajući granični pravci nejednadžba zadanog sustava su:

$x+2\cdot y=280$ (gp1); $3\cdot x+2\cdot y=480$ (gp2).

Ti pravci imaju s osima x i y sljedeća presjecišta

gp1:

x	y
0	140
280	0

gp2:

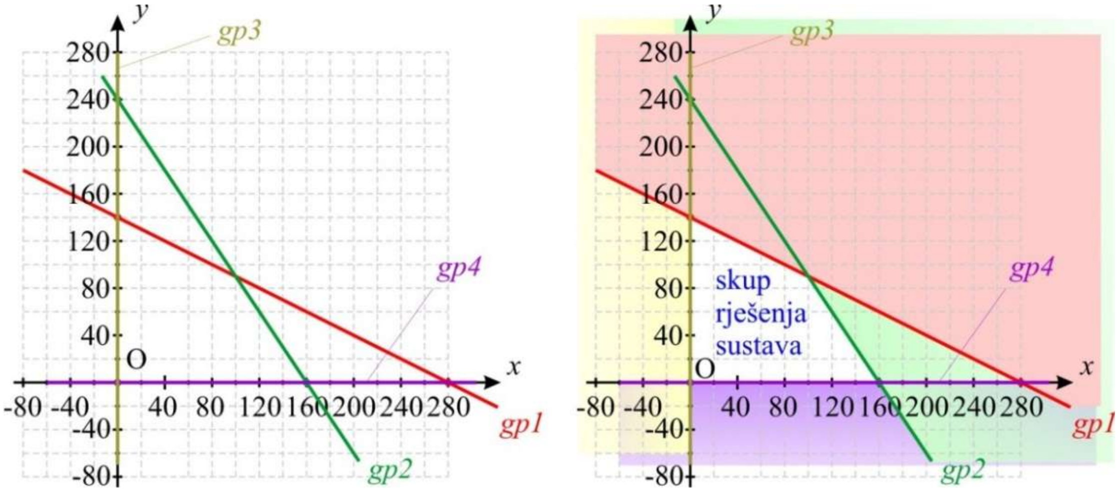
x	y
0	240
160	0

Graničnim pravcima 1 i 2 treba dodati i osi y i x kao granične pravce 3. i 3. ograničenja ($x\geq 0$, odnosno $y\geq 0$), jer za svaku točku na osi x vrijedi $y=0$, a za svaku točku na osi y vrijedi $x=0$.

Svi su granični pravci nacrtani punom crtom (slika 3.16.a) jer nejednakosti nisu stroge, tj. u rješenja ulaze i sve točke tih pravaca.

Kako bi se odredilo koje poluravnine čine skup rješenja prvih dviju nejednadžba, kao kontrolna točka odabrano je ishodište O s koordinatama (0;0) koje ne pripada ni jednom od zadanih pravaca. Provjereno je zatim zadovoljavaju li koordinate te točke zadane nejednadžbe.

Uvrste li se koordinate kontrolne točke O(0, 0) u prvu od nejednadžba, dobije se: $0+2\cdot 0=0<280$, što znači da kontrolna točka pripada skupu rješenja te nejednadžbe; rješenje prve nejednadžbe je poluravnina ispod graničnog pravca *gp1*.



Slika 3.16. *Primjer 3.4.b: a) granični pravci, b) rješenje zadanog sustava.*

Ako se koordinate kontrolne točke (0, 0) uvrste u drugu od nejednadžba, dobije se: $3\cdot 0+2\cdot 0=0<480$, što znači da kontrolna točka pripada skupu rješenja i te nejednadžbe; rješenje druge nejednadžbe je poluravnina ispod graničnog pravca *gp2*.

Rješenje treće nejednadžbe ($x\geq 0$) je poluravnina desno od osi *y*, dok je rješenje četvrte nejednadžbe ($y\geq 0$) poluravnina iznad osi *x*. Konačno rješenje (omeđen skup) prikazano je na slici 3.16.b.

Primjer 3.5.

Restoran studentske prehrane pripravlja doručak od dviju vrsta namirnica, N1 i N2.

Jedinica namirnice N1 sadržava 10 jedinica kalcija, 5 jedinica proteina i 2 jedinice vitamina, dok jedinica namirnice N2 sadržava 4 jedinice kalcija, 5 jedinica proteina i 6 jedinica vitamina.

Grafički odrediti izvedivo područje, tj. odrediti skup svih mogućih kombinacija namirnica N1 i N2 od kojih se može pripremiti doručak ako svaki doručak mora sadržavati barem 20 jedinica kalcija, 20 jedinica proteina i 12 jedinica vitamina.

Rješenje:

Opisivanje bilo kojeg tekstualno zadanog problema matematički, sustavom linearnih jednadžba i nejednadžba, najosjetljiviji je dio u traženju rješenja razmatranog problema. Prepoznavanje varijabla pri tom je prvi i najvažniji korak.

U ovom se zadatku traže sve kombinacije količina namirnica N1 i N2 koje će zadovoljiti postavljene nutricionističke zahtjeve, pa će se količina namirnice N1 koja će biti sadržana u doručku označiti s x, a odgovarajuća količina namirnice N2 s y. Te količine moraju zadovoljiti sljedeće uvjete:

- uvjet sadržaja kalcija (jedna jedinica namirnice N1 sadrži 10 jedinica kalcija, pa će x jedinica namirnice N1 sadržavati ukupno $10 \cdot x$ jedinica kalcija; y jedinica namirnice N2 sadržavat će $4 \cdot y$ namirnica kalcija):

$$10 \cdot x + 4 \cdot y \geq 20 \quad (1)$$

- uvjet sadržaja proteina

$$5 \cdot x + 5 \cdot y \geq 20 \quad (2)$$

- uvjet sadržaja vitamina

$$2 \cdot x + 6 \cdot y \geq 12 . \quad (3)$$

Postoje još dva ograničenja koja nisu zadatkom eksplicitno zadana, ali se logički nameću. Ta se ograničenja nazivaju uvjetima nenegativnosti, a proizlaze iz činjenice da količine namirnica (N1 i/ili N2) ne mogu poprimiti negativnu vrijednost, tj. ne može se u obrok dodati negativna količina neke od namirnica. Stoga mora biti:

$$x \geq 0 \quad (4)$$
$$y \geq 0 \quad (5)$$

Granični pravci ograničenja (1) do (3) su:

$10 \cdot x + 4 \cdot y = 20$ (gp1); $5 \cdot x + 5 \cdot y = 20$ (gp2) ; $2 \cdot x + 6 \cdot y = 12$ (gp3).

Ti pravci imaju s osima x i y sljedeća presjecišta:

gp1:

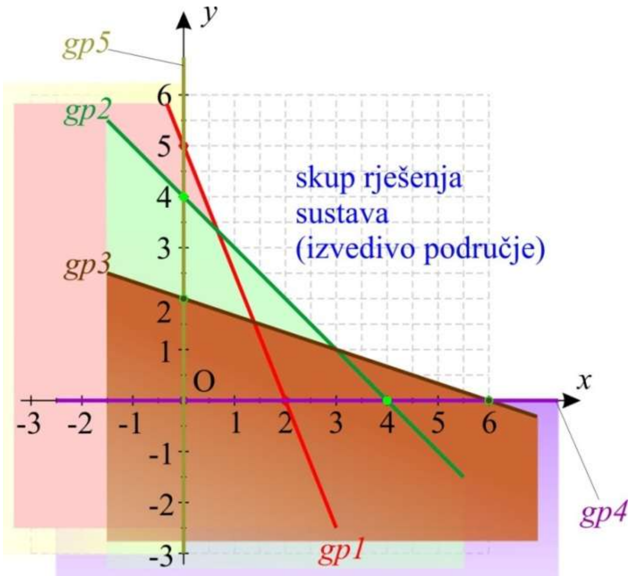
x	y
0	5
2	0

gp2:

x	y
0	4
4	0

gp3:

x	y
0	2
6	0



Slika 3.17. *Primjer 3.5: rješenje zadanog problema.*

Dakle, skup rješenja prikazanog sustava (izvedivo područje) jest presjek rješenja 5 nejednadžba i dobije se crtanjem graničnih pravaca tih nejednadžba te određivanjem poluravnine koja je rješenje svake od njih (skup je neomeđen – slika 3.17).

Primjer 3.6.

U odjelu za pakiranje orašastih plodova pakiraju se mješavine indijskih oraščića i kikirikija. U skuplje pakiranje ide 12,5 dkg (dekagrama) indijskih oraščića i 7,5 dkg kikirikija, dok u jeftinije ide 5 dkg indijskih oraščića i 15 dkg kikirikija.

Ako je na skladištu dostupno 10 kg indijskih oraščića i 11,25 kg kikirikija, grafički odrediti izvedivo područje, tj. odrediti koje sve kombinacije skupljeg i jeftinijeg pakiranja mogu napraviti djelatnici odjela s raspoloživim količinama orašastih plodova.

Rješenje:

Ako se s x označi broj skupljih pakiranja orašastih plodova, a s y broj jeftinijih pakiranja, tada ukupne količine pojedinih orašastih plodova moraju zadovoljiti sljedeće uvjete:

- raspoloživa količina indijskih oraščića (raspoložive količine moraju biti izražene u istim mjernim jedinicama kao i one koje idu u pojedino pakiranje $\Rightarrow 10\text{ kg} \equiv 10\cdot 100 = 1000\text{ dkg}$):

$$12,5\cdot x + 5\cdot y \le 1000 \qquad (1)$$

- raspoloživa količina kikirikija ($\Rightarrow 11,25\text{ kg} \equiv 11,25\cdot 100 = 1125\text{ dkg}$):

$$7,5\cdot x + 15\cdot y \le 1125 \qquad (2)$$

I ovdje vrijede dva ograničenja koja slijede iz uvjeta nenegativnosti, tj. iz činjenice da se ne može u pakiranje staviti negativna količina nekog od plodova. Stoga mora biti:

$$x \ge 0 \qquad (3)$$
$$y \ge 0 \qquad (4)$$

Granični pravci ograničenja (1) i (2) su:

$12,5\cdot x + 5\cdot y = 1000 \quad$ (gp1); $\qquad 7,5\cdot x + 15\cdot y = 1125 \quad$ (gp2) .

Ti pravci imaju s osima x i y sljedeća presjecišta

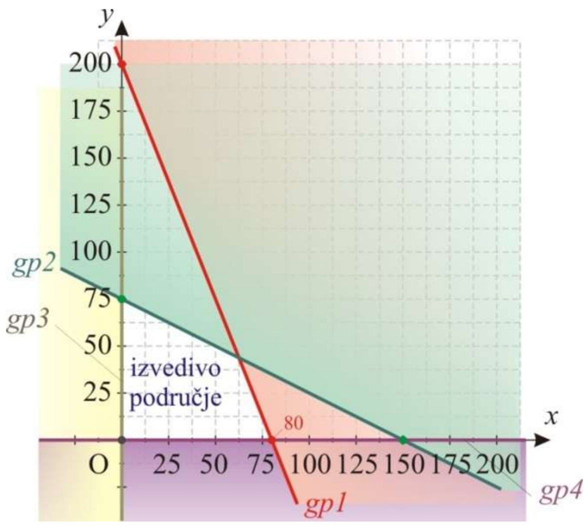
gp1:

x	y
0	200
80	0

gp2:

x	y
0	75
150	0

Nakon crtanja graničnih pravaca i sjenčanja poluravnina koje ne pripadaju skupu rješenja pojedine nejednadžbe dobije se konačno rješenje zadanog problema prikazano na slici 3.18. Rješenje, odnosno izvedivo područje je omeđen skup.



Slika 3.18. *Primjer 3.6: rješenje zadanog problema.*

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 3_01:

Odrediti skup rješenja zadane linearne nejednadžbe. Nalazi li se taj skup (poluravnina) ispod ili iznad graničnog pravca, te pripada li točka T(5; 8) tom skupu?

a) $3 \cdot x + 4 \cdot y \geq 36$

b) $y \geq 3 \cdot x$

c) $2 \cdot x + 5 \cdot y < 50$

d) $\frac{3}{4} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot y \leq 6$

Odgovor:

a) Rješenje je poluravnina iznad graničnog pravca; točka T nalazi se u toj poluravnini.
b) Rješenje je poluravnina iznad graničnog pravca; točka T ne nalazi se u toj poluravnini.
c) Rješenje je poluravnina ispod graničnog pravca; točka T nalazi se na graničnom pravcu pa, kako je riječ o strogoj nejednakosti, točka T ne pripada skupu rješenja.
d) Rješenje je poluravnina iznad graničnog pravca; točka T nalazi se u toj poluravnini.

Zadatak 3_02:

Odrediti skup rješenja (izvedivo područje) zadanog sustava linearnih nejednadžba. Je li to izvedivo područje omeđen, neomeđen ili prazan skup? Pripada li točka T tom skupu?

a) $0{,}2 \cdot x + 0{,}7 \cdot y \geq 14$
$0{,}6 \cdot x + 0{,}3 \cdot y \geq 18$
$y \geq 20$
T(30; 10)

b) $2 \cdot x + 4 \cdot y \geq 200$
$2 \cdot x + y \geq 100$
$y \leq 3 \cdot x$
$x \leq 3 \cdot y$ T(50; 100)

c) $10 \cdot x + 5 \cdot y \leq 60$
$5 \cdot x + 10 \cdot y \leq 75$
$x \leq y$
$x \geq 0$, $y \geq 0$ T(4; 4)

d) $x + y \leq 5$
$2 \cdot x + y \leq 8$
$x \geq 0$
$y \geq 1$ T(2; 2)

e) $x + 2 \cdot y \leq 12$

$3 \cdot x + y \leq 15$

$x + 0,5 \cdot y \geq 7$

T(3; 4)

f) $32 \cdot x + 48 \cdot y \leq 4800$

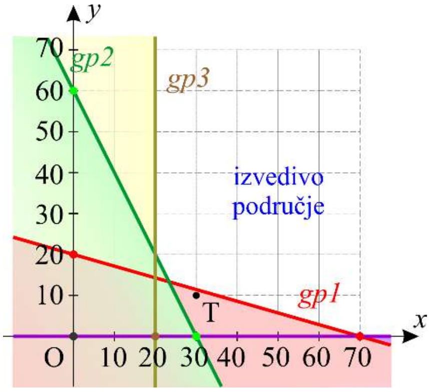
$4 \cdot x + 2 \cdot y \leq 320$

$x \geq 4 \cdot y$

$x \geq 0$, $y \geq 0$ T(40; 60)

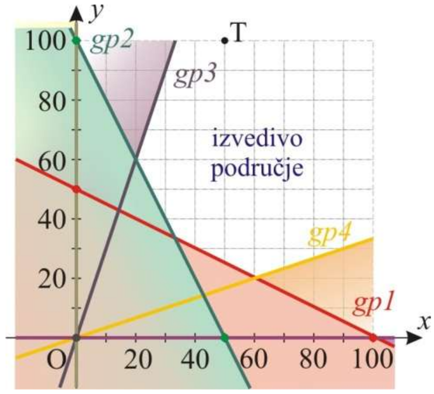
Odgovor:

a)



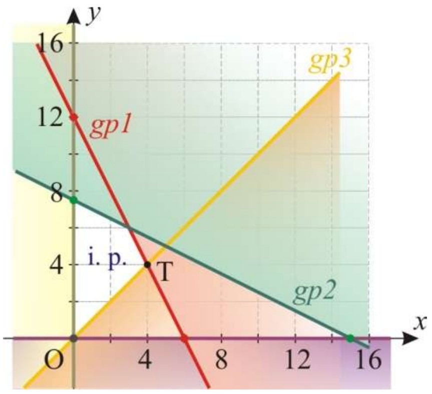
Skup rješenja je neomeđen; točka T ne nalazi se u tom skupu.

b)



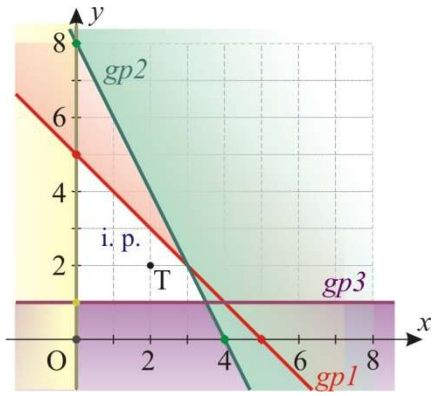
Skup rješenja je neomeđen; točka T nalazi se u tom skupu.

c)



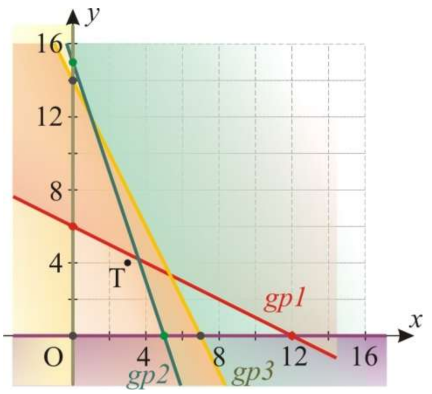
Skup rješenja je omeđen; točka T nalazi se na presjecištu graničnih pravaca 1 i 3, a kako u obje te nejednadžbe nejednakost nije stroga, točka T pripada skupu rješenja.

d)



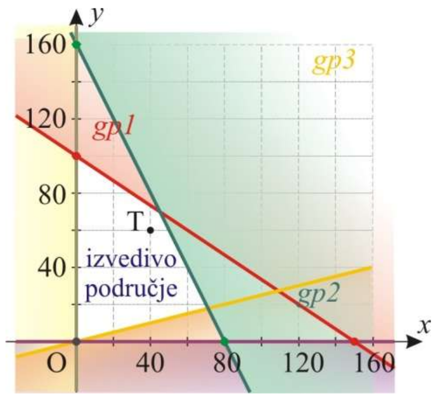
Skup rješenja je omeđen; točka T nalazi se u tom skupu.

e)



Skup rješenja je prazan (ne postoji izvedivo područje); točka T ne pripada skupu rješenja.

f)



Skup rješenja je omeđen; točka T nalazi se u tom skupu.

Zadatak 3_03:

Proizvođač pripravlja pakiranja hrane za pse od piletine i žitarica.

Poznato je da 1 kilogram pilećeg mesa sadržava 300 grama proteina i 150 grama masti, dok 1 kilogram žitarica sadržava 60 grama proteina i 60 grama masti.

Kupac zahtijeva da jedno pakiranje pseće hrane mora sadržavati najmanje 2000 grama proteina i 1500 grama masti.

Napisati matematički model (sustav nejednadžba) kojim će proizvođač odrediti koje sve kombinacije količina piletine i žitarica može miješati da bi dobio pakiranje koje zadovoljava postavljene uvjete sadržaja proteina i masti (izvedivo područje).

Odgovor:

$$300 \cdot x + 60 \cdot y \geq 2000$$

$$150 \cdot x + 60 \cdot y \geq 1500$$

$$x \geq 0\,, \quad y \geq 0$$

gdje je: x – broj kilograma piletine u pakiranju; y – broj kilograma žitarica u pakiranju.

Zadatak 3_04:

Marketing proizvođača sportske opreme priprema kampanju za novu liniju proizvoda. U tu je svrhu kreiran TV spot koji će se prikazati na nacionalnoj i sportskoj televiziji.

Iz podataka o gledanosti pojedine televizije očekuje se da bi spot na nacionalnoj televiziji vidjelo 600 tisuća osoba, a na sportskoj televiziji 150 tisuća osoba po emitiranju.

Cilj je marketinškog odjela da spot vidi najmanje 3 milijuna gledatelja, pri čemu je, s obzirom na preferencije gledatelja, odlučeno da se sa svakom od televizija ugovore najmanje po tri emitiranja kreiranog spota.

Napisati matematički model kojim će marketinški odjel odrediti koje sve kombinacije broja emitiranih spotova na nacionalnoj odnosno sportskoj televiziji može ugovoriti da ostvari željenu gledanost.

Odgovor:

$$600 \cdot x + 150 \cdot y \geq 3000$$

$$x \geq 3$$

$$y \geq 3\,,$$

gdje je: x – broj spotova na nacionalnoj TV; y – broj spotova na sportskoj TV.

Zadatak 3_05:

Drvoprerađivač proizvodi vrtne stolove i masivne klupe. Poznato je da izrada svakog vrtnog stola zahtijeva 4 sata rezanja, 7 sati završne obrade i 1 sat lakiranja, dok izrada svake masivne klupe zahtijeva 2 sata rezanja, 3 sata završne obrade i 1 sat lakiranja.

Drvoprerađivač raspolaže resursima koji omogućuju 280 sati rezanja, 510 sati završne obrade i 50 sati lakiranja tjedno.

Napisati matematički model kojim će proizvođač odrediti koje sve kombinacije količina vrtnih stolova i masivnih klupa može tjedno izraditi s raspoloživim resursima.

Odgovor:

$$4 \cdot x + 2 \cdot y \leq 280$$
$$7 \cdot x + 3 \cdot y \leq 510$$
$$x + y \leq 50$$
$$x \geq 0\,, \quad y \geq 0$$

gdje je: x – broj vrtnih stolova; y – broj masivnih klupa.

Zadatak 3_06:

Tvrtka PC-SKLOP sklapa dva tipa stolnih računala: ST i ST-PLUS, za poznatog kupca.

Za sklapanje jednog računala ST potrebno je 75 minuta rada, dok je za sklapanje jednog računala ST-PLUS potrebno 90 minuta, a tvrtka raspolaže dnevno s 150 radnih sati za sklapanje.

Za instalaciju i testiranje jednog računala ST utroši se 30 minuta, a za instalaciju i testiranje jednog računala ST-PLUS utroši se 60 minuta, pri čemu je dnevno raspoloživo 75 radnih sati za instalaciju i testiranje.

U računala tipa ST-PLUS ugrađuje se posebna vrsta grafičkog procesora, a na skladištu se može osigurati 60 takvih procesora dnevno.

Kupac zahtijeva da barem trećina svih sklopljenih računala budu tipa ST-PLUS.

Napisati matematički model kojim će tvrtka PC-SKLOP odrediti koje sve kombinacije računala ST-PLUS i ST može dnevno sklopiti s raspoloživim resursima, uvažavajući zahtjev kupca.

Odgovor:

$$75 \cdot x + 90 \cdot y \leq 9000$$
$$30 \cdot x + 60 \cdot y \leq 4500$$
$$y \leq 60$$
$$y \geq \frac{1}{3} \cdot (x + y)$$
$$x \geq 0\,, \quad y \geq 0$$

gdje je: x – broj računala tipa ST; y – broj računala tipa ST-PLUS.

3.3. Standardni problem linearnog programiranja

Standardni problem linearnog programiranja (LP – engl. *Linear Programming*) jest problem pronalaženje optimuma linearne **funkcije cilja** (minimuma, odnosno maksimuma) uz uvjete ili **ograničenja** dana u obliku linearnih nejednadžba i uz nenegativne **varijable odlučivanja**.

Varijable odlučivanja su fizičke veličine koje se prikazuju matematičkim simbolima (npr. x i y kada je riječ o problemu s dvije varijable odlučivanja, odnosno x1, x2, ..., do xn za probleme s n varijabla odlučivanja) a kontrolira ih donositelj odluke.

Tako varijabla odlučivanja može biti broj gotovih proizvoda u nekom proizvodnom procesu, količina neke namirnice u obroku, iznos novca investiran u neki fond, i slično.

Funkcija cilja je kriterij kojim se evaulira rješenje razmatranog problema. To je matematička funkcija varijabla odlučivanja koja u konačnici prikazuje numeričku vrijednost rješenja. To na primjer može biti funkcija ukupnog prihoda, dobiti ili troška koji se ostvaruje pri proizvodnji skupine različitih proizvoda.

Funkcija cilja definira i smjer postupka iznalaženja optimalnog rješenja, bilo minimuma bilo maksimuma. Optimalno rješenje nekog modela definira se kao najbolje rješenje mjereno prema zadanom kriteriju.

Ograničenja su niz funkcija, prikazanih u obliku matematičkih jednadžba ili nejednadžba, koje opisuju fizičke, ekonomske, tehnološke, zakonske ili etičke restrikcije po pitanju vrijednosti koje mogu poprimiti varijable odlučivanja. Riječ je dakle ili o resursima kojima se raspolaže ili pak o zahijevima koje netko (kupac, zakonski propis, sindikat, i slično) postavlja vezano uz problem koji se modelira.

Područje primjene linearnog programiranja veoma je široko. Ono se intenzivno koristi u trgovini, industriji, zdravstvu, školstvu, vojsci i drugdje. Linearno programiranje danas se smatra najčešće korištenom kvantitativnom metodom optimizacije.

Iako se pri rješavanju problema linearnog programiranja često koriste računala, ova metoda nije, sama po sebi, niz programskih naredaba. Ona se svodi na matematičke modele čije rješavanje pruža donositelju odluka optimalan plan djelovanja. Atribut «linearno» potječe od korištenja linearnih jednadžba i nejednadžba u formulaciji tih matematičkih modela, dok je u engleskom jeziku *programming* sinonima za riječ *planning* (planiranje).

Unatoč različitosti problema koje tretira svaki zadatak linearnog programiranja ima u osnovi tri elementa: skup odluka koje treba donijeti, cilj koji treba maksimizirati ili minimizirati, zavisno od prirode problema koji se rješava, i skup ograničenja, koja uvode određene restrikcije prilikom odlučivanja.

U tablici 3.6 dan je prikaz poslovnih problema koje je moguće riješiti primjenom linearnog programiranja.

Linearno programiranje prvenstveno je namijenjeno rješavanju problema realnog svijeta, koji se razlikuju od onih pojednostavljenih, kakav je slučaj problema koji se rješavaju grafičkim pristupom. Realni problemi u pravilu sadrže velik broj varijabla i ograničenja. Stoga se s pravom postavlja pitanje: zašto uopće izučavati grafičku metodu? Odgovor je jednostavan: grafička metoda najbolje ilustrira bit problema zadatka linearnog programiranja i olakšava razumijevanje daleko apstraktnijeg koncepta simpleks metode.

Tablica 3.6. *Primjeri poslovnih problema koje je moguće riješiti primjenom linearnog programiranja.*

Primjena	**Odluka**	**Cilj**	**Ograničenja (raspoloživi resursi)**
Planiranje proizvodnje	Koliko proizvesti pojedinih proizvoda?	Maksimizirati ukupni prihod	• materijal • strojevi • radna snaga
Planiranje investicija	Kako uložiti raspoloživi kapital?	Maksimizirati godišnji prinos sredstava	• količina novca • zakonski okviri • rizici ulaganja
Distribucija (transport) roba	Kako distribuirati proizvode (po vrsti i po količini)?	Minimizirati troškove transporta	• količina roba • prijevozna sredstva • potražnja kupaca
Planiranje oglašavanja	Kako oglašavati po medijima (po vrsti i po količini)?	Minimizirati troškove ili maksimizirati učinak oglašavanja	• količina novca • vrijeme • dostupni mediji
Planiranje rasporeda: osoblja, strojeva ...	Kako raspodijeliti radno vrijeme/ pojedine poslove?	Minimizirati troškove radne snage	• količina radnih sati • broj radnika • zakonski okvir (sindikat)

Svaka primjena linearnog programiranja započinje fazom formulacije problema, u kojoj verbalni opis problema odlučivanja treba prevesti (preformulirati, transformirati) u odgovarajući matematički model.

U načelu postoje tri načina rješavanja zadataka linearnog programiranja:

- grafički – kada problem ima dvije varijable (ravninski problem) ili najviše tri varijable (prostorni problem);
- ručno – kada problem sadrži manji broj varijabla i nevelik broj ograničenja, kada se za rješavanje koristi algoritam tzv. simpleks metode;
- s pomoću računala – kada problem linearnog programiranja ima velik broj varijabla i veliki broj ograničenja i kada s pomoću odgovarajućih programa može brzo i pouzdano izvršiti velik broj izračuna koje u tom slučaju zahtijeva simpleks metoda.

Grafička metoda započinje vezivanjem izvedivog područja za prvi kvadrant, gdje su svi parovi $(x, y) \geq 0$, tj. nenegativni. Kako bi se strogo ograničilo izvedivo područje, mora se redom nacrtati granična jednadžba (pravac) svakog od ograničenja i odrediti poluravnina koja zadovoljava to ograničenje. Izvedivo je područje presjek svih pojedinačnih rješenja.

3.3.1. Standardni problem minimuma

Standardni problem minimuma LP-a glasi:

Odrediti vrijednosti varijabla odlučivanja x_i (i=1, ..., n), dakle x_1, x_2, ..., x_i, ... x_n, za koje će funkcija cilja

$$F_C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_i x_i + \ldots + c_n x_n = \sum_i c_i x_i \qquad \textbf{(3.14)}$$

imati minimalnu vrijednost, uz ograničenja

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{gathered} \qquad \textbf{(3.15)}$$

i uz nenegativne varijable odlučivanja

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ldots x_i \geq 0 \ldots x_n \geq 0 \qquad \textbf{(3.16)}$$

gdje je:

F_C - funkcija cilja

n - broj varijabla odlučivanja

$x_i, \quad i = 1, ..., n$ - varijable odlučivanja (ukupno n varijabla)

$c_i, \quad i = 1, ..., n$ - koeficijenti funkcije cilja (ukupno n koeficijenata koji ne smiju svi istovremeno biti jednaki nuli)

m - broj različitih ograničenja

$a_{ij}, \quad i = 1, ..., n; \ j = 1, ..., m$ - koeficijenti lijeve strane ograničenja

$b_j, \quad j = 1, ..., m$ - koeficijenti desne strane ograničenja.

Standardni problem minimuma LP-a za problem dviju varijabla glasi:

Odrediti vrijednosti varijabla odlučivanja x i y za koje će funkcija cilja

$$F_C = \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y \qquad \textbf{(3.17)}$$

imati minimalnu vrijednost, uz ograničenja

$$\begin{gathered} a_1 x + b_1 y \geq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \geq c_2 \\ \ldots \\ a_m x + b_m y \geq c_m , \end{gathered} \qquad \textbf{(3.18)}$$

gdje je m broj ograničenja, i uz nenegativne varijable odlučivanja

$$x \geq 0, y \geq 0. \quad \textbf{(3.19)}$$

3.3.2. Standardni problem maksimuma

Standardni problem maksimuma LP-a glasi:

Odrediti vrijednosti varijabla odlučivanja x_i (i=1, n), dakle $x_1, x_2, ..., x_i, ... x_n$, za koje će funkcija cilja

$$F_C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_i x_i + ... + c_n x_n = \sum_i c_i x_i \quad \textbf{(3.20)}$$

imati maksimalnu vrijednost, uz ograničenja

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mi}x_i + ... + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad \textbf{(3.21)}$$

i uz nenegativne varijable odlučivanja

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 ... x_i \geq 0 ... x_n \geq 0 \quad \textbf{(3.22)}$$

gdje je:

F_C - funkcija cilja

n - broj varijabla odlučivanja

$x_i, \quad i = 1, ..., n$ - varijable odlučivanja (ukupno n varijabla)

$c_i, \quad i = 1, ..., n$ - koeficijenti funkcije cilja (ukupno n koeficijenata koji ne smiju svi istovremeno biti jednaki nuli)

m - broj različitih ograničenja

$a_{ij}, \quad i = 1, ..., n; \; j = 1, ..., m$ - koeficijenti lijeve strane ograničenja

$b_j, \quad j = 1, ..., m$ - koeficijenti desne strane ograničenja.

Standardni problem maksimuma LP-a za problem dviju varijabla glasi:

Odrediti vrijednosti varijabla odlučivanja x i y za koje će funkcija cilja

$$F_C = \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y \quad \textbf{(3.23)}$$

imati maksimalnu vrijednost, uz ograničenja

$$a_1x+b_1y\leq c_1$$
$$a_2x+b_2y\leq c_2$$
$$\dots \tag{3.24}$$
$$a_mx+b_my\leq c_m,$$

gdje je m broj ograničenja, i uz nenegativne varijable odlučivanja

$$x\geq 0,\ y\geq 0. \tag{3.25}$$

3.3.3. Pravci jednakih funkcija cilja

Funkcija cilja nekog problema linearnog programiranja s dvije varijable može se grafički predstaviti familijom međusobno paralelnih pravaca (njih beskonačno mnogo).

Ako je funkcija cilja zadana jednadžbom $F_C=\mathrm{A}\cdot x+\mathrm{B}\cdot y$ (A i B pozitivni realni brojevi), tada jednadžba pravca te funkcije, za svoj točno određeni iznos $F_\mathrm{C}=F_\mathrm{C1}$, glasi

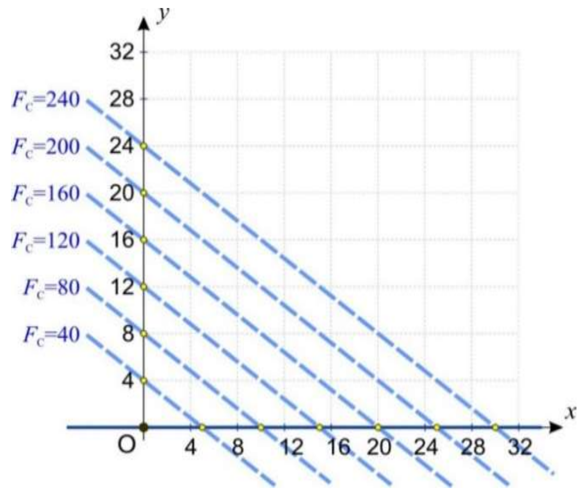
$$\mathrm{A}\cdot x+\mathrm{B}\cdot y=F_\mathrm{C1}$$

što je jednadžba točno određenog pravca, a presjecišta tog pravca s koordinatnim osima su

x	y
0	$y_1=F_\mathrm{C1}/\mathrm{B}$
$x_1=F_\mathrm{C1}/\mathrm{A}$	0

Sve točke na tom pravcu imaju jednaku vrijednost funkcije cilja, a kako se za iznos funkcije cilja može odabrati bilo koji broj, takvih pravaca imamo beskonačno mnogo, međusobno su paralelni (koeficijent smjera $k_\mathrm{C}=-\mathrm{A}/\mathrm{B}$ ne ovisi o iznosu F_C), a nazivaju se pravcima jednake funkcije cilja ili izolinijama.

Sukladno tomu, ako je funkcija cilja npr. profit, tada se ti pravci nazivaju linijama jednakog profita ili izoprofitnim linijama; ako je pak riječ o funkcijama cilja koje predstavljaju nekakav trošak, tada se oni nazivaju linijama jednakog troška ili izotroškovnim linijama.



Slika 3.19. *Pravci jednakih funkcija cilja.*

Neka je zadana funkcija cilja nekog problema linearnog programiranja

$$F_C = 8 \cdot x + 10 \cdot y$$

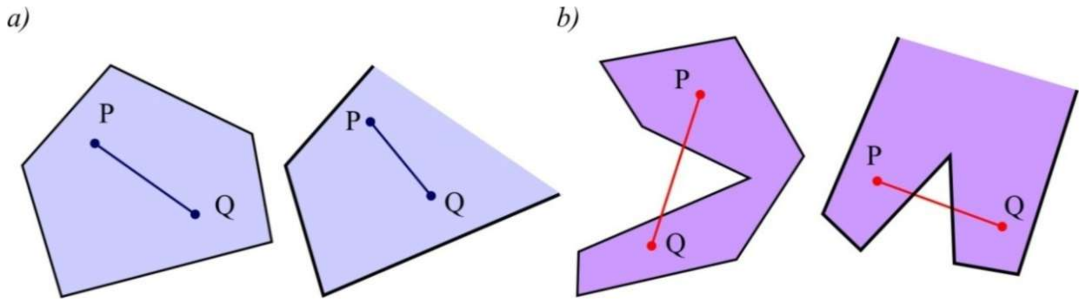
i neka je potrebno nacrtati niz pravaca jednakih funkcija cilja za vrijednosti funkcija cilja 40; 80; 120; 160; 200; 240. Odgovarajući pravci jednakih funkcija cilja prikazani su na slici 3.19.

Može se zaključiti da se povećanjem funkcije cilja pravci jednakih funkcija cilja udaljavaju od ishodišta koordinatnog sustava.

3.3.4. Temeljni teorem linearnog programiranja

Razmatrat će se problemi linearnog programiranja s dvije varijable kojima je izvedivo područje konveksni poligonski skup, tj. dio ravnine sa sljedećim svojstvima:

1. Granica područja sastoji se od konačnog broja pravaca ili segmenata pravaca.
2. Ako su P i Q bilo koje dvije točke unutar ili na rubu izvedivog područja, tada i njihova spojnica leži unutar izvedivog područja.



Slika 3.20. *Zatvoreni i otvoreni poligonski skup: a) konveksni, b) nekonveksni.*

Temeljni teorem linearnog programiranja glasi:

Ako problem linearnog programiranja ima jedinstveno rješenje, tada se ono nalazi na nekom od vrhova poligona koji predstavlja izvedivo područje; ako problem ima više rješenja, tada se barem jedno od njih nalazi na nekom od vrhova poligona koji predstavlja izvedivo područje.

3.3.5. Egzistencija rješenja

Uz pretpostavku da se razmatra standardni linearni problem dviju varijabla, gdje je:

$$F_C = \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y$$

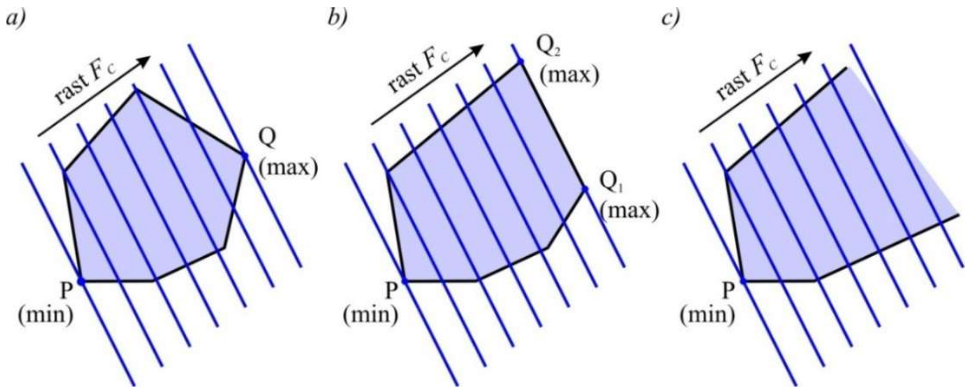
i ako je $\mathrm{A} > 0, \mathrm{B} > 0$, te $x \geq 0$, $y \geq 0$, mogu se pojaviti sljedeći slučajevi:

a) ako je izvedivo područje omeđeno, tada F_C ima i maksimalnu i minimalnu vrijednost (slika 3.21.a);

b) ako funkcija cilja ima optimalnu vrijednost (bilo minimum, bilo maksimum) u dvama vrhovima konveksnog poligona, tada optimum ima i u svim točkama spojnice tih dvaju vrhova (slika 3.21.b);

c) ako izvedivo područje nije omeđeno, tada F_C ima minimalnu, ali ne i maksimalnu vrijednost (slika 3.21.c);

d) ako je izvedivo područje prazan skup, tada promatrani problem nema rješenja.



Slika 3.21. *Uz temeljni teorem linearnog programiranja: a) zatvoren poligonski skup: jedan minimum i jedan maksimum; b) zatvoren poligonski skup – jedan minimum i višestruki maksimum; c) otvoren poligonski skup – jedan minimum bez maksimuma.*

3.3.6. Postupak rješavanja problema linearnog programiranja

S obzirom na temeljni teorem linearnog programiranja može se postupak grafičkog rješavanja problema linearnog programiranja s dvije varijable provesti uz pomoć sljedećih koraka:

1. definirati varijable odlučivanja x i y;
2. definirati funkciju cilja;
3. postaviti sva ograničenja;
4. definirati granične pravce za svako od ograničenja, nacrtati ih te osjenčati poluravninu koja nije rješenje pripadajuće nejednadžbe;
5. odrediti izvedivo područje i izračunati koordinate točaka svih vrhova dobivenog poligonskog skupa;
6. izračunati vrijednost funkcije cilja u svakom od vrhova izvedivog područja;
7. odrediti traženu ekstremnu vrijednost (minimum ili maksimum) funkcije cilja.

***Primjer** 3.7.*

Zadana je funkcija cilja:

$$F_C = 20 \cdot x + 8 \cdot y \,.$$

Odrediti izvedivo područje i minimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$x + 3 \cdot y \geq 15 \quad (1)$$

$$x + y \geq 10 \quad (2)$$

$$x \geq 4 \quad (3)$$

$$y \geq 0 \quad (4)$$

Rješenje:

Kod matematički zadanih primjera prva su tri koraka u postupku rješavanja unaprijed definirana (varijable odlučivanja, funkcija cilja i ograničenja). Stoga se u tim slučajevima kreće od definiranja graničnih pravaca.

Granični pravac 1. ograničenja je:

$$\boldsymbol{gp1}: \quad x+3\cdot y=15,$$

a točke presjecišta s koordinatnim osima su:

x	y
0	5
15	0

Nakon crtanja 1. graničnog pravca potrebno je osjenčati poluravninu koja nije rješenje odgovarajuće nejednadžbe. Uzme li se za kontrolnu točku ishodište O(0; 0), iz nejednadžbe (1) proizlazi da njegove koordinate ne zadovoljavaju tu nejednadžbu; rješenje je poluravnina iznad graničnog pravca 1.

Granični pravac 2. ograničenja je:

$$\boldsymbol{gp2}: \quad x+y=10,$$

a točke presjecišta s koordinatnim osima su:

x	y
0	10
10	0

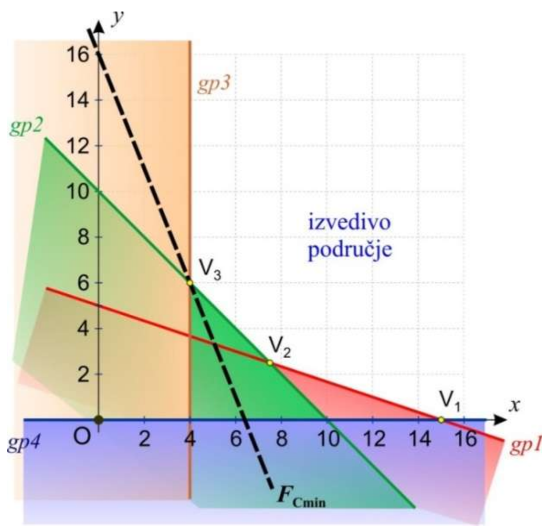
Nakon crtanja pravca i odabira ishodišne točke za kontrolnu (ne zadovoljava nejednadžbu 2) zaključuje se kako je rješenje poluravnina iznad *gp2*.

Granični pravac 3. ograničenja je:

$$\boldsymbol{gp3}: \quad x=4$$

što znači da je to pravac paralelan s osi y (vertikalni pravac) pa je rješenje 3. nejednadžbe poluravnina desno od tog pravca.

Granični pravac 4. ograničenja poklapa se s osi x (jer je za tu os u svakoj točki y=0). Zaključuje se da je rješenje 4. nejednadžbe poluravnina iznad osi x.



Slika 3.22. *Primjer 3.7: otvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Sjenčanjem poluravnina koje nisu rješenje svake od nejednadžba dobije se neosjenčani dio ravnine koji predstavlja rješenje zadanog sustava (slika 3.22). Dobiveni konveksni skup je otvoren i ima 3 vrha, a u jednom od njih mora biti minimum funkcije cilja.

Vrh V_1 poligona je presjecište graničnog pravca *gp1* s osi *x*, pa su mu koordinate $x_1 = 15;\ y_1 = 0$. Vrijednost funkcije cilja u vrhu V_1 je:

$$F_{C1} = 20 \cdot x_1 + 8 \cdot y_1 = 20 \cdot 15 + 8 \cdot 0 = 300.$$

Vrh V_2 je presjecište graničnih pravaca *gp1* i *gp2*, pa su koordinate tog vrha rješenja sustava linearnih jednadžba (jednadžba *gp1* i *gp2*):

$$x + 3 \cdot y = 15 \quad (1)$$

$$x + y = 10 \quad (2)$$

Oduzimanjem jednadžbe (2) od (1) eliminirat će se varijabla *x* pa slijedi da je

$$2 \cdot y = 5, \quad \text{odnosno} \quad y = 2{,}5; \quad \text{proizlazi da je} \quad x = 7{,}5.$$

Uvrste li se koordinate vrha V_2 (7,5; 2,5) u jednadžbu funkcije cilja, dobije se

$$F_{C2} = 20 \cdot 7{,}5 + 8 \cdot 2{,}5 = 170.$$

Presjecište graničnih pravaca *gp2* i *gp3* daje koordinate vrha V_3. Kako je koordinata *x* toga vrha poznata ($x = 4$), iz jednadžbe *gp2* slijedi vrijednost koordinate $y = 6$, odnosno vrijednost funkcije cilja u tom vrhu:

$$F_{C3} = 20 \cdot 4 + 8 \cdot 6 = 128.$$

Zaključuje se da funkcija cilja ima minimum ($F_{C\min} = 128$) u vrhu V_3 poligona za vrijednosti varijabla odlučivanja $x = 4$ i $y = 6$. Ograničenja čiji se granični pravci sijeku u točki optimuma nazivaju se *vezanim ograničenjima* (ovdje su to 2. i 3.). *Vezanost* je osnovno svojstvo ograničenja čiji granični pravci presijecanjem daju („grade") točku optimuma.

Pravac minimalne funkcije cilja dakle je $F_{C\min} \equiv 20 \cdot x + 8 \cdot y = 128$, a točke presjecišta tog pravca s koordinatnim osima su (uz prikaz pravca na sl. 3.22):

x	y
0	16
6,4	0

Primjer 3.8.

Zadana je funkcija cilja:

$$F_C = 25 \cdot x + 20 \cdot y.$$

Odrediti izvedivo područje i maksimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$15 \cdot x + 9 \cdot y \leq 1350 \quad (1)$$

$$x + y \leq 110 \quad (2)$$

$$2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 300 \quad (3)$$

$x \geq 0$ (4) $\qquad\qquad$ $y \geq 0$ (5)

Rješenje:

Granični pravci prvih triju ograničenja su:

gp1: $15 \cdot x + 9 \cdot y = 1350$, *gp2*: $x + y = 110$, *gp3*: $2 \cdot x + 3 \cdot y = 300$,

a presjecišta tih pravaca s koordinatnim osima su:

gp1:

x	*y*
0	150
90	0

gp2:

x	*y*
0	110
110	0

gp3:

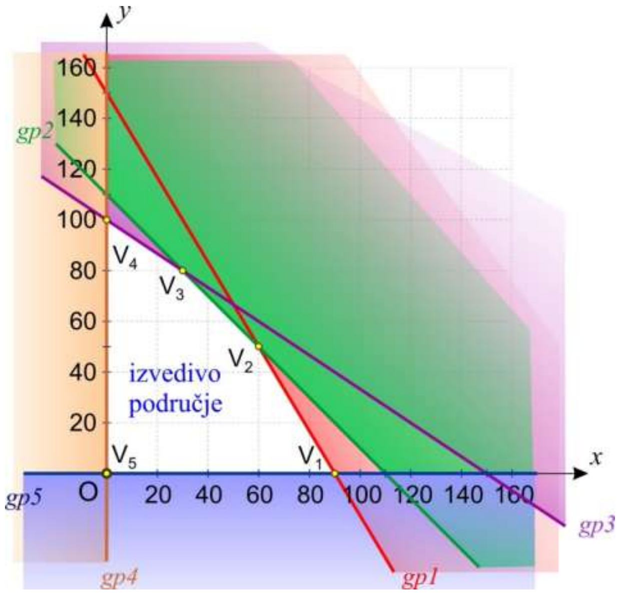
x	*y*
0	100
150	0

Četvrti se granični pravac poklapa s osi *y* ($x = 0$), a peti s osi *x* ($y = 0$).

Odabere li se za kontrolnu točku ishodište O(0; 0), može se zaključiti kako je za svako od prvih triju ograničenja rješenje poluravnina ispod odgovarajućeg graničnog pravca.

Rješenje 3. ograničenja je poluravnina desno od osi *y*, a 5. poluravnina iznad osi *x*.

Sjenčanjem poluravnina koje nisu rješenje svake od nejednadžba dobije se neosjenčani dio ravnine koji predstavlja izvedivo područje zadanog sustava (slika 3.23). Dobiveni konveksni skup je zatvoren i ima 5 vrhova, a u jednom od njih mora biti maksimum funkcije cilja.



Slika 3.23. *Primjer 3.8: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Vrh V1 ima koordinate $x_1 = 90;\ y_1 = 0,$ pa je vrijednost funkcije cilja u tom vrhu:

$$F_{C1} = 25 \cdot 90 + 20 \cdot 0 = 2250 .$$

Presjecište graničnih pravaca *gp1* i *gp2* daje vrh V_2, kojemu su koordinate rješenja sustava jednadžba

$$15\cdot x+9\cdot y=1350$$

$$x+y=110$$

koji se može riješiti metodom suprotnih koeficijenata. U tom je smislu potrebno donju jednadžbu pomnožiti s (-9) pa zbrojiti gornju i donju, nakon čega slijedi:

$$6\cdot x=360,\ \text{odnosno}\ \ x=60,\ \text{pa je}\ y=50.$$

Vrijednost funkcije cilja u $V_2(60; 50)$ je: $F_{C2}=25\cdot 60+20\cdot 50=2500$.

Koordinate vrha V_3 dobiju se rješenjem sustava jednadžba

$$x+y=110$$

$$2\cdot x+3\cdot y=300$$

jer je taj vrh presjecište graničnih pravaca *gp2* i *gp3*. Množenjem gornje jednadžbe s (-2) i zbrajanjem tako dobivene s donjom dobije se

$$y=80,\ \text{pa je}\ x=30.$$

Vrijednost funkcije cilja u $V_3(30; 80)$ je: $F_{C3}=25\cdot 30+20\cdot 80=2350$.

Vrh V_4 ima koordinate $x_4=0;\ y_4=100,$ pa je vrijednost funkcije cilja u tom vrhu:

$$F_{C4}=25\cdot 0+20\cdot 100=2000.$$

Vrh V_5 konveksnog poligona je ishodište koordinatnog sustava i ne treba ga posebno razmatrati jer obje varijable, kao i funkcija cilja, u toj točki imaju nultu vrijednost.

Zaključuje se kako funkcija cilja maksimalnu vrijednost postiže u vrhu V_2 za vrijednosti varijabla odlučivanja $x_2=60;\quad y_2=50,$ kada je $F_{\mathrm{C}}=F_{C\max}=2500$.

Vezana ograničenja su (1) i (2).

***Primjer** 3.9.* (*dijetni problem*)

Seljak za tov svinja koristi dva tipa hrane: H1 i H2. Svaki obrok kojega pripremi mora sadržavati minimalno 60 grama proteina i 30 grama masti.

Jedinična količina hrane H1 sadrži 15 grama proteina i 10 grama masti, dok jedinična količina hrane H2 sadrži 20 grama proteina i 5 grama masti. Jedinična cijena hrane H1 je 5,00 kn, a hrane H2 3,00 kn.

Odrediti količine hrane H1 odnosno H2 do kojih seljak treba izmiješati u obrok a da trošak tova svinja bude minimalan.

Rješenje:

Varijable odlučivanja i funkcija cilja: Ako se s x označi količina hrane H1 (čija je jedinična cijena 5 kn) u obroku, a s y količina hrane H2 (čija je jedinična cijena 3 kn) u obroku, bit će trošak hranidbe:

$$TC = 5 \cdot x + 3 \cdot y\,.$$

Funkcija *TC* je funkcija cilja (troškovna funkcija), koju se želi minimizirati, tj. pronaći njenu najmanju vrijednost u izvedivom području, pri čemu su x i y varijable odlučivanja.

Definiranje ograničenja: Smjesa mora sadržavati minimalno 60 grama proteina pa mora biti zadovoljena nejednadžba:

$$15 \cdot x + 20 \cdot y \geq 60, \tag{1}$$

odnosno minimalno 30 grama masti, pa mora biti zadovoljena i sljedeća nejednadžba:

$$10 \cdot x + 5 \cdot y \geq 30. \tag{2}$$

Kako količina hrane H1, odnosno hrane H2 u smjesi ne može biti negativna, slijede još dva ograničenja iz nenegativnosti varijable odlučivanja:

$$x \geq 0, \tag{3}$$

$$y \geq 0. \tag{4}$$

Grafički način određivanja izvedivog područja:

Granični pravci prvih dviju nejednadžba su

gp1: $15 \cdot x + 20 \cdot y = 60$ *gp2*: $10 \cdot x + 5 \cdot y = 30$,

a presjecišta tih pravaca s koordinatnim osima su:

gp1:

x	y
0	3
4	0

gp2:

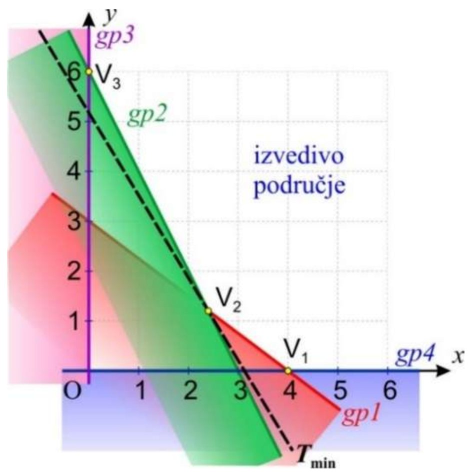
x	y
0	6
3	0

Treći se granični pravac poklapa s osi y ($x = 0$), a četvrti s osi x ($y = 0$).

Odabere li se za kontrolnu točku ishodište O(0; 0), može se zaključiti kako je za prvo i drugo ograničenje rješenje poluravnina iznad odgovarajućeg graničnog pravca.

Rješenje 3. ograničenja je poluravnina desno od osi y, a 4. ograničenja poluravnina iznad osi x. Općenito se može zaključiti da nenegativne varijable odlučivanja impliciraju izvedivo područje problema u I. kvadrantu koordinatnog sustava.

Sjenčanjem poluravnina koje ne pripadaju rješenju svake od nejednadžba dobije se neosjenčani dio ravnine koji predstavlja izvedivo područje zadanog sustava (slika 3.24). Dobiveni konveksni skup je otvoren i ima 3 vrha, a u jednom od njih mora biti traženi minimum funkcije cilja.



Slika 3.24. *Primjer 3.9: otvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Koordinate vrha V_1 su (4; 0) pa je $T_1 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 20$ kn.

Vrh V_2 je presjecište graničnih pravaca *gp1* i *gp2* pa se koordinate tog vrha dobiju rješenjem sustava jednadžba

$$15 \cdot x + 20 \cdot y = 60$$

$$10 \cdot x + 5 \cdot y = 30.$$

Množenjem donje jednadžbe s (-4) pa zbrajanjem s gornjom slijedi

$$-25 \cdot x = -60, \text{ odnosno } x = 12/5 = 2{,}4, \text{ pa je } y = 1{,}2.$$

Vrijednost funkcije cilja u V_2(2,4; 1,2) je: $T_2 = 5 \cdot 2{,}4 + 3 \cdot 1{,}2 = 15{,}6$ kn.

Koordinate vrha V_3 su (0; 6) pa je $T_3 = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 6 = 18$ kn.

Dakle, funkcija cilja ima minimalnu vrijednost u vrhu V_2 pa se zaključuje da će seljak minimalan trošak tova $T = T_{\min} = 15{,}6$ kn imati ako bude miješao 2,4 jedinice hrane H1 i 1,2 jedinice hrane H2. Vezana su ograničenja (1) i (2).

Primjer 3.10. (planiranje proizvodnje)

Poduzeće proizvodi dvije vrste proizvoda, P1 i P2, na dva različita stroja, S1 i S2.

Za izradu proizvoda P1 potrebno je 0,5 sati rada na stroju S1 i 0,4 sata rada na stroju S2, dok je za izradu proizvoda P2 potrebno 0,4 sata rada na stroju S1 i 0,8 sati rada na stroju S2. Dnevni kapacitet stroja S1 je 16 sati, a stroja S2 20 sati.

Dobit po proizvodu P1 iznosi 200,00 kn, a po proizvodu P2 150,00 kn.

Odrediti plan dnevne proizvodnje proizvoda P1 i P2 koji će maksimizirati dobit poduzeća.

Rješenje:

Varijable odlučivanja i funkcije cilja: Ako se s x označi količina proizvoda P1 gdje se po jedinici proizvoda ostvaruje dobit od 200 kn, a s y količina proizvoda P2 gdje se po jedinici proizvoda ostvaruje dobit od 150 kn, ukupna se dobit može prikazati jednadžbom:

$$\pi = 200 \cdot x + 150 \cdot y\,.$$

Funkcija π je funkcija cilja, koja se želi maksimizirati, tj. pronaći njenu najveću vrijednost u izvedivom području. Varijable x i y su varijable odlučivanja.

<u>Definiranje ograničenja</u>: Dnevni kapacitet stroja S1 je 16 sati pa mora biti zadovoljena nejednadžba:

$$0{,}5 \cdot x + 0{,}4 \cdot y \leq 16, \qquad (1)$$

dok je dnevni kapacitet stroja S2 20 sati pa mora biti zadovoljena i sljedeća nejednadžba:

$$0{,}4 \cdot x + 0{,}8 \cdot y \leq 20. \qquad (2)$$

Kako količina proizvoda A, odnosno proizvoda B ne može biti negativna, slijede još dva ograničenja:

$$x \geq 0, \quad (3) \quad \text{i} \quad y \geq 0. \quad (4)$$

<u>Grafički način određivanja izvedivog područja</u>:

Granični pravci prvih dviju nejednadžba su

gp1: $0{,}5 \cdot x + 0{,}4 \cdot y = 16$ *gp2*: $0{,}4 \cdot x + 0{,}8 \cdot y = 20$,

a presjecišta tih pravaca s koordinatnim osima su:

gp1:

x	y
0	40
32	0

gp2:

x	y
0	25
50	0

Treći se granični pravac poklapa s osi y ($x = 0$), a četvrti s osi x ($y = 0$).

Odabere li se za kontrolnu točku ishodište O(0; 0), može se zaključiti kako je za prvo i drugo ograničenje rješenje poluravnina ispod odgovarajućeg graničnog pravca.

Zbog nenegativnosti varijabla odlučivanja (3. i 4. ograničenje) izvedivo područje problema mora biti u I. kvadrantu koordinatnog sustava.

Sjenčanjem poluravnina koje ne pripadaju rješenju svake od nejednadžba dobije se neosjenčani dio ravnine koji predstavlja izvedivo područje zadanog sustava (slika 3.25). Dobiveni konveksni skup je zatvoren i ima 4 vrha. U jednom od tih vrhova mora biti traženi maksimum funkcije cilja.

Koordinate vrha V_1 su (32; 0) pa je $\pi_1 = 200 \cdot 32 + 150 \cdot 0 = 6400$ kn.

Vrh V_2 je presjecište graničnih pravaca *gp1* i *gp2* pa se koordinate tog vrha dobiju rješenjem sustava jednadžba

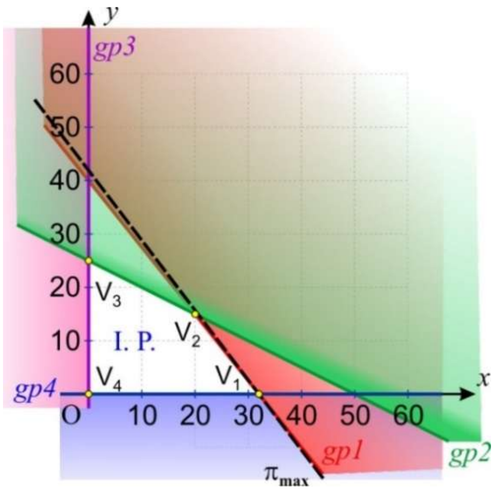
$$0{,}5 \cdot x + 0{,}4 \cdot y = 16$$

$$0{,}4 \cdot x + 0{,}8 \cdot y = 20.$$

Množenjem gornje jednadžbe s (-2) pa zbrajanjem s donjom slijedi

$$-0,6\cdot y=-12,\ \text{odnosno}\ y=12/0,6=20,\ \text{pa je}\ x=15.$$

Vrijednost funkcije cilja u $V_2(20;\,15)$ je: $\pi_2=200\cdot 20+150\cdot 15=6250$ kn.



Slika 3.25. *Primjer 3.10: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Koordinate vrha V_3 su (0; 25) pa je $\pi_3=200\cdot 0+150\cdot 25=3750$ kn, dok je u vrhu V_4 vrijednost funkcije cilja jednaka nuli.

Dakle, funkcija cilja ima maksimalnu vrijednost u vrhu V_1. Zaključak je da će poduzeće najveću dobit u iznosu od $\pi=\pi_{\max}=6400$ kn ostvariti ako dnevno bude proizvodilo 32 komada proizvoda P1 (P2 se uopće neće proizvoditi).

Primjer 3.11. (problem ulaganja kapitala)

Osoba ulaže 300.000,00 kn u dva fonda, F1 i F2. Ulagač od brokera zahtijeva da investira najviše 120.000,00 kn u fond F2 i najmanje 60.000,00 kn u fond F1. Također želi da iznos investiran u fond F1 bude veći ili barem jednak iznosu investiranom u fond F2. Očekivana dobit fonda F1 je 8 %, a fonda F2 12 %.

Što bi broker trebao savjetovati ulagaču (koliko novca treba investirati u fond F1, a koliko u fond F2) da ostvari najveću dobit?

Rješenje:

Varijable odlučivanja i funkcije cilja: Ako se s x označi iznos investiran u fond F1 (očekivana dobit od 8 %), a s y iznos investiran u fond F2 (očekivana dobit od 12 %), ukupna se dobit može prikazati jednadžbom:

$$\pi=0,08\cdot x+0,12\cdot y.$$

Funkcija π je funkcija cilja koju treba maksimizirati, tj. pronaći njenu najveću vrijednost u izvedivom području, a x i y su varijable odlučivanja.

Definiranje ograničenja: Ulagač ukupno ulaže 300.000,00 kn, tj. zbroj ulaganja u oba fonda ne može premašiti taj iznos, pa je prvo ograničenje:

$$x + y \leq 300000 \qquad (1)$$

Sljedeća tri ograničenja proizlaze iz uvjeta koje je ulagač nametnuo brokeru:

- da u fond F2 smije uložiti najviše 120.000,00 kn

$$y \leq 120000, \qquad (2)$$

- da u fond F1 mora uložiti najmanje 60.000 kn

$$x \geq 60000, \qquad (3)$$

- te da iznos uložen u fond F1 bude jednak ili veći od onoga uloženog u fond F2:

$$x \geq y. \qquad (4)$$

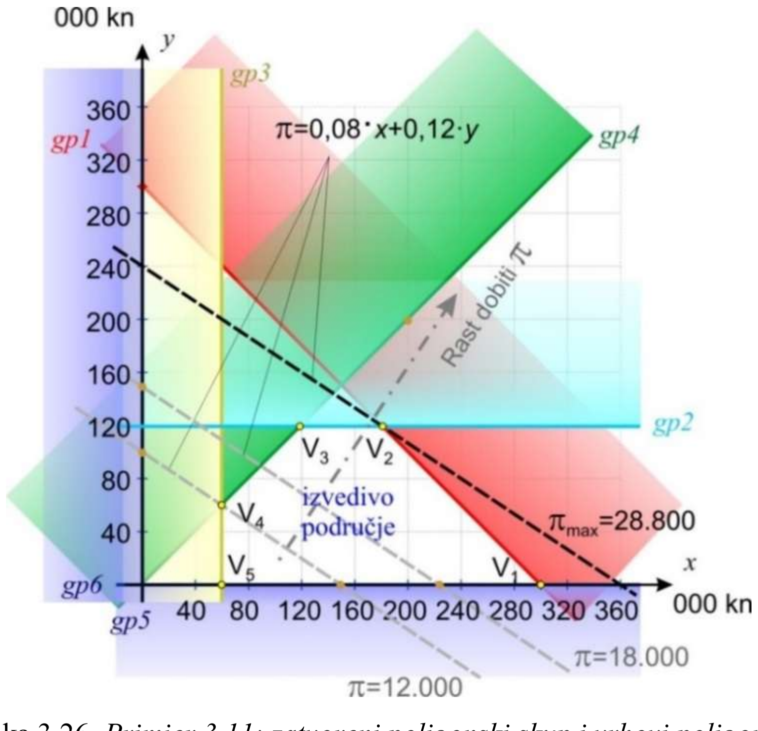
Uz to, varijable odlučivanja su nenegativne veličine

$$x \geq 0 \quad (5) \quad \text{i} \quad y \geq 0 \quad (6).$$

Strogo gledano, da bi se ovaj problem sveo na standardni problem maksimuma, morala bi ograničenja (1) do (4) imati znak nejednakosti manje ili jednako ($\leq$), što se može lako postići množenjem nejednadžba (3) i (4) s -1 pa bi se dobilo:

$$-x \leq -60000 \quad (3'), \qquad\qquad -x + y \leq 0 \quad (4'),$$

ali to najčešće nije potrebno raditi jer ne utječe na rješenja problema.



Slika 3.26. *Primjer 3.11: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Na slici 3.26 prikazani su svi granični pravci. Rješenje 1. ograničenja je poluravnina ispod *gp1*; 2. je to donja poluravnina (jer je *gp2* paralelan s osi *x*); 3. je to desna poluravnina (*gp3* je paralelan s osi *y*). Granični pravac 4 prolazi ishodištem i bilo kojom točkom kojoj je *x*=*y*, npr. (200; 200); uzme li se kao kontrolna točka neka na osi *x*, npr. (80; 0), može se zaključiti da je rješenje ove nejednadžbe poluravnina ispod *gp4*.

Uz nenegativne varijable odlučivanja konačno se kao rješenje dobije zatvoreni poligonski skup koji ima 5 vrhova.

Koordinate naznačenih vrhova, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (takvim iznosima ulaganja u fondove F1, odnosno F2), jesu:

V_1:	x_1=300.000;	y_1=0	→	π_1=**24.000**
V_2:	x_2=180.000;	y_2=120.000	→	π_2=**28.800**
V_3:	x_3=120.000;	y_3=120.000	→	π_3=**24.000**
V_4:	x_4=60.000;	y_4=60.000	→	π_4=**12.000**
V_5:	x_5=60.000;	y_5=0	→	π_5=**4.800.**

Broker bi trebao predložiti ulagaču da 180.000,00 kn investira u fond F1, a 120.000,00 kn u fond F2, pri čemu će predviđena dobit biti maksimalna, i iznosit će 28.800,00 kn.

Vezana su ograničenja (1) i (2).

Primjer 3.12. (problem proizvodnje)

Poduzeće proizvodi dvije vrste proizvoda, P1 i P2, na dva različita stroja, S1 i S2.

Za izradu proizvoda P1 potrebno je 1 sat rada na stroju S1 i 0,5 sati rada na stroju S2, dok je za izradu proizvoda P2 potrebno 1 sat rada na stroju S1 i 1,5 sati rada na stroju S2. Raspoloživi dnevni kapacitet stroja S1 je 16 sati, a stroja S2 12 sati.

U proizvod P1 ugrađuje se 2 kilograma materijala M1 i 1 kilogram materijala M2, dok se u proizvod P2 ugrađuje 1 kilogram materijala M1. Na skladištu je osigurano 20 kg materijala M1 i 8 kg materijala M2.

Dobit po proizvodu P1 iznosi 120,00 kn, a po proizvodu P2 80,00 kn, pri čemu kupac zahtijeva od proizvođača da količina proizvoda P1 bude barem 20 % od količine proizvoda P2.

Odrediti plan dnevne proizvodnje proizvoda P1 i P2 koji će maksimizirati dobit poduzeća. Nacrtati izoprofitni pravac kroz točku optimuma, kao i za vrijednost funkcije cilja 720.

Koji bi plan proizvodnje bio optimalan ako brojevi proizvoda moraju biti cijeli?

Rješenje:

Varijable odlučivanja i funkcija cilja: Ako je x količina proizvoda P1 (dobit 120 kn po komadu), a y količina proizvoda P2 (dobit 80 kn po komadu), ukupna se dobit može prikazati jednadžbom:

$$\pi = 120 \cdot x + 80 \cdot y .$$

Funkcija π je funkcija cilja kojoj treba pronaći najveću vrijednost u izvedivom području, pri čemu su x i y nenegativne varijable odlučivanja.

Definiranje ograničenja: Dnevni kapacitet stroja S1 je 16 sati pa mora biti zadovoljena nejednadžba:

$$1 \cdot x + 1 \cdot y \leq 16, \qquad (1)$$

dok je dnevni kapacitet stroja S2 12 sati pa mora biti zadovoljena i sljedeća nejednadžba:

$$0{,}5 \cdot x + 1{,}5 \cdot y \leq 12. \qquad (2)$$

Raspoloživa dnevna količina materijala M1 je 20 kg pa mora biti zadovoljena nejednadžba:

$$2 \cdot x + 1 \cdot y \leq 20, \qquad (3)$$

dok je raspoloživa dnevna količina materijala M2 8 kg pa mora biti zadovoljena i sljedeća nejednadžba:

$$1 \cdot x \leq 8. \qquad (4)$$

Zahtjev kupca prema kojem količina proizvoda P1 mora biti najmanje 20 % od količine proizvoda P2 može se prikazati nejednadžbom

$$x \geq 0{,}2y,$$

koja se može napisati i u obliku sljedećeg ograničenja:

$$x - 0{,}2 \cdot y \geq 0. \qquad (5)$$

Granični pravci ograničenja i koordinate točaka potrebnih za crtanje tih pravaca su:

gp1: $x + y = 16$

x	y
0	16
16	0

gp2: $0,5 \cdot x + 1,5 \cdot y = 12$

x	y
0	8
18	2

gp3: $2 \cdot x + y = 20$

x	y
0	20
10	0

gp4: $x = 8$

gp5: $x - 0,2 \cdot y = 0$

x	y
0	0
2	10

Na slici 3.27 prikazani su granični pravci i izvedivo područje s oznakama vrhova dobivenoga zatvorenoga konveksnog poligona.

Koordinate naznačenih vrhova, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (količina proizvoda P1, odnosno P2), jesu:

V_1: $x_1=8$; $y_1=0$ → **π_1=960 kn**

V_2: $x_2=8$; $y_2=4$ → **π_2=1.280 kn**

V_3: $x_3=7{,}2$; $y_3=5{,}6$ → **π_3=1.312 kn**

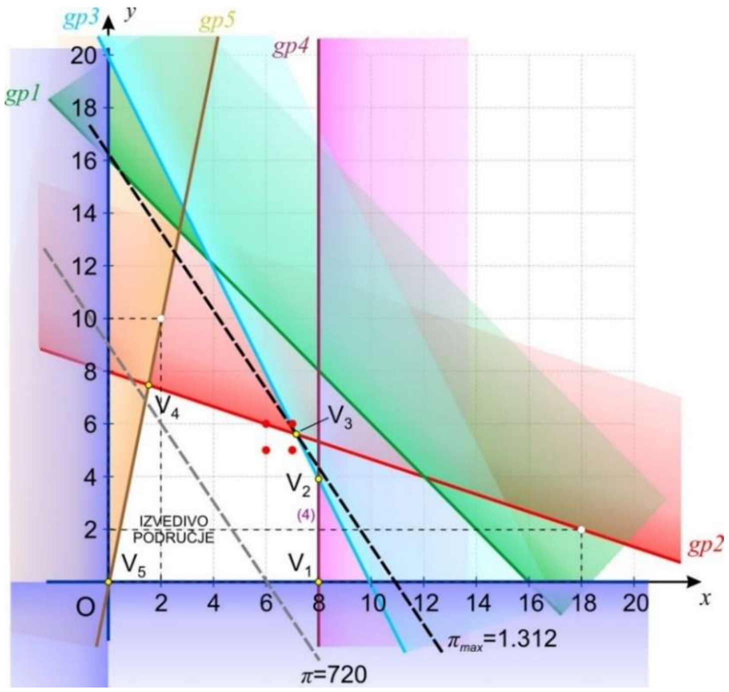
V_4: $x_4=1{,}5$; $y_4=7{,}5$ → **π_4=900 kn.**

Zaključuje se da će poduzeće ostvariti najveću dobit u iznosu od 1.312,00 kn ako proizvede 7,2 proizvoda P1 i 5,6 proizvoda P2.

No ako broj proizvoda mora biti cijeli, očito je da V_3 ne može biti optimum. Stoga se mora provjeriti što je s dobiti u točkama oko vrha V_3, a koje predstavljaju cjelobrojne vrijednosti varijable x, odnosno y. S obzirom na prikazani pravac funkcije cilja očevidno je da je od četiri ucrtane točke ona s koordinatama x*=7 i y*=5 točka s najvećom dobiti u okolišu točke V_3, pa je:

$$\pi^* = 120 \cdot 7 + 80 \cdot 5 = 840 + 400 = 1.240 \text{ kn.}$$

Ta je dobit manja od vrijednosti funkcije cilja u vrhu V_2, što znači da će poduzeće najveću dobit u iznosu od 1.280 kn ostvariti ako bude proizvodilo 8 komada proizvoda P1 i 4 komada proizvoda P2 (ako se traži da varijable odlučivanja budu cjelobrojne).



Slika 3.27. *Primjer 3.12: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Primjer 3.13. (problem oglašavanja/marketinški problem)

Tijekom 2002. godine pojedinu epizodu serije Prijatelji gledalo je prosječno 180 tisuća gledatelja. U istom je periodu pojedinu epizodu serije Alo-Alo gledalo prosječno 140 tisuća gledatelja.

Menadžment tvrtke Pivo odlučio se na promidžbenu kampanju za koju je izdvojio 720.000,00 kn, a sastojala se u emitiranju spota za vrijeme prikazivanja ovih serija. Cijena spota u vrijeme emitiranja epizode Prijatelja bila je 30.000,00 kn, a u vrijeme serije Alo-Alo 20.000,00 kn.

Koliko je spotova menadžment trebao ugovoriti u vremenu emitiranja serije Prijatelji, a koliko u vremenu emitiranja serije Alo-Alo da ukupna gledanost bude najveća, ako je pri tom zahtijevao da se uz seriju Alo-Alo ne emitira više od 50 %, ali ni manje od 25 % svih emitiranih spotova? Nacrtati pravac jednake funkcije cilja kroz točku optimuma..

Analizirati rješenje ako varijable odlučivanja moraju biti cjelobrojne.

Rješenje:

<u>Varijable odlučivanja i funkcija cilja</u>: Ako se s x označi broj spotova koji će biti emitirani u vrijeme prikazivanja serije *Prijatelji*, koju prosječno gleda 180.000 osoba, a

s y broj spotova koji će biti emitirani u vrijeme prikazivanja serije *Alo-Alo*, koju prosječno gleda 140.000 osoba, ukupna se gledanost može prikazati jednadžbom:

$$G = 180000 \cdot x + 140000 \cdot y\,.$$

Funkcija G je funkcija cilja koju treba maksimizirati u izvedivom području. Varijable x i y su varijable odlučivanja.

Definiranje ograničenja: Menadžment u kampanju ukupno ulaže 720.000,00 kn pa je prvo ograničenje:

$$30000 \cdot x + 20000 \cdot y \leq 720000. \qquad (1)$$

Sljedeće ograničenje proizlazi iz uvjeta koje je nametnuo menadžment: broj spotova emitiranih u vrijeme prikazivanja serije *Alo-Alo* mora biti između 25 % i 50 % svih spotova:

$$0{,}25 \cdot (x + y) \leq y \leq 0{,}5 \cdot (x + y)\,,$$

što se može prikazati uz pomoć sljedećih dvaju ograničenja:

$$0{,}25 \cdot (x + y) \leq y\,, \qquad (2')$$

$$y \leq 0{,}5 \cdot (x + y)\,. \qquad (3')$$

Ograničenja (2') i (3') mogu se, nakon sređivanja, napisati i u obliku:

$$0{,}25 \cdot x - 0{,}75 \cdot y \leq 0\,, \qquad (2)$$

$$-0{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot y \leq 0\,. \qquad (3)$$

Uz to, brojevi emitiranih spotova ne mogu biti negativni ($x \geq 0,\ y \geq 0$).

Granični pravci ograničenja i koordinate točaka potrebnih za crtanje tih pravaca su:

gp1:

$$30000 \cdot x + 20000 \cdot y = 720000\,,$$

x	y
0	36
24	0

gp2:

$$0{,}25 \cdot x - 0{,}75 \cdot y = 0\,,$$

x	y
0	0
12	4

gp3:

$$-0{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot y = 0\,,$$

x	y
0	0
12	12

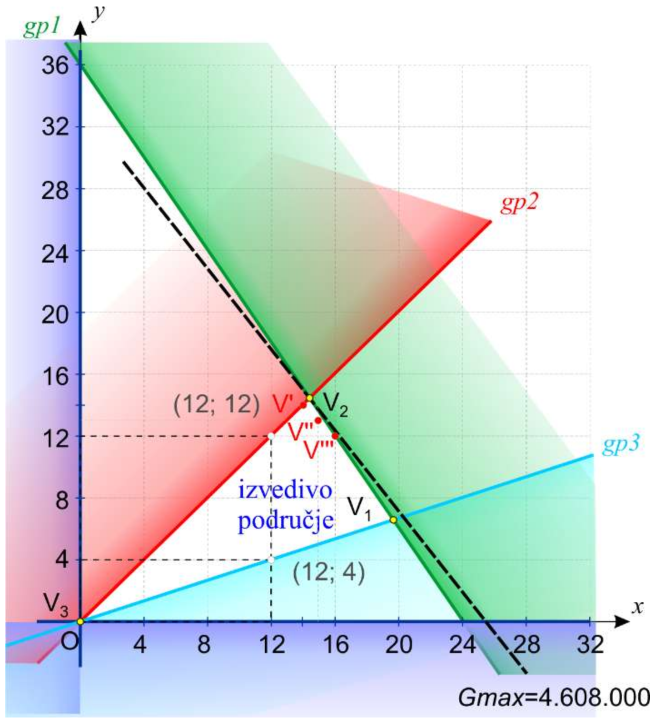
Na slici 3.28 prikazani su svi granični pravci, izvedivo područje razmatranog problema, a označeni su i svi vrhovi dobivenoga konveksnog poligona.

Koordinate naznačenih vrhova, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (takvu broju emitiranja spotova uz seriju *Prijatelji*, odnosno uz *Alo-Alo*), jesu:

V1: x_1=19,65; y_1=6,55 → **G_1=4.454.000**

V2: x_2=14,4; y_2=14,4 → **G_2=4.608.000.**

Najveća bi se gledanost postigla kada bi se zakupilo po 14,4 emitiranja uz obje serije, i ona bi iznosila ukupno 4.608.000 gledatelja.



Slika 3.28. *Primjer 3.13: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Uvom je zadatku logično da varijable odlučivanja moraju biti cjelobrojne, pa treba provjeriti točke unutar izvedivog područja najbliže vrhu V2 (točki optimuma):

V': $x_2'=14$; $y_2'=14$ → $\mathbf{G_1'=4.480.000}$

V'': $x_2''=15$; $y_2''=13$ → $\mathbf{G_2''=4.520.000}$,

V''': $x_2''=16$; $y_2'''=12$ → $\mathbf{G_2''=4.560.000}$,

što znači da je bilo optimalno zakupiti 16 emitiranja uz seriju *Prijatelji* i 12 uz seriju *Alo-Alo*, pri čemu bi maksimalna gledanost bila 4.560.000 osoba.

3.4. Analiza osjetljivosti rješenja problema linearnog programiranja

Podatci kojima se raspolaže pri postavljanju i kasnije rješavanju problema linearnog programiranja numeričke su vrijednosti nastale istraživanjem tržišta, statističkom obradom, procjenom i slično i mogu se, iz različitih razloga, mijenjati nakon rješenja problema. Te promjene ulaznih podataka mogu, u najvećem broju slučajeva, značajno utjecati i na promjene optimalnog rješenja.

U nastavku će se analizirati kako promjene ulaznih parametara utječu na optimalno rješenje problema linearnog programiranja. U praksi, gdje je promjena ulaznih podataka obično rutinska, analiza osjetljivosti gotovo je podjednako važna kao i samo određivanje optimalnog rješenja.

Analizu osjetljivosti optimalnog rješenja problema linearnog programiranja najlakše je i objasniti i razumjeti pri grafičkom načinu rješavanja. Razmotrit će se kako na rješenje utječu promjene koeficijenata funkcije cilja, a kako promjene desnih strana ograničenja (DSO). Posebno će se razmotriti vezana, a posebno nevezana ograničenja.

Analiza će se ograničiti na slučajeve kada se mijenja samo jedan ulazni parametar, pretpostavljajući da se ostali pri tom ne mijenjaju.

3.4.1. Promjene koeficijenata funkcije cilja

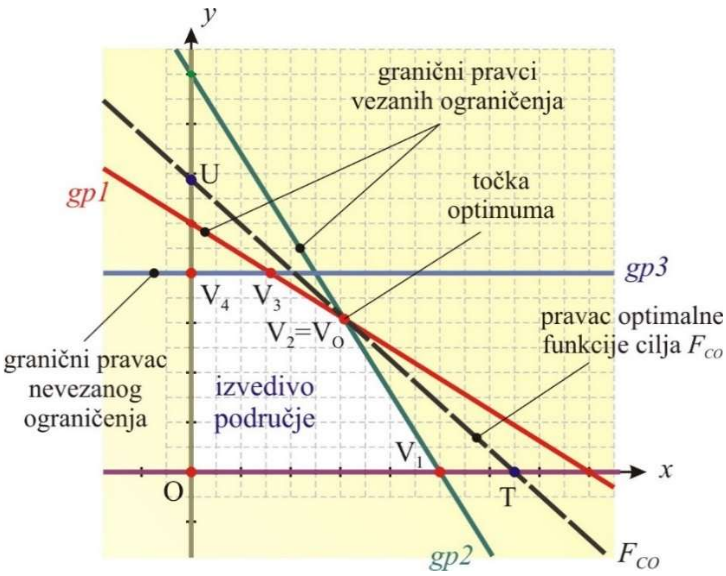
Za funkciju cilja

$$F_C = \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y\,,$$

gdje su A i B pozitivni realni brojevi, razmotrit će se dva slučaja:

1. Kako se mijenja optimalno rješenje promjenom koeficijenta A, ako koeficijent B pri tom ostaje nepromijenjen?
2. Kako se mijenja optimalno rješenje promjenom koeficijenta B, ako koeficijent A pri tom ostaje nepromijenjen?

Neka je optimalno rješenje razmatranog problema u vrhu V_O, u kojem se presijecaju granični pravci gp_1 i gp_2 (dakle pravci vezanih ograničenja), kako je to prikazano na slici 3.29.

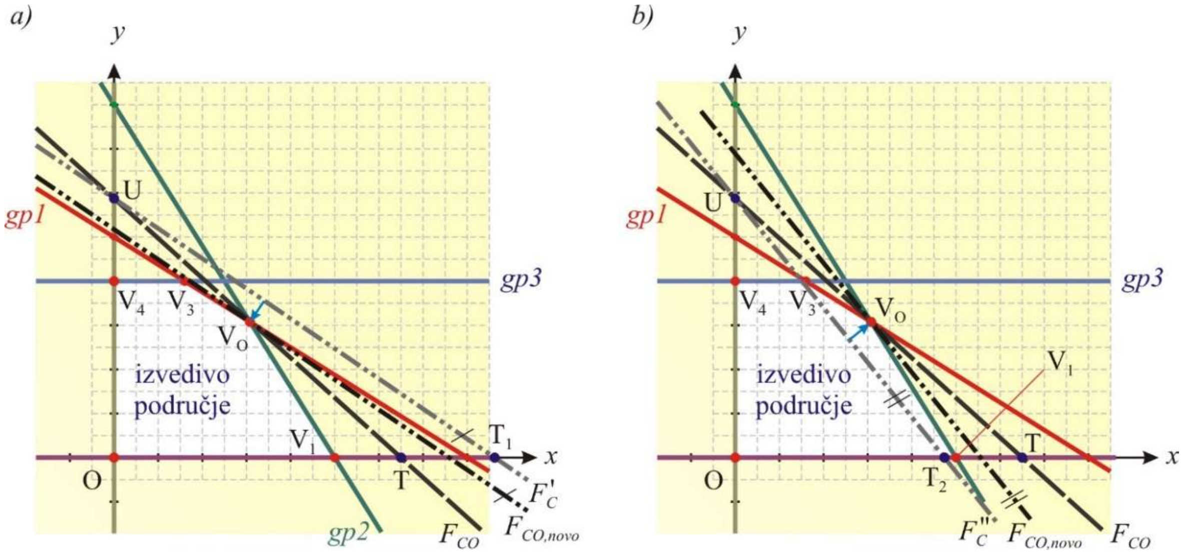


Slika 3.29. *Izvedivo područje i pravac optimalne funkcije cilja.*

Pravac optimalne funkcije cilja prolazi točkom optimuma V_O i presijeca osi koordinatnog sustava u točkama T (F_{CO} / A; 0) na osi *x*, odnosno U (0; F_{CO} / B) na osi *y*.

Ako se smanji koeficijent *A* u funkciji cilja tada će se omjer F_{CO} / A povećati, a točka presjecišta pravca funkcije cilja s osi *x* pomaknuti iz T u T_1 (udaljiti od ishodišta O). Pravac funkcije cilja će izaći izvan izvedivog područja (pravac $F_C^{'}$ na slici 3.30.a).

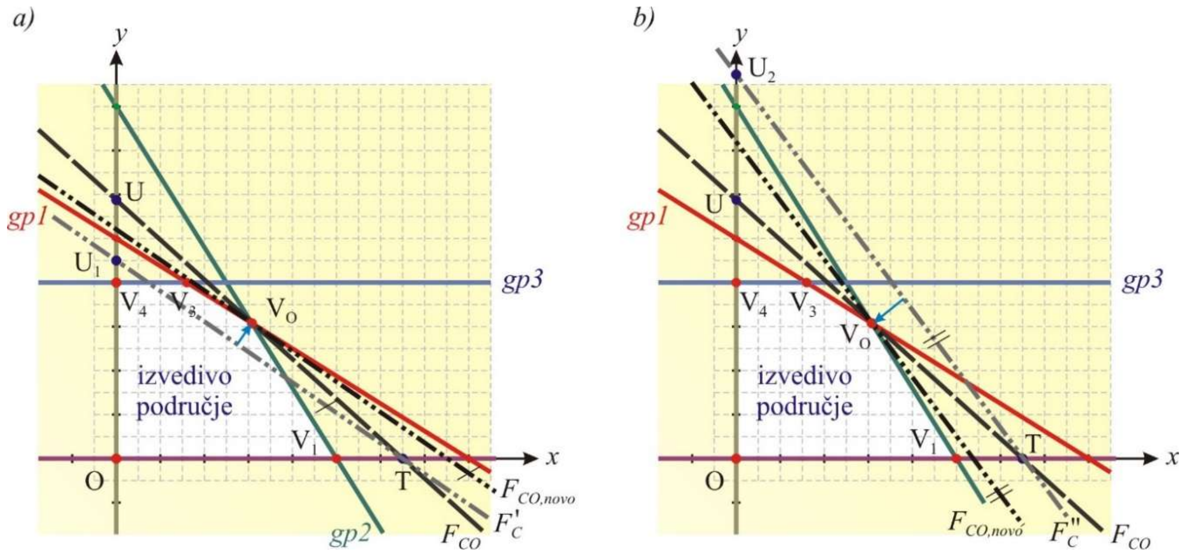
Da bi se dobila nova optimalna funkcija cilja mora se taj pravac pomaknuti paralelno samome sebi natrag u vrh V_O. Stoga se čini kao da, smanjivanjem koeficijenta A u funkciji cilja, pravac optimalne funkcije cilja rotira oko vrha V_O u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.



Slika 3.30. *Promjena koeficijenta A funkcije cilja: a) smanjivanje A, b) povećavanje A.*

Ako se poveća koeficijent *A* u funkciji cilja tada će se omjer $F_{CO}\,/\,A$ smanjiti, a točka presjecišta pravca funkcije cilja s osi *x* pomaknuti iz T u T_2 (približiti ishodištu O). Pravac funkcije cilja će dijelom ležati unutar izvedivog područja, ali neće prolaziti točkom optimuma V_O (pravac $F_C^{''}$ na slici 3.30.b).

Da bi se dobila nova optimalna funkcija cilja mora se taj pravac pomaknuti paralelno samome sebi natrag u vrh V_O. Stoga se čini kao da, smanjivanjem koeficijenta A u funkciji cilja, pravac optimalne funkcije cilja rotira oko vrha V_O u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.

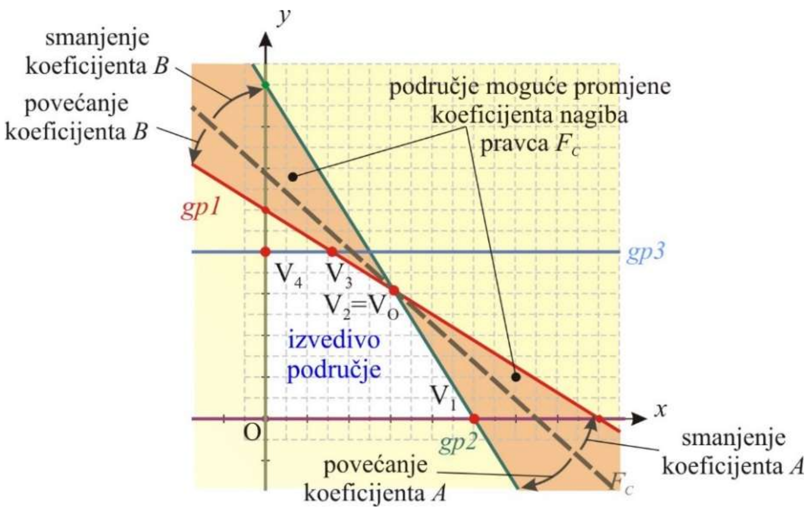


Slika 3.31. *Promjena koeficijenta B funkcije cilja: a) povećavanje B, b) smanjivanje B.*

Ako se poveća koeficijent B u funkciji cilja tada će se omjer $F_{CO}\,/\,B$ smanjiti, a točka presjecišta pravca funkcije cilja s osi *y* pomaknuti iz U u U_1 (približiti ishodištu O). Pravac funkcije cilja će dijelom ležati unutar izvedivog područja, ali neće prolaziti točkom optimuma V_O (pravac $F_C^{''}$ na slici 3.31.a). Da bi se dobila nova optimalna funkcija cilja mora se taj pravac pomaknuti paralelno samome sebi natrag u vrh V_O. Stoga se čini kao da, povećavanjem koeficijenta B u funkciji cilja, pravac optimalne funkcije cilja rotira oko vrha V_O u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu.

Ako se pak smanji koeficijent B u funkciji cilja tada će se omjer F_{CO}/B povećati, a točka presjecišta pravca funkcije cilja s osi y pomaknuti iz U u U_2 (udaljiti od ishodišta O), Pravac funkcije cilja će izaći izvan izvedivog područja (pravac $F_C^{"}$ na slici 3.31.b). Da bi se dobila nova optimalna funkcija cilja mora se taj pravac pomakuti paralelno samome sebi natrag u vrh V_O. Stoga se čini kao da, smanjivanjem koeficijenta B u funkciji cilja, pravac optimalne funkcije cilja rotira oko vrha V_O u smjeru kazaljke na satu.

Promjene koeficijenata A odnosno B u funkciji cilja neće poremetiti bazično rješenje problema sve dok se pravac nove optimalne funkcije cilja nalazi unutar ili na rubovima područja koje omeđuju granični pravci vezanih ograničenja (u razmatranom slučaju to su *gp1* i *gp2*), kako je to prikazano na slici 3.32.



Slika 3.32. *Područje promjene koeficijenata funkcije cilja.*

Budući da svi pravci koji se razmatraju (pravac F_C te gp_1 i gp_2) prolaze kroz II. i IV. kvadrant, može se zaključiti kako su im nagibi (koeficijenti smjera) negativni. S gp_2 je, pri tome, označen strmiji od dvaju graničnih pravaca vezanih ograničenja.

Kako se funkcija cilja može napisati u obliku

$$y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \cdot x + \frac{F_C}{\mathrm{B}},$$

to je koeficijent smjera pravca F_C

$$k_C = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}. \qquad \textbf{(3.26)}$$

Sa slike 3.32 slijedi da se koeficijenti funkcije cilja mogu mijenjati toliko dok se, zakretanjem u smjeru kazaljke na satu, pravac F_{CO} ne poklopi s pravcem gp_2; odnosno dok se, zakretanjem u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, pravac F_{CO} ne poklopi s pravcem gp_1.

U prvom će se slučaju pravac F_{CO} poklopiti s pravcem gp_2, što znači da će ti pravci imati jednake koeficijente smjera

$$k_C = k_2.$$

Točka optimuma nije više samo vrh V nego to postaju sve točke na segmentu VV".

U drugom će se slučaju pravac F_{CO} poklopiti s pravcem gp_1, što znači da će ti pravci imati jednake koeficijente smjera, dakle

$$k_C = k_1.$$

Točka optimuma nije više samo vrh V nego to postaju sve točke na segmentu VV'.

Imajući u vidu da su k_C, k_1 i k_2 negativni, te da je k_2 najveći po apsolutnoj vrijednosti (najviše negativan), zaključuje se da se koeficijent smjera pravca može mijenjati u granicama

$$k_2 \le k_C \le k_1 \tag{3.27}$$

a da se ne promijeni bazično rješenje.

Izraženo preko koeficijenata funkcije cilja gornja se nejednakost može pisati i kao

$$k_2 \le -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \le k_1 \quad (*).$$

Množenjem prethodne nejednadžbe s $-B$, i imajući u vidu da se pri množenju nejednadžbe negativnim brojem mijenja i smjer nejednakosti, dobije se

$$-\mathrm{B}\cdot k_2 \ge \mathrm{A} \ge -\mathrm{B}\cdot k_1 . \tag{3.28}$$

Dakle koeficijent A funkcije cilja može se mijenjati u granicama od umnoška $-B\cdot k_2$ do umnoška $-B\cdot k_1$ a da se ne promijeni bazično rješenje problema.

Jasno je da, ako su A i B pozitivni, povećanjem koeficijenta A, uz konstantni koeficijent B, raste vrijednost funkcije cilja.

Dijeljenjem nejednadžbe (*) s $-A$, i imajući u vidu da se pri množenju nejednadžbe negativnim brojem mijenja i smjer nejednakosti, dobije se

$$-\frac{k_2}{\mathrm{A}} \ge \frac{1}{\mathrm{B}} \ge -\frac{k_1}{\mathrm{A}},$$

odnosno

$$-\frac{\mathrm{A}}{k_2} \le \mathrm{B} \le -\frac{\mathrm{A}}{k_1} \tag{3.29}$$

jer se i kod zapisa nejednadžba u recipročnom obliku mijenja smjer nejednakosti.

Dakle koeficijent B funkcije cilja može se mijenjati u granicama od kvocijenta $-\mathrm{A}/k_2$ do kvocijenta $-\mathrm{A}/k_1$ a da se ne promijeni bazično rješenje problema.

Povećanjem koeficijenta B, uz konstantni koeficijent A, raste vrijednost funkcije cilja.

Postupak određivanja područja u kojem se mogu mijenjati koeficijenti funkcije cilja

$$F_{CO} = \mathrm{A} \cdot x + \mathrm{B} \cdot y$$

a da se ne naruši bazično rješenje problema LP-a je sljedeći:

- koeficijent *A* uz varijablu *x*:
    1. definirati (uočiti) vezana ograničenja (ovdje će se označiti s 1 i 2) i odgovarajuće granične pravce:

       gp1: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$,

       gp2: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$;
    2. odrediti koeficijente smjera graničnih pravaca tih dvaju ograničenja:

       $$k_1 = -\frac{a_1}{b_1}; \quad k_2 = -\frac{a_2}{b_2};$$
    3. utvrditi koji je od koeficijenata smjera manji (veći negativni broj): ako je npr. $k_1 = -3$, a $k_2 = -1$, tada je k_1 manji;
    4. korištenjem izraza (3.28) iz skripta odrediti područje promjene koeficijenta A, i to:

       $-\mathrm{B} \cdot k_1 \geq \mathrm{A} \geq -\mathrm{B} \cdot k_2$, ako je k_1 manji, odnosno

       $-\mathrm{B} \cdot k_2 \geq \mathrm{A} \geq -\mathrm{B} \cdot k_1$, ako je k_2 manji;
- koeficijent B uz varijablu *y*:
    1. definirati vezana ograničenja (ovdje će ih se označiti s 1 i 2) i odgovarajuće granične pravce:

       gp1: $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$,

       gp2: $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$;
    2. odrediti koeficijente smjera graničnih pravaca tih dvaju ograničenja:

       $$k_1 = -\frac{a_1}{b_1}; \quad k_2 = -\frac{a_2}{b_2};$$
    3. uočiti koji je od koeficijenata smjera manji (veći negativni broj): ako je npr. $k_1 = -3$, a $k_2 = -1$, tada je k_1 manji;
    4. korištenjem izraza (3.29) odrediti područje promjene koeficijenta B, i to:

       $-\frac{\mathrm{A}}{k_1} \leq \mathrm{B} \leq -\frac{\mathrm{A}}{k_2}$, ako je k_1 manji, odnosno

       $-\frac{\mathrm{A}}{k_2} \leq \mathrm{B} \leq -\frac{\mathrm{A}}{k_1}$, ako je k_2 manji.

3.4.2. Promjene desne strane ograničenja (DSO)

Povećanjem desne strane vezanog ograničenja granični pravac tog ograničenja udaljava se od ishodišta, paralelno samome sebi. Izvedivo područje se povećava, točka optimuma se pomiče duž graničnih pravaca vezanih ograničenja i udaljava od ishodišta, a funkcija cilja raste.

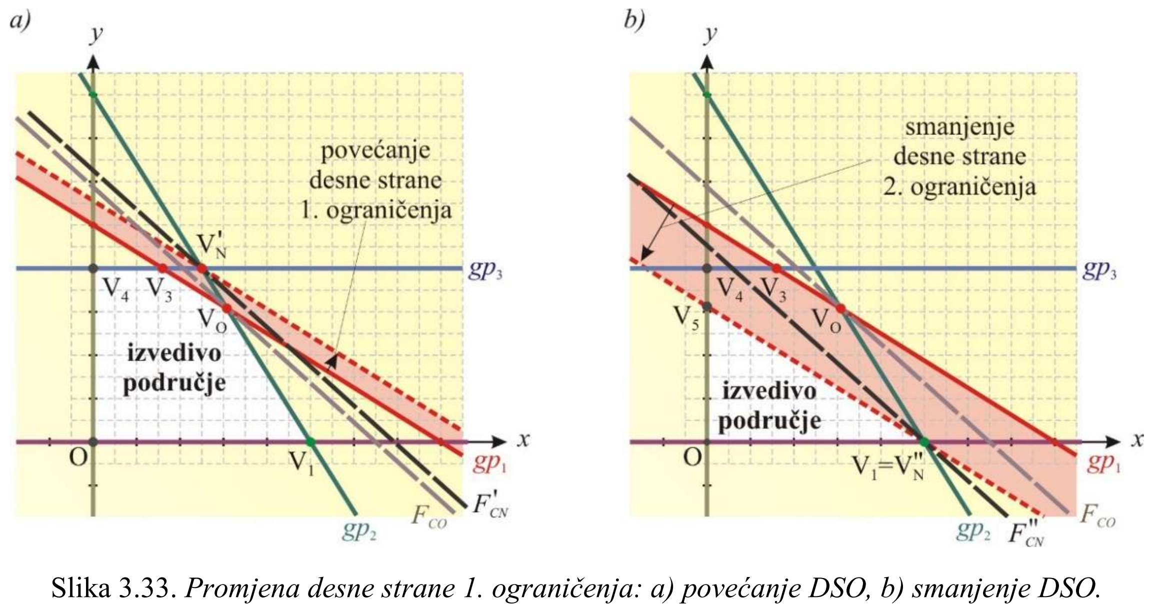
Smanjenjem desne strane vezanog ograničenja pravac tog opterećenja približava se ishodištu, paralelno samome sebi. Izvedivo područje se smanjuje, točka optimuma se pomiče duž graničnih pravaca vezanih ograničenja i primiče ishodištu, a funkcija cilja se smanjuje.

Desna strana vezanog ograničenja može se povećavati odnosno smanjivati sve dok neko od vezanih ograničenja ne izgubi osnovno svojstvo vezanosti, odnosno sve dok je presjecište graničnih pravaca tih ograničenja ujedno i točka optimuma. Ovdje će se razmotriti najveća moguća povećanja odnosno smanjenja desnih strana pojedinig ograničenja uz uvjet da vezana ograničenja ne izgube svoje temeljno svojstvo, odnosno da ostanu vezana.

Za prvo ograničenje to je prikazano na slici 3.33.

Zamisli li se da su granični pravci *gp1* i *gp2* međusobno povezani prstenom u točki optimuma V_O, tada će povećavanjem desne strane 1. ograničenja taj prsten kliziti graničnim pravcima 1 i 2 ka točki $V_N^{'}$ presjecište pravaca *gp*2 i *gp*3. Dakle, desna strana 1. ograničenja može rasti sve dok se pravac *gp1* ne pomakne do točke $V_N^{'}$. Izvedivo će se područje povećati a definirat će ga poligon $OV_1V_N^{'}V_4$. Točka $V_N^{'}$ postat će novom točkom optimuma, a pravac nove optimalne funkcije cilja bit će $F_{CN}^{'}$ (slika 3.33.a).

Daljnjim povećanjem ovo bi ograničenje postalo nevezano jer bi se *gp1* našao izvan opisanog izvedivog područja.



Slika 3.33. *Promjena desne strane 1. ograničenja: a) povećanje DSO, b) smanjenje DSO.*

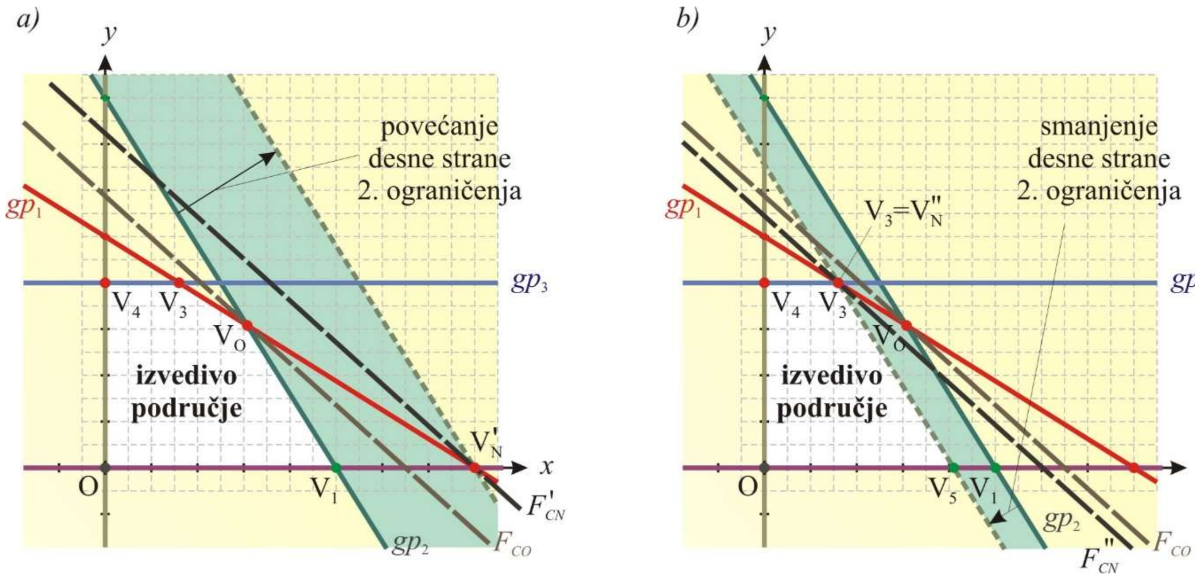
Desna strana prvog ograničenja može se smanjivati sve dok se pravac *gp1* ne pomakne do točke $V_N^{''}$ (presjecište *gp1* i osi *x*). Trokut $OV_N^{''}V_5$ postaje novo izvedivo područje, a točka $V_N^{''}$ novom točkom optimuma. Prema tome, pravac nove optimalne funkcije cilja bit će $F_{CN}^{''}$ (slika 3.33.b).

Daljnjim smanjivanjem nevezanim bi postalo drugo ograničenje jer bi se točka optimuma, točka presjecišta pravca *gp1* i osi *x* pomicala ka ishodištu koordinatnog sustava.

Isto je prikazano na slici 3.34 za drugo ograničenje.

Povećanje desne strane drugog ograničenja znači udaljavanje pravca *gp2* od ishodišta. Točka V_O (zamišljeni prsten koji povezuje *gp1* i *gp2*) klizi prema točki $V_N^{'}$ presjecišta pravca *gp1* i osi *x*. Dakle, desna strana 2. ograničenja može rasti sve dok se pravac *gp2* ne pomakne do točke $V_N^{'}$. Izvedivo će se područje povećati a definirat će ga poligon $OV_N^{'}V_3V_4$. Točka $V_N^{'}$ postat će novom točkom optimuma, a pravac nove optimalne funkcije cilja bit će $F_{CN}^{'}$ (slika 3.34.a).

Daljnjim povećanjem nevezanim bi postalo drugo ograničenje jer bi se *gp2* našao izvan izvedivog područja (desno od $V_N^{'}$).



Slika 3.34. *Promjena desne strane 2. ograničenja: a) povećavanje DSO, b) smanjivanje DSO.*

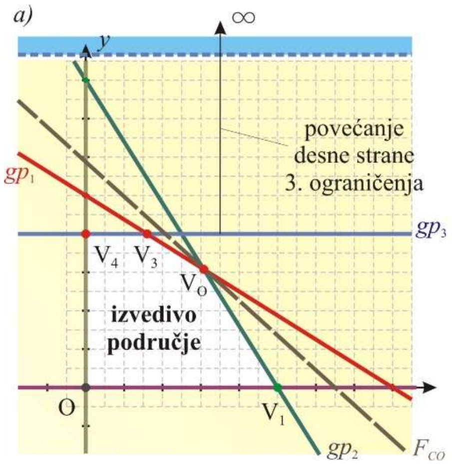
Desna strana drugog ograničenja može se smanjivati sve dok se pravac *gp2* ne pomakne do točke $V_N^{''}$ (V_3). Trokut $OV_5V_N^{''}V_4$ postaje novo izvedivo područje, a točka $V_N^{''}$ novom točkom optimuma. Prema tome, pravac nove optimalne funkcije cilja bit će $F_{CN}^{''}$ (slika 3.33.b).

Daljnjim smanjivanjem nevezanim bi postalo prvo ograničenje jer bi se točka optimuma, točka presjecišta pravaca *gp2* i *gp3* pomicala duž pravca *gp3* ka točki V_4.

Utjecaj promjene desne strane trećeg ograničenja grafički je prikazan na slici 3.35.

Povećanje desne strane trećeg, nevezanog ograničenja ne može promijeniti ništa u optimalnom rješenju s obzirom na to što u točki optimuma ovaj resurs ni tako nije iskorišten do kraja. Stoga ne postoji gornja granica povećanja desne strane ovog ograničenja (može se povećati do beskonačnosti, ∞), kako je to prikazano na slici 3.35.a.

Desna strana trećeg ograničenja može se, bez utjecaja na bazično rješenje, smanjivati sve dok pravac *gp3* pomicanjem prema dolje ne dođe do točke optimuma V_O (slika 3.35.a). Daljnje smanjivanje desne strane ovog ograničenja nevezanim bi učinilo prvo ograničenje jer bi se točka optimuma nalazila u presjecištu pravaca *gp2* i *gp3* (na segmentu V_OV_1).



Slika 3.35. *Promjena desne strane 3. ograničenja : a) povećavanje DSO, b) smanjivanje DSO.*

3.4.3. Pojam marginalnog troška (cijene u sjeni)

Važan dio analize osjetljivosti desne strane ograničenja u tome je što ona omogućuje određivanje maksimalne dopustive jedinične cijene koju treba platiti za svaku dodatnu jedinicu resursa. Da bi se moglo odgovoriti na ovo pitanje, potrebno je prvo razjasniti pojam marginalnog troška (cijene u sjeni, engl. *shadow price*).

Jedna od interpretacija je sljedeća: *marginalni trošak (cijena u sjeni) nekog ograničenja je iznos za koji će se povećati funkcija cilja ako se desna strana tog ograničenja poveća za jedinicu.* Marginalni trošak različit od nule mogu imati samo vezana ograničenja jer povećanje odnosno smanjenje desne strane nekog nevezanog ograničenja u određenim granicama, uz zadržavanje baz̆ičnog rješenja, ne utječe na promjenu funkcije cilja pa mu je cijena u sjeni jednaka nuli.

Cijenu u sjeni nekog vezanog ograničenja moguće je odrediti povećanjem desne strane tog ograničenja za jedinicu, izračunavanjem novih koordinata točke optimuma te nove vrijednosti optimalne funkcije cilja. Tada je prirast optimalne funkcije cilja ujedno i cijena u sjeni razmatranog ograničenja. Budući da je u analizi osjetljivosti bitno odrediti i za koliko se može mijenjati desna strana razmatranog ograničenja a da vezana ograničenja ostanu vezana, oba se ova podatka izračunavaju s pomoću postupka koji slijedi.

Neka je *i*-to ograničenje vezano i neka su koordinate vrha u kojem funkcija cilja ima optimalnu vrijednost $V(x_V; y_V)$. Poveća li se desna strana tog ograničenja (c_i) za iznos Δc_i, nova točka optimuma postat će točka V_N (novi vrh) s koordinatama (x_{VN}; y_{VN}).

Ako funkcija cilja u vrhu V ima vrijednost F_{CO}, tada će njena vrijednost u vrhu V_N biti F_{CN}, a razlika

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} \qquad \textbf{(3.30)}$$

prirast je funkcije cilja pri pomicanju optimuma iz točke V u točku V_N.

Omjer prirasta funkcije cilja ΔF_{CO} i povećanja desne strane *i*-tog ograničenja Δc_i

$$p_{Si} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_i} \qquad \textbf{(3.31)}$$

jest cijena u sjeni tog (i-tog) ograničenja.

Postavlja se pitanje za koliko se treba povećati desna strana i-tog ograničenja (Δc_i = ?) da se optimum pomakne iz vrha V u V_N.

Odgovor se dobije razmatranjem jednadžbe graničnog pravca i-tog ograničenja koja glasi

$$a_i \cdot x + b_i \cdot y = c_i \,.$$

Pomicanje toga pravca, paralelno samom sebi, tako da prođe točkom V_N značit će promjenu samo desne strane tog ograničenja. Neka je ta nova vrijednost $c_{i\mathrm{VN}}$ koja slijedi se iz uvjeta da točka V_N leži na promatranom graničnom pravcu i mora zadovoljiti jednadžbu tog pravca, odnosno mora biti:

$$a_i \cdot x_{\mathrm{VN}} + b_i \cdot y_{\mathrm{VN}} = c_{i\mathrm{VN}} \,. \qquad \textbf{(3.32)}$$

Dalje je:

$$\Delta c_i = c_{i\mathrm{VN}} - c_i \qquad \textbf{(3.33)}$$

ili

$$\Delta c_i = a_i \cdot x_{\mathrm{VN}} + b_i \cdot y_{\mathrm{VN}} - c_i \,. \qquad \textbf{(3.34)}$$

S druge strane, vrijednost funkcije cilja u točki V je:

$$F_{CO} = \mathrm{A} \cdot x_{\mathrm{V}} + \mathrm{B} \cdot y_{\mathrm{V}} \,,$$

a u točki V_N iznosi

$$F_{CN} = \mathrm{A} \cdot x_{\mathrm{VN}} + \mathrm{B} \cdot y_{\mathrm{VN}} \qquad \textbf{(3.35)}$$

pa je prirast funkcije cilja pri pomaku iz točke V u V_N

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} \quad \text{ili} \quad \Delta F_{CO} = \mathrm{A} \cdot (x_{\mathrm{VN}} - x_{\mathrm{V}}) + \mathrm{B} \cdot (y_{\mathrm{VN}} - y_{\mathrm{V}}) \,. \qquad \textbf{(3.36)}$$

Marginalni trošak (cijena u sjeni) za i-to ograničenje sada je:

$$p_{Si} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_i} = \frac{\mathrm{A} \cdot (x_{\mathrm{VN}} - x_{\mathrm{V}}) + \mathrm{B} \cdot (y_{\mathrm{VN}} - y_{\mathrm{V}})}{a_i \cdot x_{\mathrm{VN}} + b_i \cdot y_{\mathrm{VN}} - c_i} \,. \qquad \textbf{(3.37)}$$

Poznavanjem marginalnog troška može se s pomoću izraza (3.31) izračunati prirast funkcije cilja ΔF_{CO} za bilo koju dopuštenu promjenu desne strane promatranog ograničenja (Δc_i).

Uz interpretaciju po kojoj je marginalni trošak ograničenja iznos za koji će se povećati funkcija cilja ako se desna strana tog ograničenja poveća za jedan, marginalni trošak (cijena u sjeni) govori i to koliko smijemo platiti dodatnu jedinicu resursa (jedinicu povećanja desne strane promatranog ograničenja) a da pri tom ne stvaramo gubitke.

Svaka cijena jedinice tog resursa manja od marginalnog troška (cijene u sjeni) značit će povećanje dobiti.

Postupak određivanja cijene u sjeni (marginalnog troška) i-tog ograničenja problema LP-a, koje je jedno od vezanih ograničenja je sljedeći:

1. Odrediti koordinate optimuma, odnosno koordinate točke V, x_V i y_V, koja je bazično rješenja razmatranog problema.
2. Uočiti točku V_N koja predstavlja krajnju točku do koje se može povećavati desna strana i-tog ograničenja a da niti jedno od vezanih ograničenje ne izgubi svoje osnovno svojstvo, pa odrediti njene koordinate x_{VN} i y_{VN}.
3. Odrediti desnu stranu i-tog ograničenja za koji će točka optimuma prijeći iz V u V_N, a prema jednadžbi (3.32), i potom prirast desne strane s pomoću izraza (3.33)
   $c_{iVN} = a_i \cdot x_{VN} + b_i \cdot y_{VN}$, $\Delta c_i = c_{iVN} - c_i$.
4. Odrediti vrijednost funkcije cilja u novoj točki optimuma V_N prema (3.35) te prirast funkcije cilja pri prijelazu iz V u V_N, a prema prvoj od jednadžba (3.36)
   $F_{CN} = \mathrm{A} \cdot x_{VN} + \mathrm{B} \cdot y_{VN}$, $\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO}$.
5. Konačno, odrediti cijenu u sjeni koja je definirana izrazom (3.31):
   $p_{Si} = \dfrac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_i}$.

***Primjer** 3.14.*

Zadana je funkcija cilja:

$$F_C = 50 \cdot x + 90 \cdot y .$$

Odrediti izvedivo područje i maksimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$y \le 200 \quad (1)$$

$$7 \cdot x + 6 \cdot y \le 1680 \quad (2)$$

$$x \le 160 \quad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja. Potrebno je odgovoriti:

a) Koje ograničenje nije vezano?
b) Za koliko se može povećati desna strana 2. ograničenja a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja? Kolika je cijena u sjeni tog ograničenja?
c) Za koliko bi se povećala funkcija cilja da se desna strana 2. ograničenja poveća za 50?

Rješenje:

Granični pravci ograničenja su:

gp1: $y = 200$,   *gp2*: $7 \cdot x + 6 \cdot y = 1680$,   *gp3*: $x = 160$,

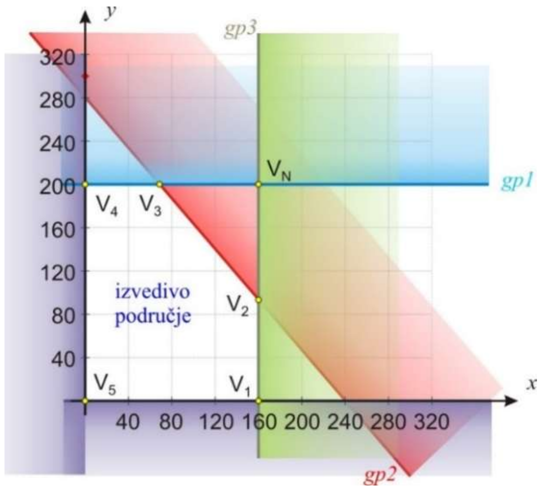
a presjecišta graničnog pravca *gp2* s koordinatnim osima su:

gp2:

x	y
0	280
240	0

Nacrtaju li se granični pravci i odabere li se za kontrolnu točku ishodište O(0; 0), može se zaključiti kako je za svako ograničenje rješenje poluravnina ispod odgovarajućeg graničnog pravca. Zbog nenegativnosti varijabla odlučivanja izvedivo je područje ograničeno na I. kvadrant.

Ranije opisanim postupkom dobije se izvedivo područje zadanog problema: zatvoreni konveksni skup s 5 vrhova (slika 3.36).



Slika 3.36. *Primjer 3.14: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Koordinate vrhova poligona i odgovarajuće vrijednosti funkcije cilja su:

- V_1 (160; 0), pa je $F_{C1} = 50 \cdot 160 + 90 \cdot 0 = 8000$;
- V_2(160; 93,33) – presjecište *gp2* i *gp3*, pa je $F_{C2} = 50 \cdot 160 + 90 \cdot 93,33 = 16400$;
- V_3(68,57; 200) – presjecište *gp1* i *gp2*, pa je $F_{C3} = 50 \cdot 68,57 + 90 \cdot 200 = 21428,5$;
- V_4 (0; 200), pa je $F_{C4} = 50 \cdot 0 + 90 \cdot 200 = 18000$.

Funkcija cilja ima maksimalnu vrijednost $F_{C\max} = F_{CO} = 21428,5$ u vrhu V_3.

a) Treće ograničenje nije vezano jer pravac *gp3* ne tvori točku optimuma.

b) Povećanjem desne strane 2. ograničenja doći će do udaljavanja *gp2* od ishodišta, paralelno samome sebi. To pomicanje može ići dotle dok *gp2* ne prođe točkom V_N na slici 3.36. Daljnjim povećavanjem desne strane tog ograničenja *gp2* bi se udaljio (desno) u odnosu na točku V_N koja bi, međutim, ostala točkom optimuma s tim da bi u tom slučaju optimum „gradili“ granični pravci 1. i 3. ograničenja.

   Koordinate točke V_N su (160; 200). Da bi pravac *gp2* prošao tom točkom, mora mu desna strana biti

   $$c_{2N} = 7 \cdot x_{VN} + 6 \cdot y_{VN} = 7 \cdot 160 + 6 \cdot 200 = 2320$$

   što znači povećanje u odnosu na zadanu vrijednost od

   $$\Delta c_2 = c_{2N} - c_2 = 2320 - 1680 = 640.$$

   Dakle, desna strana 2. ograničenja može se povećati za 640 a da vezana ograničenja ne izgube svoje osnovno svojstvo.

   Vrijednost funkcije cilja u novoj točki optimuma V_N je

   $$F_{CN} = 50 \cdot x_{VN} + 90 \cdot y_{VN} = 50 \cdot 160 + 90 \cdot 200 = 26000$$

što znači povećanje funkcije cilja za

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} = 26000 - 21428{,}5 = 4571{,}5\,.$$

Prema izrazu (3.31) cijena u sjeni 2. ograničenja je

$$p_{S2} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_2} = \frac{4571{,}5}{640} = 7{,}14$$

pa se zaključuje da će svako povećanje desne strane 2. ograničenja za 1 rezultirati povećanjem funkcije cilja za 7,14.

c) Povećanjem desne strane 2. ograničenja za $\Delta c_2^* = 50$ povećanje funkcije cilja dobije se kao umnožak tog povećanja i cijene u sjeni tog ograničenja (iz 3.31):

$$\Delta F_{CO}^* = \Delta c_2^* \cdot p_2 = 50 \cdot 7{,}14 = 357\,.$$

Primjer 3.15. (problem sjetve/ratarski problem)

Ratar koji se bavi uzgojem kukuruza i soje osigurao je 200.000,00 kn za sjetvu. Na svaki hektar zasijanog kukuruza utroši 500,00 kn, a na svaki hektar zasijane soje utroši 1000,00 kn.

Hektar zasijanog kukuruza zahtijeva 10 m^3 skladišnog prostora, a donosi dobit od 600,00 kn, dok svaki hektar zasijane soje zahtijeva 4 m^3 skladišnog prostora, a donosi dobit od 900,00 kn. Ratar raspolaže s 320 ha (hektara) zemljišta i 1920 m^3 skladišnog prostora.

Potrebno je:

a) Odrediti koliko hektara pojedine biljke treba zasijati da ostvari najveću dobit.
b) Odrediti i granice u kojima se može mijenjati količina novca uloženog u sjetvu a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo. Kolika je cijena u sjeni za to ograničenje?
c) U kojim se granicama može mijenjati dobit po hektaru zasijanog kukuruza a da se ne promijeni bazično rješenje?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja i funkcije cilja: Funkcija cilja, koja se želi maksimizirati, može se prikazati jednadžbom:

$$\pi = 600 \cdot x + 900 \cdot y$$

gdje su varijable odlučivanja: x – broj hektara zemljišta zasijan kukuruzom (uz dobit po zasijanom hektaru 600 kn), y – broj hektara zemljišta zasijan sojom (uz dobit po zasijanom hektaru 900 kn).

Definiranje ograničenja: Ratar raspolaže s 200.000,00 kn pa je prvo ograničenje:

$$500 \cdot x + 1000 \cdot y \leq 200000 \qquad (1)$$

Sljedeća ograničenja definira ukupno raspoloživa površina zemljišta:

$$x + y \leq 320, \qquad (2)$$

odnosno raspoloživi skladišni prostor

$$10 \cdot x + 4 \cdot y \leq 1920, \qquad (3)$$

te nenegativne varijable odlučivanja.

Granični pravci ograničenja su:

$gp1$: $500 \cdot x + 1000 \cdot y = 200000$, $gp2$: $x + y = 320$, $gp3$: $10 \cdot x + 4 \cdot y = 1920$,

a presjecišta tih pravaca s koordinatnim osima su:

gp1:

x	y
0	200
400	0

gp2:

x	y
0	320
320	0

gp3:

x	y
80	280
192	0

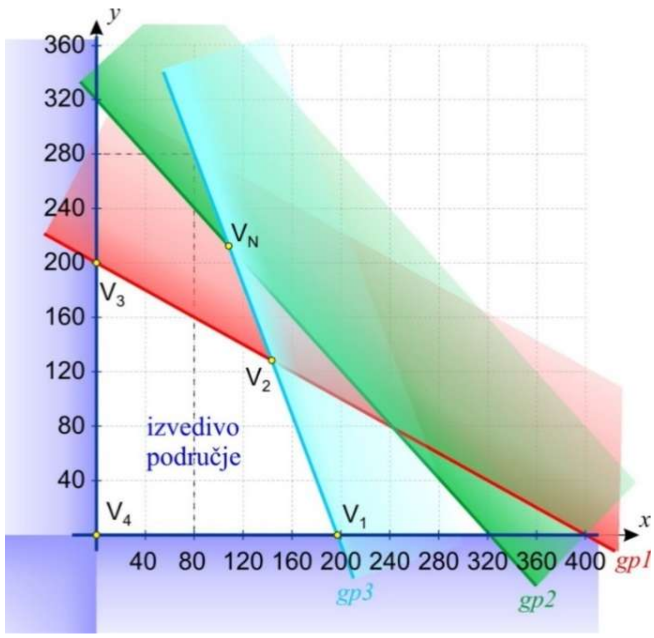
Na slici 3.37 prikazani su svi granični pravci, izvedivo područje razmatranog problema, a označeni su i svi vrhovi dobivenog konveksnog poligona.

Koordinate naznačenih vrhova, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (takvim površinama zasada kukuruza, odnosno soje), jesu:

V_1: $x_1=192$; $y_1=0$ $\rightarrow$ π_1**=115.200 kn**

V_2: $x_2=140$; $y_2=130$ $\rightarrow$ π_2**=201.000 kn**

V_3: $x_3=0$; $y_3=200$ $\rightarrow$ π_3**=180.000 kn.**



Slika 3.37. *Primjer 3.15: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Najveću dobit u iznosu od 201.000,00 kn ratar će ostvariti ako zasije 140 ha kukuruza i 130 ha soje.

Može se uočiti da ratar, zbog ograničenih sredstava i ograničenog skladišnog prostora, ne može zasijati cjelokupnu raspoloživu površinu od 320 ha.

b) Promjena desne strane prvog ograničenja, količine novca raspoloživog za sjetvu, dovest će do pomicanja točke optimuma V_2 duž graničnog pravca trećeg ograničenja: prema točki V_N (slika 3.37) u slučaju povećanja ulaganja, a prema točki V_1 u slučaju smanjenja ulaganja.

Granični pravac 1. ograničenja je:

$$500 \cdot x + 1000 \cdot y = 200000$$

pa su za taj pravac:

$$a_1 = 500; \quad b_1 = 1000; \quad c_1 = 200000.$$

Točka V_N je presjecište pravaca 2. i 3. ograničenja:

$$x + y = 320,$$

$$10 \cdot x + 4 \cdot y = 1920,$$

a rješenje ovog sustava daje koordinate točke V_N: $x_{VN} = 106,67; y_{VN} = 213,33$.

Desna strana 1. ograničenja za koju će granični pravac *gp1* proći točkom V_N je (3.32):

$$c_{1N} = a_1 \cdot x_{VN} + b_1 \cdot y_{VN} = 500 \cdot 106,67 + 1000 \cdot 213,33 = 266667.$$

Kako točka V_1 ima koordinate (192; 0), potreban iznos desne strane 1. ograničenja za koji će *gp1* proći točkom V_1 je:

$$c_{1,1} = a_1 \cdot x_{V1} + b_1 \cdot y_{V1} = 500 \cdot 192 + 1000 \cdot 0 = 96000.$$

Dakle, vrijednost desne strane 1. ograničenja može se kretati u granicama

$$c_{1,1} \leq c_1 \leq c_{1N} \text{ ili}$$

$$96000 \leq c_1 \leq 266667$$

a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo.

Cijena u sjeni odredit će se uz pomoć izraza (3.31)

$$p_{S1} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_1} = \frac{\Delta \pi}{\Delta c_1}.$$

Prirast desne strane 1. ograničenja je (pomak iz točke V_2 u V_N):

$$\Delta c_1 = c_{1N} - c_1 = 266667 - 200000 = 66667.$$

Iznos funkcije cilja u točki V5 je:

$$F_{CN} = \pi_N = 600 \cdot x_{VN} + 900 \cdot y_{VN} = 600 \cdot 106,67 + 900 \cdot 213,33 = 256000$$

pa je prirast funkcije cilja

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} = 255000 - 201000 = 55000.$$

Cijena u sjeni sada je:

$$p_{S1} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_1} = \frac{55000}{66667} = 0,825 \,,$$

odnosno na svaku dodatno uloženu kunu ratar bi ostvario dobit od 0,825 kuna.

c) Nagibi funkcije cilja te graničnih pravaca vezanih ograničenja, *gp1* i *gp3*, jesu

$$k_C = -\frac{\text{A}}{900}; \quad k_1 = -\frac{500}{1000} = -0,5; \quad k_3 = -\frac{10}{4} = -2,5 \,.$$

Budući da je k_3 manji od k_1 (više negativan), vrijedi sljedeća nejednakost

$$k_3 \leq k_C \leq k_1$$

$$-2,5 \leq -\frac{\text{A}}{900} \leq -0,5$$

što nakon množenja s (-900) daje

$$2250 \geq \text{A} \geq 450 \,.$$

Dakle, bazično se rješenje neće mijenjati ako se dobit po hektaru zasijanog kukuruza nalazi u rasponu od 450,00 kn do 2.250,00 kn.

Primjer 3.16. (problem proizvodnje)

Tvrtka LED proizvodi skije za spust i za skijaško trčanje. Par skija za spust zahtijeva 2 sata rezanja, 1 sat oblikovanja i 3 sata završne obrade, dok se u izradu para skija za skijaško trčanje utroše 2 sata na rezanje, 2 sata na oblikovanje i 1 sat na završnu obradu.

S obzirom na strukturu radne snage i strojeva, tvrtka dnevno raspolaže sa 140 radnih sati za rezanje, 120 za oblikovanje i 150 za završnu obradu.

Ako je dobit po paru skija za spust 100 kn, a po paru skija za skijaško trčanje 80 kn, odgovoriti:

a) Koliko pari pojedinih skija tvrtka treba dnevno proizvoditi da ostvari maksimalnu dobit? Nacrtati pravac optimalne funkcije cilja.
b) Do kojeg se iznosa može povećati dobit po paru skija za spust, a do kojeg po paru skija za skijaško trčanje a da se ne naruši bazično rješenje problema?
c) Za koliko se može povećati broj sati za završnu obradu a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo? Koliko će se povećati dobit za svaki sat dodan za završnu obradu?
d) Koja bi bila optimalna proizvodnja kada bi dobit i po paru skija za spust i po paru za skijaško trčanje bila 100 kn?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja i funkcije cilja: Uzimajući da je x broj proizvedenih pari skija za spust (dobit po paru 100 kn), a y broj proizvedenih pari skija za skijaško trčanje (dobit po paru 80 kn), ukupna se dobit može prikazati jednadžbom:

$$\pi = 100 \cdot x + 80 \cdot y \,.$$

Funkcija π je funkcija cilja koju treba maksimizirati, a x i y su varijable odlučivanja.

Definiranje ograničenja: Tvrtka raspolaže sa 140 radnih sati za rezanje, pa je prvo ograničenje:

$$2 \cdot x + 2 \cdot y \leq 140, \qquad (1)$$

sa 120 radnih sati za oblikovanje, pa je drugo ograničenje:

$$x + 2 \cdot y \leq 120, \qquad (2)$$

te sa 150 sati za završnu obradu, što definira treće ograničenje:

$$3 \cdot x + 1 \cdot y \leq 150, \qquad (3)$$

s tim da su varijable odlučivanja nenegativne.

Granični pravci ograničenja su:

gp1: $2 \cdot x + 2 \cdot y = 140$, *gp2*: $x + 2 \cdot y = 120$, *gp3*: $3 \cdot x + y = 150$,

a presjecišta tih pravaca s koordinatnim osima, odnosno koordinate točaka za crtanje pravaca (zbog mjerila crtanja) jesu:

gp1:

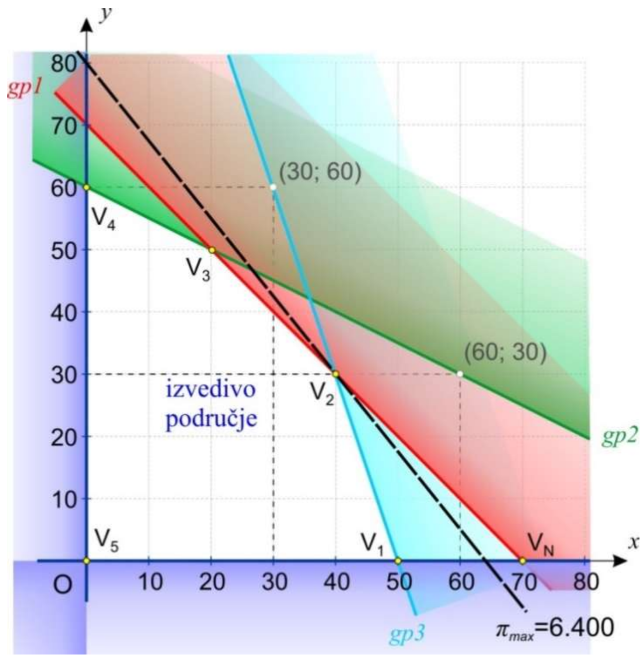
x	y
0	70
70	0

gp2:

x	y
0	60
60	30

gp3:

x	y
30	60
50	0



Slika 3.38. *Primjer 3.16: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Svi granični pravci, izvedivo područje razmatranog problema, kao i svi vrhovi dobivenoga zatvorenoga konveksnog poligona (njih 5) prikazani su na slici 3.38.

Koordinate vrhova poligona, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (tim brojevima proizvedenih pari skija za spust, odnosno za skijaško trčanje), jesu:

V_1:	x_1=50;	y_1=0	→	**π_1=5.000 kn**
V_2:	x_2=40;	y_2=30	→	**π_2=6.400 kn**
V_3:	x_3=20;	y_3=50	→	**π_3=6.000 kn**
V_4:	x_4=0;	y_4=60	→	**π_4=4.800 kn.**

Zaključuje se da će tvrtka ostvariti najveću dnevnu dobit od 6.400,00 kn ako se odluči na proizvodnju 40 pari skija za spust i 30 pari skija za skijaško trčanje.

b) U kojim se granicama može kretati dobit po paru skija za spust? Vezana ograničenja su (1) i (3) što znači da se koeficijent smjera funkcije cilja mora nalaziti između koeficijenata smjera graničnih pravaca (1) i (3), pa kako je:

$$k_C = -\frac{\mathrm{A}}{80}, \quad k_1 = -\frac{2}{2} = -1, \quad k_3 = -\frac{3}{1} = -3$$

slijedi:

$$k_3 \le k_C \le k_1, \quad \text{odnosno} \quad -3 \le -\frac{\mathrm{A}}{80} \le -1.$$

Množenjem zadnje nejednakosti s (-80) dobije se:

$$240 \ge \mathrm{A} \ge 80,$$

odakle slijedi da se dobit po paru skija za spust može povećati do najviše 240 kuna a da se ne naruši bazično rješenje problema.

Na sličan način dolazi se i do područja u kojima se može mijenjati dobit po paru skija za trčanje, kada je:

$$k_C = -\frac{100}{\mathrm{B}}, \quad k_1 = -1, \quad k_3 = -3$$

odakle slijedi:

$$k_3 \le k_C \le k_1, \quad \text{odnosno} \quad -3 \le -\frac{100}{\mathrm{B}} \le -1.$$

Recipročna vrijednost zadnje nejednadžbe glasi

$$-\frac{1}{3} \ge -\frac{\mathrm{B}}{100} \ge -1.$$

Nakon množenja te nejednadžbe s (-100) dobije se

$$33{,}3 \le \mathrm{B} \le 100,$$

tj. dobit po paru skija za trčanje može se povećati do najviše 100 kuna a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo.

c) Vrijeme raspoloživo za završnu obradu prikazano je 3. ograničenjem. Povećanje desne strane tog ograničenja dovest će do pomicanja *gp3* udesno, pri čemu će točka optimuma kliziti niz *gp1* ka točki V_N. Ako bi se nakon toga još malo povećala desna strana 3. ograničenja, pravac *gp3* bi ispao iz izvedivog područja koje bi u tom slučaju bilo konveksni poligon V_N V_3 V_4 V_5, s optimumom u V_N.

Koordinate točke V_N su: $x_{VN} = 70; y_{VN} = 0$.

Desna strana 3. ograničenja za koju će granični pravac *gp3* proći točkom V_{VN} je:

$$c_{3N} = a_3 \cdot x_{VN} + b_3 \cdot y_{VN} = 3 \cdot 70 + 0 = 210,$$

što znači da se broj sati za završnu obradu može povećati za najviše:

$$\Delta c_3 = c_{3N} - c_3 = 210 - 150 = 60.$$

Vrijednost funkcije cilja (dobiti) u novoj točki optimuma V_{VN} bio bi:

$$F_{CN} = \pi_N = 100 \cdot x_{VN} + 80 \cdot y_{VN} = 100 \cdot 70 + 80 \cdot 0 = 7000 \text{ kn},$$

pa je prirast funkcije cilja

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} = 7000 - 6400 = 600.$$

Cijena u sjeni sada je:

$$p_{S3} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_3} = \frac{600}{60} = 10,$$

tj. svaki sat dodan za završnu obradu doveo bi do povećanja funkcija cilja za 10 kn.

d) Kada bi dobit i po paru skija za spust i po paru skija za trčanje bila jednaka, i iznosila 100 kn, tada bi funkcija cilja glasila:

$$F_C = \pi = 100 \cdot x + 100 \cdot y.$$

Analizira li se dobit koja bi se ostvarila odabirom proizvodnje definirane vrhovima poligona (slika 3.33) dobit će se:

V_1:	x_1=50;	y_1=0	→	**π_1=5.000**
V_2:	x_2=40;	y_2=30	→	**π_2=7.000**
V_3:	x_3=20;	y_3=50	→	**π_3=7.000**
V_4:	x_4=0;	y_4=60	→	**π_4=6.000**

odakle se može zaključiti da ne postoji jedinstveno najbolje rješenje, jedan optimum, već da će tvrtka ostvariti jednaku dobit odabirom proizvodnje definirane i vrhom V_2 i vrhom V_3, što prema temeljnom teoremu linearnog programiranja znači da je i svaka točka na graničnom pravcu (1) koja se nalazi između V_2 i V_3 također optimalna. Broj mogućih rješenja u tom je slučaju beskonačan.

Primjer 3.17. (problem smjese)

Proizvođač sokova za djecu proizvodi dvije vrste jabučnog soka: sok S3 za djecu do 3 godine starosti i sok S6 za djecu do 6 godina starosti.

Za pripremu jednog pakiranja soka S3 treba 30 litara vode i 2 litre koncentrata pri čemu ostvari čistu dobit po pakiranju od 200,00 kn, dok za pripremu jednog pakiranja soka S6 treba 24 litara vode i 8 litara koncentrata uz čistu dobit po pakiranju od 300,00 kn.

Proizvođač dnevno ima na raspolaganju 30.000 l vode i 3.600 l koncentrata. Kupac zahtijeva da količina soka S3 bude barem dvostruko veća od količine soka S6.

Potrebno je odgovoriti:

a) Kolika treba biti dnevna proizvodnja pojedine vrste soka da proizvođač ostvari maksimalnu dobit?
b) U kojim se granicama može kretati dobit po pakiranju soka S6 a da se ne promijeni bazično rješenje zadatka?
c) Što bi značilo povećanje raspoložive količine vode (cijena u sjeni) i za koliko se ta količina može povećati a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo?
d) Što bi bilo da kupac dodatno zahtijeva da količina soka S6 bude barem 370 pakiranja?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja i funkcija cilja: Nenegativne varijable odlučivanja su: x – broj dnevno proizvedenih pakiranja soka S3 i y - broj dnevno proizvedenih pakiranja soka S6, pa se ukupna dnevna dobit može prikazati jednadžbom:

$$\pi = 200 \cdot x + 300 \cdot y.$$

Funkcija π je funkcija cilja koju je potrebno maksimizirati.

Definiranje ograničenja: Količina vode kojom dnevno raspolaže proizvođač iznosi 30.000 l, pa je prvo ograničenje:

$$30 \cdot x + 24 \cdot y \leq 30.000, \qquad (1)$$

dok je dnevno raspoloživa količina koncentrata 3.600 l, pa je drugo ograničenje:

$$2 \cdot x + 8 \cdot y \leq 3.600. \qquad (2)$$

Zahtjev kupca, da dnevna količina soka S3 bude barem dvostruko veća od dnevne količine soka S6, znači sljedeće ograničenje:

$$x \geq 2 \cdot y, \qquad (3')$$

odnosno:

$$x - 2 \cdot y \geq 0. \qquad (3)$$

Granični pravci i točke presjecišta s koordinatnim osima su:

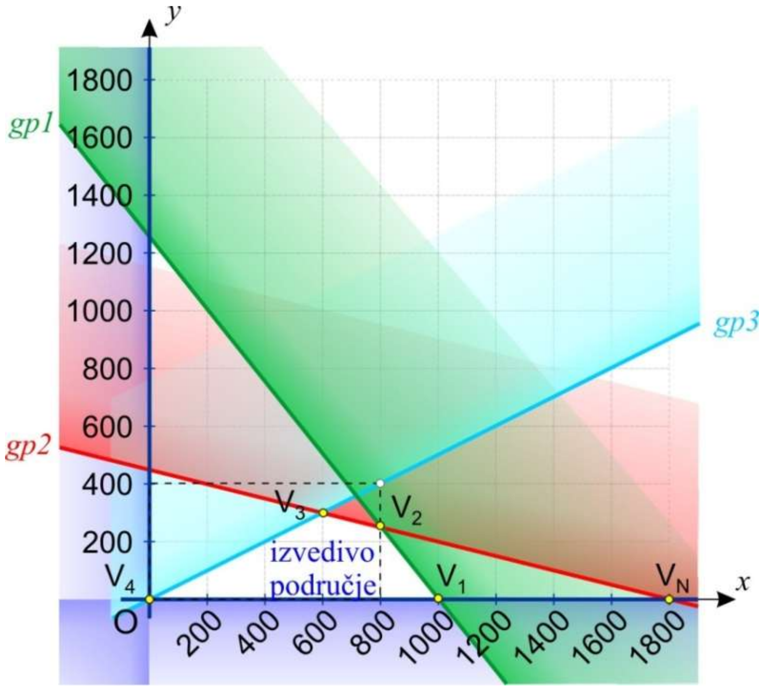
$gp1$: $30 \cdot x + 24 \cdot y = 30000$, $gp2$: $2 \cdot x + 8 \cdot y = 3600$, $gp3$: $x - 2 \cdot y = 0$,

x	y
0	1250
1000	0

x	y
0	450
1800	0

x	y
0	0
800	400

Na slici 3.39 prikazani su svi granični pravci, zatvoreni konveksni poligon koji određuje izvedivo područje, a označeni su i svi vrhovi tog poligona.



Slika 3.39. *Primjer 3.17: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Koordinate naznačenih vrhova, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (tim količinama dnevne proizvodnje soka vrste S3, odnosno S6), jesu:

V1: x_1=1000; y_1=0 → π_1**=200.000 kn**

V2: x_2=800; y_2=250 → π_2**=235.000 kn**

V3: x_3=600; y_3=300 → π_3**=210.000 kn.**

Dakle, najveća bi se dobit ostvarila kada bi se dnevno proizvelo 800 pakiranja soka S3 i 250 pakiranja soka S6, a iznosila bi 235.000 kn.

b) Za određivanje područja promjene dobiti po pakiranju soka S6 (koeficijenta *B* u funkciji cilja) najprije je potrebno odrediti koeficijente smjera pravca funkcije cilja i graničnih pravaca vezanih ograničenja (*gp1* i *gp2*):

$$k_C = -\frac{200}{B}; \quad k_1 = -\frac{30}{24} = -\frac{5}{4} = -1,25; \quad k_2 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} = -0,25.$$

Koeficijent smjera funkcije cilja mora se nalaziti između koeficijenata smjera graničnih pravaca (*gp1* i *gp2*), od kojih je k_1 manji (strmiji pravac), pa vrijedi:

$$k_1 \leq k_C \leq k_2 \quad \text{ili} \quad -\frac{5}{4} \leq -\frac{200}{\text{B}} \leq -\frac{1}{4}.$$

Zapisom zadnje nejednadžbe u recipročnom obliku dobije se

$$-\frac{4}{5} \geq -\frac{\text{B}}{200} \geq -\frac{4}{1},$$

odnosno nakon množenja s (-200)

$$160 \leq \text{B} \leq 800.$$

Konačno, može se zaključiti kako se dobit po pakiranju S6 može mijenjati u rasponu od najmanje 160 kn do najviše 800 kn a da se ne promijeni bazično rješenje problema.

c) Povećanje raspoložive količine vode, desne strane 1. ograničenja, dovelo bi do pomicanja točke optimuma (V_2) niz pravac drugog ograničenja, sve do presjecišta tog pravca s osi *x*. Daljnjim bi povećavanjem 1. ograničenje prestalo biti vezano i samim time narušilo osnovno svojstvo vezanih ograničenja.

Presjecište graničnog pravca (2) s osi *x* ima koordinate $V_N(1800; 0)$. Da bi *gp1* prošao tom točkom, mora mu desna strana biti:

$$c_{1N} = a_1 \cdot x_{VN} + b_1 \cdot y_{VN} = 30 \cdot 1800 + 24 \cdot 0 = 54000$$

što znači povećanje u odnosu na zadanu količinu:

$$\Delta c_1 = c_{1N} - c_1 = 54000 - 30000 = 24000,$$

tj. raspoloživa se količina vode može povećati za 24000 litara.

Funkcija cilja u točki V_N imala bi vrijednost:

$$F_{CN} = \pi_N = 200 \cdot x_{VN} + 300 \cdot y_{VN} = 200 \cdot 1800 + 300 \cdot 0 = 360.000 \text{ kn},$$

pa je prirast funkcije cilja:

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} = 360.000 - 235.000 = 125.000 \text{ kn}.$$

Cijena u sjeni za 1. ograničenje sada je, prema (**29**):

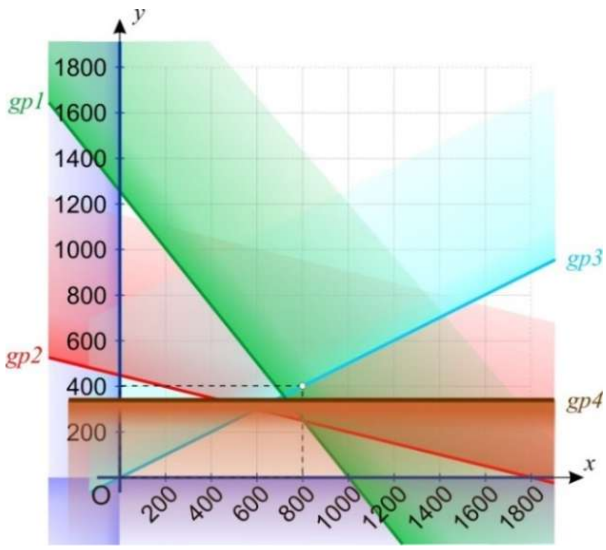
$$p_{S1} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_1} = \frac{125.000}{24000} = 5,21$$

što znači da bi po svakoj dodatnoj litri vode proizvođač povećao dobit za 5,21 kuna.

d) Ako bi kupac dodao zahtjev prema kojem bi minimalna dnevna količina soka S6 trebala biti veća od 370 pakiranja ili jednaka tom broju, to bi rezultiralo novim ograničenjem:

$$y \geq 370. \qquad (4)$$

Uz to ograničenje proizvođač svojim kapacitetima ne bi bio u mogućnosti zadovoljiti uvjete kupca, kako je to prikazano na slici 3.40 (rješenje je prazan skup).



Slika 3.40. *Primjer 3.17: uz dodatni uvjet d) skup rješenja je prazan.*

Primjer 3.18.

Fisko studira, a studij financira radeći povremeno dva posla: daje repeticije iz informatike za 50 kn po satu i uređuje mrežne stranice malom poduzetniku za 35 kn po satu.

Fisko se drži svoje odluke da te poslove neće raditi više od 80 sati mjesečno, pri čemu mu raspoloživi kandidati osiguravaju između 15 i 35 sati repeticija mjesečno, dok ga mali poduzetnik ne može angažirati više od 55 sati mjesečno.

a) Koliko sati repeticija treba mjesečno održati Fisko, a koliko sati raditi na uređivanju mrežnih stranica da ostvari najveći prihod?
b) Do koje granice Fisko može povećati broj sati koje će mjesečno izdvojiti za obavljanje svojih privremenih poslova a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo?
c) Koliko će se povećati Fiskov prihod ako broj mjesečnih sati za obavljanje privremenih poslova poveća na 85?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja i funkcija cilja: Ako se s x označi broj sati repeticija mjesečno, a s y broj sati rada na uređivanju mrežnih stranica, ukupni se mjesečni prihod može prikazati jednadžbom:

$$TR = 50 \cdot x + 35 \cdot y\,.$$

Funkcija TR je funkcija cilja koju je potrebno maksimizirati, tj. pronaći njenu najveću vrijednost u izvedivom području, a x i y su nenegativne varijable odlučivanja.

Definiranje ograničenja: Fisko ne želi raditi više od 80 sati mjesečno, pa je prvo ograničenje:

$$x + y \leq 80, \qquad (1)$$

a da repeticije može raditi u granicama od najmanje 15 do najviše 35 sati, to je:

$$15 \le x \le 35,$$

što se može prikazati sa sljedeća dva ograničenja:

$$x \ge 15, \qquad (2)$$

$$x \le 35. \qquad (3)$$

Mali poduzetnik ne može angažirati Fiska više od 55 sati, pa je 3. ograničenje:

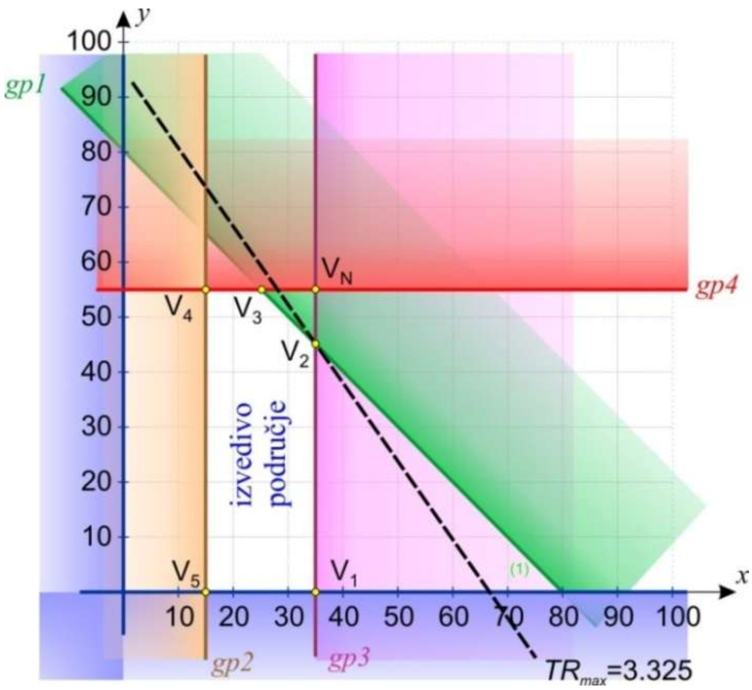
$$y \le 55. \qquad (4)$$

Granični pravci pojedinih ograničenja su:

gp1: $x + y = 80$, *gp2*: $x = 15$, *gp3*: $x = 35$, *gp4*: $y = 55$.

Točke presjecišta *gp1* s koordinatnim osima su (0; 80) i (80; 0), dok su preostali granični pravci paralelni koordinatnim osima: *gp2* i *gp3* osi *y*, a *gp4* osi *x*.

Na slici 3.41 prikazani su svi granični pravci, poligon koji omeđuje izvedivo područje, a označeni su i svi vrhovi tog poligona.



Slika 3.41. *Primjer 3.18: zatvoreni poligonski skup i vrhovi poligona.*

Koordinate naznačenih vrhova, kao i iznosi dobiti koje odgovaraju tim koordinatama (takvu omjeru dnevne proizvodnje soka vrste N3, odnosno N6), jesu:

V1: x_1=35; y_1=0 → TR_1**=1.750**

V2: x_2=35; y_2=45 → TR_2**=3.325**

V3: x_3=25; y_3=55 → TR_3**=3.175**

V4: x_4=15; y_4=55 → TR_4**=2.675**

V5: x_5=15; y_5=0 → TR_5**=750.**

Fisko će ostvariti najveći prihod, i to u iznosu od $F_{CO}=TR_{\max}$=3.325,00 kn, ako mjesečno održi 35 sati repeticija, a 45 sati odradi na uređivanju mrežnih stranica.

b) Broj sati koje Fisko odvaja za obavljanje privremenih poslova (1. ograničenje) može se povećavati sve dok granični pravac tog ograničenja (*gp1*), pomičući se paralelno samom sebi, ne dođe do točke V_N(35; 55) – presjecišta pravaca *gp3* i *gp4*.

Desna strana 1. ograničenja tada je:

$$c_{1\mathrm{N}} = x_{\mathrm{VN}} + y_{\mathrm{VN}} = 35 + 55 = 90,$$

što znači da Fisko može izdvojiti najviše 90 sati za privremene poslove a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo.

c) Da bi se dobilo povećanje Fiskova prihoda za slučaj kada bi za obavljanje privremenih poslova izdvojio 85 sati mjesečno, potrebno je odrediti cijenu u sjeni 1. ograničenja.

Prirast desne strane 1. ograničenja pri pomicanju *gp1* u točku V_N iznosi

$$\Delta c_1 = c_{1\mathrm{N}} - c_1 = 90 - 80 = 10 \text{ sati,}$$

a iznos funkcije cilja u točki V_N je

$$F_{CN} = TR_{\mathrm{N}} = 50 \cdot x_{\mathrm{VN}} + 35 \cdot y_{\mathrm{VN}} = 50 \cdot 35 + 35 \cdot 55 = 3.675,00 \text{ kn,}$$

odnosno funkcija cilja će se povećati za

$$\Delta F_{CO} = F_{CN} - F_{CO} = TR_N - TR_{\max} = 3.675,00 - 3.325,00 = 350,00 \text{ kn.}$$

Cijena u sjeni promatranog ograničenja sada je

$$p_{S1} = \frac{\Delta F_{CO}}{\Delta c_1} = \frac{350}{10} = 35,00 \text{ kuna po satu.}$$

Prema tome, ako Fisko odluči broj mjesečnih sati za obavljanje privremenih poslova povećati na 85, ukupni će mu prihod porasti za $5 \cdot 35,00 = 175,00$ kuna.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 3_07:

Zadana je funkcija cilja nekog problema linearnog programiranja:

$$F_C = 36 \cdot x + 20 \cdot y .$$

a) Odrediti izvedivo područje i **maksimum** funkcije cilja uz sljedeća ograničenja:

$$12 \cdot x + 14 \cdot y \le 840 \qquad (1)$$

$$x \ge (x + y)/3 \qquad (2)$$

$$y \le 40 \qquad (3)$$

$$x \le 50 \qquad (4)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

b) Koja su ograničenja vezana?
c) Za koliko se može povećati desna strana 1. ograničenja a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo? Kolika je cijena u sjeni toga ograničenja?
d) Odrediti u kojim se granicama može mijenjati koeficijent uz varijablu y u funkciji cilja a da se ne naruši bazično rješenje problema.

Odgovor:

a) Maksimum funkcije cilja iznosi $F_{C\max} = 2.142{,}86$ u vrhu s koordinatama (50; 17,1).
b) Vezana su ograničenja (1) i (4).
c) Desna strana 1. ograničenja može se povećati za 320 a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo. Cijena u sjeni tog ograničenja je $p_{S1} = 1{,}43$.
d) Koeficijent uz varijablu y može se mijenjati od 0 do 42 a da se ne naruši bazično rješenje.

Zadatak 3_08:

Zadana je funkcija cilja nekog problema linearnog programiranja:

$$F_C = 36 \cdot x + 20 \cdot y \,.$$

a) Odrediti izvedivo područje i **minimum** funkcije cilja uz sljedeća ograničenja:

$$12 \cdot x + 16 \cdot y \geq 1440 \qquad (1)$$

$$2 \cdot x - 4 \cdot y \leq 0 \qquad (2)$$

$$4 \cdot x + 2 \cdot y \geq 280 \qquad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

b) Za koliko se može smanjiti desna strana 3. ograničenja a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo? Za koliko će se smanjiti funkcija cilja ako se desna strana tog ograničenja smanji za 20?
c) Odrediti do koje se vrijednosti može povećati koeficijent uz varijablu x u funkciji cilja a da se ne naruši bazično rješenje problema.

Odgovor:

a) Minimum funkcije cilja iznosi $F_{C\min} = 2640$ u vrhu s koordinatama (40; 60).
b) Desna strana 3. ograničenja može se smanjiti za 100 a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo. Ako se desna strana 3. ograničenja smanji za 20, funkcija cilja će se smanjiti za 168 jer je cijena u sjeni tog ograničenja $p_{S3} = 8{,}4$.
c) Koeficijent uz varijablu x može se povećati do 40 a da se ne naruši bazično rješenje.

Zadatak 3_09:

Pržionica kave ima na zalihama 2.000 kg sirove kave iz Brazila, 1.000 kg sirove kave iz Kolumbije i 1.000 kg sirove kave iz Venezuele. Sukladno tehnološkim mogućnostima pržionice istovremeno se mogu proizvoditi dva finalna proizvoda i to: mješavina za "tursku kavu" i mješavina za "espresso kavu".

Dobit po 1 kg mješavine je 7,5 kn za "tursku kavu" i 8,5 kn za "espresso kavu".

Za proizvodnju 1 kg "turske kave" potrebno je 0,65 kg sirove kave iz Brazila, 0,15 kg iz Kolumbije i 0,20 kg iz Venezuele, dok je za proizvodnju 1 kg "espresso kave" potrebno 0,4 kg sirove kave iz Brazila, 0,45 kg iz Kolumbije i 0,15 kg iz Venezuele.

a) Koliko kg svakog finalnog proizvoda treba proizvoditi da se ostvari najveća dobit?
b) U kojim se granicama može mijenjati dobit po kg "turske kave" a da se ne naruši bazično rješenje?

Odgovor:

a) Pržionica treba proizvesti 2.150,5 kg "turske kave" i 1.505,4 kg "espresso kave" da ostvari najveću dobit $\pi_{max} = F_{Co} = 28.924{,}73$ kn.
b) Dobit po kilogramu "turske kave" može se mijenjati u granicama od 2,83 kn do 13,81 kn a da se ne naruši bazično rješenje.

Zadatak 3_10:

Lanac poljoprivrednih dućana želi proširiti svoju djelatnost otvarajući nove kapacitete. Poduzeće ima dva tipa dućana, mali dućan i diskontni dućan.

Da bi se otvorio jedan novi dućan tipa malog dućana, potrebno je 1 milijun kuna i 5 novih radnika, a očekivani je godišnji prihod 2 milijuna kuna.

Da bi se otvorio jedan novi dućan tipa diskonta, potrebno je 1,5 milijuna kuna i 15 novih radnika, a očekivani je godišnji prihod 5 milijuna kuna.

Poduzeće ima na raspolaganju 24 milijuna kuna kapitala. Strategija poslovanja zahtijeva da se ne uzima više od 210 novih radnika godišnje. Također, određeni zakoni zahtijevaju da broj novih dućana ne bude veći od 20.

a) Sastaviti linearni program širenja poduzeća koji će osigurati maksimalni očekivani godišnji prihod.
b) Za koliko se može povećati iznos kapitala uloženog u otvaranje novih dućana a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo? Kolika je cijena u sjeni tog ograničenja?

Odgovor:

a) Lanac treba otvoriti 6 malih dućana i 12 diskontnih dućana da ostvari najveći prihod od $TR_{max} = F_{Co} = 72$ milijuna kuna.
b) Kapital uložen u otvaranje novih dućana može se povećati za 1,5 milijuna kuna a da vezana ograničenja ne promijene svoje svojstvo. Cijena u sjeni tog ograničenja je 0,667 milijuna kuna (prihod će se povećati za 0,667 milijuna kuna po svakom milijunu kuna uloženog kapitala).

Zadatak 3_11:

Voditelj marketinškog odjela tvrtke A želi maksimizirati broj potencijalnih potrošača koji će vidjeti reklamu te tvrtke. On može birati između TV spota koji vidi 200.000 ljudi ili oglasa u dnevnom tisku koji vidi 100.000 ljudi.

TV spot stoji 15.000 kn, a oglas u dnevnom tisku 10.000 kn.

Voditelj ima na raspolaganju 200.000 kn, a strategija mu je da najmanje trećina od ukupnog broja oglasa mora biti objavljena u dnevnom tisku.

a) Koliko voditelj mora zakupiti TV spotova, a koliko oglasa u dnevnom tisku da reklamu tvrtke vidi najveći broj ljudi (brojevi ne moraju biti cijeli).
b) Za koliko se može smanjiti gledanost pojedinog TV spota a da se ne naruši bazično rješenje problema?

Odgovor:

a) Voditelj marketinga treba zakupiti prostor za 10 TV spotova i 5 oglasa u dnevnom tisku da reklamu tvrtke vidi najveći broj ljudi: $F_{CO} = 2.500.000$.
b) Gledanost TV spota može se smanjiti za 50.000 a da se ne naruši bazično rješenje problema.

Zadatak 3_12:

Poduzeće proizvodi i prodaje dva modela svjetiljaka, L1 i L2.

Trajanje ručnog rada potrebno za izradu modela L1 je 20 minuta, a za L2 30 minuta.

Trajanje strojnog rada potrebno za izradu L1 je 20 minuta, a za L2 10 minuta. Maksimalno mjesečno trajanje ručnog rada je ograničeno na 100 sati, a strojnog rada na 80 sati.

Znajući da je dobit po proizvodu 15 kuna za L1 i 10 kuna za L2, odrediti:

a) Koliko poduzeće treba proizvesti modela L1, a koliko L2 da ostvari najveću dobit?
b) U kojim se granicama (u satima) može mijenjati vrijeme raspoloživo za strojni rad a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo? Kolika je cijena u sjeni tog ograničenja?

Odgovor:

a) Najveću dobit u iznosu od $\pi_{max} = F_{Co} = 3.750{,}00$ kuna poduzeće će ostvariti proizvodnjom 210 komada modela L1 i 60 komada modela L2.
b) Broj sati strojnog rada može se mijenjati u granicama od 33,3 sata do 100 sati a da vezana ograničenja ne promijene svoje svojstvo; cijena u sjeni tog ograničenja je 37,5 kuna po satu.

Zadatak 3_13:

S približavanjem početka školske godine trgovina planira rasprodaju školskog materijala.

Imaju na skladištu 600 bilježnica, 500 mapa i 400 olovaka, a planiraju ih pakirati u dva različita paketa. U prvom paketu, P1, nalazit će se dvije bilježnice, jedna mapa i dvije olovke, a u drugom, P2, tri bilježnice, jedna mapa i jedna olovka.

Cijena prvog paketa bit će 6,50 kuna, a drugoga 7,00 kuna.

a) Koliko paketa P1 odnosno P2 treba sastaviti da bi ostvarili najveći prihod?
b) U kojim se granicama može mijenjati cijena paketa P1 a da se ne naruši bazično rješenje problema?

Odgovor:

a) Najveći prihod u iznosu od $TR_{max} = F_{Co} = 1.675{,}00$ kuna trgovina će ostvariti pakiranjem 150 komada paketa P1 i 100 komada paketa P2.
b) Cijena jednog paketa P1 može se mijenjati u granicama od 4,67 kuna do 14 kuna a da se ne naruši bazično rješenje.

Zadatak 3_14:

Farmaceut raspolaže sa 600 miligrama određenog lijeka koji je potreban za proizvodnju velikih i malih tableta za manje farmaceutske distribucije.

Za velike tablete koristi se 40 miligrama tog lijeka, a za male 30 miligrama.

Analiza tržišta je pokazala da broj proizvedenih malih tableta mora biti barem za trećinu veći od broja velikih, te da se može proizvesti do najviše 6 velikih tableta.

Svaka velika tableta proda se uz dobit od 2 kune, a mala tableta uz dobit od 1 kune.

a) Koliko tableta pojedinog tipa farmaceut mora proizvesti da bi ostvario maksimalnu dobit?
b) Za koliko se može smanjiti dobit po komadu velike tablete a da se ne naruši bazično rješenje?

Odgovor:

a) Najveću dobit ($\pi_{max} = F_{Co} = 24$ kn) farmaceut će ostvariti proizvodnjom 6 velikih tableta i 12 malih.
b) Dobit po komadu velike tablete može se smanjiti za 0,67 kuna a da se ne naruši bazično rješenje.

Zadatak 3_15:

Poduzeće za transport posjeduje dvije vrste kamiona, tip K1 i tip K2. Tip K1 ima volumen hladnjaka 20 m^3 i volumen dijela koji nije hlađen od 40 m^3, dok tip K2 ima jednaki ukupni volumen kao i tip K1, pri čemu mu je podjednak volumen hladnjaka i dijela koji nije hlađen.

Trgovac mora unajmiti kamione za transport 3.000 m^3 namirnica koje treba hladiti i 3.020 m^3 namirnica koje ne treba hladiti.

Trošak po kilometru za tip K1 je 30 kuna, a za tip K2 40 kuna.

a) Koliko kamiona tipa K1, a koliko tipa K2 trgovac treba unajmiti da bi minimizirao troškove transporta?
b) U kojim se granicama može kretati trošak po kilometru za kamion tipa K2 a da se ne naruši bazično rješenje problema?

Odgovor:

a) Najmanji trošak prijevoza od $TC_{min} = F_{CO} = 4.170$ kn po kilometru trgovac će imati ako unajmi 51 kamion tipa K1 i 66 kamiona tipa K2.

b) Trošak po kilometru za kamion tipa K2 može se mijenjati u granicama od 22,5 kn do 45,0 kn bez narušavanja bazičnog rješenja problema.

Zadatak 3_16:

Škola priprema izlet za 400 učenika. Poduzeće koje osigurava prijevoz raspolaže s 8 autobusa s 50 sjedala i sa 7 autobusa s 40 sjedala, ali samo s 9 raspoloživih vozača.

Cijena iznajmljivanja velikog autobusa je 800 kuna, a manjeg autobusa 600 kuna.

a) Izračunajte koliko bi autobusa pojedine vrste trebalo iznajmiti da bi postigli najmanji mogući trošak prijevoza.
b) U kojim se granicama može mijenjati broj učenika a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo, te kolika je cijena u sjeni tog ograničenja?

Odgovor:

a) Najmanji trošak prijevoza od $TC_{min} = F_{CO} = 6200$ kn po kilometru škola će imati ako unajmi 4 veća autobusa i 5 manjih.
b) Broj učenika može se mijenjati od 380 do 440 a da vezana ograničenja ne promijene svoje osnovno svojstvo; cijena u sjeni tog ograničenja iznosi 20 kuna.

Zadatak 3_17:

Trgovina želi rasprodati 200 košulja i 100 pari hlača preostalih od prošle sezone. Odlučili su sastaviti dvije ponude, P1 i P2.

Ponuda P1 je paket od jedne košulje i jednog para hlača, koji će se prodavati za 150 kuna, dok je ponuda P2 paket od tri košulje i jednog para hlača, koji će se prodavati za 250 kuna.

Trgovina ne želi prodati manje od 20 paketa ponude P1 i manje od 10 paketa ponude P2.

a) Koju količinu pojedine vrste paketa moraju prodati kako bi se maksimizirao prihod od te rasprodaje?
b) Za koliko se može povećati, a za koliko smanjiti cijena paketa P2 a da se ne naruši bazično rješenje problema?

Odgovor:

a) Najveći prihod od rasprodaje u iznosu od $TR_{max} = F_{CO} = 20.000$ kn trgovina će imati prodajom 50 paketa tipa P1 i 50 paketa tipa P2.
b) Cijena paketa P2 može se povećati za 200 kuna (dakle na 450 kuna), odnosno smanjiti za 100 kuna (dakle na 150 kuna) a da se ne naruši bazično rješenje problema.

4. RJEŠAVANJE PROBLEMA LP-A S POMOĆU SOLVERA (MS EXCEL)

4.1. Uvod

Problemi linearnog programiranja mogu se rješavati i s pomoću Excelova alata Solver (Rješavač). Dok je grafički način rješavanja problema LP-a pogodan samo tada kada je funkcija cilja funkcija dviju varijabla odlučivanja, za veći broj varijabla koristi se tzv. simpleks metoda, odnosno simpleks algoritam.

Ta metoda zahtijeva velik broj računanja u nizu koraka (ovisno o broju varijabla) pa, uz značajan utrošak vremena, nosi sa sobom i mogućnost numeričke greške. Zato je, ako se ne koristi računalo, i ovakav način rješavanja ograničen na probleme do desetak i manje varijabla odlučivanja uz isto toliko ograničenja.

S druge strane, Excelov alat Solver (koji se u svom radu koristi upravo simpleks metodom) omogućuje relativno jednostavno rješavanje problema LP-a, kako s većim brojem varijabla odlučivanja (do 200 varijabla), tako i s većim brojem ograničenja (do 500 ograničenja).

4.2. Predložak za korištenje SOLVERA

Kako bi se olakšalo rješavanje problema LP-a Excelovim alatom SOLVER, kreiran je predložak dostupan na Moodleu, za koji autori drže da je i pregledan i jednostavan za rad. Cjelovit izgled tog predloška prikazan je slici 4.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x (x1)	y (x2)	z (x3)	...	Dobit ili Trošak ili			
5		0,0	0,0	0,0	0,0				
6	Koeficijenti Fc	0,0	0,0	0,0	0,0				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	0,0	0,0	0,0	0,0		<=	0,0	1
11	resurs 2	0,0	0,0	0,0	0,0		>=	0,0	2
12	uvjet 1	0,0	0,0	0,0	0,0		...	0,0	3
13	...	0,0	0,0	0,0	0,0		...	0,0	4

Slika 4.1. *Izgled predloška SOLVER.*

Predložak je podijeljen u dvije skupine ćelija: prvu, u kojoj su smješteni podatci o varijablama odlučivanja (iznosi varijabla i koeficijenti funkcije cilja), i ćelije za izračun funkcije cilja, te drugu koja se odnosi na ograničenja.

U dijelu *Varijable odlučivanja* prve skupine ćelija (slika 4.2) u četvrti redak korisnik upisuje oznake varijabla odlučivanja (x, y, z ... ili x_1, x_2, x_3 ...), kako je to primijenio i u matematičkoj pripremi zadatka.

U ćelijama petog retka su iznosi varijabla odlučivanja. Budući da će Solver pri traženju optimuma mijenjati vrijednosti tih varijabla, u predlošku su početne vrijednosti tih varijabla izjednačene s nulom.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3		Varijable odlučivanja			
4		x (x1)	y (x2)	z (x3)	...
5		0,0	0,0	0,0	0,0
6	Koeficijenti Fc	0,0	0,0	0,0	0,0

Slika 4.2. *Ćelije s vrijednostima varijabla odlučivanja i koeficijentima funkcije cilja.*

Konačno, u šestom su retku ćelije (B6 do E6) za unos koeficijenata funkcije cilja, konstanta koje u jednadžbi funkcije cilja množe pojedine varijable odlučivanja.

U dijelu *Funkcija cilja* prve skupine ćelija (slika 4.3) ćelija F5 rezervirana je za unos opisa te funkcije (Dobit, Trošak, Profit ili slično), da se u svakom trenutku može prepoznati što se rješava u danom slučaju.

Ćelija F6 služi za upisivanje formule za izračun funkcije cilja.

F
Funkcija cilja
Dobit ili Trošak ili

Slika 4.3. *Ćelija za izračun funkcije cilja s opisom.*

Druga skupina ćelija služi za upis ograničenja, koeficijenata lijeve strane ograničenja kojima se množe varijable odlučivanja na lijevim stranama nejednadžba (ograničenja), izračun lijevih strana tih ograničenja, operatora te desnih strana odgovarajućih ograničenja (slika 4.4).

9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	0,0	0,0	0,0	0,0		<=	0,0	1
11	resurs 2	0,0	0,0	0,0	0,0		>=	0,0	2
12	uvjet 1	0,0	0,0	0,0	0,0		...	0,0	3
13	...	0,0	0,0	0,0	0,0		...	0,0	4

Slika 4.4. *Skup ćelija za unos i izračun podataka o ograničenjima.*

Tako se u stupcu A (Opis ograničenja) unosi opisno pojašnjenje svakog pojedinog ograničenja: je li riječ o resursu (broju raspoloživih sati, količini materijala i sl.) ili pak o nekakvu zahtjevu (tržišta, menadžmenta ...).

U ćelije redaka ispod naslova *Koeficijenti LSO*, od desetoga na niže, upisuju se koeficijenti lijeve strane ograničenja (konstante) koji u pojedinim ograničenjima množe varijable odlučivanja: u ćelijama 10. retka koeficijenti lijeve strane prvog ograničenja, u ćelijama 11. retka drugog i tako dalje. Svi ti koeficijenti u predlošku imaju nultu vrijednost.

U ćelije stupca LSO (stupac F na slici 4.4) unose se redom formule za izračun lijevih strana pojedinih ograničenja.

U ćelijama stupca G su operatori odgovarajućih nejednadžba (ograničenja). Solver se pri računanju ne koristi tim operatorima, već oni tu služe prvenstveno kao pomoć korisniku pri prilagođivanju parametara Solvera i eventualnoj kontroli ulaznih podataka.

Konstante koje predstavljaju desnu stranu (brojčanu vrijednost) svakog pojedinog ograničenja (tzv. slobodni koeficijenti) unose se u ćelije stupca H, ispod naziva *DSO*: desna strana 1. ograničenja u ćeliju H10, drugoga u H11 i tako dalje.

Konačno, u stupac I treće skupine ćelija upisuju se redni brojevi ograničenja. Ti brojevi služe korisniku u postupku provjere usklađenosti pripremljenog modela i podataka unesenih u radni list.

Opisani predložak potrebno je, prije pokretanja alata Solver, prilagoditi problemu koji se trenutačno rješava (broj varijabla odlučivanja, broj ograničenja).

Ako je broj varijabla odlučivanja manji od broja predviđenoga predloškom (4), treba izbrisati stupce koji su višak, a ako je broj varijabla veći, treba dodati odgovarajući broj stupaca.

Brisanje stupca vrši se označavanjem toga stupca te odabirom naredbe *Delete* na izborniku koji će se pojaviti nakon desnog klika miša.

Dodavanje stupca vrši se označavanjem nekog stupca (npr. C ili D na slici 4.1) te odabirom naredbe *Insert* na izborniku koji će se pojaviti nakon desnog klika miša.

Isti se postupak ponavlja i s redcima u kojima su podatci o ograničenjima ako razmatrani problem ima manje ili više ograničenja od predloškom predviđenih (4).

Predlošci su posebno kreirani za transportni problem i za problem dodjeljivanja (asignacije), također dostupni na Moodleu, koji uzimaju u obzir specifičnosti tih dvaju posebnih problema linearnog programiranja i bit će pojašnjeni kasnije.

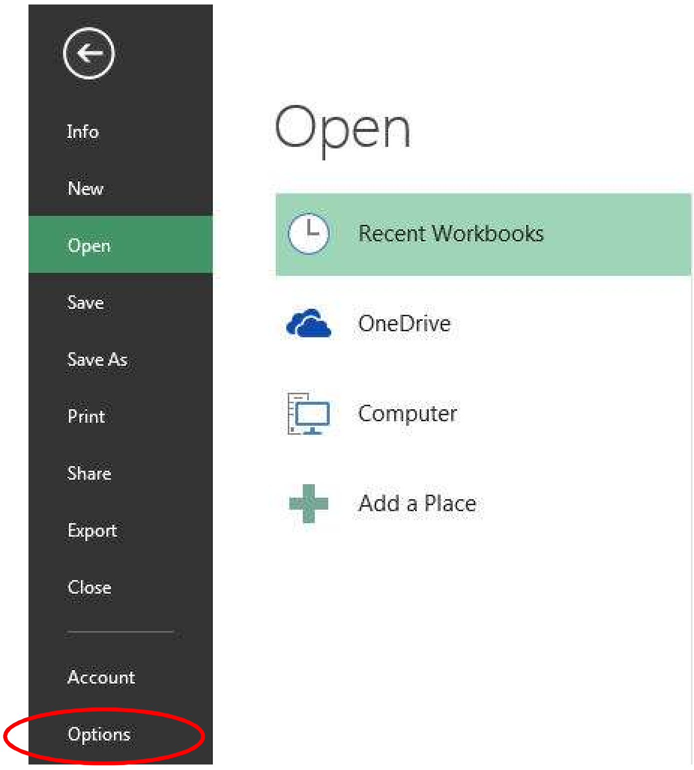
4.3. Korištenje SOLVERA

Solver je Excelov alat koji je sastavni dio skupine *Add-ins* alata.

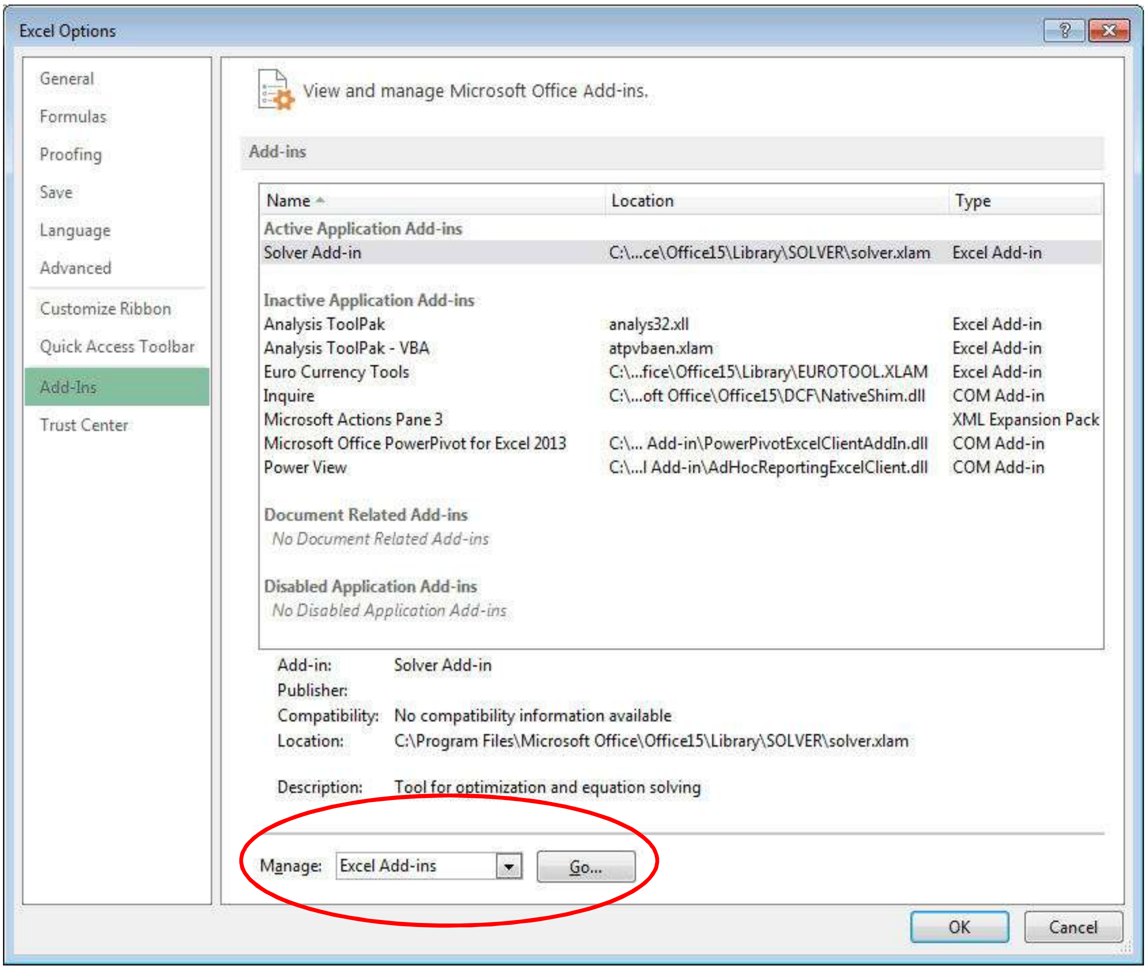
Ako to nije već učinjeno, mora se aktivirati nakon čega će se ikona za njegovo pokretanje pojaviti na kartici *Data*.

Postavljanje alata Solver na vrpcu *Data* vrši se na sljedeći način:

1. Klikom na dugme *File* u gornjem lijevom kutu glavnog izbornika MS Excela pojavit će se izbornik *File* na dnu kojega treba odabrati *Options* (slika 4.5).
2. Na taj će se način pokrenuti dijaloški okvir *Excel Options* (slika 4.6), u kojemu u lijevom dijelu prozora treba odabrati *Add-Ins*. U desnom će se dijelu prozora pojaviti dijaloški okvir *Add-Ins* gdje treba kliknuti na na dugme *Go* pri dnu desnog dijela prozora (uz okvir *Manage:*).



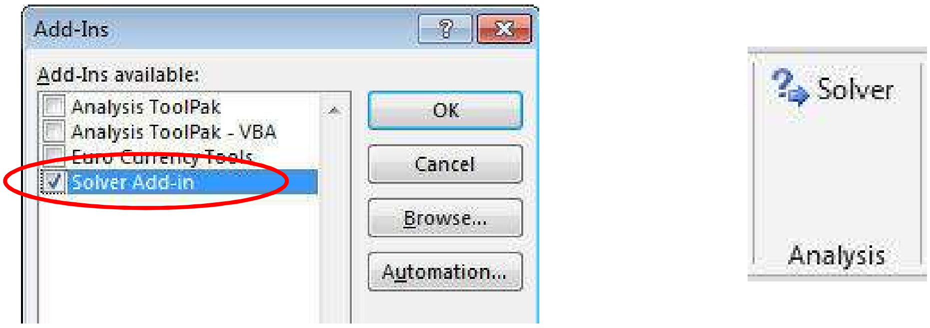
Slika 4.5. *Aktiviranje alata Solver: odabir* Options *na dnu izbornika* File .



Slika 4.6. *Dijaloški okvir* Excel Options *s okvirom* Add-Ins.

3. Nakon toga će se pojaviti dijaloški okvir *Add-Ins* (slika 4.7.a) gdje je potrebno kliknuti u kvadratić uz naziv *Solver Add-in* da se pojavi znak ☑, pa nakon toga na dugme *OK*.

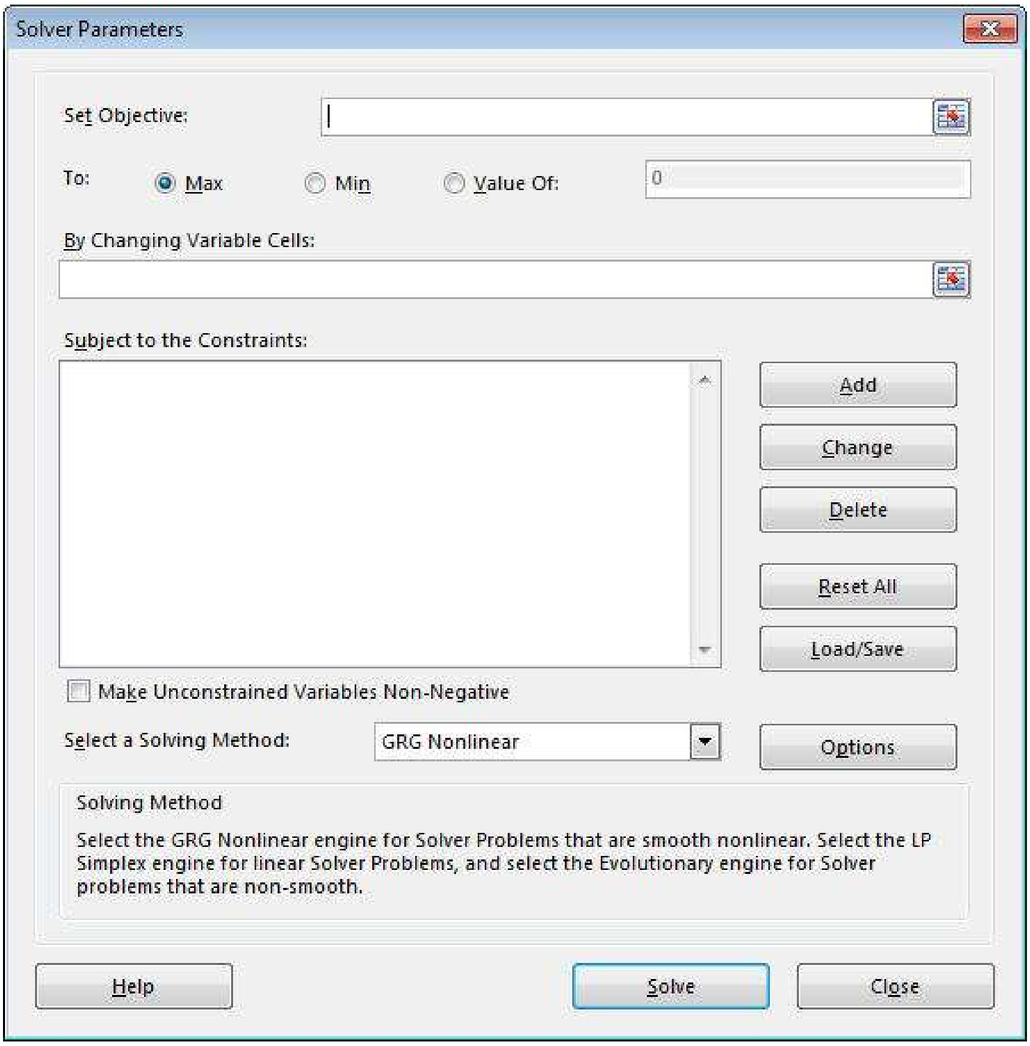
a) *b)*



Slika 4.7. *a) Dijaloški okvir* Add-Ins, *b) Ikona za pokretanje alata Solver na vrpci* Data.

4. Klikom na *Data* na vrpci izbornika sada će se na desnom kraju te vrpce pojaviti ikona alata Solver (slika 4.7.b), što znači da je postavljanje alata uspješno provedeno.

Excelov Solver, postavljen na opisani način, pokreće se odabirom *Data/Solver...* na vrpci izbornika, kada se pojavljuje dijaloški okvir *Solver Parameters* prikazan na slici 4.8.



Slika 4.8. *Dijaloški okvir* Solver Parameters.

U polje *Set Objective:* upisuje se adresa ćelije u kojoj je dana funkcija cilja (u slučaju prikazanog predloška to je ćelija F5).

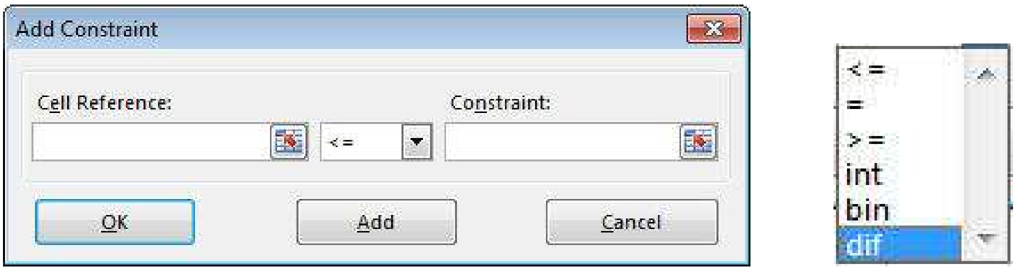
Adrese se, gdje je to potrebno, mogu unositi i klikom miša u odgovarajuću ćeliju, samo što će se u tom slučaju u polju koje traži adresu ona pojaviti kao apsolutna adresa (npr. $F$5).

U retku *To:* odabire se neka od ponuđenih opcija: *Max*, ako se želi maksimizirati funkcija cilja; *Min*, ako se ona treba minimizirati; a *Value of:* ako se želi vidjeti za koje će vrijednosti varijabla odlučivanja funkcija cilja poprimiti željenu vrijednost (koju je vrijednost u tom slučaju potrebno upisati u ponuđeno polje do).

U polje *By Changing Variable Cells:* upisuje se raspon ćelija koje predstavljaju vrijednosti varijabla odlučivanja.

Ograničenja se upisuju u polje *Subject to the Constraints:*, i to klikom na dugme *Add*, dijaloškog okvira *Solver Parameters* čime se pokreće dijaloški okvir *Add Constraint* (slika 4.9.a).

a) *b)*



Slika 4.9. *Dodavanje ograničenja: a) dijaloški okvir* Add Constraint*, b) okvir za odabir operatora.*

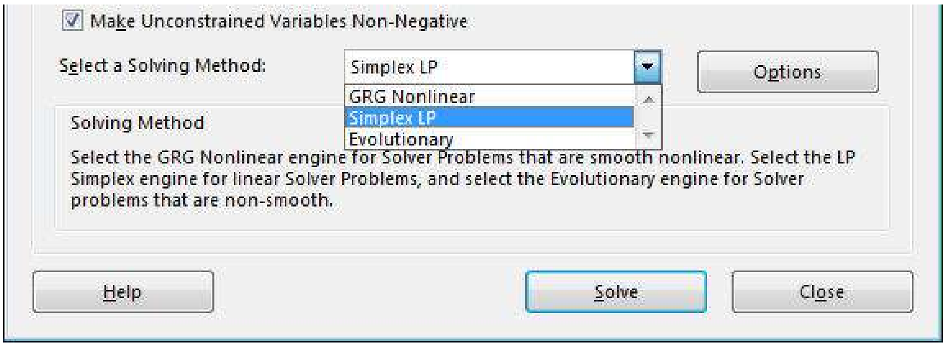
U polje *Cell Reference:* ovog dijaloškog okvira upisuje se adresa koja se odnosi na lijevu stranu danog ograničenja (to je neka od ćelija stupca F predloška, počevši od F10).

Klikom na strelicu srednjeg polja otvara se izbornik u kojem korisnik odabire operator nejednadžbe predmetnog ograničenja (slika 4.9.b), pri čemu se **int** odabire ako zadatak zahtijeva da neka od varijabla poprimi cjelobrojnu vrijednost (u tom se slučaju u polje *Cell Reference:* upisuje adresa te varijable odlučivanja), **bin** se odabire ukoliko su varijable odlučivanja binarni brojevi (0 ili 1), a **dif** se koristi kod problema kod kojih sve varijable odlučivanja (najčešće cjelobrojne) moraju biti međusobno različite.

U polje *Constraint:* upisuje se slobodni koeficijent desne strane danog ograničenja (to je neka od ćelija stupca H predloženog predloška, s početkom od ćelije H10).

Novo ograničenje može se unijeti klikom na dugme *Add* dijaloškog okvira *Add Constraint*, a nakon unosa svih ograničenja pritisak na dugme *OK* vraća korisnika na dijaloški okvir *Solver Parameters*, gdje klikom na dugme *Change* može mijenjati neko od ograničenja odabranih u polju *Subject to the Constraints:* ili ga pak izbrisati klikom na dugme *Delete*.

Nenegativnost varijabla odlučivanja ($x \geq 0$, $y \geq 0$ ...) definira se odabirom *Make Uncostreined Variables Non-Negative* (☑) ispod okvira *Subject to the Constraints:* (slika 4.10).



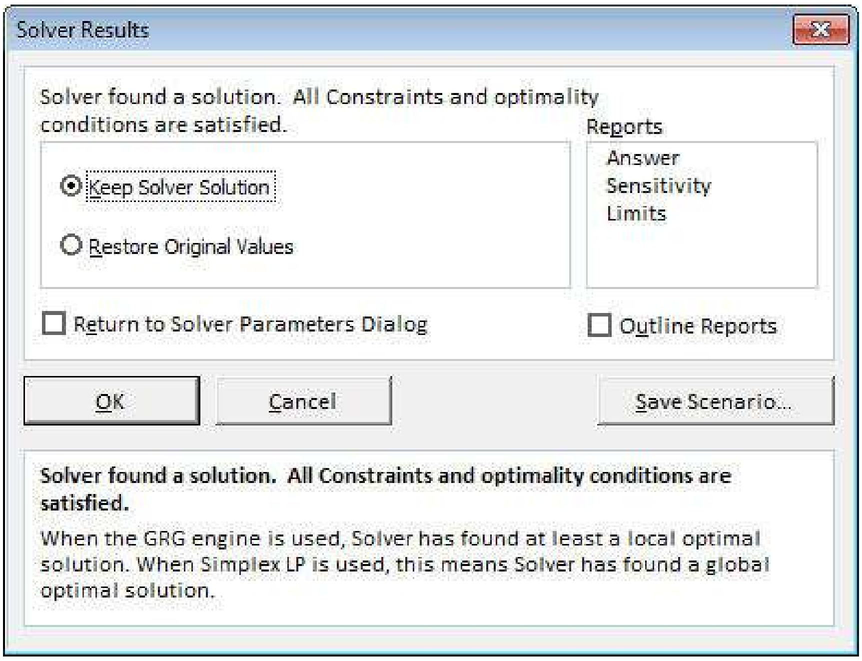
Slika 4.10. *Dijaloški okvir* Solver Options.

Na slici 4.10 je prikazan i način odabira jedne od metoda rješavanja: *GRG Nonlinear* za probleme nelinearnog programiranja, *Simplex LP* za probleme linearnog programiranja koji se obrađuju u ovom dijelu, te *Evolutionary* za probleme kod kojih su varijable odlučivanja diskretne (tj. nisu kontinuirane).

Ostale opcije ovog dijaloškog okvira ne trebaju se mijenjati.

Nakon podešavanja svih potrebnih parametara u dijaloškom okviru *Solver Parameters* klikom na dugme *Solve* pokreće se izračun postavljenog zadatka.

Nakon pronalaženja rješenja (ako postoji) pojavljuje se dijaloški okvir *Solver Results* (slika 4.11) gdje se može odabrati zadržavanje postignutog rješenja (klikom na *Keep Solver Solution*) ili pak povratak na početne vrijednosti (klikom na *Restore Original Values*).

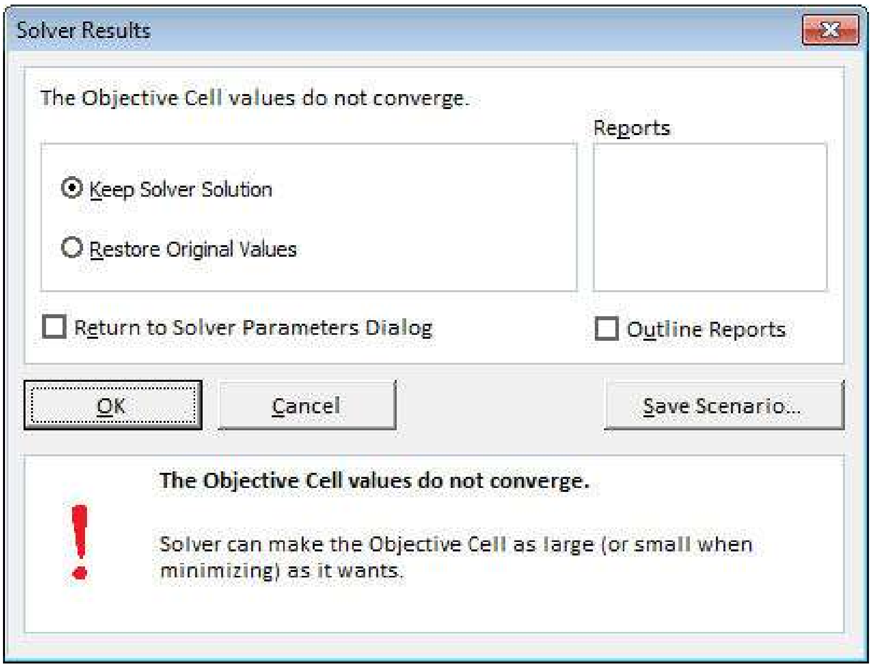


Slika 4.11. *Dijaloški okvir* Solver Results *(rješenje je pronađeno)*.

U polju *Reports* smještenom na desnoj strani dijaloškog okvira može se odabrati neki od izvještaja Solvera: *Answer* (Odgovor), *Sensitivity* (Osjetljivost) ili *Limits* (Granice).

Isto tako, klikom na dugme *Save Scenario*, korisnik može dobiveni rezultat pohraniti u obliku scenarija.

Ako *Solver* ne može pronaći rješenje problema (izvedivo područje je prazan skup ili nije omeđeno, i slično) tada će se pojaviti dijaloški okvir *Solver Results* s odgovarajućim upozorenjem (slika 4.12).



Slika 4.12. *Dijaloški okvir* Solver Results *(rješenje nije pronađeno).*

Primjer 4.1.

Zadana je funkcija cilja jednog proizvodnog problema:

$$F_C = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 13 \cdot x_4 \, .$$

Odrediti maksimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$12 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \leq 360 \qquad (1)$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_4 \leq 150 \qquad (2)$$

$$x_2 + x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 75 \qquad (3)$$

$$15 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 \leq 500 \qquad (4)$$

i uz nenegativne varijable odlučivanja ($x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$).

Rješenje:

Pronaći na disku Excelovu radnu knjigu SOLVER_predložak i otvoriti je.
Predložak prilagoditi postavljenom zadatku pa na sljedeći način unijeti zadane veličine (slika 4.13):

- u ćelije B6 do E6 upisati koeficijente funkcije cilja (konstante kojima se u funkciji cilja množe varijable x_1 do x_4);
- u ćelije B10 do E10 upisati koeficijente lijeve strane 1. ograničenja; u ćelije B11 do E11 upisati koeficijente lijeve strane 2. ograničenja; u ćelije B12 do E12 upisati

koeficijente lijeve strane 3. ograničenja i, konačno, u ćelije B13 do E13 upisati koeficijente lijeve strane 4. ograničenja;

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Dobit			
5		0,0	0,0	0,0	0,0				
6	Koeficijenti Fc	10,0	8,0	12,0	13,0				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	12,0	9,0	15,0	8,0		<=	360,0	1
11	resurs 2	3,0	2,0	0,0	5,0		<=	150,0	2
12	resurs 3	0,0	1,0	1,0	4,0		<=	75,0	3
13	resurs 4	15,0	5,0	30,0	20,0		<=	500,0	4

Slika 4.13. *Primjer 4.1: Prilagođeni predložak i zadane konstantne veličine.*

- u ćelije H10 do H13 upisati redom desne strane pojedinih ograničenja.

Slijedi unos formula za izračun funkcije cilja i lijevih strana pojedinih ograničenja:

- u ćeliju F5 upisati formulu za izračun funkcije cilja:

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B6:E6)

  koja ima isto značenje kao i formula:

  =B5*B6+C5*C6+D5*D6+E5*E6,

  što znači da je SUMPRODUCT funkcija Excela koja množi vrijednosti pojedinih ćelija raspona B5:E5 s odgovarajućim vrijednostima ćelija raspona B6:E6, i sve te umnoške zbraja;

- nadalje je potrebno upisati formulu koja izračunava lijevu stranu prvog ograničenja u ćeliju F10:

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B10:E10),

  pa analogno, u ćelije F11 do F13 treba redom upisati formule za izračun lijeve strane 2., 3., odnosno 4. ograničenja:

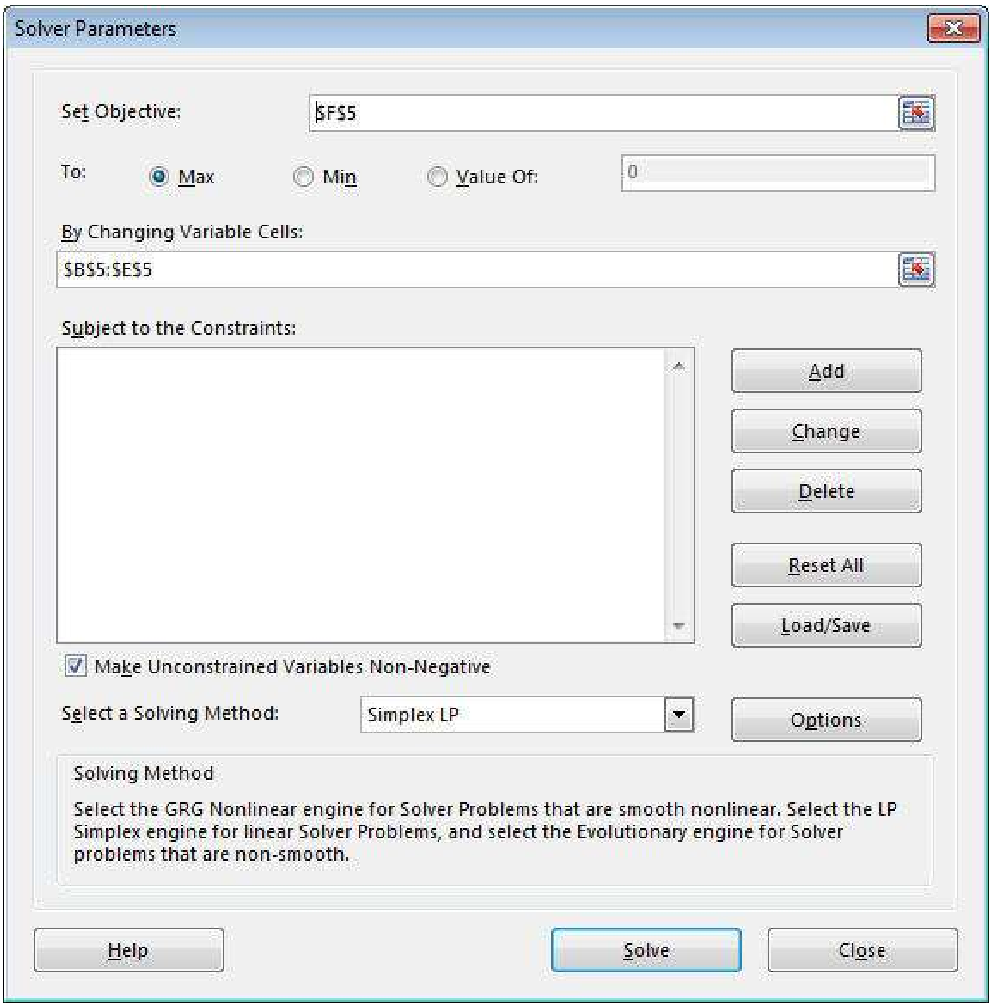
  =SUMPRODUCT(B5:E5;B11:E11),

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B12:E12),

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B13:E13).

Slijedi pokretanje Solvera, prilagođavanje parametara i rješenje zadatka:

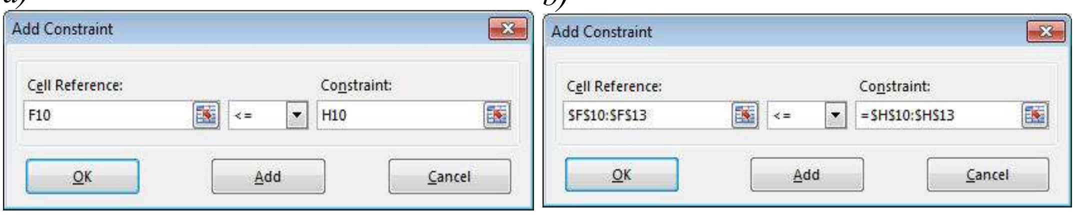
- odabrati *Tools/Solver...* na vrpci izbornika čime će se otvoriti dijaloški okvir *Solver Parameters* (slika 4.14) gdje je u polje *Set Target Cell:* potrebno upisati F5 (adresa ćelije u kojoj se izračunava funkcija cilja), od opcija *Equal To:* odabrati *Max*, u polje *By Changing Cell:* upisati raspon ćelija B5:E5 (raspon ćelija u kojima su vrijednosti varijabla odlučivanja);



Slika 4.14. *Primjer 4.1: Dijaloški okvir* Solver Parameters.

- nadalje, klikom na dugme *Add* pokrenuti dijaloški okvir *Add Constraint* gdje u polje *Cell Reference:* treba upisati adresu ćelije u kojoj je lijeva strana 1. ograničenja (F10), na srednjem padajućem izborniku odabrati operator <= te u polje *Constraint:* upisati adresu ćelije u kojoj je desna strana 1. ograničenja (H10, slika 4.15.a), a zatim taj postupak treba ponoviti za 2., 3. i 4. ograničenje.

a) *b)*

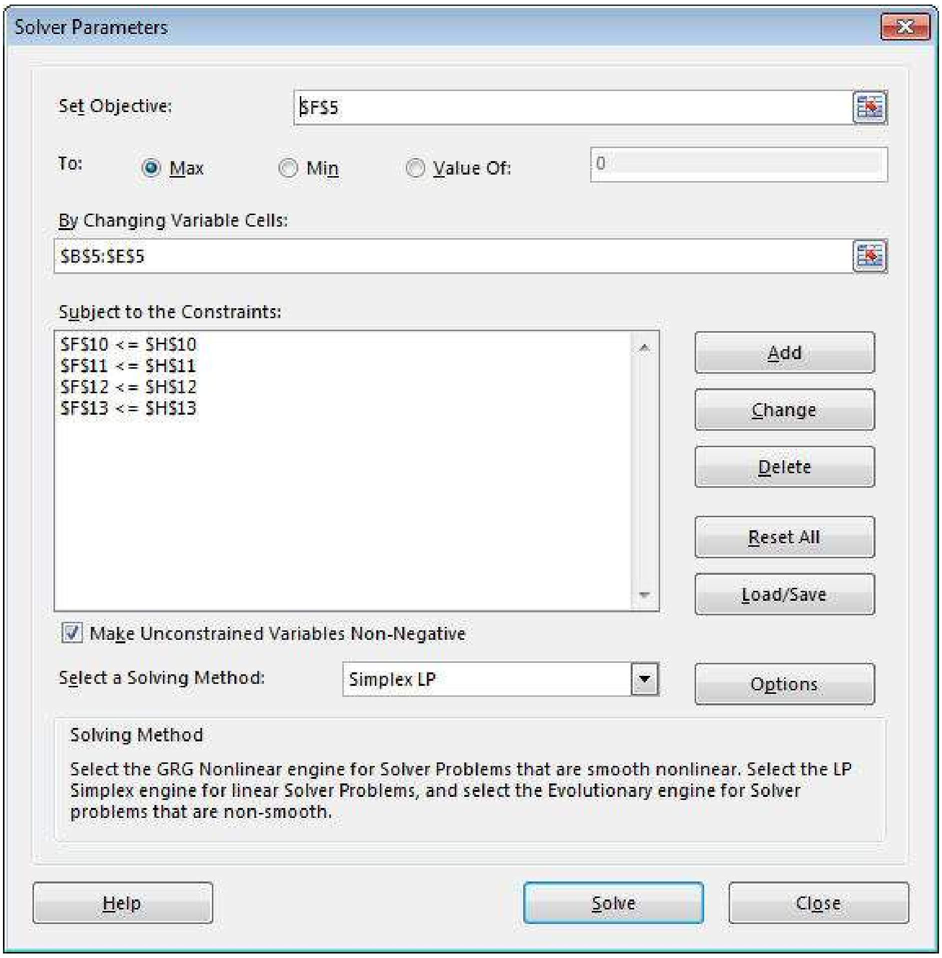


Slika 4.15. *Primjer 4.1: Unos ograničenja: a) pojedinačno; b) u nizu.*

Napomena: Kada se u nizu pojavljuju dva ili više ograničenja kojima nejednadžbe imaju isti operator, tada se taj niz može unijeti odjednom, unosom bloka ćelija, kako je to za razmatrani primjer prikazano na slici 4.15.b.

Nakon završetka dodavanja ograničenja klikom na dugme *OK* treba se vratiti u dijaloški okvir *Solver Parameters*, i zatim u donjem dijelu tog okvira:

- uključiti opciju *Make Uncostrained Variables Non-Negative* (ako već nije), te kao model rješavanja odabrati *Simplex LP* (konačni izgled dijaloškog okvira *Solver Parameters* prikazan je na slici 4.16)
- i na kraju, klikom na dugme *Solve* dijaloškog okvira *Solver Parameters* treba pokrenuti rješavanje problema.



Slika 4.16. *Primjer 4.1: Konačni izgled dijaloškog okvira* Solver Parameters.

Nakon završetka rada Solvera pojavit će se dijaloški okvir *Solver Results* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti dobiveno rješenje prikazano na slici 4.17.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Dobit			
5		8,3	15,7	0,0	14,8	**401,73**			
6	Koeficijenti Fc	10,0	8,0	12,0	13,0				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	12,0	9,0	15,0	8,0	360,0	<=	360,0	1
11	resurs 2	3,0	2,0	0,0	5,0	130,5	<=	150,0	2
12	resurs 3	0,0	1,0	1,0	4,0	75,0	<=	75,0	3
13	resurs 4	15,0	5,0	30,0	20,0	500,0	<=	500,0	4

Slika 4.17. *Primjer 4.1: Konačni izgled radnog lista s rješenjem zadatka.*

Dakle, funkcija cilja će postići maksimum u iznosu od $F_{C\,\max} = 401,73$ za vrijednosti varijabla odlučivanja: $x_1 = 8,3;\ x_2 = 15,7;\ x_3 = 0;\ x_4 = 14,8$.

Primjer 4.2.

Zadana je funkcija cilja jednog dijetnog problema:

$$F_C = 25 \cdot x + 60 \cdot y + 30 \cdot z \,.$$

Odrediti minimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$8 \cdot x + 12 \cdot y + 4 \cdot z \geq 2100 \qquad (1)$$

$$5 \cdot y + 2 \cdot z \geq 900 \qquad (2)$$

$$15 \cdot x + 5 \cdot y + 20 \cdot z \geq 1800 \qquad (3)$$

i uz nenegativne varijable odlučivanja ($x, y, z \geq 0$).

Rješenje:

Pronaći na disku Excelovu radnu knjigu SOLVER_predložak i otvoriti je.
Predložak prilagoditi postavljenom zadatku pa na sljedeći način unijeti zadane veličine (slika 4.18):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x	y	z	Trošak			
5		0,0	0,0	0,0				
6	Koeficijenti Fc	25,0	60,0	30,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	8,0	12,0	4,0		>=	2100,0	1
11	resurs 2	0,0	5,0	2,0		>=	900,0	2
12	resurs 3	15,0	5,0	20,0		>=	1800,0	3

Slika 4.18. *Primjer 4.2: Prilagođeni predložak i zadane konstantne veličine.*

- u ćelije B6 do D6 upisati koeficijente funkcije cilja (konstante kojima se u funkciji cilja množe varijable x, y i z);
- u ćelije B10 do D10 upisati koeficijente lijeve strane 1. ograničenja; u ćelije B11 do D11 upisati koeficijente lijeve strane 2. ograničenja i, konačno, u ćelije B12 do D12 upisati koeficijente lijeve strane 3. ograničenja;
- u ćelije G10 do G12 upisati redom desne strane pojedinih ograničenja.

Slijedi unos potrebnih formula, pokretanje Solvera i prilagođavanje parametara:

- u ćeliju E5 upisati formulu za izračun funkcije cilja:

=SUMPRODUCT(B5:D5; B6:D6);

- upisati formulu koja izračunava lijevu stranu prvog ograničenja u ćeliju E10:

=SUMPRODUCT(B5:D5; B10:D10)

pa analogno, u ćelije E11 i E12 treba redom upisati formule za izračun lijeve strane 2., odnosno 3. ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:D5; B11:D11),

=SUMPRODUCT(B5:D5; B12:D12).

Odabrati *Tools/Solver...* na vrpci izbornika čime će se otvoriti dijaloški okvir *Solver Parameters* gdje je u polje *Set Target Cell:* potrebno upisati E5 (adresa ćelije u kojoj se izračunava funkcija cilja), od opcija *Equal To:* odabrati *Max*, u polje *By Changing Cell:* upisati raspon ćelija B5:D5 (raspon ćelija u kojima su vrijednosti varijabla odlučivanja).

Nadalje, klikom na dugme *Add* pokrenuti dijaloški okvir *Add Constraint* gdje u polje *Cell Reference:* treba upisati adresu ćelije u kojoj je lijeva strana 1. ograničenja (E10), na srednjem padajućem izborniku odabrati operator >= te u polje *Constraint:* upisati adresu ćelije u kojoj je desna strana 1. ograničenja (G10), a zatim taj postupak treba ponoviti za 2. i 3. ograničenje.

Budući da je operator u svim ograničenjima isti, sva su se ograničenja mogla unijeti odjednom tako da se u polje *Cell Reference:* upiše raspon ćelija E10:E12, na srednjem padajućem izborniku odabere operator >= te u polje *Constraint:* upiše raspon ćelija u kojima su desne strane ograničenja (G10:G12).

Nakon završetka dodavanja ograničenja klikom na dugme *OK* treba se vratiti u dijaloški okvir *Solver Parameters* izgled koji je prikazan na slici 4.19.

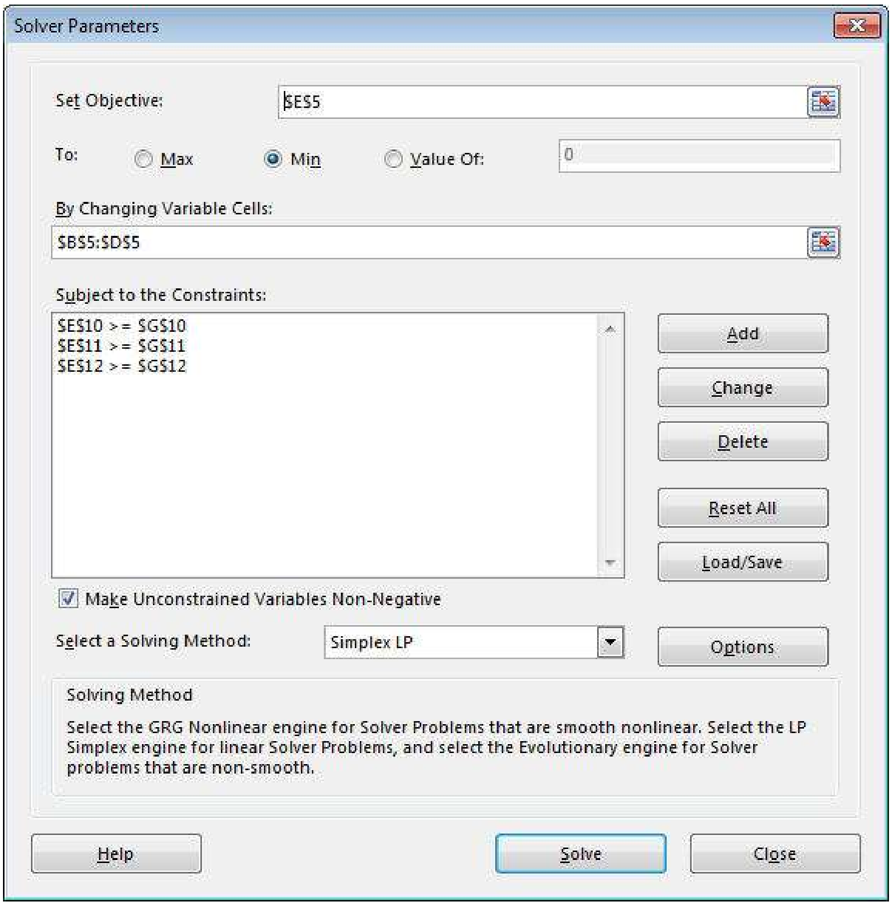
Sada treba uključiti opciju *Make Uncostrained Variables Non-Negative* (ako već nije), te kao model rješavanja odabrati *Simplex LP*.

Završni izgled okvira *Solver Parameters* prikazan je na slici 4.19.

Konačno, klikom na dugme *Solve* dijaloškog okvira *Solver Parameters* treba pokrenuti rješavanje problema.

Nakon završetka rada Solvera pojavit će se dijaloški okvir *Solver Results* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti dobiveno rješenje (slika 4.20).

Dakle, funkcija cilja postići će minimum u iznosu od $F_{C\min} = 11.100$ za vrijednosti varijabla odlučivanja: $x = 0;\ y = 160;\ z = 50$.



Slika 4.19. *Primjer 4.2: Konačni izgled dijaloškog okvira* Solver Parameters.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x	y	z	Trošak			
5		0,0	160,0	50,0	**11100,0**			
6	Koeficijenti Fc	25,0	60,0	30,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	8,0	12,0	4,0	2120,0	>=	2100,0	1
11	resurs 2	0,0	5,0	2,0	900,0	>=	900,0	2
12	resurs 3	15,0	5,0	20,0	1800,0	>=	1800,0	3

Slika 4.20. *Primjer 4.2: Konačni izgled radnog lista s rješenjem zadatka.*

Primjer 4.3.

Uzgajivač za potrebe prehrane mačaka koristi tri tipa hrane HA, HB i HC, od kojih radi mješavinu. Mješavina mora sadržavati najmanje 120 jedinica ugljikohidrata, 100 jedinica proteina i 60 jedinica masti.

Hrana HA sadrži 20 jedinica ugljikohidrata, 25 jedinica proteina i 5 jedinica masti po jedinici; hrana HB sadrži 30 jedinica ugljikohidrata te po 10 jedinica proteina i 15 jedinica masti po jedinici, dok hrana HC sadrži 15 jedinica ugljikohidrata, 20 jedinica proteina i 10 jedinica masti po jedinici.

Ako je jedinična cijena hrane HA je 3,00 kn, hrane HB 6,00 kn, a hrane HC 4,00 kn, odrediti omjer miješanja hrane HA, HB i HC koji će minimizirati trošak prehrane mačaka.

Rješenje:

Varijable odlučivanja, funkcije cilja i ograničenja. Ako se s x označi količina hrane HA u mješavini, s y količina HB, a sa z količina HC, bit će funkcija cilja:

$$F_C = TC = 3 \cdot x + 6 \cdot y + 4 \cdot z \,.$$

Smjesa mora sadržavati minimalno 120 jedinica ugljikohidrata, pa je prvo ograničenje:

$$20 \cdot x + 30 \cdot y + 15 \cdot z \geq 120 \,, \qquad (1)$$

odnosno minimalno 100 jedinica proteina, pa je drugo ograničenje:

$$25 \cdot x + 10 \cdot y + 20 \cdot z \geq 100 \,, \qquad (2)$$

te minimalno 60 jedinica masti, pa je treće ograničenje:

$$5 \cdot x + 15 \cdot y + 10 \cdot z \geq 60 \,, \qquad (3)$$

pri čemu varijable odlučivanja ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Na slici 4.21 prikazano je kako je radna knjiga SOLVER_predložak prilagođena ovom zadatku, s unesenim ulaznim veličinama:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x	y	z	Trošak			
5		0,0	0,0	0,0				
6	Koeficijenti Fc	3,0	6,0	4,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	ugljikohidrati	20,0	30,0	15,0		>=	120,0	1
11	proteini	25,0	10,0	20,0		>=	100,0	2
12	masti	5,0	15,0	10,0		>=	60,0	3

Slika 4.21. *Primjer 4.3: Prilagođeni predložak i zadane konstantne veličine.*

- u ćelije B6 do D6 potrebno je upisati koeficijente funkcije cilja (konstante kojima se u funkciji cilja množe varijable x, y i z);
- u ćelije B10 do D10 upisati zatim koeficijente lijeve strane 1. ograničenja; u ćelije B11 do D11 upisati koeficijente lijeve strane 2. ograničenja; a u ćelije B12 do D12 upisati koeficijente lijeve strane 3. ograničenja;
- konačno, u ćelije G10 do G12 upisati redom desne strane pojedinih ograničenja.

Slijedi unos potrebnih formula, pokretanje Solvera i prilagođavanje parametara:

- u ćeliju E5 upisati formulu za izračun funkcije cilja:

=SUMPRODUCT(B5:D5;B6:D6);

- nakon toga je potrebno upisati formulu koja izračunava lijevu stranu prvog ograničenja u ćeliju E10:

=SUMPRODUCT(B5:D5;B10:D10);

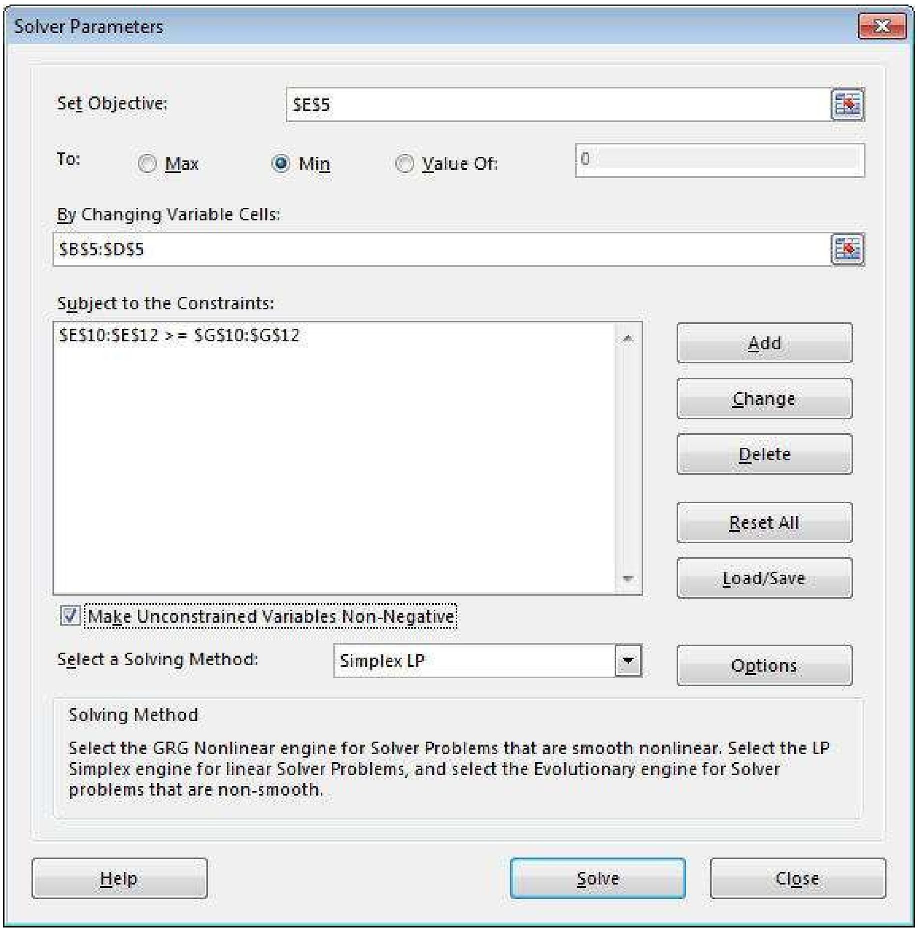
- pa analogno, u ćelije E11 i E12 treba redom upisati formule za izračun lijeve strane 2., odnosno 3. ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:D5;B11:D11),

=SUMPRODUCT(B5:D5;B12:D12).

Odabrati *Tools/Solver...* na vrpci izbornika čime će se otvoriti dijaloški okvir *Solver Parameters* gdje je u polje *Set Target Cell:* potrebno upisati E5 (adresa ćelije u kojoj se izračunava funkcija cilja), od opcija *Equal To:* odabrati *Min*, u polje *By Changing Cell:* upisati raspon ćelija B5:D5 (raspon ćelija u kojima su vrijednosti varijabla odlučivanja). Nadalje, budući da je operator u svim ograničenja isti, treba u polje *Cell Reference:* upisati raspon ćelija E10:E12, na srednjem padajućem izborniku odabrati operator >= te u polje *Constraint:* upisati raspon ćelija u kojima su desne strane ograničenja (G10:G12).

Nakon završetka dodavanja ograničenja klikom na dugme *OK* treba se vratiti u dijaloški okvir *Solver Parameters* izgled koji je prikazan na slici 4.22.



Slika 4.22. *Primjer 4.3: Konačni izgled dijaloškog okvira* Solver Parameters.

Sada treba uključiti opciju *Make Uncostrained Variables Non-Negative* (ako već nije), te kao model rješavanja odabrati *Simplex LP*.

Konačno, klikom na dugme *Solve* dijaloškog okvira *Solver Parameters* treba pokrenuti rješavanje problema, a nakon završetka rada Solvera pojavit će se dijaloški okvir *Solver Results* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti dobiveno rješenje (slika 4.23).

Dakle, uzgajivač mačaka imat će najmanji trošak dnevne prehrane, u iznosu od $F_{C\min} = TC_{\min} = 25,2$ kn, ako u mješavinu stavi 1,2 jedinice hrane HA, 1,9 jedinica hrane HB i 2,5 jedinica hrane HC.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x	y	z	Trošak			
5		1,2	1,9	2,5	**25,2**			
6	Koeficijenti Fc	3,0	6,0	4,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	ugljikohidrati	20,0	30,0	15,0	120,0	>=	120,0	1
11	proteini	25,0	10,0	20,0	100,0	>=	100,0	2
12	masti	5,0	15,0	10,0	60,0	>=	60,0	3

Slika 4.23. *Primjer 4.3: Konačni izgled radnog lista s rješenjem zadatka.*

Primjer 4.4.

Rafinerija za reciklažu otpadnih motornih ulja koristi četiri postrojenja, PosA, PosB, PosC i PosD, a mjesečna količina otpadnih ulja koju treba reciklirati iznosi 500 tona.

Cijena reciklaže po jednoj toni otpadnog ulja iznosi: u postrojenju PosA 920 kn, u postrojenju PosB 750 kn, u postrojenju PosC 400 kn, a u postrojenju PosD 375 kn. Rafinerija raspolaže mjesečnim budžetom od 250.000 kn za troškove reciklaže.

Menadžment zahtijeva da minimalna količina otpadnog ulja koju će reciklirati bilo koje od postrojenja bude 40 tona.

Rafinerija sve reciklažom dobiveno upotrebljivo ulje prodaje po cijeni od 3.200 kn za tonu.

Ako se od tretirane količine otpadnog ulja u postrojenju PosA dobije 60 % upotrebljivog ulja, u PosB 58 %, u PosC 55 %, a u PosD 50 %, odrediti kako rafinerija treba rasporediti otpadno ulje po svojim postrojenjima tako da ukupni prihod od prodaje bude maksimalan.

Rješenje:

<u>Varijable odlučivanja, funkcije cilja i ograničenja</u>. Za varijable odlučivanja treba uzeti količine otpadnih motornih ulja koje će se reciklirati u pojedinim postrojenjima. Tako

je x_1 količina otpadnih motornih ulja koja bi se trebala reciklirati u postrojenju PosA, x_2 količina u PosB, x_3 količina u PosC te x_4 u PosD.

Stoga je ukupna količina upotrebljivog ulja koja će nastati reciklažom u svim postrojenjima:

$$Q_u = Q_A + Q_B + Q_C + Q_D = 0,60 \cdot x_1 + 0,58 \cdot x_2 + 0,55 \cdot x_3 + 0,50 \cdot x_4,$$

a kako se po toni upotrebljivog ulja ostvaruje prihod od 3.200,00 kn, funkcija cilja bit će ukupni prihod koji treba maksimizirati:

$$F_C = TR = 3200 \cdot Q_u = 3200 \cdot \left(0,60 \cdot x_1 + 0,58 \cdot x_2 + 0,55 \cdot x_3 + 0,50 \cdot x_4\right),$$

odnosno

$$F_C = TR = 1920 \cdot x_1 + 1856 \cdot x_2 + 1760 \cdot x_3 + 1600 \cdot x_4.$$

Poznata je raspoloživa količina otpadnog ulja koju rafinerija treba reciklirati, pa je:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 500, \qquad (1)$$

dok je iznos dostupan za troškove reciklaže 250.000,00 kn, pa mora biti:

$$920 \cdot x_1 + 750 \cdot x_2 + 400 \cdot x_3 + 375 \cdot x_4 \le 250000. \qquad (2)$$

Svaki pogon mora preraditi najmanje 40 tona otpadnog ulja iz čega slijede ograničenja:

$$x_1 \ge 40, \qquad (3) \qquad\qquad x_2 \ge 40, \qquad (4)$$

$$x_3 \ge 40, \qquad (5) \qquad\qquad x_4 \ge 40. \qquad (6)$$

Iako varijable odlučivanja ne mogu poprimiti negativne vrijednosti, ovdje to ne treba posebno naglašavati jer je ta činjenica sadržana u ograničenjima (3) do (6).

Na slici 4.24 prikazano je kako je radna knjiga SOLVER_predložak prilagođena ovom zadatku kao i rješenje zadatka, pri čemu je bilo potrebno:

- u ćelije B6 do E6 upisati koeficijente funkcije cilja (konstante kojima se u funkciji cilja množe varijable x_1, x_2, x_3 i x_4);
- u ćelije B10 do E10 upisati koeficijente lijeve strane 1. ograničenja; u ćelije B11 do E11 upisati koeficijente lijeve strane 2. ograničenja; u ćelije B12 do E12 upisati koeficijente lijeve strane 3. ograničenja; u ćelije B13 do E13 upisati koeficijente lijeve strane 4. ograničenja; u ćelije B14 do E14 upisati koeficijente lijeve strane 5. ograničenja te u ćelije B15 do E15 upisati koeficijente lijeve strane 6. ograničenja;
- i konačno, u ćelije H10 do H15 upisati redom desne strane pojedinih ograničenja.

Slijedi unos potrebnih formula, pokretanje Solvera i prilagođavanje parametara:

- u ćeliju F5 upisati formulu za izračun funkcije cilja:

=SUMPRODUCT(B5:E5;B6:E6);

- zatim u ćeliju F10 upisati formulu koja izračunava lijevu stranu prvog ograničenja:

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B10:E10);

- pa analogno, u ćelije F11 do F15 treba redom upisati formule za izračun lijeve strane 2., 3., 4., 5. i 6. ograničenja:

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B11:E11),

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B12:E12),

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B13:E13),

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B14:E14),

  =SUMPRODUCT(B5:E5;B15:E15).

Odabrati *Tools/Solver...* na vrpci izbornika čime će se otvoriti dijaloški okvir *Solver Parameters* gdje je u polje *Set Target Cell:* potrebno upisati F5 (adresa ćelije u kojoj se izračunava funkcija cilja), od opcija *Equal To:* odabrati *Max*, u polje *By Changing Cell:* upisati raspon ćelija B5:E5 (raspon ćelija u kojima su vrijednosti varijabla odlučivanja). Za dodavanje ograničenja je potrebno, nakon klika na dugme *Add*, u polje *Cell Reference:* upisati raspon ćelija F10:F11, na srednjem padajućem izborniku odabrati operator <= te u polje *Constraint:* upisati raspon ćelija u kojima su desne strane prvih dvaju ograničenja (H10:H11); pa opet kliknuti na dugme *Add* te u polje *Cell Reference:* upisati raspon ćelija F12:F15, na srednjem padajućem izborniku odabrati operator >= te u polje *Constraint:* upisati raspon ćelija u kojima su desne strane 3., 4., 5. i 6. ograničenja (H12:H15).

Nakon završetka dodavanja ograničenja klikom na dugme *OK* treba se vratiti u dijaloški okvir *Solver Parameters* pa odabrati pretpostavku o nenegativnim vrijednostima varijabla odlučivanja i linearnom modelu.

Konačno, klikom na dugme *Solve* dijaloškog okvira *Solver Parameters* treba pokrenuti rješavanje problema.

Nakon završetka rada Solvera pojavit će se dijaloški okvir *Solver Results* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti dobiveno rješenje (slika 4.24).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Prihod			
5		71,2	40,0	348,8	40,0	**888824,62**			
6	Koeficijenti Fc	1920,0	1856,0	1760,0	1600,0				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	količina ulja	1,0	1,0	1,0	1,0	500,0	<=	500,0	1
11	količina novca	920,0	750,0	400,0	375,0	250000,0	<=	250000,0	2
12	zahtjev 1	1,0	0,0	0,0	0,0	71,2	>=	40,0	3
13	zahtjev 2	0,0	1,0	0,0	0,0	40,0	>=	40,0	4
14	zahtjev 3	0,0	0,0	1,0	0,0	348,8	>=	40,0	5
15	zahtjev 4	0,0	0,0	0,0	1,0	40,0	>=	40,0	6

Slika 4.24. *Primjer 4.4: Prilagođeni predložak i konačno rješenje.*

Iz dobivenog rješenja slijedi zaključak da će rafinerija ostvariti najveći prihod u iznosu od $F_{C\max} = TR_{\max} = 888.824,62$ kn ako u postrojenju PosA preradi 71,2 tone otpadnog ulja, u postrojenju PosB 40 tona, u postrojenju PosC 348,8 tona te u postrojenju PosD 40 tona.

Primjer 4.5.

Maslinar je za berbu maslina organizirao 90 osoba, 60 muškaraca i 30 žena. Temeljem stečenog iskustva maslinar ih organizira u četiri tima po šest osoba: T1, T2, T3 i T4.

Tim T1 sastavljen je od 6 muškaraca i maslinu obere za 30 minuta, tim T2 sastavljen je od 6 žena i maslinu obere za 24 minuta, tim T3 sastavljen je od 3 muškarca i 3 žene, a maslinu obere za 20 minute, dok je tim T4 sastavljen od 2 muškarca i 4 žene, a maslinu obere za 18 minuta.

Odrediti koliko pojedinih timova maslinar treba formirati od raspoloživog broja osoba tako da broj obranih maslina po satu branja bude najveći.

Rješenje:

Varijable odlučivanja, funkcije cilja i ograničenja. Za varijable odlučivanja treba uzeti broj pojedinih timova za berbu. Tako je x_1 broj timova T1, x_2 broj timova T2, x_3 broj timova T3, a x_4 broj timova T4. Traži se najveća efikasnost berbe formiranih timova.
Iz poznatih vremena koja su pojedinom timu potrebna da obere jednu maslinu slijedi efikasnost svakog tima, tj. broj maslina koje može obrati u jednom satu (60 min): tim T1 obrat će 2 masline (=60'/30'), tim T2 2,5 masline (=60'/24'), tim T3 3 masline (=60'/20'), a tim T4 3,333 masline (=60'/18'). Stoga će funkcija cilja biti ukupan broj maslina obran u satu rada

$$F_C = Q_m = 2 \cdot x_1 + 2{,}5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 3{,}333 \cdot x_4 ,$$

koju treba maksimizirati.

Poznat je raspoloživ broj muških osoba (muškarci se ne pojavljuju samo u timu T2):

$$6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 60 , \qquad (1)$$

kao i raspoloživ broj ženskih osoba (žene se ne pojavljuju samo u timu T1):

$$6 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 30 , \qquad (2)$$

pri čemu varijable odlučivanja ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Na slici 4.25 prikazano je kako je radna knjiga SOLVER_predložak prilagođena ovom zadatku kao i rješenje zadatka, pri čemu je bilo potrebno:

- u ćelije B6 do E6 upisati koeficijente funkcije cilja (konstante kojima se u funkciji cilja množe varijable x_1, x_2, x_3 i x_4);
- u ćelije B10 do E10 upisati koeficijente lijeve strane 1. ograničenja, u ćelije B11 do E11 upisati koeficijente lijeve strane 2. ograničenja, a potom u ćelije F10 i F11 upisati desne strane tih ograničenja.

Slijedi unos potrebnih formula, pokretanje Solvera i prilagođavanje parametara:

- u ćeliju F5 upisati formulu za izračun funkcije cilja:

=SUMPRODUCT(B5:E5;B6:E6);

- u ćeliju F10 upisati formulu koja izračunava lijevu stranu prvog ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:E5;B10:E10);

- i analogno, u ćelije F11 upisati formule za izračun lijeve strane 2.ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:E5;B11:E11).

Odabrati *Tools/Solver...* na vrpci izbornika čime će se otvoriti dijaloški okvir *Solver Parameters* gdje je u polje *Set Target Cell:* potrebno upisati F5 (adresa ćelije u kojoj se izračunava funkcija cilja), od opcija *Equal To:* odabrati *Max*, u polje *By Changing Cell:* upisati raspon ćelija B5:E5 (raspon ćelija u kojima su vrijednosti varijabla odlučivanja).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Količina maslina			
5		5	0	10	0	**40,00**			
6	Koeficijenti Fc	2,0	2,5	3,0	3,333				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	broj muškaraca	6	0	3	2	60,0	<=	60	1
11	broj žena	0	6	3	4	30,0	<=	30	2

Slika 4.25. *Primjer 4.5: Prilagođeni predložak i konačno rješenje.*

Za dodavanje ograničenja je potrebno, nakon klika na dugme *Add*, u polje *Cell Reference:* upisati raspon ćelija F10:F11, na srednjem padajućem izborniku odabrati operator <= te u polje *Constraint:* upisati raspon ćelija u kojima su desne strane tih ograničenja (H10:H11).

Nakon završetka dodavanja ograničenja klikom na dugme *OK* treba se vratiti u dijaloški okvir *Solver Parameters* pa odabrati pretpostavku o nenegativnim vrijednostima varijabla odlučivanja i linearnom modelu pa se vratiti u dijaloški okvir *Solver Parameters*.

Konačno, klikom na dugme *Solve* dijaloškog okvira *Solver Parameters* treba pokrenuti rješavanje problema.

Nakon završetka rada Solvera pojavit će se dijaloški okvir *Solver Results* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti dobiveno rješenje (slika 4.25).

Iz dobivenog rješenja slijedi zaključak da će se najveći broj maslina pobrati u jednom satu berbe ($F_{C\max} = Q_{m,\max} = 40$) ako se od angažiranih osoba formira 5 timova T1 (6 muškaraca) i 10 timova T3 (3 muškarca i 3 žene).

Primjer 4.6.

Godišnja članarina Tenis kluba GRANDSLAM iznosi 2.000 kuna za muškarce, 1.200 kuna za žene i 400 kuna za djecu. Klub od članarina mora uprihoditi minimalno 200 tisuća kuna godišnje kako bi pokrio troškove.

Ukupni broj članova kluba ne smije premašiti brojku 160, uz uvjet da broj muškaraca ne bude veći od broja žena i djece zajedno, dok broj djece mora biti barem jednak broju žena.

Odrediti broj muških, odnosno ženskih članova kluba, te broj djece koji će klubu osigurati najveći prihod od članarina.

Rješenje:

Varijable odlučivanja, funkcije cilja i ograničenja. Varijable odlučivanja su brojevi članova kluba iz pojedinih skupina: x – broj odraslih muškaraca, y – broj žena te z – broj djece.

Iz poznatih iznosa članarina za osobe iz pojedinih skupina slijedi funkcija cilja, ukupni prihod od članarina koji treba maksimizirati:

$$F_C = TR = 2000 \cdot x + 1200 \cdot y + 400 \cdot z \,.$$

Klub od članarina mora uprihoditi najmanje 200.000,00 kuna, pa vrijedi

$$2000 \cdot x + 1200 \cdot y + 400 \cdot z \geq 200000 \,, \qquad (1)$$

dok je ukupni broj članova limitiran što se može izraziti sljedećom nejednadžbom:

$$x + y + z \leq 160 \,. \qquad (2)$$

Dodatna ograničenja slijede iz uvjeta da broj muškaraca članova kluba ne smije biti veći od broja žena i djece zajedno

$$x \leq y + z \,, \qquad (3')$$

te da broj djece bude barem jednak broju žena:

$$z \geq y \,. \qquad (4')$$

Ograničenja (2') i (3') mogu se zapisati u sljedećem obliku:

$$x - y - z \leq 0 \,, \qquad (3)$$

$$-y + z \geq 0 \,. \qquad (4)$$

Uz to, varijable odlučivanja ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Na slici 4.26 prikazano je kako je radna knjiga SOLVER_predložak prilagođena ovom zadatku kao i rješenje zadatka, pri čemu je bilo potrebno:

- u ćelije B6 do D6 upisati koeficijente funkcije cilja (konstante kojima se u funkciji cilja množe varijable x, y i z);

- u ćelije B10 do D10 upisati koeficijente lijeve strane 1. ograničenja pa to ponoviti u ćelijama B11 do D11 za 2. ograničenja, u ćelijama B12 do D12 za 3. ograničenja te u ćelijama B13 do D13 za 4. ograničenja, a potom u ćelije G10 do G13 upisati redom desne strane pojedinih ograničenja.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x	y	z	Prihod			
5		80,0	40,0	40,0	**224000,00**			
6	Koeficijenti Fc	2000,0	1200,0	400,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	potrebna članarina	2000,0	1200,0	400,0	224000,0	>=	200000,0	1
11	broj članova	1,0	1,0	1,0	160,0	<=	160,0	2
12	zahtjev 1	1,0	-1,0	-1,0	0,0	<=	0,0	3
13	zahtjev 2	0,0	-1,0	1,0	0,0	>=	0,0	4

Slika 4.26. *Primjer 4.6: Prilagođeni predložak i konačno rješenje.*

Slijedi unos potrebnih formula, pokretanje Solvera i prilagođavanje parametara:

- u ćeliju E5 upisati formulu za izračun funkcije cilja:

=SUMPRODUCT(B5:D5;B6:D6);

- u ćeliju E10 upisati formulu koja izračunava lijevu stranu prvog ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:D5;B10:D10);

- i analogno, u ćelije E11 do E13 upisati formule za izračun lijeve strane 2., 3., odnosno 4. ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:D5;B11:D11),

=SUMPRODUCT(B5:D5;B12:D12),

=SUMPRODUCT(B5:D5;B13:D13).

Odabrati *Tools/Solver...* na vrpci izbornika čime će se otvoriti dijaloški okvir *Solver Parameters* gdje je u polje *Set Target Cell:* potrebno upisati E5 (adresa ćelije u kojoj se izračunava funkcija cilja), od opcija *Equal To:* odabrati *Max*, u polje *By Changing Cell:* upisati raspon ćelija B5:D5 (raspon ćelija u kojima su vrijednosti varijabla odlučivanja).

Za dodavanje ograničenja je potrebno, nakon klika na dugme *Add*, u polje *Cell Reference:* upisati E10, na srednjem padajućem izborniku odabrati operator >= te u polje *Constraint:* upisati G10; to zatim ponoviti i za preostala tri ograničenja.

Nakon dodavanja ograničenja treba uključiti opciju *Make Uncostrained Variables Non-Negative* (ako već nije), te kao model rješavanja odabrati *Simplex LP*.

Konačno, klikom na dugme *Solve* dijaloškog okvira *Solver Parameters* treba pokrenuti rješavanje problema.

Nakon završetka rada Solvera pojavit će se dijaloški okvir *Solver Results* gdje klikom na dugme *OK* treba prihvatiti dobiveno rješenje (slika 4.26).

Iz dobivenog rješenja slijedi zaključak da će tenis klub imati najveći prihod od članarina ($F_{C\,max} = TR_{max} = 224.000,00$ kn) ako učlani 80 odraslih muškaraca, 40 žena i 40 djece.

4.4. Izvještaji SOLVERA

Osim rješenja problema linearnog programiranja Solver nudi i mogućnost kreiranja triju izvještaja:

- *Answer Report* (Odgovor)
- *Sensitivity Report* (Osjetljivost)
- *Limits Report* (Granice)

na posebnim radnim listovima. Ti su izvještaji temelj za analizu osjetljivosti razmatranog problema.

Pojedine stavke svakoga od navedenih izvještaja pobliže će se pojasniti na dvama primjerima: prvo na primjeru s dvije varijable odlučivanja gdje je niz stavki moguće i grafički prikazati, a zatim na primjeru s četiri varijable odlučivanja.

Primjer 4.7.

Tvrtka KLIMA sklapa dva elektroproizvoda: klimatizacijske uređaje i specijalne ventilatore za poznatog kupca.

Za sklapanje jednog klimatizacijskog uređaja, kao i za sklapanje jednog ventilatora, potrebno je 15 minuta, a tvrtka raspolaže dnevno s 250 radnih sati za sklapanje.

Na kontrolu kvalitete i pakiranje jednog klimatizacijskog uređaja potroši se 9 minuta, a u slučaju specijalnog ventilatora 18 minuta, pri čemu je dnevno raspoloživo 210 radnih sati za kontrolu kvalitete i pakiranje.

U svaki specijalni ventilator ugrađuje se po jedan propeler, a skladište tvrtke dnevno može osigurati 600 propelera. Kupac traži da barem 20 % svih isporučenih proizvoda budu specijalni ventilatori.

Ako je dobit tvrtke po isporučenom klimatizacijskom uređaju 15 €, a po isporučenom specijalnom ventilatoru 20 €, odrediti plan dnevne proizvodnje klimatizacijskih uređaja, odnosno specijalnih ventilatora po kojem će tvrtka KLIMA ostvariti najveću dobit.

Izvršiti detaljnu analizu osjetljivosti dobivenog rješenja.

Rješenje:

Varijable odlučivanja su (nenegativne veličine):

x – broj klimatizacijskih uređaja

y – broj specijalnih ventilatora.

Funkcija cilja (koju treba maksimizirati) jest:

$$F_C = \pi = 15 \cdot x + 20 \cdot y\,.$$

Ograničenja su:

- radni sati za sklapanje (sklapanje je zadano u minutama pa je najbolje i raspoložive radne sate pretvoriti u minute: $250 \cdot 60 = 15000$):

$$15 \cdot x + 15 \cdot y \le 15000 \qquad (1)$$

- radni sati za kontrolu kvalitete i pakiranje (i ovdje je najbolje raspoložive radne sate pretvoriti u minute: $210 \cdot 60 = 12600$):

$$9 \cdot x + 18 \cdot y \le 12600 \qquad (2)$$

- raspoloživa količina propelera za specijalne ventilatore:

$$y \le 600 \qquad (3)$$

- zahtjev kupca da barem 20 % svih isporučenih proizvoda budu specijalni ventilatori glasi:

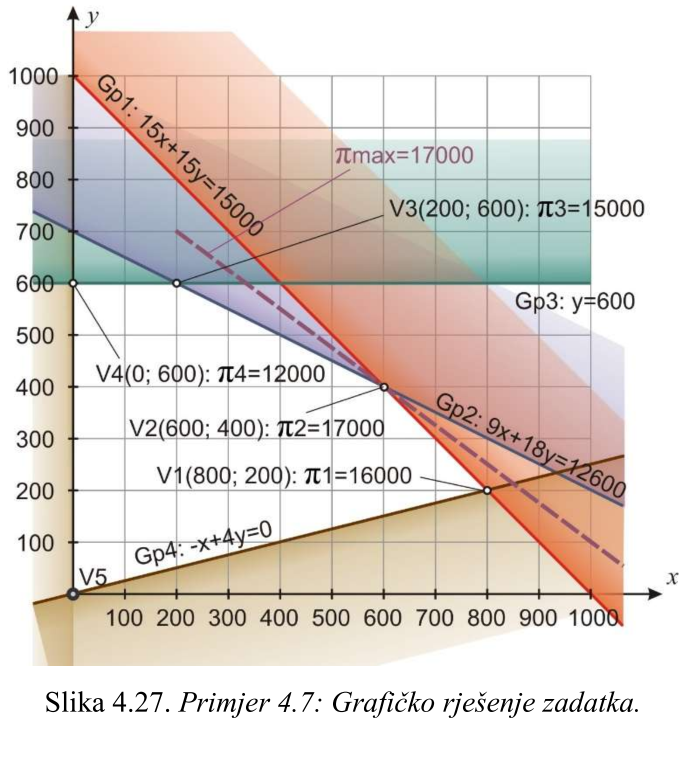
$$y \ge 0{,}2 \cdot (x + y)\,,$$

  jer je broj svih isporučenih proizvoda jednak (*x*+*y*), pa je:

$$-0{,}2 \cdot x + 0{,}8 \cdot y \ge 0$$

  ili nakon dijeljenja lijeve i desne strane s 0,2:

$$-x + 4 \cdot y \ge 0\,. \qquad (4)$$



Slika 4.27. *Primjer 4.7: Grafičko rješenje zadatka.*

Grafičko rješenje ovog problema prikazano je na slici 4.27.

Maksimalna dobit u iznosu od 17.000,00 € ostvarit će se proizvodnjom 600 klimatizacijskih uređaja i 400 specijalnih ventilatora dnevno (vrh V2 na slici 4.27).

Isti primjer riješen u Excelu prikazan je na slici 4.28.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		Varijable odlučivanja		Funkcija cilja			
4		x	y	Dobit			
5		600,0	400,0	**17000,00**			
6	Koeficijenti Fc	15,0	20,0				
7							
8							
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO		LSO	Operator	DSO	Br.
10	sklapanje	15,0	15,0	15000,0	<=	15000,0	1
11	kontrola i pakiranje	9,0	18,0	12600,0	<=	12600,0	2
12	broj propelera	0,0	1,0	400,0	<=	600,0	3
13	zahtjev kupca	-1,0	4,0	1000,0	>=	0,0	4

Slika 4.28. *Primjer 4.7: Rješenje s pomoću Solvera.*

Kako je rečeno, analizu osjetljivosti rješenja problema nude tri izvještaja (*Answer Report*, *Sensitivity Report* i *Limits Report*) koje Solver kreira ako se u dijaloškom okviru *Solver Results*, u oknu *Reports* klikne na njihove nazive.

Izvještaj ***Answer Report*** (Odgovor), prikazan na slici 4.29, sastoji se iz tri dijela.

Microsoft Excel 12.0 Answer Report
Worksheet: [Primjer_5_07.xlsx]SOLVER_predložak
Report Created: 15.10.2014. 12:05:17

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$5	Dobit	0,00	17000,00

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$B$5	x	0,0	600,0
$C$5	y	0,0	400,0

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$10	sklapanje LSO	15000,0	$D$10<=F1C	Binding	0
$D$11	kontrola i pakiranje LSO	12600,0	$D$11<=$F$11	Binding	0
$D$12	broj propelera LSO	400,0	$D$12<=$F$12	Not Binding	200
$D$13	zahtjev kupca LSO	1000,0	$D$13>=$F$13	Not Binding	1000,0

Slika 4.29. *Primjer 4.7: Izvještaj* Answer Report.

Prvi dio podataka odnosi se na ciljnu ćeliju, tj. na ćeliju u kojoj je formula za izračunavanje funkcije cilja. Uz naziv prvog dijela, ***Target Cell*** (ciljna ćelija), u zagradi se nalazi i napomena traži li se u zadanom problemu maksimum funkcije cilja (*Max*), njen minimum (*Min*) ili pak određena vrijednost te funkcije (*Value Of*).

U razmatranom se primjeru traži maksimum funkcije cilja (*Max*).

U stupcu *Cell* apsolutna je adresa ćelije u koju je upisana formula za izračunavanje funkcije cilja, a u stupcu *Name* tekst koji Excel kreira tako da tekstu koji je korisnik upisao u ćeliju lijevo od ciljne ćelije pridoda i tekst koji se nalazi u ćeliji iznad ciljne ćelije. Nadalje, u stupcu *Original Value* nalazi se početna vrijednost funkcije cilja (za početne vrijednosti varijabla odlučivanja), dok se u stupcu *Final Value* nalazi konačna, optimalna vrijednost funkcije cilja.

U ovom je primjeru početni iznos funkcije cilja jednak nuli, dok je konačni iznos jednak iznosu maksimalne dobiti (π_{max} = 17.000,00 €).

U drugom su dijelu, ***Adjustable Cells***, podatci o varijablama odlučivanja: u stupcu *Cell* apsolutne adrese ćelija u kojima su vrijednosti tih varijabla, u stupcu *Name* tekst koji Excel kreira tako da tekstu koji je korisnik upisao u ćeliju lijevo od ćelije u kojoj je neka od varijabla odlučivanja pridoda i tekst koji se nalazi u zaglavlju iznad ćelija s vrijednostima tih varijabla; u stupcu *Original Value* nalaze se početne vrijednosti varijabla odlučivanja, dok se u stupcu *Final Value* nalaze one vrijednosti tih varijabla za koje funkcija cilja poprima optimalnu vrijednost.

U ovom primjeru početne su vrijednosti varijabla odlučivanja jednake nuli, dok su optimalne vrijednosti $x = 600$ i $y = 400$.

Podatci o ograničenjima, ***Constraints***, prikazani su u trećem dijelu ovog izvještaja: u stupcu *Cell* apsolutne su adrese ćelija u kojima su upisane formule za izračun lijevih strana ograničenja; u stupcu *Name* tekst koji Excel kreira tako da tekstu koji je korisnik upisao u ćeliju lijevo od ćelije u kojoj je formula za izračun lijeve strane nekog od ograničenja pridoda i tekst koji se nalazi u zaglavlju iznad ćelija s tim formulama; u stupcu *Value* su iznosi lijevih strana pojedinih ograničenja izračunani za vrijednosti varijabla odlučivanja za koje funkcija cilja postiže optimalnu vrijednost; u stupcu *Formula* nalaze se formule koje opisuju pojedina ograničenja.

Status pojedinog ograničenja opisuje se u stupcu *Status*: *Binding* (vezana) za ona ograničenja kod kojih su resursi iskorišteni do kraja (lijeva strana ograničenja jednaka je desnoj), odnosno *Not Binding* (nevezana) za ograničenja kod kojih resursi nisu do kraja iskorišteni.

Sukladno statusu pojedinog ograničenja, u stupcu *Slack* Excel će upisati 0 za sva vezana ograničenja (koja su iskorištena do kraja - imaju status *Binding*), odnosno broj koji je različit od nule i koji prikazuje kolika je još rezerva preostala kod pojedinog nevezanog ograničenja, koje ima status *Not Binding*.

Kada je funkcija cilja funkcija dviju varijabla, status *Binding* (vezana) imat će ona ograničenja čiji se granični pravci sijeku u točki (vrhu izvedivog područja) u kojoj funkcija cilja ima optimum.

U prikazanom su primjeru vezana dva ograničenja (prvo i drugo): radni sati za sklapanje uređaja te radni sati za kontrolu i pakiranje. Stoga je u stupcu *Status* uz ova ograničenja upisano *Binding*, a u stupcu *Slack* upisana vrijednost 0. S druge su strane neiskorištenima ostali propeleri koji se ugrađuju u specijalne ventilatore. Stupac *Cell Value* pokazuje koliko ih je iskorišteno (400), dok stupac *Slack* pokazuje koliko ih je ostalo neiskorišteno (200). Ta činjenica može poslužiti službi nabave da razmisli o stvarnoj potrebnoj količini dnevne narudžbe propelera.

Izvještaj ***Sensitivity Report*** (Osjetljivost), prikazan na slici 4.30, sastoji se iz dva dijela.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		**Microsoft Excel 12.0 Sensitivity Report**						
2		**Worksheet: [Primjer_5_07.xlsx]SOLVER_predložak**						
3		**Report Created: 15.10.2014. 12:05:17**						
4								
5								
6		Adjustable Cells						
7				Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8		Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9		$B$5	x	600,0	0,0	15	5	5
10		$C$5	y	400,0	0,0	20	10	5
11								
12		Constraints						
13				Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
14		Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
15		$D$10	sklapanje LSO	15000,0	0,7	15000	2500	3000
16		$D$11	kontrola i pakiranje LSO	12600,0	0,6	12600	1800	1800
17		$D$12	broj propelera LSO	400,0	0,0	600	1E+30	200
18		$D$13	zahtjev kupca LSO	1000,0	0,0	0	1000	1E+30

Slika 4.30. *Primjer 4.7: Izvještaj* Sensitivity Report.

Prvi dio podataka, ***Adjustable Cells***, odnosi se na varijable odlučivanja: u stupcu *Cell* apsolutne su adrese ćelija u kojima su vrijednosti tih varijabla, u stupcu *Name* tekst koji Excel kreira tako da tekstu koji je korisnik upisao u ćeliju lijevo od ćelije u kojoj je neka od varijabla odlučivanja pridoda i tekst koji se nalazi u zaglavlju iznad ćelija s vrijednostima tih varijabla; u stupcu *Final Value* nalaze se one vrijednosti tih varijabla za koje funkcija cilja poprima optimalnu vrijednost.

U stupcu *Reduced Cost* (oportunitetni trošak) bit će vrijednost nula kod svih varijabla odlučivanja kojima je konačna vrijednost (vrijednost u točki u kojoj funkcija cilja postiže optimum) različita od nule. U slučaju da je vrijednost neke od varijabla odlučivanja jednaka nuli u točki optimuma, iznos u stupcu *Reduced Cost* bit će različit od nule, a pokazuje za koliko će se promijeniti (smanjiti) funkcija cilja ako korisnik iz nekog razloga inzistira da ta varijabla odlučivanja ipak bude veća od 0, i to za svaku jedinicu te varijable.

Zadani koeficijenti funkcije cilja (konstante koje u funkciji cilja množe pojedinu varijablu odlučivanja) prikazani su u stupcu *Objective Coefficient*.

U stupcu *Allowable Increase* dano je najveće moguće povećanje tih koeficijenata, a koje neće dovesti do promjene baričnog rješenja problema. Prikazano povećanje nekog od koeficijenata podrazumijeva da se oni drugi koeficijenti pri tom ne mijenjaju. U stupcu *Allowable Decrease* dano je najveće moguće smanjenje koeficijenata funkcije, a koje neće dovesti do promjene baričnog rješenja problema. Prikazano smanjenje nekog od koeficijenata podrazumijeva da se oni drugi koeficijenti pri tom ne mijenjaju.

Zadržavanje baričnog rješenja ne znači da se neće promijeniti ukupna dobit (optimalna vrijednost funkcije cilja).

U prikazanom se primjeru dobit po klimatizacijskom uređaju može mijenjati u granicama od 10 € po komadu (=15-5) do 20 € po komadu (=15+5) a da se ne promijeni bazično rješenje problema, ako je pri tom dobit po pojedinom specijalnom ventilatoru 20 €. Isto tako, dobit po specijalnom ventilatoru može se mijenjati u granicama od 15 € po komadu (=20-5) do 30 € po komadu (=20+10) a da se ne promijeni bazično rješenje problema, ako je pri tom dobit po pojedinom klimatizacijskom uređaju 15 €.

Ovo se, kao što je to ranije dano, može interpretirati i grafički (kada je riječ o problemu s dvije varijable odlučivanja: LP-grafički pristup). Naime, pravac funkcije cilja (dobiti) može se zakretati u smjeru kazaljke na satu sve dok se ne poklopi s graničnim pravcem *Gp1* a da se ne naruši bazično rješenje (smanjivanjem koeficijenta uz x ili povećavanjem koeficijenta uz y u funkciji cilja). S druge strane, zakretanje pravca u smjeru kazaljke na satu izazvat će povećanje koeficijenta koji u funkciji cilja množi varijablu x ili pak smanjenje koeficijenta koji u funkciji cilja množi varijablu y.

Isto tako, pravac funkcije cilja (dobiti) može se zakretati u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu sve dok se ne poklopi s graničnim pravcem *Gp2* a da se ne naruši bazično rješenje. Zakretanje pravca u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu izazvat će smanjenje koeficijenta koji u funkciji cilja množi varijablu x ili pak smanjenje koeficijenta koji u funkciji cilja množi varijablu y.

Oba su slučaja prikazana na slici 4.31.

U razmatranom slučaju koeficijenti smjera funkcije cilja te graničnih pravaca *gp1* i *gp2* (negativni omjer konstante koja množi varijablu x i one koja množi y) jesu:

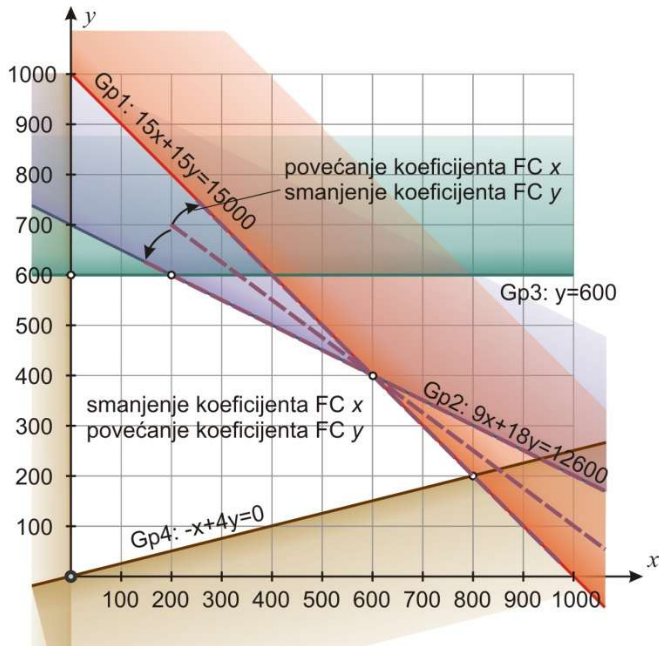
$$k_C = -\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}, \qquad k_1 = -\frac{15}{15} = -1, \qquad k_2 = -\frac{9}{18} = -\frac{1}{2}.$$

U slučaju koeficijenta funkcije cilja uz varijablu x (mijenja se dobit po klimatizacijskom uređaju), u ovom primjeru to znači:

$$-1 \leq -\frac{A}{20} \leq -\frac{1}{2}$$

ili nakon množenja s –20:

$$20 \geq A \geq 10 .$$



Slika 4.31. *Primjer 4.7: Grafička analiza promjene koeficijenata funkcije cilja.*

U slučaju koeficijenta funkcije cilja uz varijablu *y* (mijenja se dobit po specijalnom ventilatoru), u ovom primjeru to znači:

$$-1 \leq -\frac{15}{B} \leq -\frac{1}{2},$$

ili, ako se to prikaže uz pomoć recipročnih vrijednosti (kada se mijenja smjer nejednakosti):

$$-1 \geq -\frac{B}{15} \geq -2,$$

što nakon množenja s –15 daje:

$$15 \leq B \leq 30 ,$$

čime su potvrđene vrijednosti dobivene u izvještaju *Sensitivity Report*.

Podatci o ograničenjima nalaze se u drugom dijelu ovog izvještaja – ***Constraints***. U stupcu *Cell* apsolutne su adrese ćelija u kojima su upisane formule za izračun lijevih strana ograničenja; u stupcu *Name* tekst koji Excel kreira tako da tekstu koji je korisnik upisao u ćeliju lijevo od ćelije u kojoj je formula za izračun lijeve strane nekog od ograničenja pridoda i tekst koji se nalazi u zaglavlju iznad ćelija s tim formulama; u stupcu *Final Value* su iznosi lijevih strana pojedinih ograničenja izračunani za vrijednosti varijabla odlučivanja za koje funkcija cilja postiže optimalnu vrijednost.

U stupcu *Shadow Price* (cijena u sjeni, marginalni trošak) dani su iznosi koji pokazuju za koliko će se povećati funkcija cilja kada se vrijednost ograničenja jedne vrste resursa (desna strana odgovarajuće nejednadžbe) poveća za jednu jedinicu tog resursa.

Iznos različit od nule u stupcu *Shadow Price* pojavit će se samo kod onih ograničenja gdje su resursi iskorišteni do kraja, dakle kod vezanih ograničenja (kada je vrijednost u stupcu *Final Value* jednaka onoj u stupcu *Constraint R. H. Side*).

Tako je u razmatranom primjeru marginalni trošak (cijena u sjeni) uz resurs vremena za sklapanje uređaja 0,67 €. To nadalje znači da će proizvođač za svako povećanje raspoloživih minuta za sklapanje uređaja za 1 ostvariti dodatnu dobit od 0,67 €. S druge pak strane, povećanjem broja raspoloživih minuta za kontrolu kvalitete i pakiranje za 1 ostvario bi dodatnu dobit od 0,56 €.

Može se zaključiti kako se proizvođaču više isplati ulagati u povećanje raspoloživog vremena za sklapanje uređaja.

Izvorne vrijednosti desnih strana pojedinih ograničenja prikazane su u stupcu *Constraint R. H. Side*.

U stupcu *Allowable Increase* dano je najveće moguće povećanje vrijednosti desne strane pojedinog ograničenja, a koje neće dovesti do narušavanja osnovnog svojstva vezanih ograničenja (vezana ograničenja ostaju vezana).

Prikazano povećanje neke od desnih strana ograničenja podrazumijeva da se desne strane svih ostalih ograničenja pri tom ne mijenjaju.

U stupcu *Allowable Decrease* dano je najveće moguće smanjenje vrijednosti desne strane pojedinog ograničenja, a koje neće dovesti do narušavanja osnovnog svojstva vezanih ograničenja.

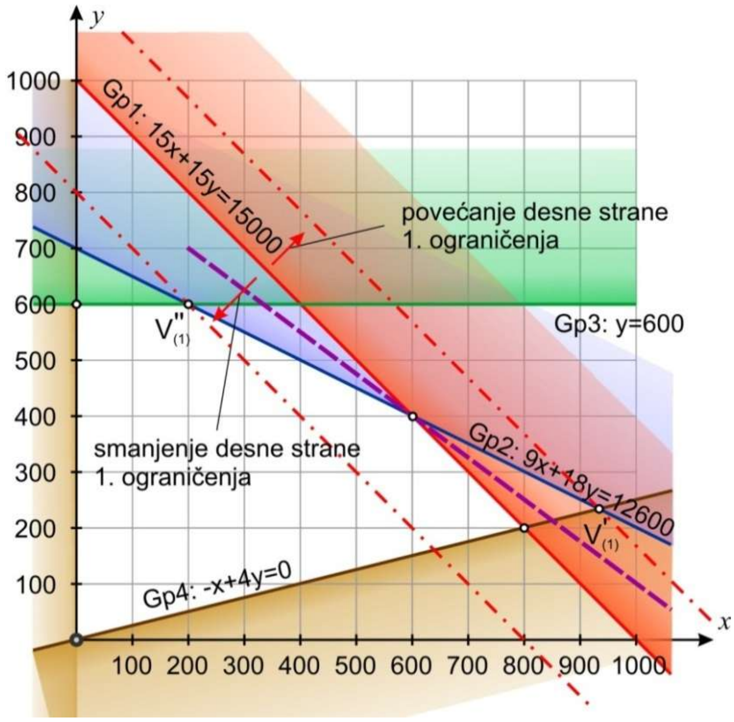
Prikazano smanjenje neke od desnih strana ograničenja podrazumijeva da se desne strane svih ostalih ograničenja pri tom ne mijenjaju.

Povećanje ili smanjenje vrijednosti desne strane nekog ograničenja znači pomicanje graničnog pravca tog ograničenja paralelno samome sebi. To paralelno pomicanje može ići, u jednu ili drugu stranu, sve dotle dok ne dođe do narušavanja osnovnog svojstva vezanih ograničenja.

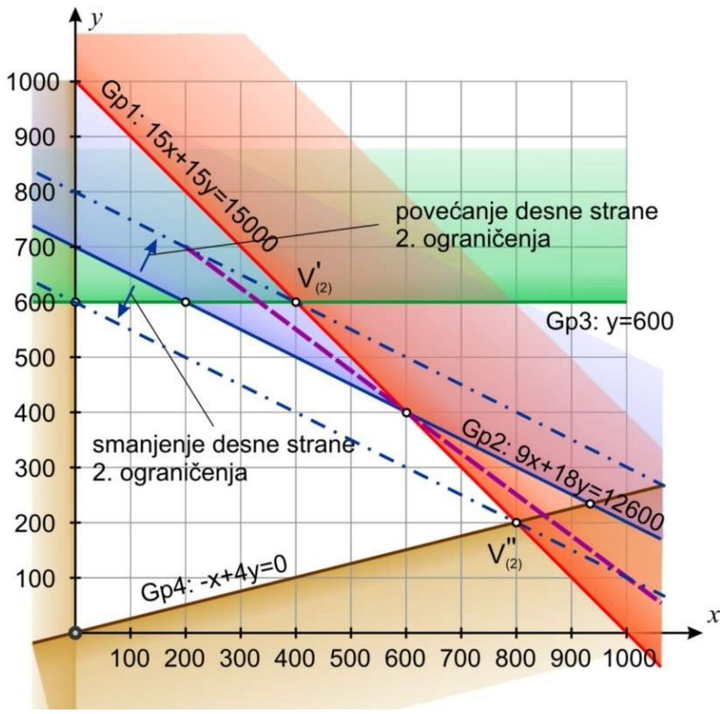
Tako se u danom primjeru broj raspoloživih minuta za sklapanje može mijenjati u rasponu od najmanje 12000 (=15000-3000) do najviše 17500 (=15000+2500), a broj raspoloživih minuta za kontrolu i pakiranje u rasponu od 10800 (=12600-1800) do 14400 (=12600+1800).

S druge strane, broj raspoloživih propelera može se povećati po volji (do ∞), a smanjiti se može do broja 400 (=600-200) jer bi se daljnjim smanjivanjem narušilo osnovno svojstvo vezanih ograničenja.

To se može prikazati i na grafičkom rješenju primjera: na slici 4.32 za raspoloživo vrijeme za sklapanje (1. ograničenje), a na slici 4.33 za raspoloživo vrijeme za kontrolu i pakiranje (2. ograničenje).



Slika 4.32. *Primjer 4.7: Grafička analiza promjene desne strane 1. ograničenja.*



Slika 4.33. *Primjer 4.7: Grafička analiza promjene desne strane 2. ograničenja.*

Dakle, desna strana 1. ograničenja može se povećavati dok pravac tog ograničenja, pomičući se paralelno samom sebi, ne prođe točkom $V'_{(1)}(933,3;\,233,3)$, kada je

$$b_{(1)}^{'} = 15 \cdot 933,3 + 15 \cdot 233,3 = 17500 \,,$$

odnosno može se smanjivati dok taj pravac ne prođe točkom $V_{(1)}^{''}(200;\, 600)$, kada je

$$b_{(1)}^{''} = 15 \cdot 200 + 15 \cdot 600 = 12000 \,.$$

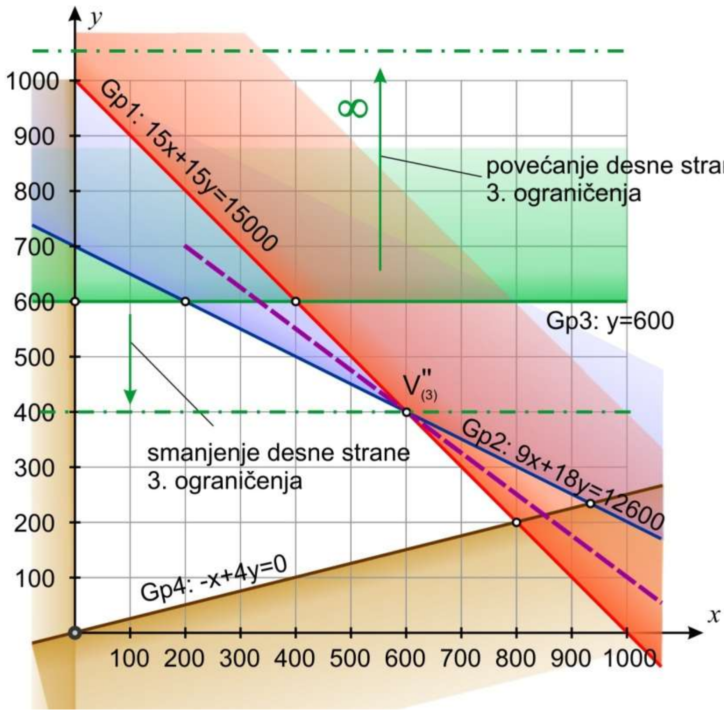
Desna strana 2. ograničenja može se povećavati dok pravac tog ograničenja, pomičući se paralelno samom sebi, ne prođe točkom $V_{(2)}^{'}(400;\, 600)$, kada je

$$b_{(2)}^{'} = 9 \cdot 400 + 18 \cdot 600 = 14400 \,,$$

odnosno može se smanjivati dok taj pravac ne prođe točkom $V_{(2)}^{''}(800;\, 200)$, kada je

$$b_{(2)}^{''} = 9 \cdot 800 + 18 \cdot 200 = 10800 \,.$$

Broj raspoloživih propelera može se smanjiti do točke optimuma, tj. do broja 400, a povećati se može po volji (do ∞). Naime, taj resurs ni ovako nije do kraja iskorišten pa svako daljnje povećanje samo stvara veću dnevnu količinu neiskorištenih ventilatora (slika 4.34).



Slika 4.34. *Primjer 4.7: Grafička analiza promjene desne strane 3. ograničenja.*

Na ovaj je način pokazano i slaganje rezultata vezanih uz desne strane ograničenja, a slaganje bi se dobilo kada bi se razmatrale i cijene u sjeni tih ograničenja.

Izvještaj ***Limits Report*** (Granice), prikazan na slici 4.35, sastoji se iz dva dijela.

U prvom su dijelu prikazani podatci o funkciji cilja, a u drugom o varijablama odlučivanja. Ono što je u ovom izvještaju novo jesu vrijednosti u stupcima *Lower Limit* i *Target Result* te stupcima *Upper Limit* i *Target Result*.

Riječ je o graničnim vrijednostima: donjoj (*Lower*) i gornjoj (*Upper*) pojedine varijable odlučivanja unutar izvedivog područja, te odgovarajućim iznosima funkcije cilja u tim slučajevima. Ostale varijable odlučivanja imaju pri tom vrijednosti koje odgovaraju točki optimuma.

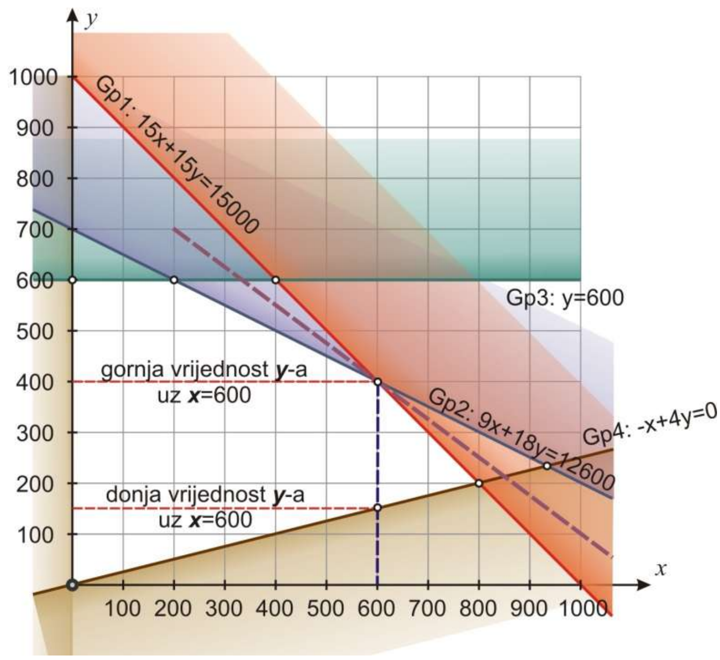
Microsoft Excel 12.0 Limits Report
Worksheet: [Primjer_5_07.xlsx]Limits Report 1
Report Created: 15.10.2014. 12:05:18

Cell	Target Name	Value
$D$5	Dobit	17000,00

Cell	Adjustable Name	Value	Lower Limit	Target Result	Upper Limit	Target Result
$B$5	x	600,0	0,0	8000,0	600,0	17000,0
$C$5	y	400,0	150,0	12000,0	400,0	17000,0

Slika 4.35. *Primjer 4.7: Izvještaj* Limits Report.

To se može pojasniti na grafičkom rješenju razmatranog primjera: na slici 4.36 za granične vrijednosti varijable *x*, a na slici 4.37 za granične vrijednosti varijable *y*.



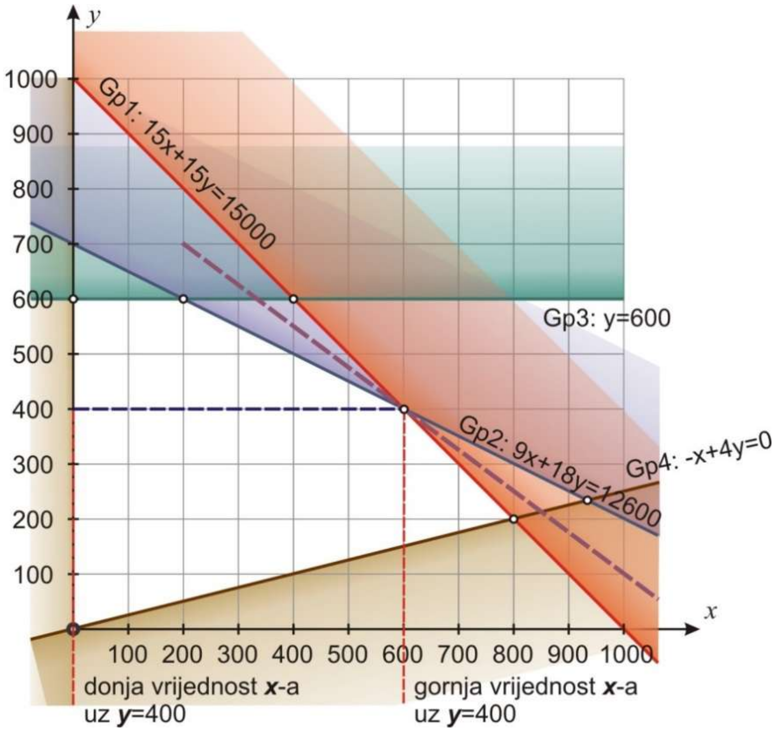
Slika 4.36. *Primjer 4.7: Grafička analiza graničnih vrijednosti varijable x.*

Dakle, donja vrijednost varijable *x* unutar izvedivog područja, i uz *y*=400, jest 0, a funkcija cilja u tom slučaju poprima iznos $D = 15 \cdot 0 + 20 \cdot 400 = 8000$.

Gornja vrijednost varijable x unutar izvedivog područja, i uz y=400, jest 600, a to je ujedno i točka optimuma u kojoj funkcija cilja iznosi $\pi = \pi_{max} = 17000$.

Donja vrijednost varijable y unutar izvedivog područja, i uz x=600, jest 150, a funkcija cilja u tom slučaju poprima iznos $\pi = 15 \cdot 600 + 20 \cdot 150 = 15000$.

Gornja vrijednost varijable y unutar izvedivog područja, i uz x=600, jest 400, a to je ujedno i točka optimuma u kojoj funkcija cilja iznosi $\pi = \pi_{max} = 17000$.



Slika 4.37. *Primjer 4.7: Grafička analiza graničnih vrijednosti varijable x.*

Primjer 4.8.

Poduzeće proizvodi četiri proizvoda: PA, PB, PC i PD. U završnom su dijelu procesa izrade operacije sklapanja, poliranja i pakiranja. Vrijeme potrebno za izvođenje svake od navedenih operacija, u minutama, prikazano je u tablici 4.1. U istoj je tablici prikazana i dobit po komadu svakog od proizvoda.

Tablica 4.1. *Primjer 4.8: Utrošak vremena i dobit po komadu proizvoda.*

Proizvod	Sklapanje	Poliranje	Pakiranje	Dobit (€)
PA	2	3	2	1,50
PB	4	2	3	2,50
PC	3	3	2	3,00
PD	7	4	5	4,50

Poduzeće godišnje raspolaže s 100000 minuta za sklapanje, 50000 minuta za poliranje te 60000 minuta za pakiranje.

Odrediti plan godišnje proizvodnje pojedinih proizvoda za koji će poduzeće ostvariti najveću dobit. Detaljno komentirati izvještaje dobivene uz pomoć Excelova alata Solver.

Rješenje:

Varijable odlučivanja su:

x_1 – broj komada proizvoda PA

x_2 – broj komada proizvoda PB

x_3 – broj komada proizvoda PC

x_4 – broj komada proizvoda PD

i ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Funkcija cilja, koju treba maksimizirati, jest:

$$F_C = \pi = 1,5 \cdot x_1 + 2,5 \cdot x_2 + 3,0 \cdot x_3 + 4,5 \cdot x_4 ,$$

uz sljedeća ograničenja:

- raspoloživo vrijeme za sklapanje (godišnje, u minutama):

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 \leq 100000 \qquad (1)$$

- raspoloživo vrijeme za poliranje (godišnje, u minutama):

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 50000 \qquad (2)$$

- raspoloživo vrijeme za pakiranje (godišnje, u minutama):

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 \leq 60000 \ . \qquad (3)$$

Na slici 4.38 prikazano je rješenje zadanog problema korištenjem Solvera.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Dobit			
5		0,0	16000,0	6000,0	0,0	**58000,00**			
6	Koeficijenti Fc	1,5	2,5	3,0	4,5				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	sklapanje	2,0	4,0	3,0	7,0	82000,0	<=	100000,0	1
11	poliranje	3,0	2,0	3,0	4,0	50000,0	<=	50000,0	2
12	pakiranje	2,0	3,0	2,0	5,0	60000,0	<=	60000,0	3

Slika 4.38. *Primjer 4.8: Rješenje uz pomoć Solvera.*

Uz zadane koeficijente funkcije cilja, početne vrijednosti varijabla odlučivanja (0), slobodne koeficijente desnih strana ograničenja te koeficijente lijevih strana ograničenja, trebalo je:

- u ćeliju F5 upisati formulu za funkciju cilja:

=SUMPRODUCT(B5:E5;B6:E6),

- a u ćelije F10 do F12 formule za lijevu stranu 1., 2. i 3. ograničenja:

=SUMPRODUCT(B5:E5;B10:E10)
=SUMPRODUCT(B5:E5;B11:E11)
=SUMPRODUCT(B5:E5;B12:E12)

pa na ranije opisani način prilagoditi sve parametre i pokrenuti Solver.

Iz prikazanih je rezultata vidljivo da će poduzeće ostvariti najveću dobit na godišnjoj razini, u iznosu od 58.000,00 €, ako se odluči na proizvodnju 16000 komada proizvoda PB i 6000 komada proizvoda PC. Proizvodi PA i PD, sukladno tom rješenju, uopće se neće proizvoditi.

Slijedi analiza izvještaja koje nudi Excelov Solver.

a) Izvještaj ***Answer Report***

Ovaj je izvještaj prikazan na slici 4.39.

14	Objective Cell (Max)					
15	Cell	Name	Original Value	Final Value		
16	$F$5	Dobit	0,00	58000,00		
17						
18						
19	Variable Cells					
20	Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer	
21	$B$5	x1	0,0	0,0	Contin	
22	$C$5	x2	0,0	16000,0	Contin	
23	$D$5	x3	0,0	6000,0	Contin	
24	$E$5	x4	0,0	0,0	Contin	
25						
26						
27	Constraints					
28	Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
29	$F$10	sklapanje LSO	82000,0	$F$10<=$H$10	Not Binding	18000
30	$F$11	poliranje LSO	50000,0	$F$11<=$H$11	Binding	0
31	$F$12	pakiranje LSO	60000,0	$F$12<=$H$12	Binding	0

Slika 4.39. *Primjer 4.8: Izvještaj* Answer Report.

U prva dva dijela ovog izvještaja su početne i konačne (optimalne) vrijednosti funkcije cilja, odnosno varijabla odlučivanja.

Treći dio pokazuje da samo prvo ograničenje (vrijeme za poliranje proizvoda) nije iskorišteno do kraja, tj. nije vezano (*Not Binding*), te da je preostalo 18000 minuta. Ovaj neiskorišteni resurs možda bi se mogao preraspodijeliti te time osigurati veću količinu finalnih proizvoda, a time i veću dobit.

Ograničenja vezana uz sklapanje i pakiranje proizvoda su vezana (*Binding*).

b) Izvještaj ***Sensitivity Report***

Ovaj je izvještaj prikazan na slici 4.40.

U prvom dijelu izvještaja su podatci o varijablama odlučivanja. Tako se može pročitati da se u optimalnom planu proizvodnje proizvod PA (x_1) ne pojavljuje (broj planiranih proizvoda jednak je nuli).

Ako bi proizvođač ipak htio proizvesti poneki komad proizvoda PA, to bi dovelo do smanjenja dobiti za 1,5 € po svakom proizvedenom komadu (*Reduced Cost*). S druge strane, povećanje dobiti po komadu proizvoda PA od 0,0 € do 1,5 € ne bi utjecalo na bazično rješenje problema, dok bilo kakvo smanjenje dobiti neće utjecati na to rješenje s obzirom na to da se u optimalnom slučaju taj proizvod niti ne proizvodi. Bazično bi se rješenje promijenilo tek u slučaju povećanja dobiti za više od 1,5 € po komadu, odnosno kada bi dobit po komadu bila veća od 3,0 €.

Microsoft Excel 15.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Primjer_4_08.xlsx]Primjer_4_08
Report Created: 22.12.2015. 14:36:02

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	x1	0	-1,5	1,5	1,5	1E+30
$C$5	x2	16000	0	2,5	2	0,14285714
$D$5	x3	6000	0	3	0,75	0,5
$E$5	x4	0	-0,2	4,5	0,2	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$10	sklapanje LSO	82000	0	100000	1E+30	18000
$F$11	poliranje LSO	50000	0,8	50000	40000	10000
$F$12	pakiranje LSO	60000	0,3	60000	15000	26666,6667

Slika 4.40. *Primjer 4.8: Izvještaj* Sensitivity Report.

Povećanje dobiti po jednom komadu proizvoda PB (x_2) za više od 2,0 €, odnosno smanjenje dobiti po komadu tog proizvoda za više od 0,143 € promijenilo bi bazično rješenje našeg problema. Dobit po jednom komadu proizvoda PB može se dakle mijenjati u granicama od 2,357 € do 4,50 € a da se ne promijeni bazično rješenje.

Povećanje dobiti po jednom komadu proizvoda PC (x_3) za više od 0,75 €, odnosno smanjenje dobiti po komadu tog proizvoda za više od 0,50 € promijenilo bi bazično rješenje našeg problema. Dobit po jednom komadu tog proizvoda može se dakle mijenjati u granicama od 2,50 € do 3,75 € a da se ne promijeni bazično rješenje. U optimalnom planu proizvodnje broj komada proizvoda PD (x_4) jednak je nuli.

Ako bi proizvođač ipak htio proizvesti poneki komad proizvoda PD, to bi dovelo do smanjenja dobiti za 0,20 € po svakom proizvedenom komadu (*Reduced Cost*). S druge strane, povećanje dobiti po komadu proizvoda PD od 0,0 € do 0,2 € ne bi utjecalo na bazično rješenje problema, dok bilo kakvo smanjenje dobiti neće utjecati na to rješenje. Bazično bi se rješenje promijenilo tek u slučaju povećanja dobiti za više od 0,2 € po komadu, odnosno kada bi dobit po komadu bila veća od 4,70 €.

Drugi dio izvještaja sadrži podatke o ograničenjima (resursima). Tako bilo koliko povećanje vremena raspoloživoga za poliranje neće promijeniti osnovno svojstvo vezanih ograničenja. To je logično jer ni zadano raspoloživo vrijeme nije do kraja iskorišteno. S druge strane, vrijeme raspoloživo za poliranje može se smanjiti za najviše 18000 minuta.

Vrijeme raspoloživo za sklapanje u cijelosti je iskorišteno – to ograničenje je vezano. To se vrijeme može kretati u granicama od najmanje 40000 minuta (smanjenje do 10000 min) do najviše 90000 minuta (povećanje do 40000 min) a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja. Isto tako, svako povećanje ovog resursa za 1 min dovest će do povećanja ukupne dobiti za 0,8 € (*Shadow price*).

I vrijeme raspoloživo za pakiranje u cijelosti je iskorišteno (vezano ograničenje). To se vrijeme može kretati u granicama od najmanje 33333 minute (smanjenje do najviše 26667 min) do najviše 75000 minuta (povećanje do najviše 15000 min) a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja.

Nadalje, svako povećanje ovog resursa za 1 min dovest će do povećanja ukupne dobiti za 0,3 € (*Shadow price*).

Iz dobivenih iznosa cijena u sjeni može se zaključiti da se više isplati ulagati u povećanje raspoloživog vremena za sklapanje.

c) Izvještaj ***Limits Report***

Ovaj je izvještaj prikazan na slici 4.41.

Microsoft Excel 14.0 Limits Report
Worksheet: [Primjer_5_08.xlsx]SOLVER_predložak
Report Created: 15.10.2014. 15:24:09

Objective		
Cell	Name	Value
$F$5	Dobit	58000,00

Variable						
Cell	Name	Value	Lower Limit	Objective Result	Upper Limit	Objective Result
$B$5	x1	0,0	0,0	58000,0	0,0	58000,0
$C$5	x2	16000,0	0,0	18000,0	16000,0	58000,0
$D$5	x3	6000,0	0,0	40000,0	6000,0	58000,0
$E$5	x4	0,0	0,0	58000,0	0,0	58000,0

Slika 4.41. *Primjer 4.8: Izvještaj* Limits Report.

Budući da proizvodi PA i PD nisu u planu optimalne proizvodnje, vrijednost ovih varijabla odlučivanja i na donjoj i na gornjoj granici jednaka je 0.

Donja granična vrijednost varijable x_2 je 0, a gornja 16000 kom (uz optimalnu vrijednost varijable x_3=6000 kom), s tim da funkcija cilja na donjoj granici iznosi 18.000,00 €, a na gornjoj 58.000,00 € (max).

Donja granična vrijednost varijable x_3 je 0, a gornja 6000 kom (uz optimalnu vrijednost varijable x_2=16000 kom), s tim da funkcija cilja na donjoj granici iznosi 40.000,00 €, a na gornjoj 58.000,00 € (max).

Primjer 4.9.

Zadana je funkcija cilja jednog proizvodnog problema:

$$F_C = 25 \cdot x_1 + 33 \cdot x_2 + 19 \cdot x_3 + 40 \cdot x_4 + 20 \cdot x_5 \,.$$

uz sljedeća ograničenja:

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 \leq 600 \qquad (1)$$

$$x_2 + 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_5 \leq 50 \qquad (2)$$

$$7 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 \leq 650 \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0{,}15 \cdot \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \right) \qquad (4)$$

i nenegativne varijable odlučivanja ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$).

a) Odrediti maksimum funkcije F_C i odgovarajuće vrijednosti varijabla odlučivanja.
b) Koja su ograničenja vezana?
c) U kojim se granicama može mijenjati koeficijent uz varijablu x_1 u funkciji cilja a da se ne naruši bazično rješenje?
d) Za koliko bi se smanjila funkcija cilja ako se ipak odluči proizvesti 3 komada proizvoda P3?
e) Za koliko će se povećati funkcija cilja ako se desna strana drugog ograničenja poveća za 10?

Rješenje:

a) Smisao 4. ograničenja jest da količina proizvoda P1 mora biti barem 15 % od ukupno proizvedene količine. Ovo se ograničenje treba napisati u obliku pogodnom za unos u predložak Solvera (sve varijable na lijevoj strani):

$$0{,}85 \cdot x_1 - 0{,}15 \cdot x_2 - 0{,}15 \cdot x_3 - 0{,}15 \cdot x_4 - 0{,}15 \cdot x_5 \geq 0 \,. \qquad (4^*)$$

Na slici 4.42 prikazano je rješenje zadanog problema korištenjem Solvera.

Sa slike se može očitati da će funkcija cilja imati maksimum u iznosu od $F_{C\max} = 4.410{,}57$ za vrijednosti varijabla odlučivanja: $x_1 = 19{,}5;$ $x_2 = 0;$ $x_3 = 0;$ $x_4 = 85{,}6$ i $x_5 = 25$, odnosno ako proizvede 19,5 komada proizvoda P1, 85,6 komada proizvoda P4 i 25 proizvoda P5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3		Varijable odlučivanja					Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	x5	Dobit			
5		19,5	0,0	0,0	85,6	25,0	**4410,57**			
6	Koeficijenti Fc	25,0	33,0	19,0	40,0	20,0				
7										
8										
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO					LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	3,0	4,0	1,0	3,0	4,0	415,2	<=	600,0	1
11	resurs 2	0,0	1,0	2,0	0,0	2,0	50,0	<=	50,0	2
12	resurs 3	7,0	5,0	4,0	6,0	0,0	650,0	<=	650,0	3
13	resurs 4	0,85	-0,15	-0,15	-0,15	-0,15	0,0	>=	0,0	4

Slika 4.42. *Primjer 4.9: Rješenje uz pomoć Solvera.*

b) Iz izvještaja *Answer Report*, dijela *Constraints*, stupca *Status* (slika 4.43) može se vidjeti da su vezana ograničenja 2., 3. i 4.

28	Constraints					
29	**Cell**	**Name**	**Cell Value**	**Formula**	**Status**	**Slack**
30	$G$10	resurs 1 LSO	415,2	$G$10<=$I$10	Not Binding	184,756098
31	$G$11	resurs 2 LSO	50,0	$G$11<=$I$11	Binding	0
32	$G$12	resurs 3 LSO	650,0	$G$12<=$I$12	Binding	0
33	$G$13	resurs 4 LSO	0,0	$G$13>=$I$13	Binding	0,0

Slika 4.43. *Primjer 4.9: Dio izvještaja* Answer Report.

c) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.44), iz stupca *Allowable Increase* vidljivo je da se koeficijent uz x_4 u funkciji cilja može povećati za 98,57, a iz stupca *Allowable Decrease* da se može smanjiti za 11,95 a da se ne naruši bazično rješenje problema.

To znači da se taj koeficijent može mijenjati u granicama od 40-11,95=28,05 do 40+98,57=138,57.

6	Variable Cells						
7			**Final**	**Reduced**	**Objective**	**Allowable**	**Allowable**
8	**Cell**	**Name**	**Value**	**Cost**	**Coefficient**	**Increase**	**Decrease**
9	$B$5	x1	19,5121951	0	25	21,6666667	115
10	$C$5	x2	0	-9,27642276	33	9,27642276	1E+30
11	$D$5	x3	0	-25,5528455	19	25,5528455	1E+30
12	$E$5	x4	85,5691057	0	40	98,5714286	11,947644
13	$F$5	x5	25	0	20	1E+30	16,8292683
14							
15	Constraints						
16			**Final**	**Shadow**	**Constraint**	**Allowable**	**Allowable**
17	**Cell**	**Name**	**Value**	**Price**	**R.H. Side**	**Increase**	**Decrease**
18	$G$10	resurs 1 LSO	415,243902	0	600	1E+30	184,756098
19	$G$11	resurs 2 LSO	50	8,41463415	50	94,0993789	50
20	$G$12	resurs 3 LSO	650	6,13821138	650	378,75	619,117647
21	$G$13	resurs 4 LSO	0	-21,1382114	0	75,1785714	20

Slika 4.44. *Primjer 4.9: Dio izvještaja* SensitivityReport.

d) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.44), iz stupca *Reduced Cost* može se iščitati da će se, zbog proizvodnje jednog komada P3, funkcija cilja smanjiti za 25,55. To znači da će se, u slučaju proizvodnje 3 takva komada, funkcija cilja smanjiti za $25,55 \cdot 3 = 76,65$.

e) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Constraints* (slika 4.44), iz stupca *Shadow Price* vidljivo je da cijena u sjeni 2. ograničenja iznosi 8,41. To znači da će se, u slučaju povećanja desne strane 2. ograničenja za 10, funkcija cilja povećati za $8,41 \cdot 10 = 84,1$.

Primjer 4.10.

Zadana je funkcija cilja jednog dijetnog problema:

$$F_C = 11 \cdot x + 50 \cdot y + 6 \cdot z$$

uz sljedeća ograničenja:

$$4 \cdot x + 6 \cdot y + 3 \cdot z \geq 50 \qquad (1)$$

$$5 \cdot x + 4 \cdot y + 7 \cdot z \geq 65 \qquad (2)$$

$$x + z \leq y \qquad (3)$$

$$7 \cdot x + 5 \cdot y + 8 \cdot z \geq 80 \qquad (4)$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y + z \geq 25 \qquad (5)$$

i nenegativne varijable odlučivanja ($x, y, z \geq 0$).

a) Odrediti minimum funkcije F_C i odgovarajuće vrijednosti varijabla odlučivanja.
b) Koja ograničenja nisu vezana?
c) Koja je najveća vrijednost koju može poprimiti koeficijent uz varijablu *z* u funkciji cilja a da se ne naruši bazično rješenje problema?
d) U kojim se granicama može mijenjati desna strana petog ograničenja? Kolika je cijena u sjeni tog ograničenja?

Rješenje:

a) Smisao 3. ograničenja jest da količina namirnice 2 mora biti barem jednaka zbroju količina namirnica 1 i 3.

To se ograničenje treba napisati u obliku pogodnom za unos u predložak Solvera (sve varijable na lijevoj strani):

$$x - y + z \leq 0. \qquad (3^*)$$

Na slici 4.45 prikazano je rješenja zadanog problema korištenjem Solvera.

Sa slike slijedi da će funkcija cilja najmanju vrijednost u iznosu od $F_{C\min} = 402,4$ postići za vrijednosti varijabla odlučivanja: $x = 4,7;\ y = 6,8;$ i $z = 2,1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x	y	z	Trošak			
5		4,7	6,8	2,1	**402,4**			
6	Koeficijenti Fc	11,0	50,0	6,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	nutritijent 1	4,0	6,0	3,0	65,6	>=	50,0	1
11	nutritijent 2	5,0	4,0	7,0	65,0	>=	65,0	2
12	nutritijent 3	1,0	-1,0	1,0	0,0	<=	0,0	3
13	nutritijent 4	7,0	5,0	8,0	83,2	>=	80,0	4
14	nutritijent 5	2,0	2,0	1,0	25,0	>=	25,0	5

Slika 4.45. *Primjer 4.10: Rješenje uz pomoć Solvera.*

b) Iz izvještaja *Answer Report*, dijela *Constraints*, stupca *Status* (slika 4.46) može se vidjeti da 1. i 4. ograničenje nisu vezani.

26	Constraints					
27	Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
28	$E$10	nutritijent 1 LSO	65,6	$E$10>=$G$10	Not Binding	15,6
29	$E$11	nutritijent 2 LSO	65,0	$E$11>=$G$11	Binding	0,0
30	$E$12	nutritijent 3 LSO	0,0	$E$12<=$G$12	Binding	0
31	$E$13	nutritijent 4 LSO	83,2	$E$13>=$G$13	Not Binding	3,2
32	$E$14	nutritijent 5 LSO	25,0	$E$14>=$G$14	Binding	0,0

Slika 4.46. *Primjer 4.10: Dio izvještaja* Answer Report.

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	x	4,70588235	0	11	13,6666667	15,1818182
10	$C$5	y	6,76470588	0	50	1E+30	39,1111111
11	$D$5	z	2,05882353	0	6	18,5555556	10,25
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
16	$E$10	nutritijent 1 LSO	65,5882353	0	50	15,5882353	1E+30
17	$E$11	nutritijent 2 LSO	65	2,41176471	65	26,6666667	3,4375
18	$E$12	nutritijent 3 LSO	8,8818E-16	-20,7058824	0	12,7777778	6,11111111
19	$E$13	nutritijent 4 LSO	83,2352941	0	80	3,23529412	1E+30
20	$E$14	nutritijent 5 LSO	25	9,82352941	25	3,88888889	3,66666667

Slika 4.47. *Primjer 4.10: Dio izvještaja* SensitivityReport.

c) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.47), iz stupca *Allowable Increase* vidljivo je da se koeficijent uz varijablu z u funkciji cilja može povećati za 18,56 a da se ne naruši bazično rješenje problema. To znači da se taj koeficijent može povećati do 6+18,56=24,86.

d) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Constraints* (slika 4.47), iz stupca *Allowable Increase* može se iščitati da se desna strana 5. ograničenja može povećati za 3,89, a iz stupca *Allowable Decrease* da se može smanjiti najviše za 3,67. Zaključuje se da se koeficijent desne strane 5. ograničenja može mijenjati u granicama od 25-3,67=21,33 do 25+3,89=28,89 a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja. Iz iste tablice, iz stupca *Shadow Price*, vidljivo je da je cijena u sjeni tog ograničenja 9,82.

Primjer 4.11.

Cvjećarnica slaže tri tipa aranžmana (A1, A2 i A3) od tri vrste cvijeća: anemona, gerbera i irisa, uz dodatak zelenila.

U aranžman A1 ide 13 anemona, 16 gerbera i 2 irisa; u A2 ide 14 anemona, 12 gerbera i 1 iris, dok u A3 ide 19 anemona, 14 gerbera i 2 irisa.

Cvjećarnica raspolaže s 1100 anemona, 800 gerbera i 100 irisa.

Dobit po jednom aranžmanu A1 je 90 kuna, po aranžmanu A2 je 70 kuna, a po A3 100 kuna.

a) Odrediti koliko pojedinih tipova aranžmana cvjećarnica treba složiti da ostvari najveću dobit.
b) U kojim se granicama može mijenjati dobit po aranžmanu tipa A2 a da se ne promijeni bazično rješenje problema?
c) Za koliko bi se povećala dobit ako bi se raspoloživa količina irisa povećala za 5?
d) Koje vrste cvijeća ima viška i za koliko?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja su:

x_1 – broj aranžmana A1

x_2 – broj aranžmana A2

x_3 – broj aranžmana A3

i ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Funkcija cilja koju treba maksimizirati (dobit cvjećarnice) jest:

$$\pi = 90 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 ,$$

uz sljedeća ograničenja:

- raspoloživi broj anemona:

$$13 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 + 19 \cdot x_3 \le 1100 \qquad (1)$$

- raspoloživi broj gerbera:

$$16 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 \le 800 \qquad (2)$$

- raspoloživi broj irisa:

$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \le 100 . \qquad (3)$$

Na slici 4.48 prikazano je rješenje zadanog problema korištenjem Solvera.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	Dobit			
5		0,0	20,0	40,0	**5400,00**			
6	Koeficijenti Fc	90,0	70,0	100,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	anemone	13,0	14,0	19,0	1040,0	<=	1100,0	1
11	gerberi	16,0	12,0	14,0	800,0	<=	800,0	2
12	irisi	2,0	1,0	2,0	100,0	<=	100,0	3

Slika 4.48. *Primjer 4.11: Rješenje uz pomoć Solvera.*

Sa slike se može očitati da će cvjećarnica ostvariti najveću dobit u iznosu od $F_{C\max} = \pi_{\max} = 5.400,-$ kuna ako složi 20 aranžmana A2 (x_2) i 40 aranžmana A3 (x_2).

6	Adjustable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	x1	0,0	-18,0	90	18	1E+30
10	$C$5	x2	20,0	0,0	70	15,7142857	20
11	$D$5	x3	40,0	0,0	100	40	18,3333333
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
16	$E$10	anemone LSO	1040,0	0,0	1100	1E+30	60
17	$E$11	gerberi LSO	800,0	4,0	800	66,6666667	100
18	$E$12	irisi LSO	100,0	22,0	100	14,2857143	33,3333333

Slika 4.49. *Primjer 4.11: Dio izvještaja* SensitivityReport.

b) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.49), iz stupca *Allowable Increase* vidljivo je da se koeficijent uz varijablu y u funkciji cilja može povećati za 15,71 kunu, a iz stupca *Allowable Decrease* da se može smanjiti za 20 kuna a da se ne naruši bazično rješenje problema. To znači da se dobit po aranžmanu A2 može mijenjati u granicama od 50 do 85,71 kunu.

c) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Constraints* (slika 4.49), iz stupca *Shadow Price* može se iščitati da je cijena u sjeni trećeg ograničenja 22, što znači da bi se povećanjem broja raspoloživih irisa za 5 maksimalna dobit povećala za 110 kuna.

d) Iz izvještaja *Answer Report*, dijela *Constraints* (slika 4.50), iz stupca *Slack* vidljivo je da anemone nisu iskorištene, te da je ostalo 60 komada viška.

18	Constraints					
19	Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
20	$E$10	anemone LSO	1040,0	$E$10<=$G$10	Not Binding	60
21	$E$11	gerberi LSO	800,0	$E$11<=$G$11	Binding	0
22	$E$12	irisi LSO	100,0	$E$12<=$G$12	Binding	0

Slika 4.50. *Primjer 4.11: Dio izvještaja* Answer Report.

Primjer 4.12.

Prijevoznička tvrtka GlobalTrans kupuje nova vozila za što je izdvojila iznos od 1,5 milijuna eura. Razmatra tri tipa kamiona: tip K1 volumena 120 m^3 koji stoji 60.000,- €, tip K2 volumena 80 m^3 koji stoji 50.000,- € i tip K3 volumena 50 m^3 koji stoji 40.000,- €.

Očekivani godišnji bruto prihod po kamionu tipa K1 iznosi 100.000,- €, po kamionu tipa K2 80.000,- €, a po kamionu tipa K3 70.000,- €.

GlobalTrans želi osigurati ukupni kapacitet novih vozila od najmanje 2500 m^3, s tim da, zbog raspoloživog broja vozača, broj novih vozila ne može biti veći od 30. Također, zbog strukture vozača, broj kamiona tipa K1 ne smije biti veći od 10.

a) Odrediti koliko pojedinih tipova kamiona treba kupiti GlobalTrans da ostvari najveći godišnji bruto prihod.
b) U kojim se granicama može mijenjati godišnji bruto prihod po pojedinom tipu kamiona a da se ne poremeti bazično rješenje problema?
c) Za koliko bi se povećao godišnji prihod ako se broj vozača poveća za 1 (cijena u sjeni)? Može li se broj vozača uopće povećavati?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja su:

x_1 – broj kamiona tipa K1

x_2 – broj kamiona tipa K2

x_3 – broj kamiona tipa K3

i ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Funkcija cilja koju treba maksimizirati (bruto godišnji prihod) jest:

$$F_C = TR = 100000 \cdot x_1 + 80000 \cdot x_2 + 70000 \cdot x_3 ,$$

uz sljedeća ograničenja:

- raspoloživi kapital za kupnju vozila:

$$60000 \cdot x_1 + 50000 \cdot x_2 + 40000 \cdot x_3 \leq 1500000 \qquad (1)$$

- potrebni volumen vozila:

$$120 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 + 50 \cdot x_3 \geq 2500 \qquad (2)$$

- raspoloživi broj vozača:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \qquad (3)$$

- raspoloživa struktura vozača:

$$x_1 \leq 10 . \qquad (4)$$

Na slici 4.51 prikazano je rješenje zadanog problema korištenjem Solvera.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	God. prihod			
5		10,0	10,0	10,0	**2500000,0**			
6	Koeficijenti Fc	100000,0	80000,0	70000,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	raspoloživi kapital	60000,0	50000,0	40000,0	1500000,0	<=	1500000,0	1
11	volumen vozila	120,0	80,0	50,0	2500,0	>=	2500,0	2
12	broj vozača	1,0	1,0	1,0	30,0	<=	30,0	3
13	struktura vozača	1,0	0,0	0,0	10,0	<=	10,0	4

Slika 4.51. *Primjer 4.12: Rješenje uz pomoć Solvera.*

Sa slike se može očitati da će GlobalTrans ostvariti najveći godišnji bruto prihod u iznosu od $F_{C\,\max} = TR_{\max} = 2.500.000,-$ eura ako kupi po 10 vozila svakog tipa.

b) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.52), iz stupaca *Allowable Increase* i *Allowable Decrease* vidljivo je da se godišnji bruto prihod po kamionu tipa K1 može mjenjati u granicama od 90.000,- € do beskonačno, po kamionu tipa K2 godišnji se bruto prihod može mijenjati od 70.000,- € do 85.000,- €, dok se po kamionu tipa K3 taj prihod može mijenjati u granicama od 64.000,- € do 80.000,- €.

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	**Cell**	**Name**	**Value**	**Cost**	**Coefficient**	**Increase**	**Decrease**
9	$B$5	x1	10	0	100000	1E+30	10000
10	$C$5	x2	10	0	80000	5000	10000
11	$D$5	x3	10	0	70000	10000	6000
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	**Cell**	**Name**	**Value**	**Price**	**R.H. Side**	**Increase**	**Decrease**
16	$E$10	raspoloživi kapital LSO	2E+06	1	1500000	100000	0
17	$E$11	volumen vozila LSO	2500	0	2500	0	1E+30
18	$E$12	broj vozača LSO	30	30000	30	0	2
19	$E$13	struktura vozača LSO	10	10000	10	5	0

Slika 4.52. *Primjer 4.12: Dio izvještaja* SensitivityReport.

c) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Constraints* (slika 4.52), iz stupca *Shadow Price* može se iščitati da je cijena u sjeni trećeg ograničenja 30.000, što znači da bi se povećanjem broja vozača za 1 bruto prihod povećao za 30.000 €. Međutim, broj vozača se ne može povećavati a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja jer je maksimalno dopušteno povećanje tog resursa 0 (ista slika, dio *Constraints*, stupci *Allowable Increase* i *Allowable Decrease*).

Primjer 4.13.

Investitor ulaže iznos od 7 milijuna kuna u plemenite metale, državne obveznice, dionice i rizični fond.

Očekivani godišnji prinosi od ulaganja su: plemeniti metali 8,5 %, državne obveznice 5 %, dionice 6,5 %, te rizični fond 13 %.

Investitor svome brokeru postavlja sljedeće uvjete ulaganja: (1) u rizični fond ne smije uložiti više od 20 % raspoloživog iznosa; (2) u državne obveznice i dionice zajedno treba uložiti barem 30 % raspoloživog iznosa; (3) u državne obveznice mora uložiti najmanje onoliko novca koliko u sve ostale zajedno; (4) ukupan iznos uložen u državne obveznice i dionice ne smije za više od 20 % premašiti ukupan iznos novca uloženoga u plemenite metale i rizični fond.

a) Odrediti kako broker treba uložiti raspoloživi kapital tako da investitoru osigura najveći godišnji prinos.
b) Koja su ograničenja vezana?
c) Za koliko se može povećati prinos od ulaganja u dionice a da se ne naruši bazično rješenje problema?
d) Za koliko bi se smanjila funkcija cilja ako bi investitor ipak htio uložiti 200.000,- kuna u dionice?
e) Koliki je prosječni prinos na uloženi kapital?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja su:

x_1 – iznos novca uložen u plemenite metale

x_2 – iznos novca uložen u državne obveznice

x_3 – iznos novca uložen u dionice

x_4 – iznos novca uložen u rizični fond

i ne mogu poprimiti negativne vrijednosti.

Funkcija cilja koju treba maksimizirati (ukupni godišnji prinos) jest:

$$F_C = \pi = 0,085 \cdot x_1 + 0,05 \cdot x_2 + 0,065 \cdot x_3 + 0,13 \cdot x_4 ,$$

uz sljedeća ograničenja:

- raspoloživi kapital investitora:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7000000 \qquad (1)$$

- prvi zahtjev investitora:

$$x_4 \leq 1400000 \qquad (2)$$

- drugi zahtjev investitora:

$$x_2 + x_3 \geq 2100000 \qquad (3)$$

- treći zahtjev investitora:

$$x_2 \geq x_1 + x_3 + x_4 \qquad (4)$$

- četvrti zahtjev investitora:

$$x_2 + x_3 \leq 1,2 \cdot (x_1 + x_4) \,. \qquad (5)$$

Četvrto i peto ograničenje moraju se napisati u standardnom obliku, pa je:

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 0 \,, \qquad (4^*)$$

$$-1,2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 1,2 \cdot x_4 \leq 0 \,. \qquad (5^*)$$

Na slici 4.53 prikazano je rješenje zadanog problema korištenjem Solvera.

Sa slike se može očitati da će investitor ostvariti najveći godišnji prinos u iznosu od $F_{C\,\max} = \pi_{\max} = 535.500,-$ kuna ako uloži 2,1 milijun kuna u plemenite metale, 3,5 milijuna kuna u državne obveznice i 1,4 milijuna kuna u rizični fond.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Dobit			
5		2100000,0	3500000,0	0,0	1400000,0	**535500,00**			
6	Koeficijenti Fc	0,085	0,050	0,065	0,130				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	kapital investitora	1,0	1,0	1,0	1,0	7000000,0	<=	7000000,0	1
11	zahtjev 1	0,0	0,0	0,0	1,0	1400000,0	<=	1400000,0	2
12	zahtjev 2	0,0	1,0	1,0	0,0	3500000,0	>=	2100000,0	3
13	zahtjev 3	-1,0	1,0	-1,0	-1,0	0,0	>=	0,0	4
14	zahtjev 4	-1,2	1,0	1,0	-1,2	-700000,0	<=	0,0	5

Slika 4.53. *Primjer 4.13: Rješenje uz pomoć Solvera.*

b) Iz izvještaja *Answer Report*, dijela *Constraints* (slika 4.54), iz stupca *Status* vidljivo je da je vezano 1., 2. i 4. ograničenje.

27	Constraints					
28	**Cell**	**Name**	**Cell Value**	**Formula**	**Status**	**Slack**
29	$F$10	kapital investitora LSO	7000000,0	$F$10<=$H$10	Binding	0
30	$F$11	zahtjev 1 LSO	1400000,0	$F$11<=$H$11	Binding	0
31	$F$12	zahtjev 2 LSO	3500000,0	$F$12>=$H$12	Not Binding	1400000,0
32	$F$13	zahtjev 3 LSO	0,0	$F$13>=$H$13	Binding	0,0
33	$F$14	zahtjev 4 LSO	-700000,0	$F$14<=$H$14	Not Binding	700000

Slika 4.54. *Primjer 4.13: Dio izvještaja* Answer Report.

c) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.55), iz stupca *Allowable Increase* vidljivo je da se godišnji prinos na novac uložen u dionice može povećati za 0,02 (2 %) a da se ne naruši bazično rješenje problema.

d) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.55), iz stupca *Reduced Cost* može se očitati da je reducirani trošak -0,02, tj. ulaganje nekog iznosa u dionice smanjit će funkciju cilja za 2 % tog iznosa. U razmatranom slučaju to je 2 % od 200.000,- kuna, odnosno 40.000,- kuna.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$5	x1	2E+06	0	0,085	0,045	0,02
$C$5	x2	4E+06	0	0,05	0,035	0,135
$D$5	x3	0	-0,02	0,065	0,02	1E+30
$E$5	x4	1E+06	0	0,13	1E+30	0,045

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$F$10	kapital investitora LSO	7E+06	0,0675	7000000	1E+30	2800000
$F$11	zahtjev 1 LSO	1E+06	0,045	1400000	2100000	1400000
$F$12	zahtjev 2 LSO	4E+06	0	2100000	1400000	1E+30
$F$13	zahtjev 3 LSO	0	-0,0175	0	636363,636	2800000
$F$14	zahtjev 4 LSO	-700000	0	0	1E+30	700000

Slika 4.55. *Primjer 4.13: Dio izvještaja* SensitivityReport.

e) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Constraints* (slika 4.55), iz stupca *Shadow Price* može se iščitati da je cijena u sjeni prvog ograničenja 0,0675 (6,75 %), što znači da bi se povećanjem ukupnog kapitala za 1 kunu funkcija cilja povećala za 0,0675 kuna. Slijedi zaključak da je prosječni prinos na uloženi kapital 6,75 %.

Primjer 4.14.

Klinika "Zdrava prehrana" pripravlja dijetne obroke od triju vrsta namirnica: N1, N2 i N3.

Sadržaj jedinica proteina, ugljikohidrata, željeza i kalorija po jedinici ovih namirnica prikazan je u tablici 4.2.

Tablica 4.2. *Primjer 4.14: Sadržaj nutritijenata u jedinici pojedine namirnice.*

Namirnica	Proteini	Ugljikohidrati	Željezo	Kalorije
N1	10	2	3	80
N2	15	3	4	120
N3	5	3	6	100

Nutricionist zahtijeva da svaki obrok sadrži najmanje 35 jedinica proteina, 12 jedinica ugljikohidrata i 15 jedinica željeza.

a) Odrediti koliko je jedinica pojedine namirnice potrebno unijeti u obrok tako da količina kalorija bude minimalna. Kolika je ta količina?
b) Koja su ograničenja vezana?
c) U kojim se granicama može kretati količina kalorija u jedinici namirnice N3 a da se ne poremeti bazično rješenje problema?
d) Koja je najveća količina proteina koju nutricionist može zahtijevati u obroku a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja?

Rješenje:

a) Varijable odlučivanja (nenegativne veličine) su:

x_1 – broj jedinica namirnice N1

x_2 – broj jedinica namirnice N2

x_3 – broj jedinica namirnice N3.

Funkcija cilja, koju treba minimizirati, količina je kalorija u obroku:

$$F_C = Q_{cal} = 80 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 .$$

Ograničenja:

- potrebna količina proteina:

$$10 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \geq 35 \qquad (1)$$

- potrebna količina ugljikohidrata:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \geq 12 \qquad (2)$$

- potrebna količina željeza:

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \geq 15 . \qquad (3)$$

Na slici 4.56 prikazano je rješenje zadanog problema korištenjem Solvera.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	Kol. kalorija			
5		0,0	1,5	2,5	**430,0**			
6	Koeficijenti Fc	80,0	120,0	100,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	proteini	10,0	15,0	5,0	35,0	>=	35,0	1
11	ugljikohidrati	2,0	3,0	3,0	12,0	>=	12,0	2
12	željezo	3,0	4,0	6,0	21,0	>=	15,0	3

Slika 4.56. *Primjer 4.14: Rješenje uz pomoć Solvera.*

Zaključuje se kako će najmanju količinu kalorija ($F_{C\min} = Q_{cal,\min} = 430$) imati obrok dobiven miješanjem 1,5 jedinica namirnice N2 i 2,5 jedinica namirnice N3.

b) Iz izvještaja *Answer Report*, dijela *Constraints* (slika 4.57), iz stupca *Status* vidljivo je da je vezano 1. i 2. ograničenje.

26	Constraints					
27	**Cell**	**Name**	**Cell Value**	**Formula**	**Status**	**Slack**
28	$E$10	proteini LSO	35,0	$E$10>=$G$10	Binding	0,0
29	$E$11	ugljikohidrati LSO	12,0	$E$11>=$G$11	Binding	0,0
30	$E$12	željezo LSO	21,0	$E$12>=$G$12	Not Binding	6,0

Slika 4.57. *Primjer 4.14: Dio izvještaja* Answer Report.

c) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Variable Cells* (slika 4.58), iz stupaca *Allowable Increase* i *Allowable Decrease* vidljivo je da se broj kalorija u jedinici namirnice N3 može povećati za 20 ili pak smanjiti za 60 a da se ne naruši bazično rješenje problema. To znači da se broj kalorija u jedinici namirnice N3 može kretati u granicama od 40 do 120.

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	x1	0	0	80	1E+30	0
10	$C$5	x2	1,5	0	120	0	20
11	$D$5	x3	2,5	0	100	20	60
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
16	$E$10	proteini LSO	35	2	35	25	15
17	$E$11	ugljikohidrati LSO	12	30	12	9	2,57142857
18	$E$12	željezo LSO	21	0	15	6	1E+30

Slika 4.58. *Primjer 4.14: Dio izvještaja* Sensitivity Report.

d) Iz izvještaja *Sensitivity Report*, dijela *Constraints* (slika 4.58), iz stupca *Allowable Increase* može se očitati da je moguće povećanje zahtjeva za količinom proteina u obroku za 25. To znači da se osnovno svojstvo vezanih ograničenja neće narušiti ako zahtjev za količinom proteina u obroku ne prijeđe brojku 60.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 4_01:

Riješiti primjere 3.1 do 3.16 uz pomoć Excelova alata Solver i izvještaja koje on nudi.

Zadatak 4_02:

Zadana je funkcija cilja jednog problema linearnog programiranja

$$F_C = 15 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 18 \cdot x_3 + 25 \cdot x_4$$

uz ograničenja

$$12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 10 \cdot x_4 \geq 150 \qquad (1)$$

$$8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \geq 90 \qquad (2)$$

$$x_2 \leq \frac{1}{2}\left(x_3 + x_4\right) \qquad (3)$$

$$5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 \geq 75 \qquad (4)$$

$$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \geq 50 \qquad (5)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

a) Odrediti minimum funkcije cilja.

b) Koja su ograničenja vezana?
c) U kojim se granicama može mijenjati koeficijent uz varijablu x_4 u funkciji cilja a da se ne poremeti bazično rješenje problema?
d) Do kojeg se iznosa može povećati desna strana 4. ograničenja a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja?

Odgovor:

a) Minimum funkcije cilja je $F_{C\min} = 369{,}5$ za $x_1 = 4{,}3$, $x_2 = 2{,}8$, $x_3 = 8{,}2$ i $x_4 = 4$.
b) Vezano je 1., 2., 4. i 5. ograničenje.
c) Koeficijent uz varijablu x_4 može se mijenjati u granicama od 15,15 do 30,875.
d) Desna strana 4. ograničenja može se povećati do 115,5.

Zadatak 4_03:

Zadana je funkcija cilja jednog problema linearnog programiranja

$$F_C = 5 \cdot x + 4 \cdot y + 7 \cdot z$$

uz ograničenja

$$12 \cdot x + 6 \cdot y \geq 1200 \qquad (1)$$

$$20 \cdot y + 30 \cdot z \geq 1500 \qquad (2)$$

$$10 \cdot x + 10 \cdot z \geq 600 \qquad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

a) Odrediti minimum funkcije cilja.
b) Koje ograničenje nije vezano?
c) Koja je najmanja vrijednost koeficijenta uz varijablu x u funkciji cilja za koju se neće poremetiti bazično rješenje problema?
d) Za koliko će se smanjiti funkcija cilja ako se desna strana 2. ograničenja smanji za 1000?

Odgovor:

a) Minimum funkcije cilja je $F_{C\min} = 612{,}5$ za $x = 62{,}5$, $y = 75$ i $z = 0$.
b) Nije vezano 3. ograničenje.
c) Najmanja vrijednost koeficijenta uz varijablu x je 0.
d) Cijena u sjeni 2. ograničenja je 0,075 pa bi se funkcija cilja smanjila ukupno za 75.

Zadatak 4_04:

Zadana je funkcija cilja jednog proizvodnog problema

$$F_C = 12 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + 25 \cdot x_4 + 18 \cdot x_5$$

uz ograničenja

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 \leq 880 \qquad (1)$$

$$2 \cdot x_1 + 3{,}5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 \leq 600 \qquad (2)$$

$$2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_5 \leq 180 \qquad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

a) Odrediti maksimum funkcije cilja.
b) Desna strana kojeg ograničenja se može izjednačiti s nulom a da se ne naruši osnovno svojstvo vezanih ograničenja?
c) Koja je najveća vrijednost koeficijenta uz varijablu x_4 u funkciji cilja za koju se neće poremetiti bazično rješenje problema?
d) Za koliko će se smanjiti funkcija cilja ako se ipak odluči proizvesti 10 komada proizvoda x_1?

Odgovor:

a) Maksimum funkcije cilja je $F_{C\max} = 3.276$ za $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 112$, $x_4 = 52$ i $x_5 = 60$.
b) Desna strana 3. ograničenja može poprimiti vrijednost 0.
c) Najveća vrijednost koeficijenta uz varijablu x_4 je 32.
d) Funkcija cilja će se smanjiti za 3,275*10=32,75.

Zadatak 4_05:

Zadana je funkcija cilja jednog proizvodnog problema

$$F_C = 30 \cdot x + 20 \cdot y + 25 \cdot z + 15 \cdot w$$

uz ograničenja

$$12 \cdot x + 14 \cdot y + 10 \cdot z + 15 \cdot w \leq 3000 \qquad (1)$$

$$18 \cdot x + 15 \cdot y \leq 750 \qquad (2)$$

$$12 \cdot y + 15 \cdot z + 11 \cdot w \leq 1000 \qquad (3)$$

$$x \geq 15 \qquad (4)$$

$$y \geq 20 \qquad (5)$$

$$z \geq 15 \qquad (6)$$

$$w \geq z \qquad (7)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

a) Odrediti maksimum funkcije cilja.
b) Koja ograničenja nisu vezana?
c) U kojim se granicama može mijenjati koeficijent uz varijablu w u funkciji cilja a da se ne poremeti bazično rješenje problema?

d) Što bi dovelo do većeg rasta funkcije cilja: povećanje desne strane 2. ograničenja za 160 ili povećanje desne strane 3. ograničenja za 180?

Odgovor:

a) Maksimum funkcije cilja je $F_{C\max} = 2.319,2$ za $x = 25$, $y = 20$, $z = w = 29,2$.
b) Nije vezano 1., 4. i 6. ograničenje.
c) Koeficijent uz varijablu w u funkciji cilja može se mijenjati u granicama od -25 do 18,33.
d) Do većeg rasta funkcije cilja doći će ako se desna strana 3. ograničenja poveća za 180.

Zadatak 4_06:

Slastičar proizvodi tri vrste pudinga: od riže, od tapioke i od vanilije, a dnevno ima na raspolaganju 108 jedinica mlijeka, 150 jedinica šećera i 84 jaja.

Recept za jednu zdjelu pudinga od riže zahtijeva 15 jedinica mlijeka, 15 jedinica šećera i 9 jaja, a od pripravljene količine mogu se servirati 24 porcije.

Recept za jednu zdjelu pudinga od tapioke zahtijeva 12 jedinica mlijeka, 15 jedinica šećera i 9 jaja, a od pripravljene količine može se servirati 18 porcija.

Recept za jednu zdjelu pudinga od vanilije zahtijeva 6 jedinica mlijeka, 15 jedinica šećera i 6 jaja, a od pripravljene količine može se servirati 12 porcija.

Zbog želje svojih kupaca slastičar mora dnevno zamiješati najmanje po dvije zdjele svakog od pudinga.

a) Koliko zdjela pojedinog pudinga slastičar treba zamiješati ako želi proizvesti najveći broj porcija? Koliki je taj broj?
b) Koliko pojedinih sastojaka (mlijeko, šećer, jaja) dnevno ostaje neiskorišteno?
c) Za koliko bi se povećao broj dnevnih porcija kada bi slastičar imao na raspolaganju 10 jedinica mlijeka više?

Odgovor:

a) Slastičar će dobiti najveći broj porcija $F_{C\max} = Q_{\max} = 180$ ako dnevno zamiješa 4 zdjele pudinga od riže, 2 zdjele pudinga od tapioke i 4 zdjele pudinga od vanilije.
b) Neiskorišteno će ostati samo 6 jaja.
c) Kada bi slastičar dnevno imao na raspolaganju 10 jedinica mlijeka više, to bi broj dnevnih porcija povećalo za 13.

Zadatak 4_07:

Ugljenokop ima na raspolaganju tri vrste ugljena: U1, U2 i U3, a od njih proizvodi mješavinu goriva za jedno industrijsko postrojenje.

Sukladno ugovoru industrijsko poduzeće neće otkupiti više od 100 tona mješavine.

Ugljen vrste U1 sadrži 0,02 % fosfora i 3 % pepela, a dobit po toni je 120 \$, ugljen U2 sadrži 0,04 % fosfora i 2 % pepela, a dobit po toni je 150 \$, dok ugljen U3 sadrži 0,03 % fosfora i 5 % pepela, a dobit po toni je 140 \$.

Strogi propisi glede nečistoća u gorivu zahtijevaju da postotak fosfora ne smije biti veći od 0,03 %, a najveći dopušteni postotak pepela je 3 %.

a) Odrediti koju mješavinu (koliko pojedine vrste ugljena) treba isporučiti ugljenokop tako da ostvari najveću dobit?
b) U kojim se granicama može mijenjati dobit po toni ugljena U2 a da se ne naruši bazično rješenje problema?
c) Za koliko se može smanjiti dobit po toni ugljena U3 a da se ne naruši bazično rješenje problema?

Odgovor:

a) Najveću dobit u iznosu od $F_{C\max} = \pi_{\max} = 13.600$ $ ugljenokop će ostvariti ako u mješavinu stavi 40 tona ugljena U1, 40 tona ugljena U2 i 20 tona ugljena U3.
b) Dobit po toni ugljena U2 može se kretati u rasponu od 110 $ do 160 $.
c) Dobit po toni ugljena U3 može se smanjiti za 5 $.

Zadatak 4_08:

Investitor ima na raspolaganju 3,5 milijuna kuna za ulaganje u državne obveznice, nekretnine, spekulativne dionice i kratkoročne depozite.

Godišnji prinos od ulaganja u državne obveznice je 7 % uz faktor rizika 12, od ulaganja u nekretnine 8 % uz faktor rizika 24, od ulaganja u spekulativne dionice 11,5 % uz faktor rizika 48 te od kratkoročnih depozita 5,5 % uz faktor rizika 6.

Investitor zahtijeva da iznos ulaganja u spekulativne dionice ne smije biti veći od 30 % ukupno investirane svote, te da prosječni faktor rizika ne smije biti veći od 24.

a) Kako investitor treba uložiti raspoloživi kapital da ostvari najveći godišnji prinos?
b) Za koliko bi se smanjio godišnji prinos kada bi investitor ipak uložio 100 tisuća kuna u kratkoročne zapise?
c) U kojim se granicama može mijenjati prinos od državnih obveznica a da se ne naruši bazično rješenje problema?

Odgovor:

a) Najveći godišnji prinos u iznosu od $F_{C\max} = TR_{\max} = 295.750,-$ kuna investitor će ostvariti ulaganjem 2,1 milijun kuna u državne obveznice, 350 tisuća kuna u nekretnine i 1,05 milijuna kuna u spekulativne dionice.
b) Godišnji bi se prinos smanjio za 1.000,- kuna.
c) Prinos od državnih obveznica može se kretati u rasponu od 6,33 % do 8 %.

Zadatak 4_09:

Marketinški odjel dobio je zadatak da predloži potreban broj oglašavanja u tri renomirana časopisa A, B i C s ciljem povećanja broja svojih kupaca. Istraživanja su pokazala da časopis A prosječno čita 100 tisuća osoba od kojih je 20 % potencijalnih kupaca. Časopis B čita 60 tisuća osoba, a 15 % njih su potencijalni kupci, dok časopis C čita 40 tisuća ljudi od kojih je 8 % potencijalnih kupaca.

Trošak jednog oglasa u časopisu A je 8 tisuća kuna, u časopisu B je 6 tisuća kuna, dok je u časopisu C 5 tisuća kuna, a odjel na oglašavanje smije potrošiti najviše 250 tisuća kuna.

Menadžment zahtijeva da se u časopisu A ne smije objaviti više od 15 oglasa, dok se u svakom od časopisa B i C mora objaviti najmanje po 8 oglasa.

a) Koliko oglasa treba marketinški odjel ugovoriti u pojedinom časopisu da privuče najveći broj potencijalnih kupaca?
b) Koji je najveći broj oglasa u časopisu C koji može zahtijevati menadžment a da se ne naruši temeljno svojstvo vezanih ograničenja?

Odgovor:

a) Najveći broj potencijalnih kupaca ($F_{C\max} = Q_{\max} = 460.600$) odjel će privući ako objavi po 15 oglasa u časopisima A i B te 8 oglasa u časopisu C.
b) Najveći broj oglasa koji menadžment može zahtijevati u časopisu C je 16.

Zadatak 4_10:

Marketinški odjel dobio je zadatak da predloži potreban broj oglašavanja u tri renomirana časopisa A, B i C s ciljem da se minimaliziraju troškovi kampanje. Istraživanja su pokazala da časopis A prosječno čita 200 tisuća osoba od kojih je 15 % potencijalnih kupaca. Časopis B čita 75 tisuća osoba, a 20 % njih su potencijalni kupci, dok časopis C čita 70 tisuća ljudi od kojih je 10 % potencijalnih kupaca.

Trošak jednog oglasa u časopisu A je 10 tisuća kuna, u časopisu B je 8 tisuća kuna, dok je u časopisu C 5 tisuća kuna, a cilj je da se marketinškom kampanjom privuče barem 580 tisuća potencijalnih kupaca.

Menadžment zahtijeva da se u časopisu A ne smije objaviti više od 40 % svih oglasa te da se u svakom od časopisa B i C mora objaviti najmanje po 10 oglasa.

a) Koliko oglasa treba marketinški odjel ugovoriti u pojedinom časopisu da troškovi oglašavanja budu minimalni?
b) Koja je najmanja cijena oglašavanja u časopisu B za koju se neće poremetiti bazično rješenje problema?
c) U kojim se granicama može mijenjati zahtjev menadžmenta za brojem potencijalnih kupaca koje je potrebno privući kampanjom?

Odgovor:

a) Najmanji trošak kampanje ($F_{C\min} = TC_{\min} = 250.000,-$) odjel će imati ako objavi 12 oglasa u časopisu A te po 10 oglasa u časopisima B i C.
b) Najmanja cijena jednog oglasa u časopisu B iznosi 5 tisuća kuna.
c) Zahtjev menadžmenta za privlačenjem potencijalnih kupaca može se kretati od 220 do 620 tisuća.

4.5. Transportni problem

Transportni problem linearnog programiranja sastoji se u pronalaženju optimalnog plana transporta poznate količine istovrsnih proizvoda iz određenog broja ishodišta (m) do određenog broja odredišta (n).

Plan transporta jest plan kojim se određuje količina robe koja će se prevesti iz pojedinog ishodišta u pojedino odredište.

Izvedivi (dopustivi) plan transporta je svaki onaj plan transporta koji zadovoljava postavljena ograničenja.

Optimalni plan transporta je onaj dopustivi plan transporta kojemu su troškovi transporta minimalni.

Neka su poznata ishodišta I_1, I_2 ..., I_m u svakom od kojih je smještena poznata količina robe a_1, a_2 ..., a_m. Ukupna količina raspoložive robe u svim ishodištima tada je:

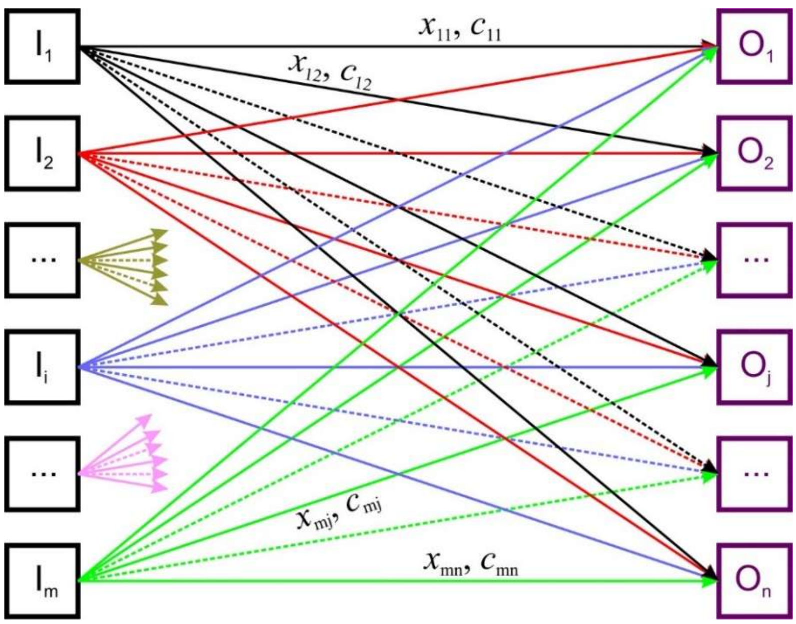
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_i + \ldots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i \; . \tag{4.1}$$

Neka su poznata i odredišta O_1, O_2 ..., O_n u svakom od kojih je poznata potražnja robe b_1, b_2 ..., b_n. Ukupna potražnja za robom u svim odredištima tada je:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_j + \ldots + b_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \; . \tag{4.2}$$

Neka je x_{ij} količina robe koja se prevozi iz ishodišta I_i u odredište O_j.

Cijene prijevoza po jedinici robe iz pojedinog ishodišta do pojedinog odredišta također su poznate i iznose c_{ij}, i=1, ..., m; j=1, ..., n. Tako je cijena transporta jedinice robe iz ishodišta I_2 u odredište O_3 upravo c_{23} (slika 4.59).



Slika 4.59. *Shematski prikaz transportnog problema.*

Ako je količina robe x_{23} ona količina koja se prevozi iz ishodišta I_2 u odredište O_3, bit će trošak tog transporta jednak umnošku $c_{23} \cdot x_{23}$. Sukladno tomu ukupni trošak transporta je:

$$\begin{aligned} TC = & c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + \ldots + c_{1j} \cdot x_{1j} + \ldots + c_{1n} \cdot x_{1n} + \\ & + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + \ldots + c_{2j} \cdot x_{2j} + \ldots + c_{2n} \cdot x_{2n} + \\ & + \ldots + \\ & + c_{m1} \cdot x_{m1} + c_{m2} \cdot x_{m2} + \ldots + c_{mj} \cdot x_{mj} + \ldots + c_{mn} \cdot x_{mn} \end{aligned} \tag{4.3}$$

ili

$$TC = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \ , \tag{4.4}$$

a zadatak je taj trošak minimizirati.

S obzirom na ukupnu količinu ponude i ukupnu količinu potražnje razlikuju se dva moguća modela transportnog problema:

1. Zatvoreni transportni problem – kada je ukupna količina ponude u svim ishodištima jednaka ukupnoj potražnji u svim odredištima:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \tag{4.5}$$

2. Otvoreni transportni problem – kada je ukupna količina ponude u svim ishodištima različita od ukupne potražnje u svim odredištima:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{4.6}$$

   pri čemu se razlikuju dva moguća slučaja otvorenog transportnog problema.

   Prvi slučaj, kada je količina ponude veća od količine potražnje:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{4.7}$$

   rješava se uvođenjem dodatnog (fiktivnog) odredišta O_{n+1} kojemu je potražnja upravo jednaka razlici ukupne ponude i stvarne potražnje:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{4.8}$$

   pri čemu je cijena transporta iz bilo kojeg ishodišta u to dodatno odredište (O_{n+1}) jednaka nuli:

$$c_{1,n+1} = 0, \quad c_{2,n+1} = 0, \quad \ldots \quad , c_{m,n+1} = 0, \tag{4.9}$$

   ili

$$c_{i,n+1} = 0, \quad i = 1,\ldots, m. \tag{4.10}$$

Drugi slučaj, kada je količina potražnje veća od količine ponude:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{4.11}$$

rješava se uvođenjem dodatnog (fiktivnog) ishodišta I_{m+1} kojemu je ponuda upravo jednaka razlici ukupne potražnje i stvarne ponude:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \,, \tag{4.12}$$

pri čemu je cijena transporta iz tog dodanog ishodišta (I_{m+1}) u bilo koje odredište jednaka nuli:

$$c_{m+1,1} = 0, \quad c_{m+1,2} = 0, \quad \dots \quad , c_{m+1,n} = 0, \tag{4.13}$$

ili

$$c_{m+1,j} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4.14}$$

Ograničenja kod transportnog problema slijede iz uvjeta da količina robe koja se transportira iz nekog ishodišta <u>ne može biti veća od ponude tog ishodišta</u>:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \dots, m \,, \tag{4.15}$$

te da količina robe koja se dopremi u neko odredište <u>ne može biti veća od potražnje tog odredišta</u>:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad j = 1, \dots, n \,. \tag{4.16}$$

To znači da transportni problem, u općem slučaju, ima m+n ograničenja (kod otvorenog transportnog problema to je m+n+1 ograničenje jer imamo ili jedno fiktivno ishodište ili jedno fiktivno odredište).

Kako se i otvoreni transportni problem svodi na zatvoreni, odnosno kako je ukupna ponuda svih ishodišta jednaka ukupnoj ponudi svih odredišta, može se znak nejednakosti (≤) zamijeniti znakom jednakosti (=), jer će iz ishodišta biti transportirana sva roba koja će, s druge strane, upravo zadovoljiti potražnju svakog od odredišta:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m \,, \tag{4.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{4.18}$$

Iako bi se za rješavanje transportnog problema uz pomoć SOLVERA mogao koristiti i ranije prikazan predložak, ipak je kreiran novi, ovom problemu prilagođen i za korisnika jasniji predložak TRANSPORT prikazan na slici 4.60.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Trošak transporta					
2		**Funkcija cilja**		**=SUMPRODUCT(C6:F9;C16:F19)**					
3									
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)					ograničenja ishodišta		
5			odredište 1	odredište 2	odredište 3	odredište 4	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		ishodište 1	x11	x12	x13	x14	=SUM(C6:F6)	=	**S1**
7		ishodište 2	x21	x22	x23	x24	=SUM(C7:F7)	=	**S2**
8		ishodište 3	x31	x32	x33	x34	=SUM(C8:F8)	=	**S3**
9		ishodište 4	x41	x42	x43	x44	=SUM(C9:F9)	=	**S4**
10	ograničenja odredišta	dopremljena količina	=SUM(C6:C9)	=SUM(D6:D9)	=SUM(E6:E9)	=SUM(F6:F9)			
11			=	=	=	=			
12		potražnja odredišta	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**			
13									
14		**Jedinični troškovi transporta**							
15			odredište 1	odredište 2	odredište 3	odredište 4			
16		ishodište 1	c11	c12	c13	c14			
17		ishodište 2	c21	c22	c23	c24			
18		ishodište 3	c31	c32	c33	c34			
19		ishodište 4	c41	c42	c43	c44			

Slika 4.60. *Shematski prikaz predloška za rješavanje transportnog problema.*

Predložak je kreiran za slučaj postojanja četiriju ishodišta i isto toliko odredišta. Ako je broj ishodišta/odredišta različit od četiri, tada se briše/dodaje odgovarajući broj redaka odnosno stupaca.

Varijable odlučivanja smještene su u ćelije polja C6:F9, dok su jedinične cijene transporta iz svakog od ishodišta u svako od odredišta smještene u ćelije polja C16:F19.

Funkcija cilja, u stvarnosti ukupni trošak transporta, izračunava se u ćeliji D2 s pomoću formule =SUMPRODUCT(C6:F9;C16:F19), što predstavlja zbroj umnožaka svake ćelije polja varijabla odlučivanja s odgovarajućom ćelijom polja jediničnih cijena transporta:

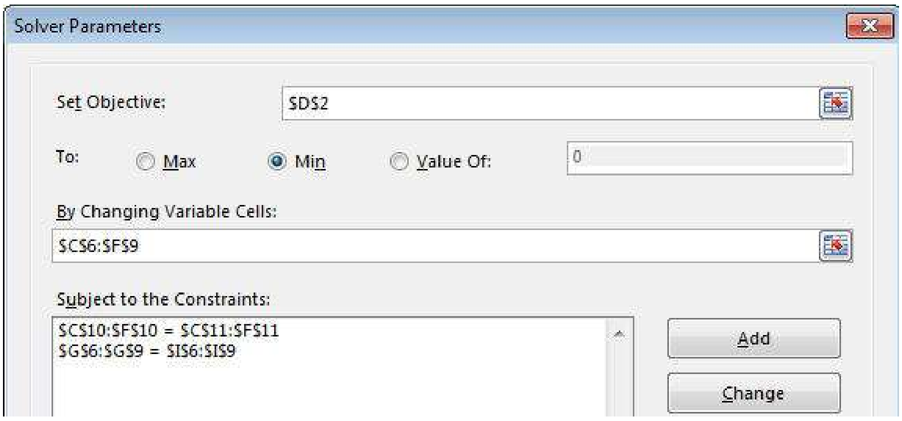
$$= C6 \cdot C16 + D6\ D16 + E6\ E16 + \ldots + E9\ E19 + F9\ F19 =$$

$$= x11 \cdot c11 + x12\ c12 + x13\ c13 + \ldots + x43\ c43 + x44\ c44.$$

U ćelijama G6 do G9 izračunavaju se, prema formulama na slici, količine robe koje će biti otpremljene iz pojedinog ishodišta i, sukladno definiciji transportnog problema, moraju biti jednake ponudi svakog od tih ishodišta koja se upisuju u ćelije I6 do I9. Te jednakosti predstavljaju ograničenja ishodišta.

U ćelijama C10 do F10 izračunavaju se, prema formulama na slici, količine robe koje će biti dopremljene u pojedino odredište i, sukladno definiciji transportnog problema, moraju biti jednake potražnji svakog od tih odredišta koja se upisuju u ćelije C12 do F12. Te jednakosti predstavljaju ograničenja odredišta.

Priprema parametara u dijaloškom okviru *Solver Parameters*, sukladno predlošku i uz aktiviranje opcije o nenegativnim vrijednostima varijabla odlučivanja te uz odabir linearnog modela izračuna, dana je na slici 4.61.



Slika 4.61. *Dijaloški okvir* Solver Parameters*: priprema parametara.*

Prethodno prikazani predložak dan je, zbog pojašnjenja, s oznakama varijabla, zadanim veličinama i potrebnim formulama za izračun, dok je na slici 4.62 prikazan predložak u obliku u kojem će se stvarno koristiti.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Trošak transporta					
2		**Funkcija cilja**							
3									
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)					ograničenja ishodišta		
5			odredište 1	odredište 2	odredište 3	odredište 4	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		ishodište 1	0	0	0	0		=	
7		ishodište 2	0	0	0	0		=	
8		ishodište 3	0	0	0	0		=	
9		ishodište 4	0	0	0	0		=	
10	ograničenja odredišta	dopremljena količina							
11			=	=	=	=			
12		potražnja odredišta							
13									
14		**Jedinični troškovi transporta**							
15			odredište 1	odredište 2	odredište 3	odredište 4			
16		ishodište 1	0,00	0,00	0,00	0,00			
17		ishodište 2	0,00	0,00	0,00	0,00			
18		ishodište 3	0,00	0,00	0,00	0,00			
19		ishodište 4	0,00	0,00	0,00	0,00			

Slika 4.62. *Predložak za rješevanje transportnog problema.*

Primjer 4.15.

Tvrtka TOPLAP proizvodi kućišta za prijenosna računala u tri tvornice, A1, A2 i A3, a u tri odvojena pogona, B1, B2 i B3, vrši sklapanje računala korištenjem tih kućišta. Obujam dnevne proizvodnje kućišta, dnevna potreba za kućištima u pogonima za sklapanje računala, kao i cijene transporta po kućištu od pojedine tvornice do pojedinog pogona, izražene u eurima, prikazane su u tablici 4.3 (tako je cijena po kućištu od tvornice A1 do pogona B1 jednaka 5,00€, od tvornice A1 do pogona B2 ta je cijena 9,00 €, i tako dalje).

Tablica 4.3. *Primjer 4.15: Jedinične cijene transporta.*

odredište / ***ishodište***	B1	B2	B3	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	**200**
A2	1	2	6	**400**
A3	2	8	7	**200**
potražnja odredišta	**120**	**620**	**60**	

Odrediti dnevni plan transporta kućišta tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni. Koliki su ti troškovi?

Rješenje:

Najprije je potrebno ustvrditi o kakvu je transportnom problemu riječ, i to usporedbom količine ponude i količine potražnje. Kako je ponuda 200+400+200=800, a potražnja 120+620+60=800, zaključak je da su jednake te da je riječ o zatvorenom transportnom problemu.

Varijable odlučivanja: x_{ij} – količina kućišta koja će se prevesti iz tvornice i u pogon j – a kako je riječ o 3 tvornice i 3 pogona, tih varijabla je $3 \cdot 3=9$.

Funkcija cilja (koju treba minimizirati):

$$TC=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\cdot x_{ij} = 5\cdot x_{11}+9\cdot x_{12}+16\cdot x_{13}+1\cdot x_{21}+2\cdot x_{22}+6\cdot x_{23}+2\cdot x_{31}+8\cdot x_{32}+7\cdot x_{33}\,.$$

Ograničenja (kod kojih se znak jednakosti = može pisati umjesto znaka ≤ ili znaka ≥):

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A1:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=200 \qquad (1)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A2:

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=400 \qquad (2)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200 \qquad (3)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \qquad (4)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 620 \qquad (5)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B3:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \qquad (6)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi.

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa zadanih veličina i ograničenja, s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.63.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Trošak transporta				
2		**Funkcija cilja**		**3420**				
3								
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u					ograničenja ishodišta	
5			B1	B2	B3	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		A1	0	200	0	200	=	**200**
7		A2	0	400	0	400	=	**400**
8		A3	120	20	60	200	=	**200**
9	ograničenja odredišta	dopremljena količina	120	620	60			
10			=	=	=			
11		potražnja odredišta	**120**	**620**	**60**			
12								
13		**Jedinični troškovi transporta**						
14			B1	B2	B3			
15		A1	5,00	9,00	16,00			
16		A2	1,00	2,00	6,00			
17		A3	2,00	8,00	7,00			

Slika 4.63. *Primjer 4.15: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Dakle, optimalan je plan transporta onaj prema kojem će se iz tvornice A1 svih 200 kućišta prevesti u pogon B2, iz tvornice A2 također će se svih 400 kućišta prevesti u pogon B2, dok će se iz tvornice A3 120 kućišta odvesti u pogon B1, 20 kućišta u pogon B2 te preostalih 60 kućišta u pogon B3.

Minimalni trošak transporta iznosi pritom 3.420,00 €.

Primjer 4.16.

Riješiti primjer 4.15. ako potražnja pogona B2 iznosi 500 kućišta, a svi su ostali parametri nepromijenjeni, kako je to prikazano u tablici 4.4.

Tablica 4.4. *Primjer 4.16 Jedinične cijene transporta.*

odredište / ***ishodište***	B1	B2	B3	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	**200**
A2	1	2	6	**400**
A3	2	8	7	**200**
potražnja odredišta	**120**	**500**	**60**	

Koji bi bio optimalan plan transporta kada bi menadžment zahtijevao da se iz tvornice A1 moraju otpremiti sva proizvedena kućišta?

Rješenje:

Usporedbom količine ponude i količine potražnje može se utvrditi da je ponuda 200+400+200=800 veća od potražnje 120+500+60=680, pa slijedi zaključak da se radi o otvorenom transportnom problemu. Stoga se uvodi fiktivno odredište (zamišljeni pogon B4) kojega će potražnja biti 120 kućišta, a cijene transporta iz svih tvornica prema tom pogonu bit će jednake 0, kako je to prikazano u tablici 4.5.

Tablica 4.5. *Primjer 4.16: Korigirana tablica jediničnih cijena transporta.*

odredište / ***ishodište***	B1	B2	B3	B4	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	0	**200**
A2	1	2	6	0	**400**
A3	2	8	7	0	**200**
potražnja odredišta	**120**	**500**	**60**	**120**	

Varijable odlučivanja: x_{ij} – količina kućišta koja će se prevesti iz tvornice i u pogon j – a kako se radi o 3 tvornice i sada 4 pogona, broj tih varijabla je 3·4=12.

Funkcija cilja (koju treba minimizirati):

$$TC = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} = 5 \cdot x_{11} + 9 \cdot x_{12} + 16 \cdot x_{13} + 0 \cdot x_{14} + 1 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} +$$

$$+ 6 \cdot x_{23} + 0 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + 8 \cdot x_{32} + 7 \cdot x_{33} + 0 \cdot x_{34} \,.$$

Ograničenja (kod kojih se znak jednakosti = može pisati umjesto znaka ≤ ili znaka ≥):

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200 \qquad (1)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 400 \qquad (2)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 200 \qquad (3)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \qquad (4)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 500 \qquad (5)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B3:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \qquad (6)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u fiktivni pogon B4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120 \qquad (6)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		OPIS		Trošak transporta					
2		Funkcija cilja		2340					
3									
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)					ograničenja ishodišta		
5			B1	B2	B3	B4	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		A1	0	80	0	120	200	=	200
7		A2	0	400	0	0	400	=	400
8		A3	120	20	60	0	200	=	200
9	ograničenja odredišta	dopremljena količina	120	500	60	120			
10			=	=	=	=			
11		potražnja odredišta	120	500	60	120			
12									
13		**Jedinični troškovi transporta**							
14			B1	B2	B3	B4			
15		A1	5,00	9,00	16,00	0,00			
16		A2	1,00	2,00	6,00	0,00			
17		A3	2,00	8,00	7,00	0,00			

Slika 4.64. *Primjer 4.16: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.64.

Optimalni plan transporta je onaj prema kojem će se iz tvornice A1 80 kućišta prevesti u pogon B2, iz tvornice A2 svih 400 kućišta prevest će se u pogon B2, dok će se iz tvornice A3 120 kućišta odvesti u pogon B1, 20 kućišta u pogon B2 te preostalih 60 kućišta u pogon B3. Minimalni trošak transporta iznosi pritom 2.340,00 €. Naravno, u tvornici A1 ostat će 120 kućišta.

Ako bi menadžment zahtijevao da se sva kućišta proizvedena u tvornici A1 moraju otpremiti u odredišta, tada bi trebali spriječiti da neko od kućišta iz tvornice A1 bude otpremljeno u fiktivno odredište (B4). To se postiže tako da se za cijenu transporta iz tvornice A1 u fiktivno odredište upiše vrijednost koja je višestruko veća od ostalih.

Tablica 4.6. *Primjer 4.16: Tablica jediničnih cijena transporta uz zahtjev menadžmenta.*

odredište / *ishodište*	B1	B2	B3	B4	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	1000	**200**
A2	1	2	6	0	**400**
A3	2	8	7	0	**200**
potražnja odredišta	**120**	**500**	**60**	**120**	

Tu bi cijenu sada trebalo promijeniti i u Excelovu radnom listu (u ćeliji C10), a nakon ponovnog pokretanja Solvera dobit će se rezultat prikazan na slici 4.65.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		OPIS		Trošak transporta					
2		**Funkcija cilja**		**2660**					
3									
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)					ograničenja ishodišta		
5			B1	B2	B3	B4	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		A1	100	100	0	0	200	=	**200**
7		A2	0	400	0	0	400	=	**400**
8		A3	20	0	60	120	200	=	**200**
9	ograničenja odredišta	dopremljena količina	120	500	60	120			
10			=	=	=	=			
11		potražnja odredišta	**120**	**500**	**60**	**120**			
12									
13		**Jedinični troškovi transporta**							
14			B1	B2	B3	B4			
15		A1	5,00	9,00	16,00	1000,00			
16		A2	1,00	2,00	6,00	0,00			
17		A3	2,00	8,00	7,00	0,00			

Slika 4.65. *Primjer 4.16: Rješenje primjera uz zahtjev menadžmenta.*

U ovom je slučaju optimalni plan transporta takav da će se iz tvornice A1 100 kućišta prevesti u pogon B1, a 100 u pogon B2, iz tvornice A2 svih će se 400 kućišta prevesti u pogon B2, dok će se iz tvornice A3 20 kućišta odvesti u pogon B1, 60 kućišta u pogon B3, a preostalih 120 u fiktivni pogon B4 (tj. 120 kućišta ostat će u tvornici A3). Minimalni trošak transporta iznosi pritom 2.660,00 €.

Primjer 4.17.

Riješiti primjer 4.15. ako potražnja pogona B3 iznosi 150 kućišta, a svi su ostali parametri nepromijenjeni u odnosu na primjer 1., kako je to prikazano u tablici 4.7.

Tablica 4.7. *Primjer 4.17: Jedinične cijene transporta.*

odredište / ***ishodište***	B1	B2	B3	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	**200**
A2	1	2	6	**400**
A3	2	8	7	**200**
potražnja odredišta	**120**	**620**	**150**	

Koji bi bio optimalan plan transporta kada bi menadžment zahtijevao da pogon B3 mora dobiti sva tražena kućišta?

Rješenje:

Usporedbom količine ponude i količine potražnje možemo utvrditi kako je ponuda 200+400+200=800 manja od potražnje 120+620+150=890, pa zaključujemo da se radi o otvorenom transportnom problemu. Stoga uvodimo fiktivno ishodište (zamišljenu tvornicu A4) koja će nuditi 90 kućišta, a cijena transporta iz te tvornice prema svim pogonima bit će jednaka 0, kako je to prikazano u tablici 4.8.

Tablica 4.8. *Primjer 4.17: Korigirana tablica jediničnih cijena transporta.*

odredište / ***ishodište***	B1	B2	B3	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	**200**
A2	1	2	6	**400**
A3	2	8	7	**200**
A4	0	0	0	**90**
potražnja odredišta	**120**	**620**	**150**	

Varijable odlučivanja: x_{ij} – količina kućišta koja će se prevesti iz tvornice i u pogon j – a kako se radi o 4 tvornice i 3 pogona, broj tih varijabla je $4 \cdot 3=12$.

Funkcija cilja (koju treba minimizirati):

$$TC = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} \cdot x_{ij} = 5 \cdot x_{11} + 9 \cdot x_{12} + 16 \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{21} + 2 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23} +$$
$$+ 2 \cdot x_{31} + 8 \cdot x_{32} + 7 \cdot x_{33} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} + 0 \cdot x_{43} .$$

Ograničenja (kod kojih se znak jednakosti = može pisati umjesto znaka ≤ ili znaka ≥):

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200 \qquad (1)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 400 \qquad (2)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz tvornice A3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 200 \qquad (3)$$

- količina kućišta koja može biti otpremljena iz fiktivne tvornice A4:

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 90 \qquad (4)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 120 \qquad (5)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{41} = 620 \qquad (6)$$

- količina kućišta koja može biti dopremljena u pogon B3:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{31} = 150 \qquad (7)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi.

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa svih zadanih veličina i ograničenja s pomoću Solvera dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.66.

Optimalan je plan transporta onaj prema kojem će se iz tvornice A1 svih 200 kućišta prevesti u pogon B2, iz tvornice A2 svih će se 400 kućišta također prevesti u pogon B2, iz tvornice A3 120 kućišta odvest će se u pogon B1, a 80 kućišta u pogon B3.

Iz fiktivne tvornice A4 prevezlo bi se 20 kućišta u pogon B2 i 70 u pogon B3. S obzirom na to da je riječ o izmišljenoj tvornici, u stvarnosti će u pogon B2 doći 600 kućišta, a u pogon B3 samo 80 kućišta, što je u slučaju pogona B2 za 20 kućišta manje, a u slučaju pogona B3 za 70 kućišta manje nego što su dnevne potrebe, odnosno dnevni kapaciteti tih pogona.

Minimalni trošak transporta iznosi pritom 3.400,00 €.

Ako bi menadžment zahtijevao da pogon B3 dobije sva tražena kućišta, tada treba spriječiti da neko od kućišta bude u taj pogon dopremljeno iz fiktivne tvornice (A4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		O P I S		Trošak transporta				
2		**Funkcija cilja**		**3400**				
3								
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odı				ograničenja ishodišta		
5			B1	B2	B3	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		A1	0	200	0	200	=	**200**
7		A2	0	400	0	400	=	**400**
8		A3	120	0	80	200	=	**200**
9		A4	0	20	70	90	=	**90**
10	ograničenja odredišta	dopremljena količina	120	620	150			
11			=	=	=			
12		potražnja odredišta	**120**	**620**	**150**			
13								
14		**Jedinični troškovi transporta**						
15			B1	B2	B3			
16		A1	5,00	9,00	16,00			
17		A2	1,00	2,00	6,00			
18		A3	2,00	8,00	7,00			
19		A4	0,00	0,00	0,00			

Slika 4.66. *Primjer 4.17: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

To se postiže tako da se za cijenu transporta iz fiktivne tvornice A4 u pogon B3 upiše vrijednost koja je višestruko veća od bilo koje cijene u tablici, kao što je to prikazano u tablici 4.9.

Tablica 4.9. *Primjer 4.17: Tablica jediničnih cijena transporta uz zahtjev menadžmenta.*

odredište / ***ishodište***	B1	B2	B3	***ponuda ishodišta***
A1	5	9	16	**200**
A2	1	2	6	**400**
A3	2	8	7	**200**
A4	0	0	1.000	**90**
potražnja odredišta	**120**	**620**	**150**	

Tu bi cijenu sada trebalo promijeniti i u Excelovu radnom listu (u ćeliju C18 upisati 1.000 umjesto 0), nakon čega treba odabrati *Tools/Solver* na vrpci izbornika pa kliknuti na dugme *Solve*.

Dio Excelova radnog lista koji prikazuje optimalni iznos funkcije cilja i konačne vrijednosti varijabla odlučivanja prikazan je na slici 4.67.

U ovom je slučaju optimalni plan transporta takav da će se iz tvornice A1 70 kućišta prevesti u pogon B1, a 130 u pogon B2, iz tvornice A2 svih će se 400 kućišta prevesti u pogon B2, dok će se iz tvornice A3 50 kućišta odvesti u pogon B1, a 150 kućišta u pogon B3.

Iz fiktivne tvornice A4 90 kućišta ide u pogon B2 (tj. pogon B2 dobit će 90 kućišta manje od onoga što je traženo). Minimalni trošak transporta iznosi pritom 3.470,00 €.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		OPIS		Trošak transporta				
2		**Funkcija cilja**		**3470**				
3								
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u c				ograničenja ishodišta		
5			B1	B2	B3	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		A1	70	130	0	200	=	**200**
7		A2	0	400	0	400	=	**400**
8		A3	50	0	150	200	=	**200**
9		A4	0	90	0	90	=	**90**
10	ograničenja odredišta	dopremljena količina	120	620	150			
11			=	=	=			
12		potražnja odredišta	**120**	**620**	**150**			
13								
14		**Jedinični troškovi transporta**						
15			B1	B2	B3			
16		A1	5,00	9,00	16,00			
17		A2	1,00	2,00	6,00			
18		A3	2,00	8,00	7,00			
19		A4	0,00	0,00	1000,00			

Slika 4.67. *Primjer 4.17: Rješenje primjera uz zahtjev menadžmenta.*

Primjer 4.18.

Tvrtka EXPIMP raspolaže s tri skladišta, S1, S2 i S3, smještena u tri različita grada i u svakom skladištu ima određenu količinu proizvoda. Tvrtka ima i četiri prodavaonice, P1, P2, P3 i P4, smještene u četiri grada, od kojih svaka potražuje određenu količinu tog proizvoda. Ponude proizvoda po skladištima, potražnja po prodavaonicama, kao i cijene transporta po jedinici proizvoda od pojedinog skladišta do pojedine prodavaonice, izražene u kunama, prikazane su u tablici 4.10 (tako je cijena po jedinici proizvoda iz skladišta 2 do prodavaonice 1 jednaka 310,00 kn, iz skladišta 1 u prodavaonicu 4 ta je cijena 390,00 kn, i tako dalje).

Tablica 4.10. *Primjer 4.18: Jedinične cijene transporta.*

odredište / *ishodište*	P1	P2	P3	P4	***ponuda ishodišta***
S1	325	258	410	390	**150**
S2	310	295	320	411	**200**
S3	298	387	280	439	**250**
potražnja odredišta	**130**	**120**	**200**	**150**	

Odredite plan transporta tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni.

Rješenje:

Najprije možemo ustvrditi o kakvu je transportnom problemu riječ, i to usporedbom količine ponude i količine potražnje. Kako je ponuda 150+200+250=600, a potražnja 130+120+200+150=600, zaključujemo da su jednake te da je riječ o zatvorenom transportnom problemu.

Varijable odlučivanja:

x_{ij} – količina proizvoda koja će se prevesti iz skladišta i u prodavaonicu j – a kako imamo 3 skladišta i 4 prodavaonice, tih varijabla je 3·4=12.

Funkcija cilja (koju treba minimizirati) glasi:

$$TC = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} = 325 \cdot x_{11} + 258 \cdot x_{12} + 410 \cdot x_{13} + 390 \cdot x_{14} + 310 \cdot x_{21} + 295 \cdot x_{22} +$$

$$+ 320 \cdot x_{23} + 411 \cdot x_{24} + 298 \cdot x_{31} + 387 \cdot x_{32} + 280 \cdot x_{33} + 439 \cdot x_{34}$$

Ograničenja (kod kojih se znak jednakosti = može pisati umjesto znaka ≤ ili znaka ≥):

- količina robe koja može biti otpremljena iz 1. skladišta:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150 \qquad (1)$$

- količina robe koja može biti otpremljena iz 2. skladišta:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \qquad (2)$$

- količina robe koja može biti otpremljena iz 3. skladišta:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 250 \qquad (3)$$

- količina robe koja može biti dopremljena u 1. prodavaonicu:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130 \qquad (4)$$

- količina robe koja može biti dopremljena u 2. prodavaonicu:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120 \qquad (5)$$

- količina robe koja može biti dopremljena u 3. prodavaonicu:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200 \qquad (6)$$

- količina robe koja može biti dopremljena u 4. prodavaonicu:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 150 \qquad (7)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi.

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa svih zadanih veličina i ograničenja s pomoću Solvera dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.68.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Trošak transporta					
2		**Funkcija cilja**		**187680**					
3									
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)					ograničenja ishodišta		
5			P1	P2	P3	P4	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		S1	0	120	0	30	150	=	**150**
7		S2	80	0	0	120	200	=	**200**
8		S3	50	0	200	0	250	=	**250**
9	ograničenja odredišta	dopremljena količina	130	120	200	150			
10			=	=	=	=			
11		potražnja odredišta	**130**	**120**	**200**	**150**			
12									
13		**Jedinični troškovi transporta**							
14			P1	P2	P3	P4			
15		S1	325,00	258,00	410,00	390,00			
16		S2	310,00	295,00	320,00	411,00			
17		S3	298,00	387,00	280,00	439,00			

Slika 4.68. *Primjer 4.18: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Zaključuje se kako je optimalan plan transporta onaj prema kojem će se iz skladišta S1 prevesti 120 jedinica proizvoda u prodavaonicu P1 i 30 u prodavaonicu P4; iz skladišta S2 80 jedinica u prodavaonicu P1 i 120 u prodavaonicu P4 te iz skladišta S3 50 jedinica u prodavaonicu P1 i 200 u prodavaonicu P3. Minimalni trošak transporta iznosi pritom 187.680,00 kn.

Primjer 4.19.

Tvrtka PAPER proizvodi papir za tiskarsku industriju u trima gradovima: Detroitu s mjesečnom proizvodnjom od 250 tona, Pittsburghu s mjesečnom proizvodnjom od 130 tona i Buffalu s mjesečnom proizvodnjom od 235 tona papira.

Tim papirom tvrtka opskrbljuje pet velikih izdavača u Rochesteru, Bostonu, New Yorku, Chicagu i Indianapolisu. Troškovi transporta po toni papira izraženi u $, iz tvornica u gradove, kao i potražnja za papirom u pojedinim gradovima prikazani su u tablici 4.11. Crtica u tablici znači da transport papira iz Pittsburgha u Indianapolis, zbog radova na prometnicama, nije moguć.

Tablica 4.11. *Primjer 4.19: Jedinične cijene transporta.*

odredište / *ishodište*	Rochester	Boston	New York	Chicago	Indianapolis	***ponuda ishodišta***
Detroit	6	15	20	16	21	**250**
Pittsburgh	7	25	13	5	-	**130**
Buffalo	12	15	15	7	17	**235**
potražnja odredišta	**95**	**110**	**130**	**180**	**100**	

Odrediti plan transporta tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni.

Rješenje:

Usporedbom količine ponude i količine potražnje zaključuje se kako je ponuda 250+130+235=615 jednaka potražnji 95+110+130+180+100=615, te da se radi o zatvorenom transportnom problemu.

Varijable odlučivanja: x_{ij} – količina papira, u tonama, koja će se prevesti iz tvornice u gradu i izdavaču u grad j, a kako imamo 3 tvornice i 5 izdavača, broj tih varijabla je $3\cdot 5=15$ (npr. količina papira koja se prevozi iz tvornice u Pittsburgu izdavaču u Chicagu je varijabla x_{24}).

Nemogućnost transporta papira na relaciji Pittsburg – Indianapolis rješava se stavljanjem vrlo visoke jedinične cijene transporta na toj relaciji (desetak puta veće od najveće zadane jedinične cijene). U primjeru je stavljena cijena od 1000 $.

Funkcija cilja (koju treba minimizirati):

$$TC=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}\cdot x_{ij}=6\cdot x_{11}+15\cdot x_{12}+20\cdot x_{13}+16\cdot x_{14}+21\cdot x_{15}+7\cdot x_{21}+25\cdot x_{22}+$$
$$+13\cdot x_{23}+5\cdot x_{24}+11\cdot x_{25}+12\cdot x_{31}+15\cdot x_{32}+15\cdot x_{33}+7\cdot x_{34}+17\cdot x_{35}\,.$$

Ograničenja (kod kojih se znak jednakosti = može pisati umjesto znaka ≤ ili znaka ≥):

- količina papira koja može biti otpremljena iz tvornice u Detroitu:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=250 \qquad (1)$$

- količina papira koja može biti otpremljena iz tvornice u Pittsburghu:

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=130 \qquad (2)$$

- količina papira koja može biti otpremljena iz tvornice u Buffalu:

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=235 \qquad (3)$$

- količina papira koja može biti dopremljena izdavaču u Rochester:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=95 \qquad (4)$$

- količina papira koja može biti dopremljena izdavaču u Boston:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110 \qquad (5)$$

- količina papira koja može biti dopremljena izdavaču u New York:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 130 \qquad (6)$$

- količina papira koja može biti dopremljena izdavaču u Chicago:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 180 \qquad (7)$$

- količina papira koja može biti dopremljena izdavaču u Indianapolis:

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 100 \qquad (8)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi.

Prilagodba predloška TRANSPORT i rezultati dobiveni s pomoću Excelova alata Solver su prikazani na slici 4.69.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Trošak transporta						
2		**Funkcija cilja**		**7050**						
3										
4		**Varijable odlučivanja** (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)						ograničenja ishodišta		
5			Rochester	Boston	New York	Chicago	Indianapolis	otpremljena količina		ponuda ishodišta
6		Detroit	95	110	0	0	45	250	=	**250**
7		Pittsburgh	0	0	0	130	0	130	=	**130**
8		Buffalo	0	0	130	50	55	235	=	**235**
9	ograničenja odredišta	dopremljena količina	95	110	130	180	100			
10			=	=	=	=	=			
11		potražnja odredišta	**95**	**110**	**130**	**180**	**100**			
12										
13		**Jedinični troškovi transporta**								
14			Rochester	Boston	New York	Chicago	Indianapolis			
15		Detroit	6,00	15,00	20,00	16,00	21,00			
16		Pittsburgh	7,00	25,00	13,00	5,00	1000,00			
17		Buffalo	12,00	15,00	15,00	7,00	17,00			

Slika 4.69. *Primjer 4.19: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Optimalan plan transporta papira izdavačima je sljedeći: iz tvornice u Detroitu 95 tona papira prevest će se u Rochester, 110 tona u Boston te 45 tona u Indianapolis; iz tvornice u Pittsburghu svih 130 tona papira prevest će se Chicago, dok će se iz tvornice u Buffalu 130 tona papira prevesti u New York, 50 tona u Chicago te 55 tona u Indianapolis.

Minimalni trošak transporta iznosi pritom 7.050,00 $.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 4_11:

Zrakoplovna kompanija Fly-by-Night mora, zbog štrajka osoblja, prebaciti dio zrakoplova iz Chicaga i Atlante u Los Angeles, New York i Boston. Raspoloživa količina zrakoplova u Chicagu i Atlanti, potreba za zrakoplovima u Los Angelesu, New Yorku i Bostonu, kao i cijene transporta pojedinog zrakoplova (u tisućama $) prikazani su u tablici 4.12.

Tablica 4.12. *Zadatak 4_11: Jedinične cijene transporta.*

odredište / ***ishodište***	Los Angeles	New York	Boston	*raspoloživi zrakoplovi*
Chicago	8	5	7	**30**
Atlanta	9	4	8	**60**
traženi zrakoplovi	**20**	**40**	**20**	

a) Je li ovaj transportni problem zatvoren?
b) Koliki je broj varijabla odlučivanja, a koliki broj ograničenja ovog problema kada ga se učini zatvorenim?
c) Koji je optimalan plan transporta i kolika je ukupna cijena transporta zrakoplova?
d) Koliki bi bio trošak transporta kada bi menadžment kompanije tražio da se moraju prebaciti svi zrakoplovi iz Atlante?

Odgovor:

a) Riječ je o otvorenom transportnom problemu (ponuda veća od potražnje).
b) Kada se problem učini zatvorenim, imat će 8 varijabla odlučivanja i 6 ograničenja.
c) Optimalan plan transporta je: iz Chicaga 20 zrakoplova ide u LA i 10 u Boston, a iz Atlante 40 zrakoplova ide u New York i 10 u Boston, pri čemu 10 ostaje u Atlanti. Ukupna cijena transporta je 470 tisuća $.
d) Trošak transporta bi u tom slučaju bio 480 tisuća $.

Zadatak 4_12:

Tvrtka PLINCO ima pet plinara koje opskrbljuju plinom tri grada. Količina plina koju dnevno nudi svaka od plinara u m^3, količina plina koju potražuje svaki od gradova u m^3 te jedinična cijena transporta plina iz pojedine plinare do pojedinog grada (u kunama po m^3) prikazani su u tablici 4.13.

a) Koji je dnevni plan transporta plina za koji će ukupni troškovi biti minimalni?
b) Koliki bi bio trošak transporta kada bi menadžment tvrtke PLINCO tražio da se iz plinare **Plin_3** <u>mora</u> isporučiti sav ponuđeni plin?
c) Koliki bi bio trošak transporta kada bi menadžment tvrtke PLINCO tražio da se iz plinara **Plin_3** i **Plin_4** <u>mora</u> isporučiti sav ponuđeni plin?

Tablica 4.13. *Zadatak 4_12: Jedinične cijene transporta.*

grad / *plinara*	**Grad_1**	**Grad_2**	**Grad_3**	*ponuda plinara*
Plin_1	37	35	32	1000
Plin_2	36	33	34	900
Plin_3	42	34	38	1150
Plin_4	36	38	33	800
Plin_5	33	33	39	1300
potražnja gradova	1800	1350	1250	

Odgovor:

a) Optimalni plan transporta je: iz plinare 1 sva količina ide u grad 3; iz plinare 2 sva količina u grad 2; iz plinare 3 450 m^3 u grad 2, a 700 u fiktivni grad; iz plinare 4 500 m^3 u grad 1, 250 m^3 u grad 3 i 50 m^3 u fiktivni grad; iz plinare 5 sva količina u grad 1; ukupni trošak 146.150 kuna.
b) Ukupni bi trošak transporta bio 146.850 kuna.
c) Ukupni bi trošak transporta bio 146.900 kuna.

Zadatak 4_13:

U luci je potrebno ukrcati kontejnere iz četiriju skladišta u pet brodova. U tablici 4.14 prikazano je vrijeme (u min) potrebno za utovar jednog kontejnera iz pojedinog skladišta u pojedini brod, ponuda kontejnera u svakom od skladišta te potražnja pojedinog broda za kontejnerima.

Tablica 4.14. *Zadatak 4_13: Jedinične cijene transporta.*

brod / *skladište*	Brod_1	Brod_2	Brod_3	Brod_4	Brod_5	*ponuda skladišta*
Sklad_1	12	13	11	14	18	**200**
Sklad_2	16	12	18	9	11	**220**
Sklad_3	22	19	24	20	19	**180**
Sklad_4	28	26	31	28	33	**200**
potražnja brodova	**120**	**180**	**160**	**220**	**240**	

a) Koliki je ukupan broj varijabla odlučivanja zadanog transportnog problema (nakon što se učini zatvorenim)?
b) Koliki je u tom slučaju broj ograničenja?
c) Odrediti optimalan plan transporta kontejnera.
d) Koji je optimalan plan transporta ako se na brod 1 mora ukrcati sva tražena količina kontejnera?

Odgovor:

a) Broj varijabla odlučivanja je 25.
b) Razmatrani problem ima ukupno 10 ograničenja.
c) Optimalan plan transporta je: iz skladišta 1 40 kontejnera ide na brod 1, a 160 na brod 3; iz skladišta 2 svi kontejneri idu na brod 4; iz skladišta 3 svi kontejneri idu na brod 5; iz skladišta 4 20 kontejnera ide na brod 1, a 180 na brod 2; na brodove 1 i 5 ukrcat će se po 60 kontejnera manje od traženog broja; ukupni utrošak vremena je 12.880 minuta.
d) U ovom je slučaju optimalan plan sljedeći: iz skladišta 1 100 kontejnera ide na brod 1, a 100 na brod 3; iz skladišta 2 svi kontejneri idu na brod 4; iz skladišta 3 svi kontejneri idu na brod 5; iz skladišta 4 20 kontejnera ide na brod 1, a 180 na brod 2; na brodove 3 i 5 ukrcat će se po 60 kontejnera manje od traženog broja; ukupni utrošak vremena je 12.940 minuta.

4.6. Problem dodjeljivanja

Problem dodjeljivanja (asignacije) sastoji se u dodjeljivanju niza radnih zadataka nizu izvršitelja s ciljem optimiranja radnog učinka, pri čemu jedan radni zadatak može biti dodijeljen samo jednom izvršitelju a jedan izvršitelj može dobiti samo jedan radni zadatak.

Problem dodjeljivanja je specijalni oblik transportnog problema kod kojega se dodjeljivanje subjekta *i* objektu *j* može shvatiti kao transport jedinične količine (količine koja je jednaka 1) iz ishodišta *i* u odredište *j*. Dakle, u slučaju problema dodjeljivanja varijable odlučivanja mogu poprimiti vrijednost ili 1 (ako je *i* dodijeljeno *j*) ili vrijednost 0 (ako *i* nije dodijeljeno *j*). To nadalje znači da su varijable odlučivanja x_{ij}, i=1,..., m; j=1, ..., n; binarni brojevi (0 ili 1).

Ovaj se problem može primijeniti na više različitih tipova dodjeljivanja, npr. dodjeljivanje radnih zadataka radnicima, područja prodaje pojedinim predstavnicima, rukopisa urednicima, određivanje strojeva kojima će se obaviti pojedini poslovi i slično.

Ako je npr. poznata efikasnost pojedinog radnika, tada je funkcija cilja ukupna efikasnost koju treba maksimalizirati, a ako su zadana vremena koja će pojedini radnici utrošiti na pojedini posao, funkcija cilja je ukupno utrošeno vrijeme i treba je minimizirati.

Ako je broj subjekata *i* jednak broju objekata *j* ($m = n$), riječ je o zatvorenom problemu dodjeljivanja. U suprotnom se radi o otvorenom problemu dodjeljivanja koji se rješava na sličan način kao i otvoreni transportni problem: ako je broj subjekata veći od broja objekata ($m > n$), treba dodati potreban broj fiktivnih objekata ($n_f = m - n$), a ako je broj objekata veći od broja subjekata ($n > m$), treba dodati potreban broj fiktivnih subjekata ($m_f = n - m$).

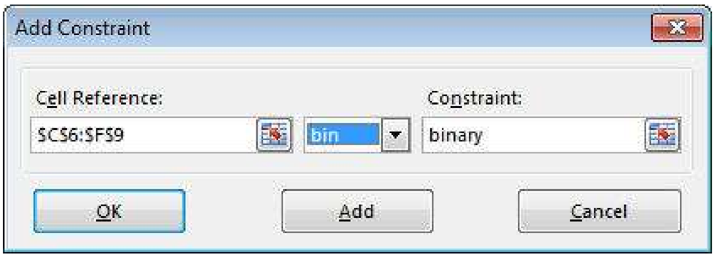
Ograničenja kod problema dodjeljivanja slijede iz definicije samog problema, npr. da jedan posao može biti dodijeljen samo jednom radniku:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.19}$$

te da jedan radnik može obaviti samo jedan posao:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.20}$$

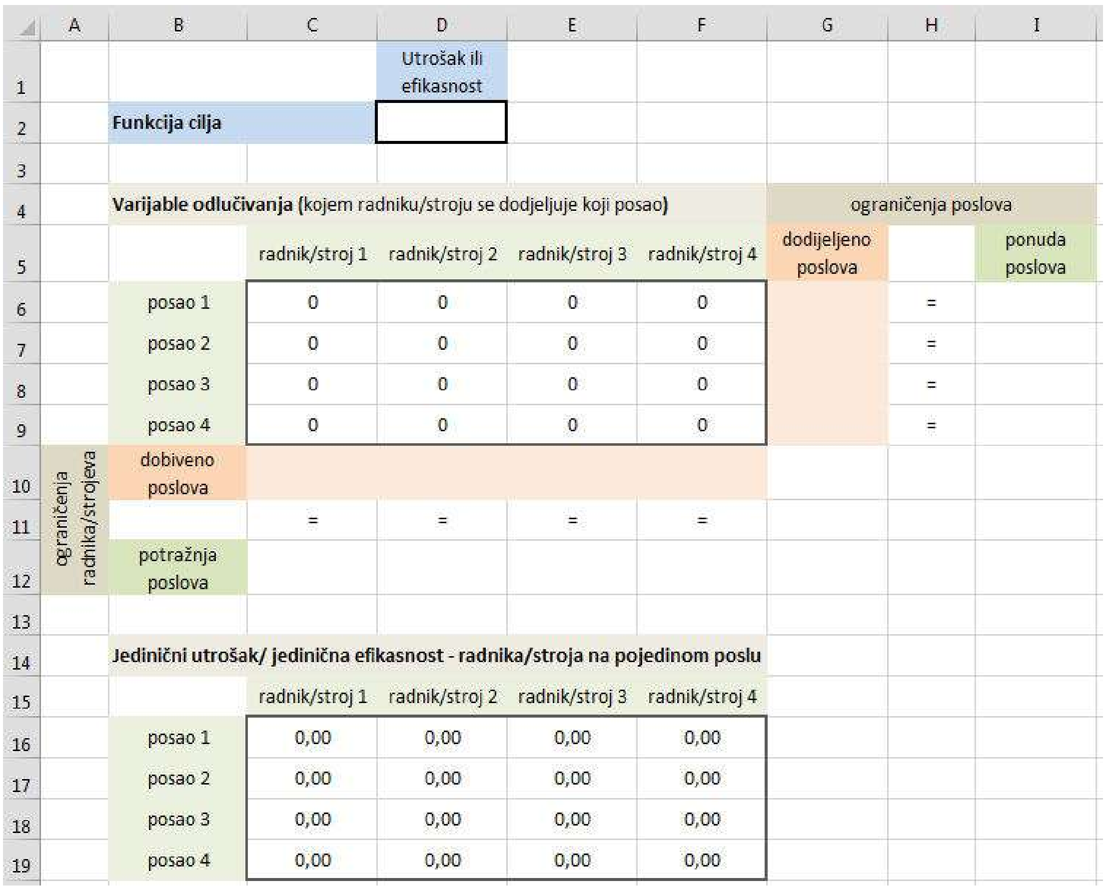
Uz to, treba sve varijable odlučivanja definirati kao binarne, što znači da u Solverovu dijaloškom okviru *Add Constraint* treba za raspon ćelija u kojima su varijable odlučivanja (u polju *Cell Reference:*) odabrati *bin* u srednjem polju (slika 4.70):



Slika 4.70. *Dijaloški okvir* Add Constraint*: definiranje binarnih varijabla.*

nakon čega će se u polju *Constraint:* pojaviti natpis ***binary***.

Pri rješavanju problema dodjeljivanja koristit će se predložak ASIGNACIJA (slika 4.71), koji je gotovo identičan predlošku TRANSPORT (slike 4.60 i 4.62), samo što će, zbog činjenice da jedan posao može biti dodijeljen samo jednom radniku/stroju, odnosno zbog činjenice da jedan radnik/stroj može obaviti samo jedan posao, u ćelijama stupca „**ponuda poslova**“, odnosno u ćelijama retka „**potražnja poslova**“ biti samo jedinice. U ćelijama stupca „**dodijeljeno poslova**“ izračunavaju se sume pojedinih redaka, a u ćelijama retka „**dobiveno poslova**“ sume pojedinih stupaca. Treba voditi računa da je i kod ovog problema riječ o linearnom modelu i ne-negativnim varijablama odlučivanja (odabrati u *Solver Parameters*).



Slika 4.71. *Predložak ASIGNACIJA.*

Primjer 4.20.

Tvrtka OBRADA raspolaže s četiri stroja i ima isto toliko poslova koje na njima treba obaviti. Svakom stroju može biti dodijeljen samo jedan posao. Vrijeme potrebno za prilagodbu postavaka pojedinog stroja za odrađivanje svakog od poslova prikazano je u tablici 4.15.

Tablica 4.15. *Primjer 4.20: Vrijeme potrebno za prilagodbu postavaka pojedinog stroja.*

stroj / ***posao***	Vrijeme za prilagodbu u **h**			
	S1	S2	S3	S4
P1	14	2	7	2
P2	5	12	8	4
P3	8	6	3	6
P4	7	5	9	10

Raspodijeliti poslove na strojeve (samo po jedan posao na jedan stroj) tako da vrijeme utrošeno na prilagodbu postavaka strojeva bude minimalno.

Rješenje:

Budući da tvrtka raspolaže s četiri stroja, a jednak je i broj poslova koji se na strojevima trebaju odraditi, zaključuje se kako je riječ o zatvorenom problemu dodjeljivanja.

Varijable odlučivanja: x_{ij} = 1 ako je posao i dodijeljen stroju j, u suprotnom je x_{ij} =0, a kako se radi o 4 posla i 4 stroja, broj tih varijabla je 4·4=16.

Funkcija cilja (koju treba minimizirati):

$$FC = T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} t_{ij} \cdot x_{ij} = 14 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 8 \cdot x_{13} + 7 \cdot x_{14} + 2 \cdot x_{21} + 12 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23} + 5 \cdot x_{24} +$$
$$+ 7 \cdot x_{31} + 8 \cdot x_{32} + 3 \cdot x_{33} + 9 \cdot x_{34} + 2 \cdot x_{41} + 4 \cdot x_{42} + 6 \cdot x_{43} + 10 \cdot x_{44}\,.$$

Ograničenja:

- broj strojeva kojima može biti dodijeljen posao P1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad (1)$$

- broj strojeva kojima može biti dodijeljen posao P2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad (2)$$

- broj strojeva kojima može biti dodijeljen posao P3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad (3)$$

- broj strojeva kojima može biti dodijeljen posao P4:

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad (4)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad (5)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \qquad (6)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S3:

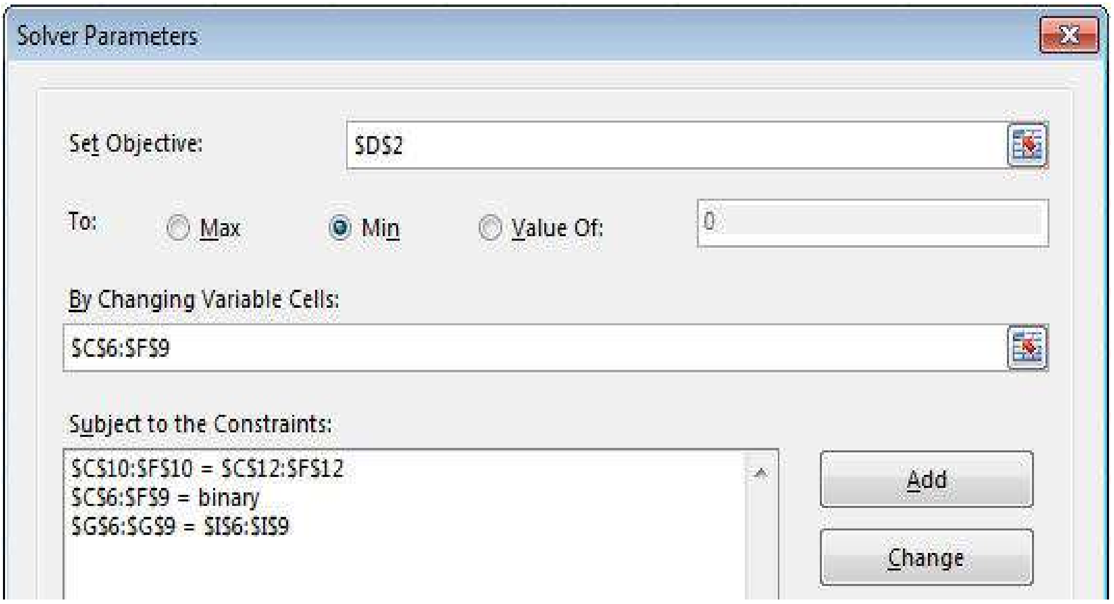
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \qquad (7)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \qquad (8)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi i uz to binarni (0 ili 1).

Na slici 4.72 prikazan je konačni izgled dijaloškog okvira *Solver Parameters*, s podatcima o funkciji cilja, varijablama odlučivanja i svim potrebnim ograničenjima. Posebnost je samo u podatcima o ograničenjima gdje je naglašeno da su u rasponu ćelija u kojima su varijable odlučivanja sve veličine binarni brojevi.



Slika 4.72. *Primjer 4.20: Prilagođavanje dijaloškog okvira* Solver Parameters.

Nakon prilagodbe predloška ASIGNACIJA i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.73.

Napomena: Iz polja *Subject to the Constraints* ovoga primjera vidljivo je da se ograničenja s jednakim operatorom (<=, = ili >=) mogu skraćeno navesti i kao raspon ćelija. Korisniku to omogućuje brži rad s dijaloškim okvirom *Solver Parameters*.

Može se zaključiti da će se najmanje sati, njih 15, utrošiti na prilagodbu strojeva ako se posao P1 dodijeli stroju S4, posao P2 stroju S1, posao P3 stroju S3, a posao P4 stroju S2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Utrošak ili efikasnost					
2		Funkcija cilja		15					
3									
4		**Varijable odlučivanja** (kojem radniku/stroju se dodjeljuje koji posao)					ograničenja poslova		
5			S1	S2	S3	S4	dodijeljeno poslova		ponuda poslova
6		P1	0	0	0	1	1	=	**1**
7		P2	1	0	0	0	1	=	**1**
8		P3	0	0	1	0	1	=	**1**
9		P4	0	1	0	0	1	=	**1**
10	ograničenja radnika/strojeva	dobiveno poslova	1	1	1	1			
11			=	=	=	=			
12		potražnja poslova	**1**	**1**	**1**	**1**			
13									
14		**Jedinični utrošak/ jedinična efikasnost - radnika/stroja na pojedinom poslu**							
15			S1	S2	S3	S4			
16		P1	14,00	2,00	7,00	2,00			
17		P2	5,00	12,00	8,00	4,00			
18		P3	8,00	6,00	3,00	6,00			
19		P4	7,00	5,00	9,00	10,00			

Slika 4.73. *Primjer 4.20: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Primjer 4.21.

Poslodavac treba raspodijeliti 4 posla na 4 svoja radnika (svakom radniku samo po jedan posao) pri čemu je u tablici 4.16 prikazana dnevna dobit po svakom od radnika pri obavljanju pojedinog od poslova.

Tablica 4.16. *Primjer 4.21: Dnevna dobit po radniku i stroju.*

radnik / *posao*	Dnevna dobit u €			
	R1	R2	R3	R4
P1	22	18	26	16
P2	18	-	20	22
P3	30	27	28	17
P4	18	22	28	14

Crtica u tablici znači da taj radnik (R2) ne može obavljati taj posao (P2). Kako poslodavac treba raspodijeliti poslove da ostvari najveću dnevnu dobit?

Rješenje:

Poslodavac ima 4 radnika za isto toliko poslova pa se može ustvrditi kako je riječ o zatvorenom problemu dodjeljivanja.

Varijable odlučivanja: x_{ij} = 1 ako je posao i dodijeljen radniku j, u suprotnom je x_{ij} =0, a kako se radi o 4 stroja i 4 posla, broj tih varijabla je 4·4=16.

Funkcija cilja (koju treba maksimizirati):

$$F_C = \pi = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} d_{ij} \cdot x_{ij} = 22 \cdot x_{11} + 18 \cdot x_{12} + 30 \cdot x_{13} + 18 \cdot x_{14} + 18 \cdot x_{21} + (-1000) \cdot x_{22} + 27 \cdot x_{23} + $$
$$+ 22 \cdot x_{24} + 26 \cdot x_{31} + 20 \cdot x_{32} + 28 \cdot x_{33} + 28 \cdot x_{34} + 6 \cdot x_{41} + 22 \cdot x_{42} + 17 \cdot x_{43} + 14 \cdot x_{44} .$$

Napomena: Kako radnik R2 ne može obaviti posao P2, treba spriječiti da mu se taj posao dodijeli i to upisivanjem velikoga gubitka (negativne dobiti) toga radnika na tom poslu (u ovom slučaju upisan je gubitak od 1000 €).

Ograničenja:

- broj radnika kojima može biti dodijeljen posao P1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad (1)$$

- broj radnika kojima može biti dodijeljen posao P2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad (2)$$

- broj radnika kojima može biti dodijeljen posao P3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad (3)$$

- broj radnika kojima može biti dodijeljen posao P4:

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad (4)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti radniku R1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad (5)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti radniku R 2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \qquad (6)$$

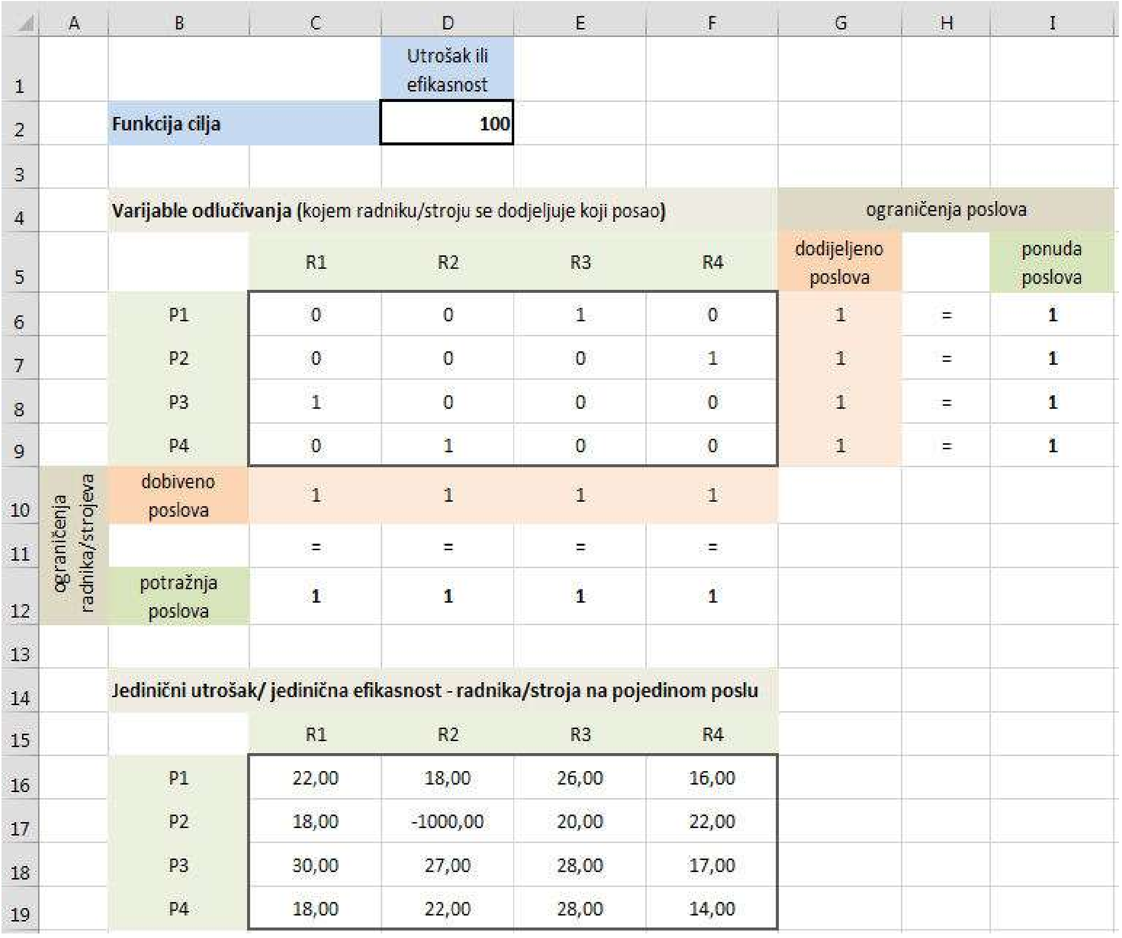
- broj poslova koji se mogu dodijeliti radniku R 3:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \qquad (7)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti radniku R 4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \qquad (8)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi i uz to binarni (0 ili 1).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Utrošak ili efikasnost					
2		**Funkcija cilja**		**100**					
3									
4		**Varijable odlučivanja** (kojem radniku/stroju se dodjeljuje koji posao)					ograničenja poslova		
5			R1	R2	R3	R4	dodijeljeno poslova		ponuda poslova
6		P1	0	0	1	0	1	=	**1**
7		P2	0	0	0	1	1	=	**1**
8		P3	1	0	0	0	1	=	**1**
9		P4	0	1	0	0	1	=	**1**
10	ograničenja radnika/strojeva	dobiveno poslova	1	1	1	1			
11			=	=	=	=			
12		potražnja poslova	**1**	**1**	**1**	**1**			
13									
14		**Jedinični utrošak/ jedinična efikasnost - radnika/stroja na pojedinom poslu**							
15			R1	R2	R3	R4			
16		P1	22,00	18,00	26,00	16,00			
17		P2	18,00	-1000,00	20,00	22,00			
18		P3	30,00	27,00	28,00	17,00			
19		P4	18,00	22,00	28,00	14,00			

Slika 4.74. *Primjer 4.21: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Nakon prilagodbe predloška ASIGNACIJA i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 4.74.

Poslodavac će najveću dobit u iznosu od 100,00 € ostvariti ako posao P1 dodijeli radniku R3, posao P2 radniku R4, posao P3 radniku R1 te posao P4 radniku R2.

Primjer 4.22.

U poduzeću "RUBCO" pojavila se potreba za obavljanjem triju vrsta poslova, za što je potrebno angažirati vanjske suradnike. Na natječaj su se prijavila četiri kandidata. Kandidati su testirani na poslovima koje je potrebno obaviti, a vremena koja su im potrebna za obavljanje svakog pojedinog posla prikazana su u tablici 4.17.

Tablica 4.17. *Primjer 4.22: Potrebna vremena kandidata na pojedinim poslovima.*

kandidat / *posao*	Vrijeme u minutama			
	K1	K2	K3	K4
P1	9	6	20	19
P2	8	12	14	18
P3	15	9	14	-

Crtica u tablici znači da taj kandidat (K4) ne može obavljati taj posao (P3).

Kako poslodavac treba raspodijeliti poslove a da utrošak vremena na obavljanje poslova bude minimalan?

Rješenje:

Poslodavac ima 4 kandidata za 3 posla koje treba obaviti pa možemo ustvrditi kako je riječ o otvorenom problemu dodjeljivanja. Stoga se dodaje četvrti, fiktivni posao P4 za obavljanje kojega svim kandidatima treba nulto vrijeme (0 minuta).

Kako kandidat K4 ne može obaviti posao P3, mora se spriječiti da mu se taj posao dodijeli i to upisivanjem velikog potrebnog vremena za obavljanje tog posla (u ovom slučaju upisano je vrijeme od 1000 minuta).

Sve navedeno prikazano je u tablici 4.18.

Tablica 4.18. *Primjer 4.22: Korigirana tablica s vremenima kandidata.*

kandidat / ***posao***	Vrijeme u minutama			
	K1	K2	K3	K4
P1	9	6	20	19
P2	8	12	14	18
P3	15	9	14	**1000**
P4	**0**	**0**	**0**	**0**

Varijable odlučivanja: x_{ij} = 1 ako je posao ***i*** dodijeljen kandidatu ***j***, u suprotnom će biti x_{ij} =0, a kako se radi o 4 posla i 4 kandidata, broj tih varijabla je ukupno 4·4=16.

Funkcija cilja je vrijeme za koje će kandidati obaviti poslove (koju treba minimizirati):

$$F_C = T = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} t_{ij} \cdot x_{ij} = 9 \cdot x_{11} + 6 \cdot x_{12} + 20 \cdot x_{13} + 19 \cdot x_{14} + 8 \cdot x_{21} + 12 \cdot x_{22} + 14 \cdot x_{23} +$$

$$+ 18 \cdot x_{24} + 15 \cdot x_{31} + 9 \cdot x_{32} + 14 \cdot x_{33} + (1000) \cdot x_{34} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} + 0 \cdot x_{43} + 0 \cdot x_{44} .$$

Ograničenja su:

- broj kandidata kojima se može dodijeliti posao P1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad (1)$$

- broj kandidata kojima se može dodijeliti posao P2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad (2)$$

- broj kandidata kojima se može dodijeliti posao P3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad (3)$$

- broj kandidata kojima se može dodijeliti posao P4:

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad (4)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti kandidatu K1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad (5)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti kandidatu K2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \qquad (6)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti kandidatu K3:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \qquad (7)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti kandidatu K4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \qquad (8)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi i uz to binarni (0 ili 1).

Nakon prilagodbe predloška ASIGNACIJA i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Solvera su dobiveni rezultati prikazani na slici 4.75.

Poduzeće će angažirati kandidate K1, K2 i K3, dok će bez posla ostati kandidat K4 (njemu je u optimalnom rješenju dodijeljen fiktivni posao P4).

Najmanje će se vremena (28 minuta) utrošiti ako se posao P1 dodijeli kandidatu K2, posao P2 kandidatu K1 te posao P3 kandidatu K3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		OPIS		Utrošak ili efikasnost					
2		Funkcija cilja		28					
3									
4		Varijable odlučivanja (kojem radniku/stroju se dodjeljuje koji posao)					ograničenja poslova		
5			K1	K2	K3	K4	dodijeljeno poslova		ponuda poslova
6		P1	0	1	0	0	1	=	1
7		P2	1	0	0	0	1	=	1
8		P3	0	0	1	0	1	=	1
9		P4	0	0	0	1	1	=	1
10	ograničenja radnika/strojeva	dobiveno poslova	1	1	1	1			
11			=	=	=	=			
12		potražnja poslova	1	1	1	1			
13									
14		Jedinični utrošak/ jedinična efikasnost - radnika/stroja na pojedinom poslu							
15			K1	K2	K3	K4			
16		P1	9,00	6,00	20,00	19,00			
17		P2	8,00	12,00	14,00	18,00			
18		P3	15,00	9,00	14,00	1000,00			
19		P4	0,00	0,00	0,00	0,00			

Slika 4.75. *Primjer 4.22: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Primjer 4.23.

U poduzeću "RUBCO" treba obaviti 4 vrste poslova, a na raspolaganju su 3 stroja. Upotreba navedenih strojeva za obavljanje zadanih poslova omogućuje proizvodnju količine gotovih proizvoda u jednoj smjeni, kako je to prikazano u tablici 4.19. Crtica u tablici znači da taj stroj (S2) ne može obavljati taj posao (P2).

Tablica 4.19. *Primjer 4.23: Količine gotovih proizvoda.*

stroj / ***posao***	Broj proizvoda u smjeni		
	S1	S2	S3
P1	13	14	12
P2	15	-	18
P3	15	18	16
P4	16	15	16

Kako poslodavac treba raspodijeliti poslove a da broj gotovih proizvoda u smjeni bude najveći?

Rješenje:

Poslodavac ima 3 stroja za 4 posla koje treba obaviti pa možemo ustvrditi kako je riječ o otvorenom problemu dodjeljivanja. Stoga se dodaje četvrti, fiktivni stroj S4, koji će tijekom smjene proizvesti nultu količinu proizvoda bez obzira na dodijeljeni posao. Kako stroj S2 ne može obaviti posao P2, moramo spriječiti da mu se taj posao dodijeli i to upisivanjem velikoga negativnog broja proizvoda (-1000 u ovom slučaju). Količine gotovih proizvoda zatvorenog problema dodjeljivanja dane su u tablici 4.20.

Tablica 4.20. *Primjer 4.23: Korigirana tablica s količinama gotovih proizvoda.*

stroj / ***posao***	Broj proizvoda u smjeni			
	S1	S2	S3	**S4**
P1	13	14	12	**0**
P2	15	**-1000**	18	**0**
P3	15	18	16	**0**
P4	16	15	16	**0**

Varijable odlučivanja:

x_{ij} = 1 ako je posao ***i*** dodijeljen stroju ***j***, u suprotnom je x_{ij} =0, a kako imamo 4 posla i 4 stroja, broj tih varijabla je ukupno 4·4=16. Funkcija cilja je količina proizvoda Q koja će se proizvesti u jednoj smjeni (i koju treba maksimizirati):

$$F_C = Q = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} q_{ij}\cdot x_{ij} = 13\cdot x_{11} + 14\cdot x_{12} + 12\cdot x_{13} + 0\cdot x_{14} + 15\cdot x_{21} + (-1000)\cdot x_{22} + 18\cdot x_{23} +$$
$$+ 0\cdot x_{24} + 15\cdot x_{31} + 18\cdot x_{32} + 16\cdot x_{33} + 0\cdot x_{34} + 16\cdot x_{41} + 15\cdot x_{42} + 16\cdot x_{43} + 0\cdot x_{44}\,.$$

Ograničenja:

- broj strojeva kojima se može dodijeliti posao P1:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad (1)$$

- broj strojeva kojima se može dodijeliti posao P2:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad (2)$$

- broj strojeva kojima se može dodijeliti posao P3:

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad (3)$$

- broj strojeva kojima se može dodijeliti posao P4:

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad (4)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S1:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad (5)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S2:

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \qquad (6)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S3:

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \qquad (7)$$

- broj poslova koji se mogu dodijeliti stroju S4:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \qquad (8)$$

- sve varijable odlučivanja x_{ij} moraju biti pozitivni brojevi i uz to binarni (0 ili 1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Utrošak ili efikasnost					
2		Funkcija cilja		52					
3									
4		Varijable odlučivanja (kojem radniku/stroju se dodjeljuje koji posao)					ograničenja poslova		
5			S1	S2	S3	S4	dodijeljeno poslova		ponuda poslova
6		P1	0	0	0	1	1	=	1
7		P2	0	0	1	0	1	=	1
8		P3	0	1	0	0	1	=	1
9		P4	1	0	0	0	1	=	1
10	ograničenja radnika/strojeva	dobiveno poslova	1	1	1	1			
11			=	=	=	=			
12		potražnja poslova	1	1	1	1			
13									
14		Jedinični utrošak/ jedinična efikasnost - radnika/stroja na pojedinom poslu							
15			S1	S2	S3	S4			
16		P1	13,00	14,00	12,00	0,00			
17		P2	15,00	-1000,00	18,00	0,00			
18		P3	15,00	18,00	16,00	0,00			
19		P4	16,00	15,00	16,00	0,00			

Slika 4.76. *Primjer 4.23: Prilagođeni predložak i rješenje primjera.*

Nakon prilagodbe predloška ASIGNACIJA i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Solvera su dobiveni rezultati prikazani na slici 4.76.

Optimalno rješenje (52 proizvoda u jednoj smjeni) postići će se ako se posao P1 dodijeli fiktivnom stroju S4 (tj. posao P1 neće se obaviti), posao P2 dodijeli stroju S3, posao P3 stroju S2 i, konačno, posao P4 stroju S1.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 4_14:

Proizvodno poduzeće ima na raspolaganju 4 stroja i potrebu za obavljanjem 5 poslovnih zadataka na tim strojevima, pri čemu se jedan poslovni zadatak može dodijeliti samo jednom stroju. U tablici 4.21 prikazani su radni sati pojedinog stroja potrebni za obavljanje pojedinog od poslovnih zadataka.

Stroj S3 nije osposobljen za izvršavanje poslovnog zadatka P2, a menadžment zahtijeva da se zadatak P4 svakako obavi.

Tablica 4.21. *Zadatak 4_14: Utrošak sati stroja po pojedinom proizvodu.*

stroj / *posao*	S1	S2	S3	S4
P1	4	4,5	5	3,5
P2	6	5	-	5
P3	5	4,5	4,5	4
P4	7	6	7,5	6,5
P5	3,5	4	5	3

a) Je li ovaj problem asignacije zatvoren?
b) Koji poslovni zadatak treba dodijeliti pojedinom stroju tako da ukupno vrijeme obavljanja zadataka bude minimalno?
c) Koliki je broj varijabla odlučivanja, a koliki broj ograničenja (ne uzimajući u obzir ograničenja koja kazuju da su varijable odlučivanja binarni brojevi) ovog problema kada ga se učini zatvorenim?

Odgovor:

a) Riječ je o otvorenom problemu asignacije (broj poslova veći od broja strojeva).
b) Najmanje vremena (17,5 sati) bit će utrošeno na obavljanje poslovnih zadataka ako se P1 dodijeli stroju S1, P3 stroju S3, P4 stroju S2 i P5 stroju S4 (posao P2 neće se obaviti).
c) Kada se problem učini zatvorenim, ima 25 varijabla odlučivanja i 10 ograničenja.

Zadatak 4_15:

Trener plivača priprema natjecatelje za sveučilišno prvenstvo i to za štafetu 4x100 metara u kojoj svaki od četiriju plivača pliva svoj stil (po 100 metara). U tablici 4.22 prikazano je 5 najboljih plivača i njihova vremena (u sekundama) na 100 metara u tri plivačka stila za koja vrši odabir jer već ima prvaka koji će plivati dionicu leptirovim stilom.

Tablica 4.22. *Zadatak 4_15: Vremena plivača po pojedinim disciplinama*

plivač / *stil*	Toni	Joskan	Mate	Špiro	Ivan
leđno	74	68	75	66	66
prsno	67	84	87	84	66
slobodno	59	65	58	59	53

a) Kojega će plivača trener odabrati za pojedini stil ako ukupno vrijeme plivanja mora biti minimalno?
b) Tko će plivati pojedini stil ako treneru dođe naredba „odozgo" da Joskan mora plivati u štafeti?
c) Tko će plivati pojedini stil ako treneru dođe naredba „odozgo" da Joskan mora plivati u štafeti i to baš dionicu slobodnim stilom?

Odgovor:

a) Špiro će plivati leđno, Toni prsno, a Ivan slobodno; ukupno vrijeme plivanja je 186 sekunda.
b) Joskan će plivati leđno, Toni prsno, a Ivan slobodno; ukupno vrijeme plivanja je 188 sekunda.
c) Špiro će plivati leđno, Ivan prsno, a Joskan slobodno; ukupno vrijeme plivanja je 197 sekunda.

Zadatak 4_16:

Predstojnik zavoda mora rasporediti 4 kolegija na 5 nastavnika zavoda koji su već uglavnom izvodili te kolegije. Predstojniku su poznate ocjene kojima su studenti ocijenili rad pojedinog nastavnika na pojedinom kolegiju (prikazano u tablici 4.23), a on bi kolegije htio rasporediti tako da zbroj studentskih ocjena nastavnicima na razmatranim kolegijima bude najveći. Nastavnik Nast_1 nema iskustva na kolegiju Kol_4, a nastavnik Nast_3 na kolegiju Kol_2.

Tablica 4.23. *Zadatak 4_16: Studentsko vrednovanje nastavnika po kolegijima.*

nastavnik / *kolegij*	**Nast_1**	**Nast_2**	**Nast_3**	**Nast_4**	**Nast_5**
Kol_1	4,3	4,0	4,0	3,9	4,1
Kol_2	3,8	4,4	-	4,5	4,2
Kol_3	4,2	4,6	4,2	4,0	3,8
Kol_4	-	3,9	4,4	3,9	4,2

a) Koji kolegij treba dati kojemu nastavniku tako da zbroj ocjena studenata bude najveći?
b) Koje bi bilo optimalno rješenje ako, iz nekog određenog razloga, nastavnik Nast_4 mora dobiti neki od kolegija?

Odgovor:

a) Predstojnik treba rasporediti kolegije na sljedeći način: Kol_1 nastavniku Nast_1, Kol_2 nastavniku Nast_4, Kol_3 nastavniku Nast_2 i Kol_4 nastavniku Nast_3; zbroj studentskih ocjena u je 17,8.

b) Raspored kolegija po nastavnicima ostao bi isti izuzev kolegija Kol_4 koji bi bio dodijeljen nastavniku Nast_5; zbroj studentskih ocjena u tom bi slučaju bio 17,6.

5. ZA ONE KOJI ŽELE ZNATI VIŠE

5.1. Simpleks metoda

U ovom će se poglavlju prikazati algoritam za rješavanje problema linearnog programiranja. Algoritam je poznat pod nazivom *simpleks algoritam* ili *simpleks metoda*. Tu je metodu predložio Georg Dantzig 1947. godine, a temelji se na Gauss-Jordanovu postupku numeričkog rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžba.

Svrha prikazivanja simpleks metode jest pružanje uvida korisniku u to što u stvari u svom radu koristi Excelov Solver, ali i bilo koji drugi profesionalni alat za rješavanje problema linearnog programiranja. Stoga se ovdje neće posebno razmatrati problemi degeneracije, neograničenog izvedivog područja, kao ni problemi koji su neizvedivi (kod kojih izvedivo područje niti ne postoji).

5.1.1. Pretvorba standardnog problema maksimuma u kanonski oblik

Kako je to prikazano u četvrtome poglavlju, standardni problem maksimuma linearnog programiranja glasi:

- Odredi maksimum funkcije cilja

$$F_C = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_ix_i + \ldots + c_nx_n$$

uz ograničenja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{ji}x_i + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$$

i uz nenegativne varijable odlučivanja:

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_i \ge 0, \ldots x_n \ge 0\,.$$

Kako bi se mogla primijeniti simpleks metoda, potrebno je ovaj problem zapisati u kanonskom obliku, tj. potrebno je znakove nejednakosti u svim nejednadžbama (ograničenjima) zamijeniti znakovima jednakosti.

Ta se pretvorba u kanonski oblik vrši na sljedeći način:

- svaka nejednadžba oblika:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n \leq b_j$$

pretvara se u jednadžbu oblika:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n + s_j = b_j ,$$

gdje je s_j dodana, nenegativna varijabla ($s_j \geq 0$);

- svaka nejednadžba oblika:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n \geq b_j$$

pretvara se u jednadžbu oblika:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n - s_j = b_j ,$$

gdje je s_j dodana, nenegativna varijabla ($s_j \geq 0$);

- funkcija cilja prelazi u sljedeći oblik:

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_ix_i - ... - c_nx_n + F_C = 0;$$

- posebno, u slučaju rješavanja standardnog problema minimuma, treba promijeniti predznak funkcije cilja pa tražiti $\max(-F_C)$.

Iako su u dosadašnjem radu razmatrani samo oni problemi kod kojih su varijable odlučivanja isključivo nenegativne, simpleks metoda može se „nositi“ i s varijablama koje mogu poprimiti bilo koji predznak. U tom se slučaju ta varijabla, npr. x_i, prikazuje kao razlika dviju novih varijabla $x_i^{'}$ i $x_i^{''}$, koje su obje nenegativne:

$$x_i = x_i^{'} - x_i^{''} .$$

Sukladno navedenomu kanonski oblik maksimuma je:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n + s_1 + 0 + ... + 0 + ... + 0 + 0 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2n}x_n + 0 + s_2 + ... + 0 + ... + 0 + 0 = b_2$$

$$...$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n + 0 + 0 + ... + s_j + ... + 0 + 0 = b_j$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mi}x_i + ... + a_{mn}x_n + 0 + 0 + ... + 0 + ... + s_m + 0 = b_m$$

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_ix_i - ... - c_nx_n + 0 + 0 + ... + 0 + ... + F_C = 0 .$$

Može se zaključiti da prikazani problem ima *n*+*m*+1 nepoznanicu ($x_i, i = 1, ..., n$; $s_j, j = 1, ..., m$; te F_C), a *m*+1 jednadžbu.

5.1.2. Kreiranje simpleks tablice

Nakon pretvaranja standardnog problema maksimuma u kanonski oblik kreira se simpleks tablica sljedećeg oblika, u kojoj su R_1 do R_m oznake redaka ograničenja, a R_C je redak funkcije cilja:

R_1	$a_{11}x_1$	$a_{12}x_2$	...	$a_{1i}x_i$	...	$a_{1n}x_n$	s_1	0	...	0	...	0	0	b_1
R_2	$a_{21}x_1$	$a_{22}x_2$	...	$a_{1i}x_i$	...	$a_{1n}x_n$	0	s_2	...	0	...	0	0	b_2
...														
R_j	$a_{j1}x_1$	$a_{j2}x_2$	...	$a_{ji}x_i$	...	$a_{jn}x_n$	0	0	...	s_j	...	0	0	b_j
...														
R_m	$a_{m1}x_m$	$a_{m2}x_2$	...	$a_{mi}x_i$	...	$a_{mn}x_n$	0	0	...	0	...	s_m	0	b_m
R_C	$-c_1x_1$	$-c_2x_2$	...	$-c_ix_i$	...	$-c_nx_n$	0	0	...	0	...	0	F_C	0

Ta se tablica sada može prikazati u obliku pogodnijem za izračun:

redak	*varijable odlučivanja*						*dodatne varijable i F_C*							*desna strana*
	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	s_1	s_2	...	s_j	...	s_m	F_C	
R_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1i}	...	a_{1n}	1	0	...	0	...	0	0	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2i}	...	a_{1n}	0	1	...	0	...	0	0	b_2
...														
R_j	a_{j1}	a_{j2}	...	a_{ji}	...	a_{jn}	0	0	...	1	...	0	0	b_j
...														
R_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mi}	...	a_{mn}	0	0	...	0	...	1	0	b_m
R_C	$-c_1$	$-c_2$	...	$-c_i$	...	$-c_n$	0	0	...	0	...	0	1	0

U početnoj simpleks tablici svim varijablama odlučivanja x_1, x_2 ... , x_i, ... x_n, pridodana je nulta početna vrijednost.

Dodatne varijable u toj tablici su s_1, s_2 ... , s_j ... s_m, a njihove su početne vrijednosti jednake desnim stranama odgovarajućih ograničenja: $s_1 = b_1$, $s_2 = b_2$ do $s_m = b_m$.

Početna vrijednost funkcije cilja jednaka je nuli ($F_C = 0$).

Gore prikazane simpleks tablice podrazumijevaju po volji veliki broj i varijabla odlučivanja i ograničenja. Kako bi prikaz bio jednostavniji, razmotrit će se, u općim brojevima, problem maksimuma s dvije varijable odlučivanja i tri ograničenja:

$$F_C = c_1 \cdot x + c_2 \cdot y,$$

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \le b_1, \qquad (1)$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \le b_2, \qquad (2)$$

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y \le b_3. \qquad (3)$$

Kanonski oblik tog problema je:

$$-c_1 \cdot x - c_2 \cdot y + F_C = 0,$$

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + s_1 = b_1,$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + s_2 = b_2,$$

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + s_3 = b_3,$$

gdje su s_1, s_2 i s_3 dodatne varijable.

Simpleks tablica razmatranog problema, prilagođena za izračun, poprima sljedeći oblik.

redak	*varijable odlučivanja*		*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*
	x	y	s_1	s_2	s_3	F_C	
R_1	a_{11}	a_{12}	1	0	0	0	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	0	1	0	0	b_2
R_3	a_{31}	a_{32}	0	0	1	0	b_3
R_C	$-c_1$	$-c_2$	0	0	0	1	0

Slijedi postupak izračuna optimuma, koji se sastoji iz sljedećih koraka:

1. Odabire se *pivot stupac*. Za pivot stupac odabire se onaj stupac koji u retku funkcije cilja R_C ima negativan broj s najvećom apsolutnom vrijednosti (najnegativniji broj). Neka je to npr. stupac i.
2. Slijedi „potraga“ za *pivot retkom*. Taj se redak odabire tako da se izračunaju omjeri desnih strana i odgovarajućih elemenata pivot stupca.
   Za početnu tablicu i pivot stupac i ti bi omjeri bili: a_{1i}/b_1, a_{2i}/b_2 ..., a_{ji}/b_j, do a_{mi}/b_m.
   Sada se za pivot redak odabire onaj kojemu je taj omjer najmanji.
   Element na presjecištu pivot stupca i pivot retka naziva se *pivot element*.
3. U trećem se koraku svi članovi pivot retka dijele s pivot elementom. Ideja je da se na mjestu pivot elementa dobije jedinica (1).
4. Sada se vrše operacije nad svim ostalim redcima na način da se svakom retku dodaje ili oduzima pivot redak (s jediničnim pivot elementom) pomnožen s brojem tako da mu se nakon te operacije vrijednost elementa u pivot stupcu izjednači s nulom.
5. Koraci opisani u točkama 1 do 4 ponavljaju se sve dok postoji barem jedan element u retku funkcije cilja RC koji je manji od nule.
   Ako takvih elemenata više nema, postignuto je optimalno rješenje, a iznos optimuma odgovara vrijednosti elementa na presjecištu retka R_C i stupca F_C.

Opisani postupak je numerički i ima onoliko koraka koliko je potrebno da se dođe do optimalnog rješenja. U svakom koraku, zbog operacija koje se izvode među redcima, neke bazične varijable postaju nebazične, a neke nebazične postaju bazične, ovisno o tome zadovoljavaju li elementi njihova stupca ranije opisani uvjet (svi elementi stupca 0 osim jednoga) ili ne. Pri tome postoje dva temeljna pravila:

1. *Pivot stupac je onaj stupac kojemu je koeficijent u retku funkcije cilja negativan broj s najvećim apsolutnim iznosom. Ako u retku funkcije cilja više nema negativnih brojeva, postignuto rješenje je optimalno.*
2. *Pivot redak je onaj redak kojemu je omjer desne strane i elementa tog retka u pivot stupcu minimalan.*

Opisani će se postupak pojasniti na primjeru koji slijedi.

Primjer 5.1.

Zadana je funkcija cilja:

$$F_C = 3 \cdot x + 2 \cdot y \,.$$

Odrediti maksimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$2 \cdot x + y \leq 4 \qquad (1)$$

$$x + 2 \cdot y \leq 3 \qquad (2)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

Primjer riješiti primjenom simpleks metode.

Rješenje:

Najprije je potrebno zadani problem pretvoriti u kanonski oblik:

$$2 \cdot x + y + s_1 = 4 \,,$$

$$x + 2 \cdot y + s_2 = 3 \,,$$

$$-3 \cdot x - 2 \cdot y + F_C = 0 \,,$$

gdje su s_1 i s_2 dodatne varijable.

Sada se može složiti početna simpleks tablica.

U ovoj su tablici x i y nebazične, a s_1 i s_2 bazične varijable, a vrijednosti su im x=0, y =0, s_1=4 i s_2=3 što predstavlja vrh izvedivog područja u ishodištu koordinatnog sustava, gdje je i vrijednost funkcije cilja F_C=0.

redak	*varijable odlučivanja*		*dodatne varijable i F_C*			*desna strana*
	x	y	s_1	s_2	F_C	
R_1	2	1	1	0	0	4
R_2	1	2	0	1	0	3
R_C	-3	-2	0	0	1	0

Slijedi odabir pivot stupca. Dva su člana retka RC negativna, ali je broj -3 po apsolutnoj vrijednosti veći od -2, pa je 1. stupac tablice, uz varijablu x, pivot stupac.

U sljedećem se koraku traže omjeri članova desne strane i odgovarajućih elemenata pivot stupca:

redak	*varijable odlučivanja*		*dodatne varijable i F_C*			*desna strana*		
	x	y	s_1	s_2	F_C			
R_1	2	1	1	0	0	4	4/2=2	*pivot redak*
R_2	1	2	0	1	0	3	3/1=3	
R_C	-3	-2	0	0	1	0		
	pivot stupac							

Očevidno je da je omjer 4/2=2 manji od omjera 3/1=3, pa se za pivot redak odabire redak R1. Može se zaključiti da je pivot element 2 (presjecište pivot stupca i pivot retka). Sve članove tog retka treba podijeliti s pivot elementom.

Dobije se sljedeća tablica:

redak	*varijable odlučivanja*		*dodatne varijable i F_C*			*desna strana*	
	x	y	s_1	s_2	F_C		
R_1	1	1/2	1/2	0	0	2	
R_2	1	2	0	1	0	3	R_2-R_1
R_C	-3	-2	0	0	1	0	R_C+3R_1

gdje treba izvršiti operacije s redcima prikazane na desnoj strani, a s ciljem da se svi ostali elementi u pivot stupcu izjednače s nulom.

Rezultat je prikazan u sljedećoj tablici.

Iz tablice je vidljivo da je ovom iteracijom varijabla x postala bazična, a varijabla s_1 nebazična. Vrijednosti bazičnih varijabla su x=2 i s_2=1, vrijednosti nebazičnih varijabla su y=0 i s_2=0, pri čemu je vrijednost funkcije cilja F_C=5.

redak	*varijable odlučivanja*		*dodatne varijable i F_C*			*desna strana*
	x	y	s_1	s_2	F_C	
R_1	1	1/2	1/2	0	0	2
R_2	0	3/2	-1/2	1	0	1
R_C	0	-1/2	3/2	0	1	6

Jedini negativni element u retku R_C je -0,5, a nalazi se u stupcu y pa se taj stupac bira za pivota.

redak	*varijable odlučivanja* x	y	*dodatne varijable i* F_C s_1	s_2	F_C	*desna strana*		
R_1	1	1/2	1/2	0	0	2	2/(1/2)=4	
R_2	0	3/2	-1/2	1	0	1	1/(3/2)=0,67	*pivot redak*
R_C	0	-0,5	3/2	0	1	6		
		pivot stupac						

Sada se, nakon pronalaženja omjera desnih strana i odgovarajućih elemenata pivot stupca, nameće odabir retka R_2 za pivot redak (jer je 0,67 manje od 4). Nadalje, presjecište pivot retka i pivot stupca daje pivot element, a to je 3/2. Slijedi dijeljenje svih članova retka R2 s pivot elementom, nakon čega se dobije sljedeća tablica:

redak	*varijable odlučivanja* x	y	*dodatne varijable i* F_C s_1	s_2	F_C	*desna strana*	
R_1	1	1/2	1/2	0	0	2	R_1-R_2/2
R_2	0	1	-1/3	2/3	0	2/3	
R_C	0	-1/2	3/2	0	1	6	R_C+R_2/2

gdje treba izvršiti operacije s redcima prikazane na desnoj strani tablice, a s ciljem da se svi ostali elementi u pivot stupcu izjednače s nulom.

Rezultat je prikazan u sljedećoj tablici.

redak	*varijable odlučivanja* x	y	*dodatne varijable i* F_C s_1	s_2	F_C	*desna strana*	
R_1	1	0	2/3	-1/3	0	5/3	***x***
R_2	0	1	-1/3	2/3	0	2/3	***y***
R_C	0	0	4/3	1/3	1	**19/3**	***F***

Budući da u retku RC više nema nijednog negativnog člana, postignuto je optimalno rješenje koje se može iščitati iz konačne simpleks tablice:

- Optimalna vrijednost funkcije cilja $F_{C\max}$ iznosi $19/3 = 6,333$ (donji desni kut tablice), a postiže se za vrijednosti varijabla odlučivanja $x = 5/3 = 1,667$ i $y = 2/3 = 0,667$ (te se vrijednosti očitavaju iz stupca „desna strana“).

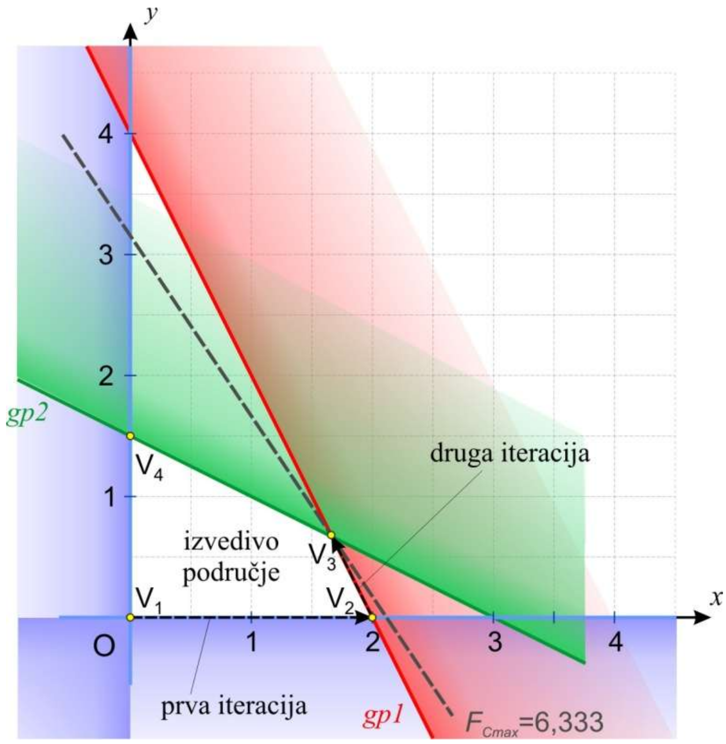
- Obje su dodatne varijable, s_1 i s_2, postale nebazične i jednake su nuli (ni jedna od njih nema u stupcu samo jedan pozitivan element i sve ostale jednake nuli).

  Ovdje se može pojasniti i smisao tih dodatnih varijabla. One u stvari predstavljaju neiskorišteni dio resursa (kod korištenja Solvera to su vrijednosti u stupcu *Slack* dijela *Constraints* izvještaja *Answer Report*).

  Dakle, u ovom primjeru nulte vrijednosti dodatnih varijabla s_1 i s_2 kazuju da su oba ograničenja vezana (da su im desne strane iskorištene do kraja).

Broj ovdje prikazanih koraka, potrebnih za rješenje problema s dvije varijable odlučivanja i dva ograničenja, upućuje na mukotrpnost rada kao i na mogućnost greške kod ručnih računanja imalo kompleksnijih problema linearnog programiranja.

Na grafičkom rješenju primjera 5.1, prikazanom na slici 5.1, može se pojasniti što znači početno rješenje, kao i tok iteracija simpleks algoritma.



Slika 5.1. *Primjer 5.1: zatvoreni poligonski skup, vrhovi poligona i kretanje po tim vrhovima uz pomoć simpleks algoritma.*

Naime, početna simpleks tablica u stvarnosti predstavlja vrijednost funkcije cilja, varijabla odlučivanja i dodatnih varijabla u vrhu V_1 zatvorenoga konveksnog skupa – izvedivog područja razmatranog problema:

$$F_{C(1)} = 0; \quad x_{(1)} = 0; \quad y_{(1)} = 0; \quad s_{1(1)} = 4; \quad s_{2(1)} = 3 .$$

Dakle, dodatne varijable upravo su jednake desnim stranama odgovarajućih ograničenja, jer za nulte vrijednosti varijabla odlučivanja nema utroška nekog od resursa.

Nakon prve iteracije vrijednosti su sljedeće:

$$F_{C(2)} = 6; \quad x_{(2)} = 2; \quad y_{(2)} = 0; \quad s_{1(2)} = 0; \quad s_{2(2)} = 1,$$

što odgovara vrhu V_2 na slici 5.1. Prvo ograničenje iskorišteno je do kraja ($2 \cdot 2 + 0 = 4$), dok drugo nije ($2 + 2 \cdot 0 = 2 < 3$). Razlika $3 - 2 = 1$ odgovara vrijednosti dopunske varijable s_2 nakon 1. iteracije.

Nakon druge iteracije postignuto je optimalno rješenje:

$$F_{C(3)} = F_{C\max} = \frac{19}{3} = 6,333; \; x_{(3)} = \frac{5}{3} = 1,667; \; y_{(3)} = \frac{2}{3} = 0,667; \; s_{1(3)} = 0; \; s_{2(3)} = 0,$$

što odgovara vrhu V_3 na slici 5.1, pri čemu su oba ograničenje iskorištena do kraja

$$2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4, \text{ odnosno } \frac{5}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Dakle, od početne simpleks tablice, preko tablica koje se dobiju nakon svake iteracije, do konačnog optimalnog rješenja, simpleks algoritam svakom svojom iteracijom prelazi u novi, susjedni vrh zatvorenoga konveksnog poligonskog skupa, a ta „šetnja“ vrhovima završava tada kada se dođe do vrha u kojem funkcija cilja ima svoju optimalnu vrijednost.

Primjer 5.2.

Zadana je funkcija cilja:

$$F_C = 22 \cdot x_1 + 32 \cdot x_2 + 30 \cdot x_3.$$

Odrediti maksimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 240 \qquad (1)$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 138 \qquad (2)$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 144 \qquad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

Primjer riješiti primjenom simpleks metode.

Rješenje:

Najprije je potrebno zadani problem pretvoriti u kanonski oblik:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + s_1 = 240,$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + s_2 = 138,$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + s_3 = 144,$$

$$-22 \cdot x_1 - 32 \cdot x_2 - 30 \cdot x_3 + F_C = 0$$

gdje su s_1, s_2 i s_3 dodatne varijable.

Sada se može složiti početna simpleks tablica.

U ovoj su tablici x_1, x_2 i x_3 nebazične, a s_1, s_2 i s_3 bazične varijable, a vrijednosti su im $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $s_1=240$, $s_2=138$ i $s_3=144$, što predstavlja vrh izvedivog područja u ishodištu koordinatnog sustava, gdje je i vrijednost funkcije cilja $F_C=0$.

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C	
R_1	2	4	3	1	0	0	0	240
R_2	2	2	3	0	1	0	0	138
R_3	3	2	3	0	0	1	0	144
R_C	-22	-32	-30	0	0	0	1	0

Slijedi odabir pivot stupca. Tri su člana retka R_C negativna, ali je broj -32 najveći po apsolutnoj vrijednosti pa je 2. stupac tablice, uz varijablu x_2, pivot stupac.

U sljedećem se koraku traže omjeri članova desne strane i odgovarajućih elemenata pivot stupca:

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*		
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C			
R_1	2	4	3	1	0	0	0	240	240/4=60	←
R_2	2	2	3	0	1	0	0	138	138/2=69	
R_3	3	2	3	0	0	1	0	144	144/2=72	
R_C	-22	-32	-30	0	0	0	1	0		
		↑								

Za pivot redak odabire se redak R_1 jer je omjer 240/4=60 najmanji od omjera pojedinih članova desne strane i članova pivot stupca. Dakle, pivot element je 4, presjecište pivot stupca x_2 i pivot retka R_1.

Sve članove tog retka treba podijeliti s pivot elementom pa se dobije sljedeća tablica:

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C		
R_1	1/2	1	3/4	1/4	0	0	0	60	
R_2	2	2	3	0	1	0	0	138	R_2-2R_1
R_3	3	2	3	0	0	1	0	144	R_3-2R_1
R_C	-22	-32	-30	0	0	0	1	0	R_C+32R_1

gdje treba izvršiti operacije s redcima prikazane na desnoj strani, a s ciljem da se svi ostali elementi u pivot stupcu izjednače s nulom.

Rezultat je prikazan u sljedećoj tablici.

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*		
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C			
R_1	1/2	1	3/4	1/4	0	0	0	60	60/(1/2)=120	
R_2	1	0	3/2	-1/2	1	0	0	18	18/1=18	
R_3	2	0	3/2	-1/2	0	1	0	24	24/2=12	←
R_C	-6	0	-6	8	0	0	1	1920		
	↑									

Negativni elementi su u stupcima x_1 i x_3, i jednaki su. Kao pivot stupac može se odabrati bilo koji, a ovdje se odabire 1. stupac. Dijeljenjem članova desne strane s pripadajućim članovima pivot stupca dobije se da je najmanji količnik (12) u retku R_3. Redak R_3 stoga je pivot redak, a element u presjecištu pivot stupca i pivot retka (2) je pivot element.

Dijeljenjem svih članova pivot retka s pivot elementom dobije se sljedeća tablica:

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C		
R_1	1/2	1	3/4	1/4	0		0	60	R_1-R_3/2
R_2	1	0	3/2	-1/2	1	0	0	18	R_2-R_3
R_3	1	0	3/4	-1/4	0	1/2	0	12	
R_C	-6	0	-8	8	0	0	1	1920	R_C+6R_3

gdje treba izvršiti operacije s redcima prikazane na desnoj strani, a s ciljem da se svi ostali elementi u pivot stupcu izjednače s nulom.

Rezultat je prikazan u sljedećoj tablici.

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*		
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C			
R_1	0	1	3/8	3/8	0	-1/4	0	54	60/(3/8)=160	
R_2	0	0	3/4	-1/4	1	-1/2	0	6	6/(3/4)=8	←
R_3	1	0	3/4	-1/4	0	1/2	0	12	12/1=12	
R_C	0	0	-3/2	13/2	0	3	1	1992		
			↑							

Jedini negativni element u retku R_C je -3/2, u stupcu x_3, pa je to novi pivot stupac. Dijeljenjem članova desne strane s pripadajućim članovima pivot stupca dobije se da je najmanji količnik (8) u retku R_2. Redak R_2 stoga je pivot redak, a element u presjecištu pivot stupca i pivot retka (3/4) je pivot element.

Nakon dijeljenja članova pivot retka s pivot elementom dobije se sljedeća tablica:

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C		
R_1	0	1	3/8	3/8	0	-1/4	0	54	$R_1-3R_2/8$
R_2	0	0	1	-1/3	4/3	-2/3	0	8	
R_3	1	0	3/4	-1/4	0	1/2	0	12	$R_3-3R_2/4$
R_C	0	0	-3/2	13/2	0	3	1	1992	$R_C+3R_3/2$

gdje treba izvršiti operacije s redcima prikazane na desnoj strani, a s ciljem da se svi ostali elementi u pivot stupcu izjednače s nulom.

Slijedi konačna tablica, kojoj u retku R_C više nema negativnih elemenata, što znači da je postignuto optimalno rješenje.

redak	*varijable odlučivanja*			*dodatne varijable i F_C*				*desna strana*	
	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	F_C		
R_1	0	1	0	1/2	-1/2	0	0	**51**	x_2
R_2	0	0	1	-1/3	4/3	-2/3	0	**8**	x_3
R_3	1	0	0	0	-1	1	0	**12**	x_1
R_C	0	0	0	6	2	2	1	2004	F_{Cmax}

Optimalna vrijednost funkcije cilja je $F_{C\max} = 2.004$ (donji desni kut tablice), a postiže se za vrijednosti varijabla odlučivanja $x_1 = 12$, $x_2 = 51$ i $x_3 = 6$ (te se vrijednosti očitavaju iz stupca „desna strana" i to iz onog retka kojemu je u stupcu te varijable 1).

Tri su dodatne varijable s_1, s_2 i s_3 postale nebazične i jednake su nuli, što nadalje znači da su sva tri ograničenja vezana.

5.2. Dualni problem linearnog programiranja

Iako se ova knjiga posebno ne bavi problemom dualiteta, u sljedećih će se nekoliko stranica pokušati čitatelju približiti taj koncept i moguće prednosti primjene tog koncepta u rješavanju problema linearnog programiranja.

Naime, svakom problemu linearnog programiranja, bilo da se radi o traženju maksimuma ili minimuma funkcije cilja, pripada odgovarajući problem traženja minimuma odnosno maksimuma koji se naziva *dualom* razmatranog problema.

Ovaj koncept dualiteta može se svrstati u jedno od najznačajnijih otkrića u teoriji linearnog programiranja.

Izvorni problem linearnog programiranja naziva se pri tom *primal*, i toj skupini pripadaju svi problemi razmatrani u četvrtom i petom poglavlju.

Uzajamni odnosi primala i duala od osobitog su značaja u analizi osjetljivosti problema linearnog programiranja.

Temeljni teorem dualiteta (Von Neumanov teorem) glasi:

Standardni problem maksimuma/minimuma ima rješenje onda i samo onda ako i njegov dual ima rješenje. Ako postoji optimum problema, tada je optimalna vrijednost funkcije cilja primala jednaka optimalnoj vrijednosti funkcije cilja duala.

5.2.1. Primal i dual u algebarskom zapisu

Primal i dual problema kada je problem primala standardni problem maksimuma, prikazan je u tablici 5.1.

Tablica 5.1. *Primal standardnog problema maksimuma i njegov dual.*

PRIMAL	DUAL
Odredi **maksimum** funkcije cilja: $F_{CP} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_ix_i + \ldots + c_nx_n$ uz ograničenja $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$ ... $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{ji}x_i + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j$ ... $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mi}x_i + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$ i nenegativne varijable odlučivanja $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_i \ge 0, \ldots x_n \ge 0$.	Odredi **minimum** funkcije cilja: $F_{CD} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_jy_j + \ldots + b_my_m$ uz ograničenja $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{j1}y_j + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{j2}y_j + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2$ ... $a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \ldots + a_{ji}y_j + \ldots + a_{mi}y_m \ge c_i$ ... $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{jn}y_j + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n$ i nenegativne varijable odlučivanja $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots y_j \ge 0, \ldots y_m \ge 0$.

Dakle, ako primal ima n varijabla odlučivanja i m ograničenja, tada dual ima m varijabla odlučivanja i n ograničenja.

U tablici 5.2 to je prikazano na primjeru primala s dvije varijable odlučivanja i tri ograničenja, zadanoga u općim brojevima.

Tablica 5.2. *Primal standardnog problema maksimuma (2 varijable i 3 ograničenja) i njegov dual.*

PRIMAL	DUAL
Odredi **maksimum** funkcije cilja: $F_{CP} = c_1 x_1 + c_2 x_2$ uz ograničenja $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$ $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3$ i nenegativne varijable odlučivanja $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.	Odredi **minimum** funkcije cilja: $F_{CD} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$ uz ograničenja $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2$ i nenegativne varijable odlučivanja $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$.

Primjer 5.3.

Zadana je funkcija cilja primala (primarnog problema):

$$F_{CP} = 22 \cdot x_1 + 32 \cdot x_2 .$$

Odrediti maksimum funkcije cilja uz sljedeća ograničenja:

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 60 \qquad (1)$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \le 40 \qquad (2)$$

$$x_1 + 3 \cdot x_2 \le 30 \qquad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

Napisati dual zadanog problema.

Rješenje:

Dual zadanog problema linearnog programiranja glasi:

Odrediti izvedivo područje i minimum funkcije cilja:

$$F_{CD} = 60 \cdot y_1 + 40 \cdot y_2 + 30 \cdot y_3$$

uz ograničenja

$$2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + y_3 \ge 22 \qquad (1)$$

$$4 \cdot y_1 + y_2 + 3 \cdot y_3 \ge 32 \qquad (2)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

Primal i dual problema kada je problem primala standardni problem minimuma, prikazan je u tablici 5.3.

Tablica 5.3. *Primal standardnog problema minimuma i njegov dual.*

PRIMAL	DUAL
Odredi **minimum** funkcije cilja: $$F_{CP} = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_ix_i + ... + c_nx_n$$ uz ograničenja $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1i}x_i + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$ $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2i}x_i + ... + a_{2n}x_n \geq b_2$$ $$...$$ $$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n \geq b_j$$ $$...$$ $$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mi}x_i + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$ i nenegativne varijable odlučivanja $$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ... x_i \geq 0, ... x_n \geq 0 .$$	Odredi **maksimum** funkcije cilja: $$F_{CD} = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_jy_j + ... + b_my_m$$ uz ograničenja $$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{j1}y_j + ... + a_{m1}y_m \leq c_1$$ $$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{j2}y_j + ... + a_{m2}y_m \leq c_2$$ $$...$$ $$a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + ... + a_{ji}y_j + ... + a_{mi}y_m \leq c_i$$ $$...$$ $$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{jn}y_j + ... + a_{mn}y_m \leq c_n$$ i nenegativne varijable odlučivanja $$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, ... y_j \geq 0, ... y_m \geq 0 .$$

U tablici 5.4 to je prikazano na primjeru primala s dvije varijable odlučivanja i dva ograničenja, zadanoga u općim brojevima.

Tablica 5.4. *Primal standardnog problema maksimuma (2 varijable i 2 ograničenja) i njegov dual.*

PRIMAL	DUAL
Odredi **minimum** funkcije cilja: $$F_{CP} = c_1x_1 + c_2x_2$$ uz ograničenja $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$ $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2$$ i nenegativne varijable odlučivanja $$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 .$$	Odredi **maksimum** funkcije cilja: $$F_{CD} = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$ uz ograničenja $$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \leq c_1$$ $$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \leq c_2$$ i nenegativne varijable odlučivanja $$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 .$$

Primjer 5.4.

Zadana je funkcija cilja primala (primarnog problema):

$$F_{CP} = 8 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 .$$

Odrediti izvedivo područje i minimum funkcije cilja uz sljedeća ograničenja:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \geq 80 \qquad (1)$$

$$x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 100 \qquad (2)$$

i nenegativne varijable odlučivanja. Napisati dual zadanog problema.

Rješenje:

Dual zadanog problema linearnog programiranja glasi:

Odrediti maksimum funkcije cilja:

$$F_{CD} = 80 \cdot y_1 + 100 \cdot y_2$$

uz ograničenja

$$2 \cdot y_1 + y_2 \leq 8 \qquad (1)$$

$$y_1 + 3 \cdot y_2 \leq 12 \qquad (2)$$

i nenegativne varijable odlučivanja.

5.2.2. Primal i dual u matričnom zapisu

Primal i dual problema linearnog programiranja u matričnom zapisu, kada je problem duala standardni problem maksimuma, prikazan je u tablici 5.5.

Tablica 5.5. *Primal standardnog problema maksimuma u matričnom zapisu i njegov dual.*

PRIMAL	DUAL
Odredi **maksimum** funkcije cilja: $F_{CP} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ uz ograničenja $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ i nenegativne varijable odlučivanja $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.	Odredi **minimum** funkcije cilja: $F_{CD} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ uz ograničenja $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ i nenegativne varijable odlučivanja $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Primal i dual problema linearnog programiranja u matričnom zapisu, kada je problem duala standardni problem minimuma, prikazan je u tablici 5.6.

Tablica 5.6. *Primal standardnog problema minimuma u matričnom zapisu i njegov dual.*

PRIMAL	DUAL
Odredi **minimum** funkcije cilja: $F_{CP} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ uz ograničenja $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ i nenegativne varijable odlučivanja $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.	Odredi **maksimum** funkcije cilja: $F_{CD} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ uz ograničenja $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ i nenegativne varijable odlučivanja $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

U gornjim izrazima je:

- $\mathbf{x}$ – vektor stupac varijabla odlučivanja primala

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_n \end{matrix} \right\};$$

- $\mathbf{c}$ – vektor stupac slobodnih koeficijenata desne strane ograničenja duala, a $\mathbf{c}^T$ – vektor redak koeficijenata funkcije cilja primala

$$\mathbf{c} = \left\{ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_i \\ \ldots \\ c_n \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{c}^T = \left\{ c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n \right\};$$

- $\mathbf{b}$ – vektor stupac slobodnih koeficijenata desne strane ograničenja primala, a $\mathbf{b}^T$ - vektor stupac koeficijenata funkcije cilja duala

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_j \\ \ldots \\ b_m \end{matrix} \right\}, \quad \mathbf{b}^T = \left\{ b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_m \right\}$$

- $\mathbf{y}$ – vektor stupac varijabla odlučivanja duala

$$\mathbf{y} = \left\{ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_j \\ \ldots \\ y_m \end{matrix} \right\};$$

- $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$ – matrica koeficijenata lijeve strane ograničenja primala, odnosno matrica koeficijenata lijeve strane duala (transponirana matrica $\mathbf{A}$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{j1} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{j2} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & & & & & \\ a_{1i} & a_{2i} & \ldots & a_{ji} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{jn} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

- **0** – nulti vektor (vektor stupac kojemu su sve komponente jednake nuli).

Iz prikazanih zapisa primala i duala, i u algebarskom i u matričnom obliku, slijedi još jedno načelo odnosa primala i duala koje glasi: *Dual dualnog problema je primal!*

Ovdje se neće posebno ulaziti u pojašnjenje osobina dualnosti: slaba dualnost, stroga dualnost, komplementarnost rješenja, komplementarnost optimalnih rješenja i simetričnost, koje su vrlo zanimljive s teorijskog gledišta, korisne za razvoj algoritama i vrlo bitne u analizi i interpretaciji rješenja. Prikazat će se temeljne veze između primala i duala koje je dobro poznavati u praktičnoj uporabi koncepta dualiteta:

1. Ako primal ima n varijabla i m ograničenja, tada dual ima m varijabla i n ograničenja.
2. Ako se u primalu traži maksimum funkcije cilja tada su sva ograničenja ″manje ili jednako″ dok su sva ograničenja duala ″veće ili jednako″.
   Ako se u primalu traži minimum funkcije cilja tada su sva ograničenja ″veće ili jednako″, dok su sva ograničenja duala ″manje ili jednako″.
   Ako je cilj primala maksimizirati/minimizirati, tada je cilj duala minimizirati/ maksimizirati.
3. Sve varijable, i primala i duala, nenegativne su veličine.
4. Za svako ograničenje primala postoji varijabla odlučivanja duala, tj. j-tom ograničenju primala odgovara varijabla odlučivanja y_j duala. Koeficijent funkcije cilja uz varijablu y_j u stvari je desna strana j-tog ograničenja primala.
5. Za svaku varijablu odlučivanja primala postoji jedno ograničenje duala, tj. i-toj varijabli odlučivanja primala x_i odgovara i–to ograničenje duala, pri čemu je desna strana tog ograničenja jednaka koeficijentu funkcije cilja uz varijablu x_i primala.
6. Broj a_{ji} je koeficijent lijeve strane j-tog ograničenja uz varijablu x_i kod primala, dok je taj isti broj (a_{ji}) koeficijent lijeve strane i-tog ograničenja uz varijablu y_j duala.

Veza između rješenja primala i duala: optimalnih vrijednosti varijabla odlučivanja, funkcije cilja, marginalnog troška (cijena u sjeni, *shadow price*) i oportunitetnog troška (reducirani trošak, *reduced cost*) prikazat će se na sljedećem primjeru.

Primjer 5.5.

Poduzeće proizvodi tri vrste proizvoda: PA, PB i PC.

Za proizvodnju jednog proizvoda PA potrebno je 4 minute strojne obrade, 3 minute bojenja i 3 minute kontrole kvalitete, a dobit po komadu je 15 kuna.

Za proizvodnju jednog proizvoda PB potrebno je 7 minuta strojne obrade, 5 minuta bojenja i 3 minute kontrole kvalitete, a dobit po komadu je 16 kuna.

I konačno, za proizvodnju jednog proizvoda PC potrebno je 5 minuta strojne obrade, 3 minute bojenja i 4 minute kontrole kvalitete, a dobit po komadu je 14 kuna.

Poduzeće tjedno raspolaže sa 140 sati za strojnu obradu, 80 sati za bojenje i 60 sati za kontrolu kvalitete.

Odrediti plan tjedne proizvodnje za koju će dobit poduzeća biti maksimalna.

Riješiti i dual zadanog problema te usporediti dobivene rezultate.

Rješenje:

Uzimajući za varijable odlučivanja: x_1 – broj komada proizvoda PA, x_2 – broj komada proizvoda PB i x_3 – broj komada proizvoda PC, funkcija cilja primala je

$$F_{CP} = \pi = 15 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 ,$$

i treba je maksimizirati, dakle osigurati najveću dobit uz raspoložive resurse (mijenja se dobit, a resursi su konstantni) prikazane sljedećim ograničenjima:

- raspoloživo vrijeme za strojnu obradu ($140 \cdot 60 = 8400$ min)

$$4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 8400 \qquad \text{(P.1)}$$

- raspoloživo vrijeme za kontrolu kvalitete ($80 \cdot 60 = 4800$ min)

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 4800 \qquad \text{(P.2)}$$

- raspoloživo vrijeme za bojenje ($60 \cdot 60 = 3600$ min)

$$3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq 3600 . \qquad \text{(P.3)}$$

Slijedi formuliranje duala ovog problema.

Odrediti minimum funkcije cilja (trošak resursa)

$$F_{CD} = TC = 8400 \cdot y_1 + 4800 \cdot y_2 + 3600 \cdot y_3 ,$$

dakle odrediti minimalnu vrijednost (trošak) resursa za koju će poduzeće ostvariti zadanu razinu dobiti (dobit je konstantna, a troškovi resursa variraju), odakle slijede ograničenja duala:

- jedinična vrijednost proizvodnje proizvoda PA (ne može biti manja od 15 kuna – dobiti ostvarene po tom proizvodu)

$$4 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq 15 \qquad \text{(D.1)}$$

- jedinična vrijednost proizvodnje proizvoda PB

$$7 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \geq 16 \qquad \text{(D.2)}$$

- jedinična vrijednost proizvodnje proizvoda PC

$$5 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 \geq 14 . \qquad \text{(D.3)}$$

Primal i dual zadanog problema riješeni su s pomoću Solvera. Maksimum funkcije cilja primala jednak je minimumu funkcije cilja duala i iznosi 18.600 (slika 5.2).

Na slici 5.3 prikazani su izvještaji analize osjetljivosti (na slici 5.3.a primala, a na slici 5.3.b duala).

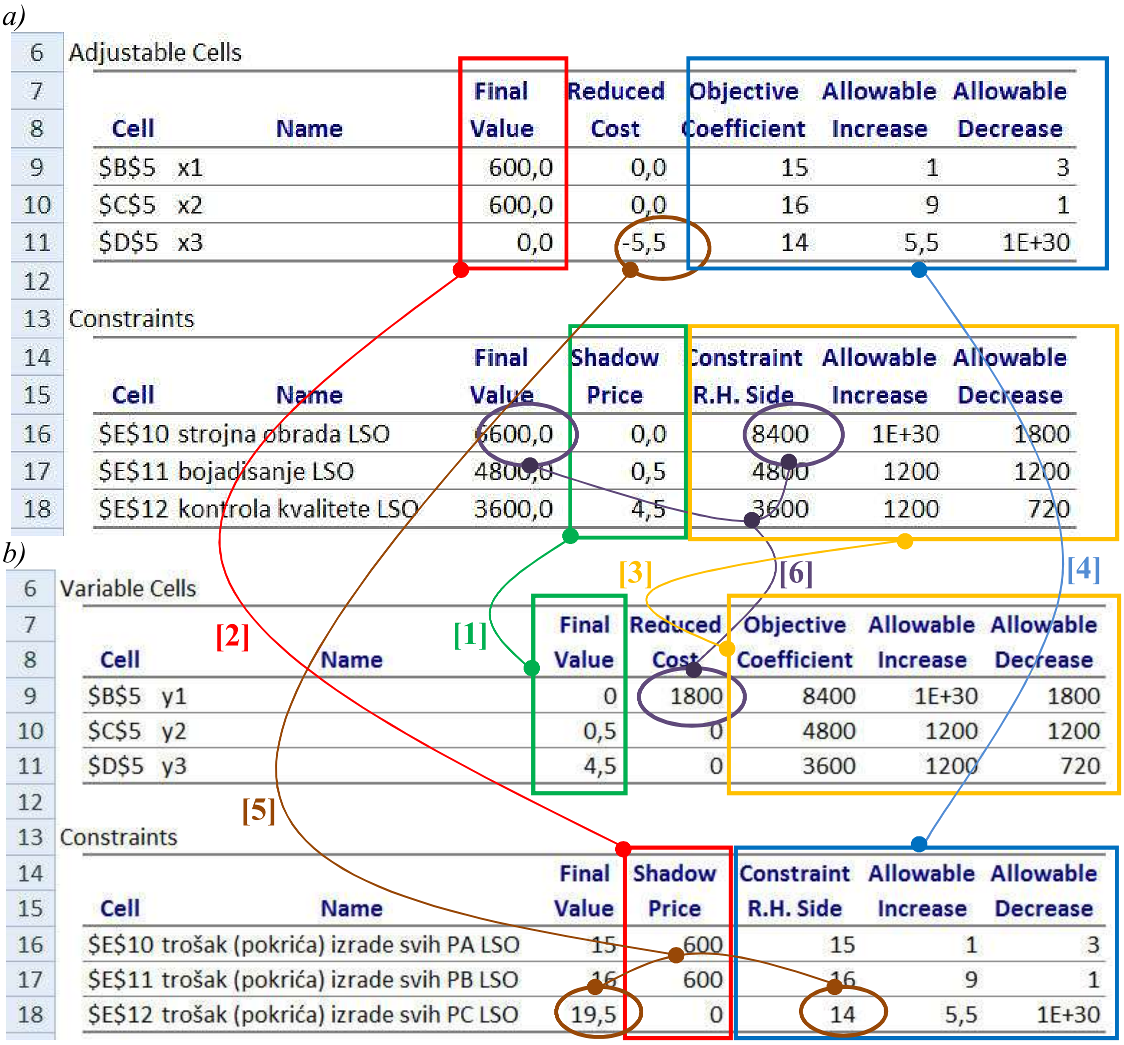
a)

3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	Trošak pokrića			
5		600,0	600,0	0,0	**18600,00**			
6	Koeficijenti Fc	15,0	16,0	14,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	strojna obrada	4,00	7,00	5,00	6600,0	<=	8400,0	1
11	bojadisanje	3,00	5,00	3,00	4800,0	<=	4800,0	2
12	kontrola kvalitete	3,00	3,00	4,00	3600,0	<=	3600,0	3

b)

3		Varijable odlučivanja			Funkcija cilja			
4		y1	y2	y3	Trošak pokrića			
5		0,0	0,5	4,5	**18600,00**			
6	Koeficijenti Fc	8400,0	4800,0	3600,0				
7								
8								
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO			LSO	Operator	DSO	Br.
10	trošak (pokrića) izrade svih PA	4,00	3,00	3,00	15,0	>=	15,0	1
11	trošak (pokrića) izrade svih PB	7,00	5,00	3,00	16,0	>=	16,0	2
12	trošak (pokrića) izrade svih PC	5,00	3,00	4,00	19,5	>=	14,0	3

Slika 5.2. *Primjer 5.5: Rješenje primjera: a) za primal problema, b) za dual problema.*



a)

6	Adjustable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	x1	600,0	0,0	15	1	3
10	$C$5	x2	600,0	0,0	16	9	1
11	$D$5	x3	0,0	-5,5	14	5,5	1E+30
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
16	$E$10	strojna obrada LSO	6600,0	0,0	8400	1E+30	1800
17	$E$11	bojadisanje LSO	4800,0	0,5	4800	1200	1200
18	$E$12	kontrola kvalitete LSO	3600,0	4,5	3600	1200	720

b)

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	y1	0	1800	8400	1E+30	1800
10	$C$5	y2	0,5	0	4800	1200	1200
11	$D$5	y3	4,5	0	3600	1200	720
12							
13	Constraints						
14			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
15	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
16	$E$10	trošak (pokrića) izrade svih PA LSO	15	600	15	1	3
17	$E$11	trošak (pokrića) izrade svih PB LSO	16	600	16	9	1
18	$E$12	trošak (pokrića) izrade svih PC LSO	19,5	0	14	5,5	1E+30

Slika 5.3. *Primjer 5.5: Analiza osjetljivosti s podatcima o varijablama odlučivanja i ograničenjima te njihovim međusobnim vezama: a) za primal problema, b) za dual problema.*

Nakon usporedbe dobivenih rezultata nameću se sljedeći zaključci:

- Marginalni trošak (cijena u sjeni, *Shadow Price*) svakog pojedinog ograničenja primala jednak je optimalnoj vrijednosti odgovarajuće varijable odlučivanja duala (veza [1], slika 5.3).
- Marginalni trošak (cijena u sjeni, *Shadow Price*) svakog pojedinog ograničenja duala jednak je optimalnoj vrijednosti odgovarajuće varijable odlučivanja primala (veza [2], slika 5.3).
- Vrijednosti koeficijenata funkcije cilja duala, kao i mogućnost njihova povećavanja/smanjivanja uz uvjet nepromjenjivosti baznog rješenje problema duala, jednaki su slobodnim koeficijentima desne strane primala, uključujući mogućnost njihova povećavanja/smanjivanja a da se ne poremeti bazično rješenje problema primala (veza [3], slika 5.3).
- Vrijednosti koeficijenata funkcije cilja primala, kao i mogućnost njihova povećavanja/smanjivanja uz uvjet nepromjenjivosti bazičnog rješenje problema, jednaki su slobodnim koeficijentima desne strane duala, uključujući mogućnost njihova povećavanja/smanjivanja a da se ne poremeti bazično rješenje problema duala (veza [4], slika 5.3).
- Oportunitetni trošak (*Reduced Cost*) uz varijablu odlučivanja koja u optimalnom rješenju primala ima vrijednost nula (varijabla x_3 na slici 5.3.a), jednak je razlici desne strane i lijeve strane odgovarajućeg ograničenja duala (veza [5], slika 5.3.b, $14-19,5=-5,5$).
- Oportunitetni trošak (*Reduced Cost*) uz varijablu odlučivanja koja u optimalnom rješenju duala ima vrijednost nula (varijabla y_1 na slici 5.3.b), jednak je razlici desne strane i lijeve strane odgovarajućeg ograničenja primala (veza [6], slika 5.3.a, $8400-6600=1800$).

5.3. Odabrani problemi mrežnog programiranja

Posebnu skupinu problema kojima se bave operacijska istraživanja čine tzv. mrežni problemi (*network flow problem*), odnosno problemi mrežnog programiranja (planiranja). Dva problema iz ove skupine: transportni problem i problem asignacije (dodjeljivanja) pobliže su opisani u poglavljima 5.5 odnosno 5.6.

U ovom će se poglavlju razmotriti odabrani problemi mrežnog programiranja koji su našli svoje značajno mjesto u rješavanju širokoga spektra praktičnih problema, i to:

a) transportni problem s pretovarom
b) problem najkraćeg puta
c) problem najvećeg mrežnog protoka
d) problem kritičnog (najdužeg) puta
e) problem trgovačkog putnika, i
f) problem kineskog poštara.

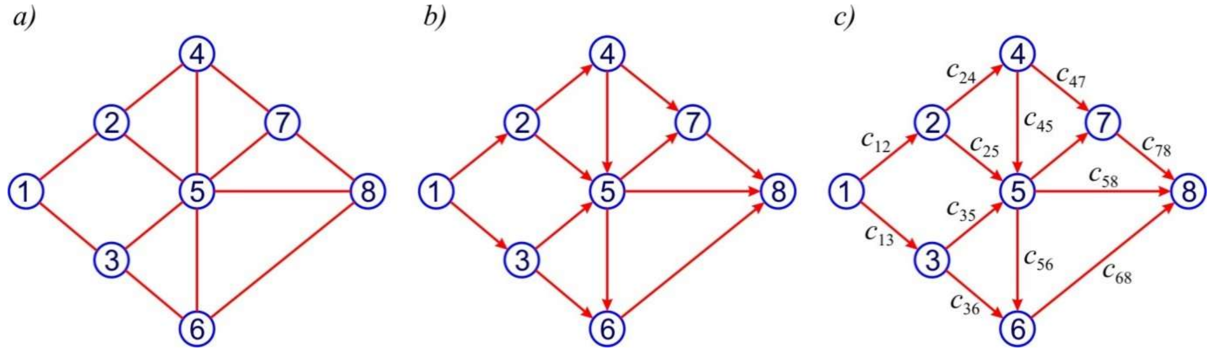
U rješavanju navedenih problema iskoristit će se saznanja i predlošci prikazani u poglavljima 5.5 i 5.6. Samo će se za problem kineskog poštara, zbog složenosti algoritma, prikazati ručni način rješavanja problema, koji je primjenjiv na problemima s manjim brojem čvorova.

Svaki od navedenih problema može se prikazati grafom. Graf je, jednostavno kazano, skup čvorova (vrhova) međusobno povezanih granama (lukovima, bridovima). Kod problema pod točkama a) do d) razmatrat će se jednostavni usmjereni težinski grafovi, a kod problema pod točkama e) i f) jednostavni neusmjereni težinski grafovi.

Graf je jednostavan ukoliko nema ni petlji niti dviju grana koje spajaju isti par čvorova. Ukoliko su grane grafa usmjerene, tj. ako se nekom granom može ići od čvora *i* ka čvoru *j* ali ne i obratno, graf je usmjeren.

Nadalje ako se svakoj grani pridruži realan broj (težina grane) takav se graf naziva težinskim. Težina grane može biti cijena transporta tom granom, duljina grane, mogući protok tom granom (količina vode, broj vozila, količina informacija, ...), i tako dalje.

Neki primjeri grafova prikazani su na slici 5.4.



Slika 5.4. *Jednostavni graf: a) neusmjereni bestežinski graf, b) usmjereni bestežinski graf; c) usmjereni težinski graf.*

5.3.1. Transportni problem s pretovarom

Poseban oblik transportnog problema jest transportni problem s pretovarom. Temeljna značajka ovog problema je da se između *m* ishodišta i *n* odredišta pojavljuje određeni broj mjesta pretovara (*l* mjesta). I ponuda i potražnja svakog mjesta pretovara jednaka je nuli.

Dakle, u općem će se slučaju transportni problem s pretovarom sastojati od sljedećega:

- m ishodišta $I_1, I_2 ..., I_m$ s količinama roba koje se u njima nude $a_1, a_2 ..., a_m$, odnosno s ukupnom količinom ponude $\sum_{i=1}^{m} a_i$;
- n odredišta $O_1, O_2 ..., O_n$ s količinama robe koje se u njima potražuju $b_1, b_2 ..., b_n$, odnosno s ukupnom količinom potražnje $\sum_{j=1}^{n} b_j$;
- l prekrcajnih mjesta $P_1, P_2 \ldots, P_l$ u kojima je i količina ponude i količina potražnje jednaka nuli.

Ako je razmatrani problem zatvoren, bit će ukupna količina ponude jednaka ukupnoj količini potražnje, odnosno

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

Ako je razmatrani problem otvoren, treba ga, kao kod klasičnog transportnog problema, učiniti zatvorenim dodavanjem fiktivnog ishodišta, odnosno fiktivnog odredišta, s odgovarajućom količinom ponude, odnosno odgovarajućom količinom potražnje.

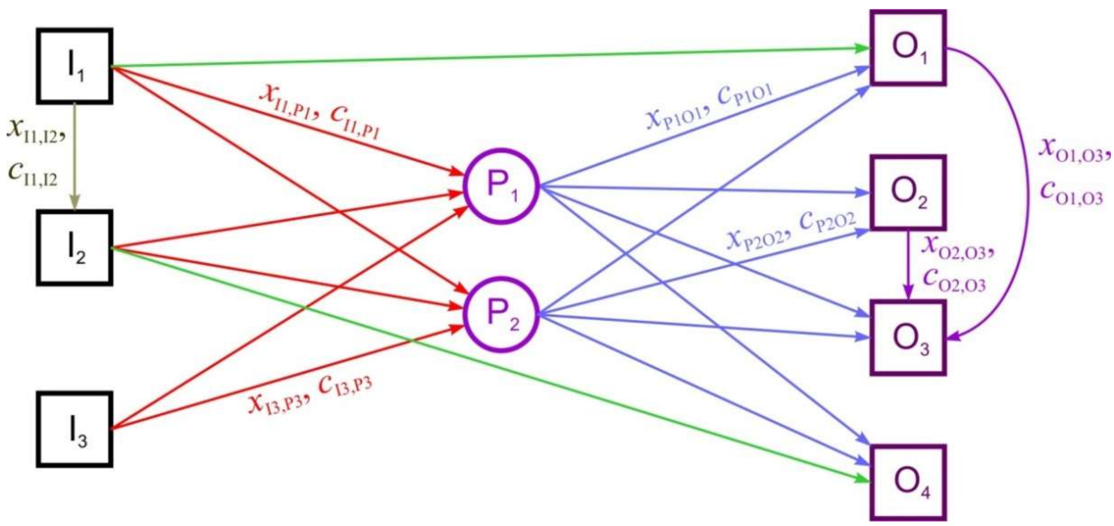
Naravno, sve jedinične cijene transporta iz fiktivnog ishodišta, odnosno prema fiktivnom odredištu, pri tom su jednake nuli.

Dok je kod klasičnog transportnog problema dopušten transport samo između ishodišta i odredišta, kod transportnog problema s pretovarom transport se može vršiti:

- između pojedinih ishodišta,
- iz ishodišta u mjesta pretovara,
- iz ishodišta izravno u odredišta,
- između pojedinih mjesta pretovara,
- iz mjesta pretovara u odredišta i
- između pojedinih odredišta.

Shematski prikaz transportnog problema s pretovarom i s uključenim svim mogućim među vezama prikazan je na slici 5.5. Kod prikazanog je problema moguć transport između dvaju ishodišta, između dvaju odredišta, ali i izravno između ishodišta i odredišta, bez pretovara. Sa slike je vidljivo da se radi o usmjerenom težinskom grafu.

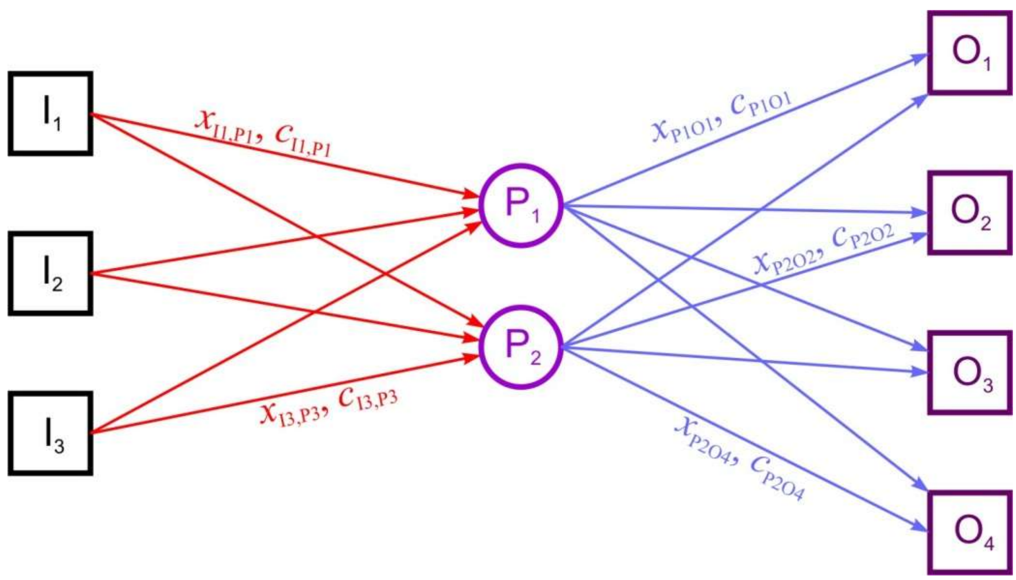
Iako bi se svaki posebni slučaj transportnog problema s pretovarom ponekad mogao riješiti na jednostavniji način, ovdje će se pojasniti njihovo rješavanje uporabom već kreiranog predloška TRANSPORT, opisanoga u poglavlju 5.5.



Slika 5.5. *Transportni problem s pretovarom i različitim transportnim putevima.*

Najjednostavniji slučaj transportnog problema s pretovarom onaj je kod kojega se roba iz svih ishodišta prvo transportira do mjesta pretovara, a potom iz mjesta pretovara u sva odredišta (slika 5.6).

Tablica (matrica) jediničnih cijena transporta ima poznate (zadane) jedinične cijene na onim relacijama koje su zadatkom omogućene, a vrlo velike vrijednosti (višestruko veće od najveće zadane) na onim relacijama koje prema zadanim parametrima problema nisu moguće. Jedinične cijene transporta između jednog te istog ishodišta, odnosno između jednog te istog odredišta pri tom su jednake nuli.



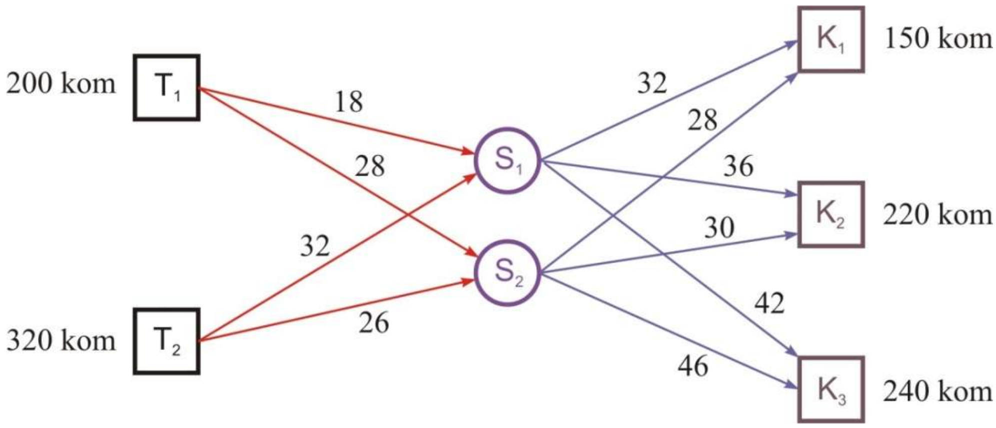
Slika 5.6. *Najjednostavniji transportni problem s pretovarom: roba se iz ishodišta transportira u mjesta pretovara, a potom iz mjesta pretovara u odredišta.*

Sve navedeno bit će pokazano na trima primjerima koji slijede: jednim u kojemu se sva roba iz ishodišta prvo transportira u mjesta pretovara, a potom u odredišta, te preostala dva primjera gdje će se roba moći transportirati izravno iz ishodišta u odredišta te između pojedinih ishodišta odnosno odredišta.

Primjer 5.6.

Poduzeće proizvodi uređaje u svojim dvjema tvornicama T1 i T2 i jednom ih tjedno transportira u svoja dva sabirna skladišta (mjesta pretovara) S1 i S2, odakle se dalje transportiraju prema trima velikim kupcima K1, K2 i K3.

Na slici 5.7 shematski je prikazan transport uređaja s jediničnim cijenama transporta u kunama (usmjereni težinski graf), količinama uređaja koje tvornice tjedno proizvedu, te s količinama koje tjedno potražuju pojedini kupci.



Slika 5.7. *Primjer 5.6: Shematski prikaz transporta uređaja s jediničnim cijenama, kapacitetom tvornica i potražnjom kupaca.*

Odrediti tjedni plan transporta uređaja tako da ukupni troškovi transporta budu minimalni. Koliki su ti troškovi?

Rješenje:

Najprije je potrebno ustvrditi o kakvu je transportnom problemu riječ, i to usporedbom količine ponude i količine potražnje uređaja. Kako je ukupna ponuda tvornica 200+320=520 komada, a potražnja kupaca 150+220+240=610 komada, zaključak je da se radi o otvorenom problemu transporta s pretovarom.

Kako bi se problem učinio zatvorenim, potrebno je dodati fiktivnu tvornicu kapaciteta 610-520=90 uređaja.

U ovom se trenutku pristupa kreiranju tablice transporta prikazane u primjerima poglavlja 5.5. U tu tablicu treba, u ovom slučaju, dodati i mjesta pretovara koja se sada javljaju i kao odredišta (za tvornice) i kao ishodišta (za kupce).

U tom smislu treba definirati njihove potražnje kao odredišta, odnosno ponude kao ishodišta. To se rješava na način da svakom od njih i ponuda i potražnja bude jednaka ukupnoj ponudi svih tvornica (uključujući fiktivnu), odnosno ukupnoj potražnji svih kupaca, a to je 610 komada uređaja. To zato što se stvarno može dogoditi da optimalan plan transporta predviđa da se uređaji iz svih tvornica najprije dopreme u jedno od sabirnih skladišta, a potom iz tog skladišta otpreme svim kupcima.

Konačno, problem je sveden na klasični problem transporta (tablica 5.7).

Tablica 5.7. *Primjer 5.6: Konačna tablica jediničnih cijena transporta.*

odredišta / ishodišta	Sklad. S1	Sklad. S2	Kupac K1	Kupac K2	Kupac K3	*ponuda ishodišta*
Tvornica 1	18	28	**1000**	**1000**	**1000**	**200**
Tvornica 2	32	26	**1000**	**1000**	**1000**	**320**
Fikt. tvornica	0	0	0	0	0	**90**
Sklad. 1	0	**1000**	32	36	42	**610**
Sklad. 2	**1000**	0	28	30	46	**610**
potražnja odredišta	**610**	**610**	**150**	**220**	**240**	

U tablici su upisani veliki iznosi jediničnih cijena transporta na onim relacijama koje shema transporta ne predviđa (izravno iz tvornica prema kupcima te između sabirnih skladišta). Cijena transporta iz fiktivne tvornice prema svima (skladištima i kupcima) jednaka je nuli, kao i cijene transporta iz skladišta S1, odnosno S2 kao ishodišta prema samima sebi kao odredištima.

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 5.8.

	Trošak transporta
Funkcija cilja	29220

Varijable odlučivanja (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište) — ograničenja ishodišta

	Skladište 1	Skladište 2	Kupac 1	Kupac 2	Kupac 3	otpremljena količina		ponuda ishodišta
Tvornica 1	200	0	0	0	0	200	=	**200**
Tvornica 2	0	320	0	0	0	320	=	**320**
Fiktivna tv.	0	0	0	0	90	90	=	**90**
Skladište 1	410	0	50	0	150	610	=	**610**
Skladište 2	0	290	100	220	0	610	=	**610**
ograničenja odredišta: dopremljena količina	610	610	150	220	240			
	=	=	=	=	=			
potražnja odredišta	**610**	**610**	**150**	**220**	**240**			

Jedinični troškovi transporta

	Skladište 1	Skladište 2	Kupac 1	Kupac 2	Kupac 3
Tvornica 1	18,00	28,00	1000,00	1000,00	1000,00
Tvornica 2	32,00	26,00	1000,00	1000,00	1000,00
Fiktivna tv.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Skladište 1	0,00	1000,00	32,00	36,00	42,00
Skladište 2	1000,00	0,00	28,00	30,00	46,00

Slika 5.8. *Primjer 5.6: Prilagođeni predložak TRANSPORT i konačno rješenje zadatka.*

Dakle, optimalan je plan transporta onaj prema kojem će se iz tvornice T1 svih 200 uređaja prevesti u sabirno skladište S1, iz tvornice T2 također će se svih 320 uređaja prevesti u sabirno skladište S2. Iz sabirnog skladišta S1 50 će se uređaja transportirati kupcu K1, a 150 kupcu K3, dok će se iz sabirnog skladišta S2 100 uređaja isporučiti kupcu K1, a 220 kupcu K2. Kupac K3 ostat će „kratak“ za 90 uređaja koji će mu biti „isporučeni“ iz fiktivne tvornice.

Minimalni trošak transporta iznosi pritom 29.220,00 kuna.

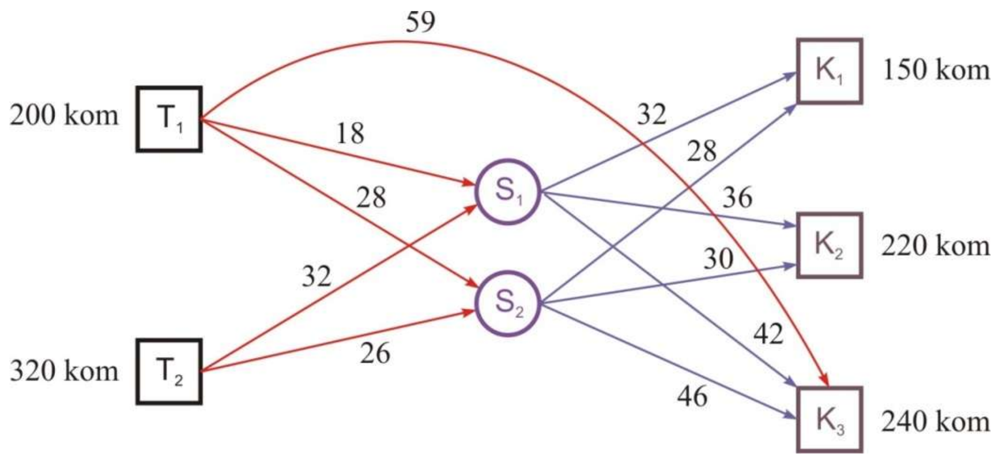
Napomene:

Kod otvorenih se transportnih problema s pretovarom mora omogućiti izravan transport iz fiktivnog ishodišta ka konačnim odredištima, odnosno iz stvarnih ishodišta ka fiktivnom odredištu, jer se u suprotnom iz rješenja ne bi moglo razaznati gdje je završila fiktivna količina robe.

U mjestima pretovara u konačnom se rješenju pojavljuje neka količina robe, i to ona koja je transportirana između jednog te istog mjesta pretovara. Ta količina robe u stvarnosti ne postoji, već je to razlika između one količine na koju smo dimenzionirali to mjesto pretovara (sveukupna količina ponude, odnosno potražnje) i stvarne količine robe koje je prošla tim mjestom pretovara.

Primjer 5.7.

Odrediti optimalni plan transporta s pretovarom prikazan u primjeru 5.6. kada bi se omogućio izravan transport iz tvornice T1 kupcu K3, ako je jedinična cijena tog transporta 59 kuna (shematski prikaz na slici 5.9).



Slika 5.9. *Primjer 5.7: Shematski prikaz transporta uređaja s jediničnim cijenama, kapacitetom tvornica i potražnjom kupaca.*

Rješenje:

Ako se omogući izravan transport iz nekog od ishodišta (ili iz više njih) u neko od odredišta (ili u više njih) problem se rješava na isti način kao u prethodnom primjeru, uz upisivanje stvarne (zadane) jedinične cijene transporta.

Na taj je način zadani problem sveden na klasični problem transporta (tablica 5.8).

Tablica 5.8. *Primjer 5.7: Konačna tablica jediničnih cijena transporta.*

odredišta / *ishodišta*	Sklad. S1	Sklad. S2	Kupac K1	Kupac K2	Kupac K3	*ponuda ishodišta*
Tvornica 1	18	28	**1000**	**1000**	59	**200**
Tvornica 2	32	26	**1000**	**1000**	**1000**	**320**
Fikt. tvornica	0	0	0	0	0	**90**
Sklad. 1	0	**1000**	32	36	42	**610**
Sklad. 2	**1000**	0	28	30	46	**610**
potražnja odredišta	**610**	**610**	**150**	**220**	**240**	

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 5.10.

	Trošak transporta
Funkcija cilja	29070

Varijable odlučivanja (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište) — ograničenja ishodišta

	Skladište 1	Skladište 2	Kupac 1	Kupac 2	Kupac 3	otpremljena količina		ponuda ishodišta
Tvornica 1	50	0	0	0	150	200	=	200
Tvornica 2	0	320	0	0	0	320	=	320
Fiktivna tv.	0	0	0	0	90	90	=	90
Skladište 1	560	0	50	0	0	610	=	610
Skladište 2	0	290	100	220	0	610	=	610
ograničenja odredišta: dopremljena količina	610	610	150	220	240			
	=	=	=	=	=			
potražnja odredišta	610	610	150	220	240			

Jedinični troškovi transporta

	Skladište 1	Skladište 2	Kupac 1	Kupac 2	Kupac 3
Tvornica 1	18,00	28,00	1000,00	1000,00	59,00
Tvornica 2	32,00	26,00	1000,00	1000,00	1000,00
Fiktivna tv.	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Skladište 1	0,00	1000,00	32,00	36,00	42,00
Skladište 2	1000,00	0,00	28,00	30,00	46,00

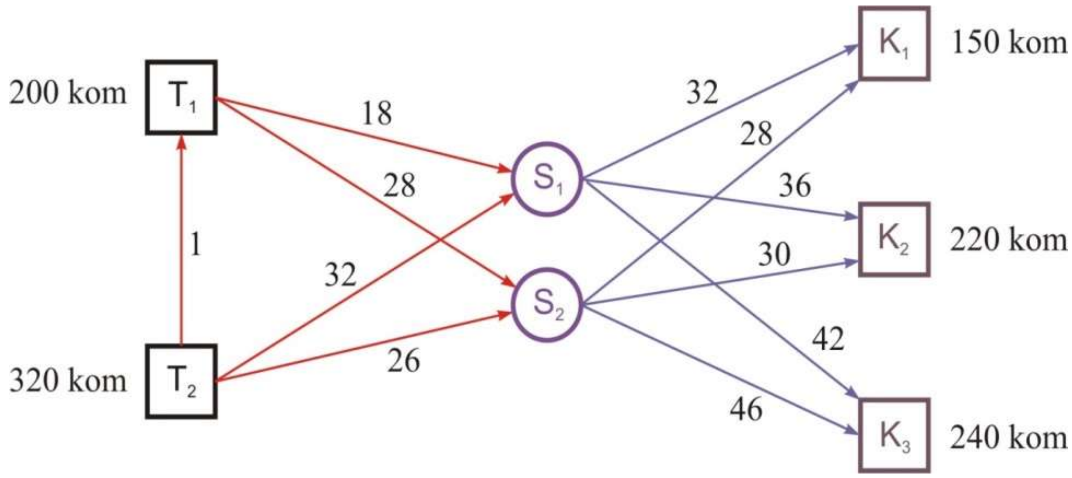
Slika 5.10. *Primjer 5.7: Prilagođeni predložak TRANSPORT i konačno rješenje zadatka.*

Sada je optimalan plan transporta onaj prema kojem će se iz tvornice T1 50 uređaja prevesti u sabirno skladište S1, a 150 izravno kupcu K3, iz tvornice T2 svih će se 320 uređaja prevesti u sabirno skladište S2. Iz sabirnog skladišta S1 50 uređaja transportirat će se kupcu K1, dok će se iz sabirnog skladišta S2 100 uređaja isporučiti kupcu K1, a 220 kupcu K2. Opet će kupac K3 ostati „kratak“ za 90 uređaja koji će mu biti „isporučeni“ iz fiktivne tvornice.

Minimalni trošak transporta iznosi pritom 29.070,00 kuna.

Primjer 5.8.

Odrediti optimalan plan transporta s pretovarom prikazan u primjeru 5.6. kada bi se omogućio transport iz tvornice T2 u tvornicu T1, ako jedinična cijena tog transporta iznosi točno jednu kunu (shematski prikaz na slici 5.11).



Slika 5.11. *Primjer 5.8: Shematski prikaz transporta uređaja s jediničnim cijenama, kapacitetom tvornica i potražnjom kupaca.*

Rješenje:

Ako se omogući izravan transport iz nekog od ishodišta u drugo ishodište, tada to ishodište postaje i pretovarno mjesto, a samim time mora se pojaviti i kao odredište u tablici transporta.

Bitno je u sljedećem koraku odrediti potražnju ishodišta koje ima i ulogu odredišta. Očevidno je da u to ishodište, kao mjesto pretovara, teoretski može biti dopremljena sva količina robe koja se nudi u ishodištu/ishodištima iz kojega je u to moguć transport.

Dakle, potražnja tvornice T1 iznosi ukupno 320 komada uređaja što je ponuda 2. ishodišta.

Budući da je potražnja tvornice T1 u ulozi odredišta (mjesta pretovara) 320 komada, a sama tvornica nudi 200 komada, ukupna ponuda tvornice T1 je 320+200=520 uređaja.

Konačno, problem je sveden na klasični problem transporta (tablica 5.9).

Nakon prilagodbe predloška TRANSPORT i unosa zadanih veličina i ograničenja s pomoću Excelova alata Solver dobiveni su rezultati prikazani na slici 5.12.

Tablica 5.9. *Primjer 5.8: Konačna tablica jediničnih cijena transporta.*

odredišta / *ishodišta*	Sklad. S1	Sklad. S2	Tvor. T1	Kup. K1	Kup. K2	Kup. K3	*ponuda ishodišta*
Tvor. 1	18	28	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**	**520**
Tvor. 2	32	26	1	**1000**	**1000**	**1000**	**320**
Fikt. tvor.	0	0	**1000**	0	0	0	**90**
Sklad. 1	0	**1000**	**1000**	32	36	42	**610**
Sklad. 2	**1000**	0	**1000**	28	30	46	**610**
potražnja odredišta	**610**	**610**	**320**	**150**	**220**	**240**	

U ovom je slučaju optimalan plan transporta onaj prema kojem će se najprije svi uređaji (njih 320) iz tvornice T2 transportirati u tvornicu T1, a potom iz tvornice T1 svi uređaji (sada njih 520) u sabirno skladište S1. Iz sabirnog skladišta S1 150 uređaja transportirat će se kupcu K1, 220 kupcu K2 i 150 kupcu K3.

	Trošak transporta
Funkcija cilja	28700

Varijable odlučivanja (količina koja se transportira iz ishodišta u odredište)

	Skladište 1	Skladište 2	Tvornica 1	Kupac 1	Kupac 2	Kupac 3	otpremljena količina (ograničenja ishodišta)		ponuda ishodišta
Tvornica 1	520	0	0	0	0	0	520	=	520
Tvornica 2	0	0	320	0	0	0	320	=	320
Fiktivna tv.	0	0	0	0	0	90	90	=	90
Skladište 1	90	0	0	150	220	150	610	=	610
Skladište 2	0	610	0	0	0	0	610	=	610
ograničenja odredišta: dopremljena količina	610	610	320	150	220	240			
	=	=	=	=	=	=			
potražnja odredišta	610	610	320	150	220	240			

Jedinični troškovi transporta

	Skladište 1	Skladište 2	Tvornica 1	Kupac 1	Kupac 2	Kupac 3
Tvornica 1	18,00	28,00	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00
Tvornica 2	32,00	26,00	1,00	1000,00	1000,00	1000,00
Fiktivna tv.	0,00	0,00	1000,00	0,00	0,00	0,00
Skladište 1	0,00	1000,00	1000,00	32,00	36,00	42,00
Skladište 2	1000,00	0,00	1000,00	28,00	30,00	46,00

Slika 5.12. *Primjer 5.8: Prilagođeni predložak TRANSPORT i konačno rješenje zadatka.*

I opet će kupac K3 ostati „kratak“ za 90 uređaja koji će mu biti „isporučeni“ iz fiktivne tvornice.

Minimalni trošak transporta iznosi u ovom slučaju 28.700,00 kuna.

Na sličan bi se način riješio i problem kod kojega bi se omogućio transport između pojedinih kupaca.

U tom bi slučaju onaj kupac od kojega je moguć transport prema nekom drugom kupcu, dobio i funkciju ishodišta te bi se pojavio i u stupcu svih ishodišta tablice transporta. Njegova potražnja bila bi jednaka ukupnoj ponudi svih tvornica (cjelokupnoj stvarnoj i fiktivnoj ponudi uređaja) jer, teoretski, sva roba može doći upravo k njemu.

Istovremeno, ponuda tog kupca (kao ishodišta) bila bi jednaka razlici ukupne ponude i potražnje tog kupca.

Na primjer, da se omogući transport robe od kupca K2 prema kupcu K3 (primjer 5.4.) po nekoj poznatoj jediničnoj cijeni, bila bi potražnja kupca K2, kao odredišta, jednaka cjelokupnoj ponudi svih tvornica (610 komada), dok bi ponuda kupca K2, kao ishodišta, u tom slučaju bila jednaka cjelokupnoj ponudi umanjenoj za potražnju tog kupca , dakle 610-220, odnosno 390 komada.

5.3.2. Problem najkraćeg puta

Problem najkraćeg puta (*the shortest path problem*) je problem iznalaženja najkraćeg puta između dvaju čvorova u grafu. Neki primjeri praktične primjene ovako definiranog problema su: optimalni plan polaganja cjevovoda, optimalni raspored različitih krugova (električnih, mrežnih, ...), optimalni raspored strojeva u postrojenjima, minimizacija troškova ili vremena transporta, i još mnogi drugi.

Matematički zapis ovog problema glasi:

Odrediti minimum funkcije cilja

$$F_C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

uz ograničenja

$$x_{ij} - x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i \text{ polazni čvor} \\ -1, & \text{ako je } i \text{ krajnji čvor} \\ 0, & \text{ako je } i \text{ bilo koji drugi čvor} \end{cases}$$

pri čemu su sve varijable odlučivanja x_{ij} binarni brojevi (0 ili 1), a c_{ij} je težina grane koja spaja čvorove i i j.

Navedena ograničenja znače da se iz prvoga čvora može samo izaći, u zadnji se može samo ući, dok se iz svakog ostalog čvora mora izaći, ako se prije toga u njega uđe.

Predložak za rješavanje problema najkraćeg puta u Excelu prikazan je na slici 5.13.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Problem najkraćeg puta										
2											
3						Varijable odlučivanja		Ograničenja			
4		Iz_čvora	U_čvor	Udaljenost		Ide_1/Ne_ide_0		Mjesto	Tok		Izlaz_Ulaz
5						0		Mj_P		=	1
6						0				=	0
7						0				=	0
8						0				=	0
9						0				=	0
10						0				=	0
11						0		Mj_C		=	-1
12						0					
13						0					
14						0					
15						0					
16						0					
17						0					
18						0					
19						0					
20											
21				Ukupni_put							

Slika 5.13. *Predložak za određivanje najkraćeg puta.*

U stupac B predloška, od ćelije B5, upisuje se broj odnosno naziv čvora u kojemu započinje neka grana dok se u odgovarajuću ćeliju stupca C upisuje krajnji čvor razmatrane grane. Započinje se s prvim (polaznim) čvorom, a završava zadnjim (ciljanim) čvorom.

Težina pojedine grane upisuje se u ćelije stupca D, dok su vrijednosti varijabla odlučivanja smještene u stupac F (njihove su početne vrijednosti izjednačene s nulom).

Vrijednost funkcije cilja (**Ukupni_put**) izračunava se u ćeliji F21 kao suma umnožaka težina pojedinih grana i varijabli odlučivanja, dakle unosom formule

=SUMPRODUCT(D5:D19;F5:F19).

U ćelije stupca H unose se brojevi/nazivi svih čvorova grafa, i to na način da se najprije unese polazni čvor, zatim svi ostali čvorovi, te na kraju ciljni (krajnji) čvor do kojega se i traži najkraći put.

U ćelijama stupca I izračunavaju se tokovi u svakom od čvorova grafa prema sljedećim formulama:

- u polaznom čvoru =SUMIF(B5:B19;H5;F5:F19)
- u krajnjem čvoru =-SUMIF(C5:C19;H11;F5:F19)
- u prvom čvoru nakon polaznoga

=SUMIF($B$5:$B$19;H6;$F$5:$F$19)-SUMIF($C$5:$C$19;H6;$F$5:$F$19).

Formula za izračun toka u prvom čvoru nakon polaznoga sada se može kopirati i za sve ostale čvorove (osim krajnjega). Zbog apsolutnih adresa prvog i trećeg člana u svakoj od zagrada mijenjat će se (prilagođavati) samo adresa srednjeg člana u zagradi.

Funkcija SUMIF(**Raspon_1**;**Adresa_ćelije**;**Raspon_2**) vraća vrijednost iz raspona ćelija **Raspon_2** i to baš iz retka u kojem vrijednost u rasponu ćelija **Raspon**_1 odgovara vrijednosti u ćeliji **Adresa_ćelije**.

a)

	A	B	C	D	E
1					
2		n	2^n	željeni broj	potencija
3		1	2	8	
4		2	4		
5		3	8		
6		4	16		
7		5	32		
8		6	64		

b)

	A	B	C	D	E
1					
2		n	2^n	željeni broj	potencija
3		1	2	8	3
4		2	4		
5		3	8		
6		4	16		
7		5	32		
8		6	64		

Slika 5.14. *Primjer uporabe funkcije SUMIF.*

U primjeru prikazanom na slici 5.14.a, gdje su u stupcu B dane potencije, u stupcu C vrijednosti broja 2 dignute na te potencije, a u ćeliji D3 je broj 8, upisivanjem formule

=SUMIF(B3B8;D3;C3:C8)

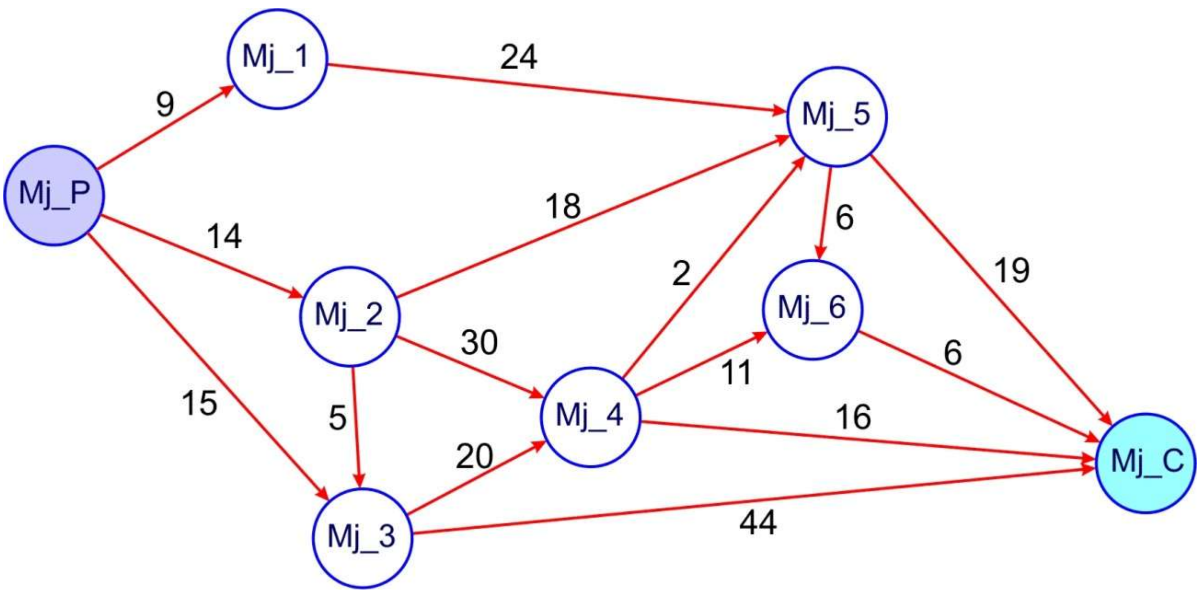
u ćeliju E3 u istoj će se kao rezultat dobiti broj 3 (slika 5.14.b).

Naime, upisana formula traži onaj broj u stupcu „**n**“ koji se nalazi u istom retku stupca „**2^n**“ u kojem se nalazi broj upisan u ćeliju D3 (broj 8).

Dobiveni je rezultat odgovor na pitanje: *Na koju je potenciju potrebno potencirati broj 2 da se dobije broj 8?*

Primjer 5.9.

Odrediti najkraći put od mjesta polaska (Mj_P) do ciljane destinacije (Mj_C) u usmjerenom težinskom grafu prikazanom na slici 5.15 [37].



Slika 5.16. *Primjer 5.9: Usmjereni težinski graf: težine grana.*

Rješenje:

Predložak **Najkraći_put** prilagođen razmatranom problemu sa unesenim svim podatcima prikazan je na slici 5.16.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Problem najkraćeg puta										
2											
3						Varijable odlučivanja		Ograničenja			
4		Iz_mjesta	U_mjesto	Težina grane		Ide1_Neide0		Mjesto	Tok		Ponuda_potražnja
5		Mj_P	Mj_1	9		0		Mj_P	0	=	
6		Mj_P	Mj_2	14		0		Mj_1	0	=	
7		Mj_P	Mj_3	15		0		Mj_2	0	=	
8		Mj_1	Mj_5	24		0		Mj_3	0	=	
9		Mj_2	Mj_3	5		0		Mj_4	0	=	
10		Mj_2	Mj_4	30		0		Mj_5	0	=	
11		Mj_2	Mj_5	18		0		Mj_6	0	=	
12		Mj_3	Mj_4	20		0		Mj_C	0	=	
13		Mj_3	Mj_C	44		0					
14		Mj_4	Mj_5	2		0					
15		Mj_4	Mj_6	11		0					
16		Mj_4	Mj_C	16		0					
17		Mj_5	Mj_6	6		0					
18		Mj_5	Mj_C	19		0					
19		Mj_6	Mj_C	6		0					
20											
21				**Ukupni_put**							

Slika 5.16. *Primjer 5.9: Predložak sa zadanim vrijednostima.*

Sada je potrebno unijeti formule za izračun funkcije cilja kao i tokova u pojedinim čvorovima grafa, kako slijedi:

- u ćeliju F21 upisati =SUMPRODUCT(D5:D19;F5:F19)
- u ćeliju I5 upisati =SUMIF(B5:B19;H5;F5:F19)
- u ćeliju I7 upisati (vodeći računa o apsolutnim adresama)
  =SUMIF($B$5:$B$19;H6;$F$5:$F$19)-SUMIF($C$5:$C$19;H6;$F$5:$F$19)
  pa tu formulu kopirati u sve ćelije do uključujući ćeliju I11
- u ćeliju I12 upisati =-SUMIF(C5:C19;H11;F5:F19)

Pokrenuti zatim Solver pa u okvir *Set target cell:* upisati F21, u dijelu *To:* kliknuti na *Min*, u okviru *By changing cells:* upisati raspon F5:F19 (polje varijabla odlučivanja), pa dodati ograničenja (raspon ćelija I5:I12 mora biti jednak rasponu K5:K12). Uz to, treba dodati ograničenje da su varijable odlučivanja binarni brojevi.

Sada kliknuti na dugme *Options* pa aktivirati opcije *Assume linear model* i *Assume nonnegative*, te nakon povratka u dijaloški okvir *Solver Parameters* kliknuti na dugme *Solve*.

Dobit će se rješenje prikazano na slici 5.17.

Dakle, najkraći put od 44 mjerne jedinice podrazumijeva kretanje iz Mj_P u Mj_2, pa iz Mj_2 u Mj_5, pa iz Mj_5 u Mj_6, te konačno iz Mj_6 u ciljani čvor (mjesto) Mj_C, odnosno po putanji:

$$\text{Mj\_P} \rightarrow \text{Mj\_2} \rightarrow \text{Mj\_5} \rightarrow \text{Mj\_6} \rightarrow \text{Mj\_C}.$$

Zbrajanjem težina odgovarajućih grana lako je dobiti:

$$14 + 18 + 6 + 6 = 44 .$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Problem najkraćeg puta										
2											
3						Varijable odlučivanja		Ograničenja			
4		Iz_mjesta	U_mjesto	Težina grane		Ide1_Neide0		Mjesto	Tok		Ponuda_potražnja
5		Mj_P	Mj_1	9		0		Mj_P	1	=	1
6		Mj_P	Mj_2	14		1		Mj_1	0	=	0
7		Mj_P	Mj_3	15		0		Mj_2	0	=	0
8		Mj_1	Mj_5	24		0		Mj_3	0	=	0
9		Mj_2	Mj_3	5		0		Mj_4	0	=	0
10		Mj_2	Mj_4	30		0		Mj_5	0	=	0
11		Mj_2	Mj_5	18		1		Mj_6	0	=	0
12		Mj_3	Mj_4	20		0		Mj_C	-1	=	-1
13		Mj_3	Mj_C	44		0					
14		Mj_4	Mj_5	2		0					
15		Mj_4	Mj_6	11		0					
16		Mj_4	Mj_C	16		0					
17		Mj_5	Mj_6	6		1					
18		Mj_5	Mj_C	19		0					
19		Mj_6	Mj_C	6		1					
20											
21				Ukupni_put		44					

Slika 5.17. *Primjer 5.9: Konačno rješenje.*

5.3.3. Problem najvećeg protoka

Problem najvećeg protoka (*the maximum flow problem*) je problem iznalaženja najvećeg protoka između dvaju čvorova, jednog izvora odnosno jednog ponora, u grafu. Neki primjeri praktične primjene ovako definiranog problema mogu se naći u optimalnom definiranju kapaciteta različitih mreža: cjevovoda kojima se transportiraju različiti mediji, električnih i optičkih mreža, mreža transporta (cestovnih, vodenih i zračnih), i tako dalje.

Matematički zapis ovog problema glasi:

Odrediti maksimum funkcije cilja

$$F_C = \sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

uz ograničenja

$$x_{ij} \le c_{ij} \qquad i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n \qquad \text{(A)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ji} \quad \text{za sve čvorove izuzev izvora i ponora} \qquad \text{(B)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f \quad \text{za izvor } (i \text{ je prvi čvor u mreži}) \qquad \text{(C)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = -f \quad \text{za ponor } (i \text{ je zadnji čvor u mreži}) \qquad \text{(D)}$$

pri čemu su sve varijable odlučivanja x_{ij} tokovi kroz pojedine grane grafa, a c_{ij} su kapaciteti tih grana.

Skupina ograničenja (A) znači da protok kroz pojedinu granu ne može biti veći od kapaciteta te iste grane, dok se skupina (B) ograničenja odnosi na čvorove i uvažava zakon o očuvanju toka prema kojemu tok koji u neki čvor (izuzev izvora i ponora) uđe mora iz njega i izaći.

Ograničenje (C) kazuje da zbroj svih tokova koji iz izvora izađu moraju biti jednaki upravo najvećem protoku razmatrane mreže (grafa). Analogno, ograničenje (D) znači da suma svih tokova koji uđu u ponor također mora biti jednaka najvećem protoku razmatrane mreže.

Predložak za rješavanje problema najvećeg protoka u Excelu prikazan je na slici 5.18.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Problem najvećeg protoka										
2											
3				Varijable odlučivanja				Očuvanje toka (ograničenja)			
4		Iz_čvora	U_čvor	Protok		Kapacitet grane		Čvor	Tok		Izlaz_Ulaz
5				0	<=			Izvor			
6				0	<=					=	0
7				0	<=					=	0
8				0	<=					=	0
9				0	<=					=	0
10				0	<=					=	0
11				0	<=			Ponor			
12				0	<=						
13				0	<=						
14				0	<=						
15				0	<=						
16				0	<=						
17				0	<=						
18				0	<=						
19				0	<=						
20											
21		Najveći protok									

Slika 5.18. *Predložak za određivanje najvećeg protoka.*

U stupac B predloška, od ćelije B5, upisuje se broj odnosno naziv čvora u kojemu započinje neka grana dok se u odgovarajuću ćeliju stupca C upisuje krajnji čvor razmatrane grane. Započinje se s prvim (polaznim) čvorom.

Varijable odlučivanja su u stupcu D (raspon ćelija B5:B19) i predstavljaju protok kroz odgovarajuću granu grafa.

U stupac F se upisuju kapaciteti pojedinih grana, a iz stupaca D i E slijedi i jedna skupina ograničenja (D5:D19≤F5:F19).

Vrijednost funkcije cilja (**Najveći_protok**) izračunava se u ćeliji D21, gdje se zbog činjenice da najveći protok u mreži mora biti jednak sumi svih tokova koji napuštaju izvor upisuje

=I5.

U ćelije stupca H unose se brojevi/nazivi svih čvorova grafa, i to na način da se najprije unese polazni čvor (**Izvor**), zatim svi ostali čvorovi, te na kraju ciljni čvor (**Ponor**).

U ćelijama stupca I izračunavaju se tokovi u svakom od čvorova grafa prema sljedećim formulama:

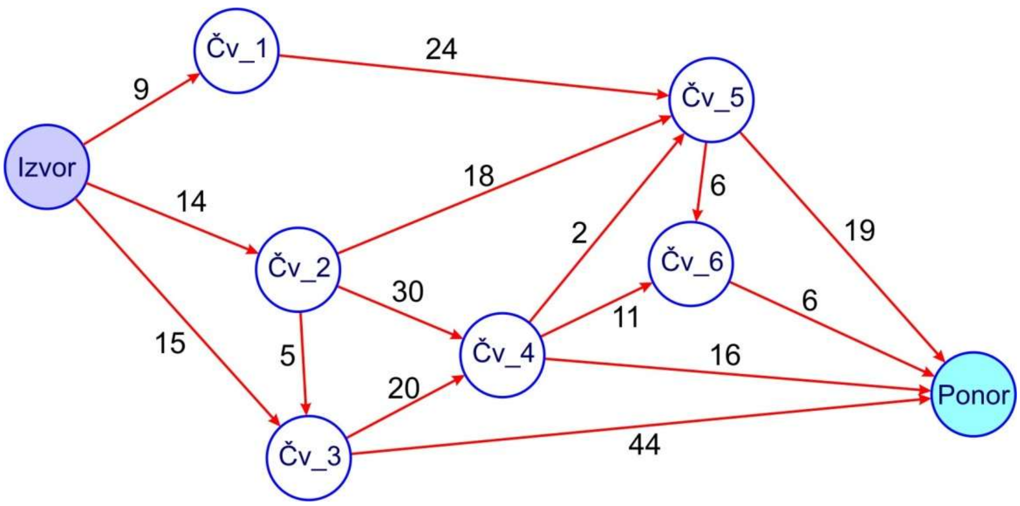
- u polaznom čvoru (**Izvor**) =SUMIF(B5:B19;H5;D5:D19)
- u krajnjem čvoru (**Ponor**) =-SUMIF(C5:C19;H11;D5:D19)
- u prvom čvoru nakon **Izvora**

=SUMIF($B$5:$B$19;H6;$D$5:$D$19)-SUMIF($C$5:$C$19;H6;$D$5:$D$19).

Formula za izračun toka u prvom čvoru nakon polaznoga sada se može kopirati i za sve ostale čvorove (osim **Ponora**). Zbog apsolutnih adresa prvog i trećeg člana u svakoj od zagrada mijenjat će se (prilagođavati) samo adresa srednjeg člana u zagradi.

Primjer 5.10.

Odrediti najveći protok od početnog čvora (**Izvor**) do krajnjeg čvora (**Ponor**) u usmjerenom težinskom grafu prikazanom na slici 5.19.



Slika 5.19. *Primjer 5.10: Usmjereni težinski graf: kapaciteti grana.*

Rješenje:

Predložak **Najveći_protok** prilagođen razmatranom problemu sa unesenim svim podatcima prikazan je na slici 5.21.

Sada je potrebno unijeti formule za izračun funkcije cilja i svih ograničenja:

- u ćeliju D21 upisati =I5
- u ćeliju I5 upisati =SUMIF(B5:B19;H5;F5:F19)
- u ćeliju I7 upisati (vodeći računa o apsolutnim adresama)
  =SUMIF($B$5:$B$19;H6;$F$5:$F$19)-SUMIF($C$5:$C$19;H6;$F$5:$F$19)
  pa tu formulu kopirati u sve ćelije do uključujući ćeliju I11
- u ćeliju I12 upisati =-SUMIF(B5:B19;H11;F5:F19).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Problem najvećeg protoka										
2											
3				Varijable odlučivanja				Očuvanje toka (ograničenja)			
4		Iz_čvora	U_čvor	Protok		Kapacitet grane		Čvor	Tok		Izlaz_Ulaz
5		**Izvor**	Čv_1	0	<=	9		Izvor			
6		**Izvor**	Čv_2	0	<=	14		Čv_1		=	0
7		**Izvor**	Čv_3	0	<=	15		Čv_2		=	0
8		Čv_1	Čv_5	0	<=	24		Čv_3		=	0
9		Čv_2	Čv_3	0	<=	5		Čv_4		=	0
10		Čv_2	Čv_4	0	<=	30		Čv_5		=	0
11		Čv_2	Čv_5	0	<=	18		Čv_6		=	0
12		Čv_3	Čv_4	0	<=	20		Ponor			
13		Čv_3	**Ponor**	0	<=	44					
14		Čv_4	Čv_5	0	<=	2					
15		Čv_4	Čv_6	0	<=	11					
16		Čv_4	**Ponor**	0	<=	16					
17		Čv_5	Čv_6	0	<=	6					
18		Čv_5	**Ponor**	0	<=	19					
19		Čv_6	**Ponor**	0	<=	6					
20											
21		**Najveći protok**									

Slika 5.20. *Primjer 5.10: Predložak sa zadanim vrijednostima.*

Pokrenuti zatim Solver pa u okvir *Set target cell:* upisati D21, u dijelu *To:* kliknuti na *Max*, u okviru *By changing cells:* upisati raspon D5:D19 (polje varijabla odlučivanja), pa dodati ograničenja: prvo da vrijednosti ćelija u rasponu D5:D19 moraju biti manje ili jednake vrijednostima ćelija u rasponu F5:F19, te drugo da vrijednosti ćelija u rasponu I6:I11 moraju biti jednake vrijednostima ćelija u rasponu K6:K11.

Sada kliknuti na dugme *Options* pa aktivirati opcije *Assume linear model* i *Assume nonnegative*, te nakon povratka u dijaloški okvir *Solver Parameters* kliknuti na dugme *Solve*.

Dobit će se rješenje prikazano na slici 5.21.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Problem najvećeg protoka										
2											
3				Varijable odlučivanja				Očuvanje toka (ograničenja)			
4		Iz_čvora	U_čvor	Protok		Kapacitet grane		Čvor	Tok		Izlaz_Ulaz
5		**Izvor**	Čv_1	9	<=	9		Izvor	38		
6		**Izvor**	Čv_2	14	<=	14		Čv_1	0	=	0
7		**Izvor**	Čv_3	15	<=	15		Čv_2	0	=	0
8		Čv_1	Čv_5	9	<=	24		Čv_3	0	=	0
9		Čv_2	Čv_3	5	<=	5		Čv_4	0	=	0
10		Čv_2	Čv_4	9	<=	30		Čv_5	0	=	0
11		Čv_2	Čv_5	0	<=	18		Čv_6	0	=	0
12		Čv_3	Čv_4	0	<=	20		Ponor	-38		
13		Čv_3	**Ponor**	20	<=	44					
14		Čv_4	Čv_5	0	<=	2					
15		Čv_4	Čv_6	0	<=	11					
16		Čv_4	**Ponor**	9	<=	16					
17		Čv_5	Čv_6	0	<=	6					
18		Čv_5	**Ponor**	9	<=	19					
19		Čv_6	**Ponor**	0	<=	6					
20											
21		**Najveći protok**		**38**							

Slika 5.21. *Primjer 5.10: Konačno rješenje.*

Dakle, najveći protok u zadanom primjeru iznosi 38 mjernih jedinica. Pri tome će iz **Izvora** 9 jedinica teći ka čvoru Čv_1, 14 ka čvoru Čv_2 te 15 ka čvoru Čv_3. Iz čvora Čv_1 svih 9 jedinica će ići ka čvoru Čv_5. Iz čvora Čv_2 5 jedinica će ići ka čvoru 3 a 9 jedinica ka čvoru Čv_4. Iz čvora Čv_3 će svih 20 jedinica ići ka zadnjem čvoru (**Ponoru**). U **Ponor** će završiti svih 9 jedinica iz čvora Čv_4 kao i svih 9 jedinica iz čvora Čv_5.
Može se zaključiti kako će u **Ponor** stići 20 jedinica iz čvora Čv_3 te po 9 jedinica iz čvorova Čv_4 i Čv_5, dakle ukupno 38 jedinica.

5.3.4. Problem kritičnog puta

Problem kritičnog (najdužeg) puta od osobitog je značaja za područje upravljanja projektima, a definira se kao postupak iznalaženja najdužeg mogućeg puta (puta najveće ukupne težine) u jednostavnom usmjerenom težinskom grafu. Pri tom se misli na sve oblike projekata: u graditeljstvu, brodogradnji, razvoju programske podrške, razvoju proizvoda, proizvodnji, i tako dalje.

Uz pomoć problema kritičnog puta korisnik može odrediti koliko dugo će trajati izvođenje njegovoga kompleksnog projekta, ali isto tako i koje su aktivnosti u tom projektu kritične, odnosno koje od aktivnosti u projektu svakako moraju biti završene na vrijeme ili će doći do kašnjenja projekta.

Iako postoji više postupaka za iznalaženje kritičnog puta, ovdje će se iskoristiti analogija problema s problemom dodjeljivanja opisanom u dijelu 5.6.

Naime, problem kritičnog puta može se prikazati i kao problem dodjeljivanja čvora i čvoru j pri čemu je efikasnost tog dodjeljivanja jednaka težini grane koja spaja te čvorove. Kako je razmatrani graf usmjeren, čvor j se ne može „dodijeliti“ čvoru i pa se to sprječava velikom negativnom efikasnošću takvog dodjeljivanja. Isto se radi i za sve čvorove koji nisu međusobno povezani. Pri tome se nijedan čvor ne može dodijeliti početnom, niti se krajnji (zadnji) čvor može dodijeliti nekom drugom čvoru.

Dakle, problem kritičnog puta može se prikazati i na sljedeći način:

Odrediti maksimum funkcije cilja

$$F_C = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

uz ograničenja

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{za svaki } i = 1, 2, ..., n$$

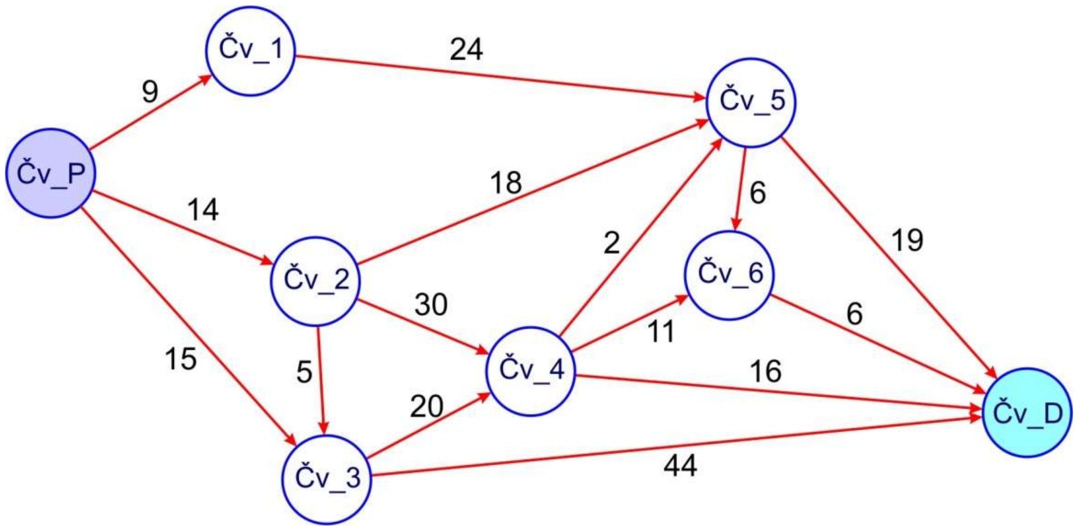
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \text{za svaki } j = 1, 2, ..., n$$

gdje su sve varijable odlučivanja x_{ij} binarni brojevi, a težine grana x_{ij} su koeficijenti funkcije cilja.

Budući da je predložak **Asignacija** pobliže opisan u poglavlju 5.6. ovdje će se korištenje tog predloška u rješavanju problema kritičnog puta prikazati na jednom primjeru.

Primjer 5.11.

Odrediti kritični put od početnog čvora (**Čv_P**) do krajnjeg čvora (**Čv_D**) u usmjerenom težinskom grafu prikazanom na slici 5.22.



Slika 5.22. *Primjer 5.11: Usmjereni težinski graf: težine grana (npr. vrijeme).*

Rješenje:

Predložak **Asignacija** prilagođen razmatranom problemu sa unesenim svim podatcima prikazan je na slici 5.23.

Sa slike je vidljivo da je vrlo veliki broj varijabli odlučivanja za koje se unaprijed zna da će biti jednake nuli. To su sve one varijable uz koje je koeficijent u funkciji cilja (efikasnost, težina grane) veliki negativni broj (sve ljubičasto osjenčane ćelije na slici 5.23). To nadalje znači da se problem opterećuje nepotrebno velikim brojem varijabla odlučivanja. Međutim, za jednostavne probleme, s relativno malo čvorova, to i nije od presudnoga značenja.

S druge strane postupak izračuna je lako razumljiv i jednostavan.

Nadalje, pri dodjeljivanja nekoga čvora samome sebi upisana efikasnost jednaka je nuli i to kako takvo dodjeljivanje ne bi promijenilo vrijednost funkcije cilja. Ako se ovo dodjeljivanje dogodi u konačnom rješenju problema, to samo znači da razmatrani čvor nije na kritičnom putu.

Može se također vidjeti da u stupcu u kojem su poredani odlazni čvorovi nema krajnjega čvora Čv_D, kao što ni u retku dolaznih čvorova nema početnoga čvora Čv_P.

Slijedi unos potrebnih formula:

- u ćeliju D2 upisati formulu za izračun funkcije cilja
  =SUMPRODUCT(C6:I12;C19:I25)
- u ćeliju J6 upisati =SUM(C6:I6) pa tu formulu kopirati u preostale ćelije stupca J
- u ćeliju C13 upisati =SUM(C12:I12) pa tu formulu kopirati u preostale ćelije retka 12.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		OPIS		Efikasnost								
2		Funkcija cilja		0								
3												
4		Varijable odlučivanja (iz kojega se čvora u koji dolazi)								ograničenja odlaznih čvorova		
5			Čv_1	Čv_2	Čv_3	Čv_4	Čv_5	Čv_6	Čv_D	dodijeljeno		ponuda čvorova
6		Čv_P	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
7		Čv_1	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
8		Čv_2	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
9		Čv_3	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
10		Čv_4	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
11		Čv_5	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
12		Čv_6	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
13	ograničenja dolaznih čvorova	dobiveno čvorova	0	0	0	0	0	0	0			
14			=	=	=	=	=	=	=			
15		potražnja čvorova	1	1	1	1	1	1	1			
16												
17		Težine grana										
18			Čv_1	Čv_2	Čv_3	Čv_4	Čv_5	Čv_6	Čv_D			
19		Čv_P	9,00	14,00	15,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00			
20		Čv_1	0,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	24,00	-1000,00	-1000,00			
21		Čv_2	-1000,00	0,00	5,00	30,00	2,00	-1000,00	-1000,00			
22		Čv_3	-1000,00	-1000,00	0,00	20,00	-1000,00	-1000,00	44,00			
23		Čv_4	-1000,00	-1000,00	-1000,00	0,00	2,00	11,00	16,00			
24		Čv_5	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	0,00	6,00	19,00			
25		Čv_6	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	0,00	6,00			

Slika 5.23. *Primjer 5.11: Prilagođeni predložak* ***Asignacija*** *sa zadanim vrijednostima.*

Pokrenuti zatim Solver pa u okvir *Set target cell:* upisati D2, u dijelu *To:* kliknuti na *Max*, u okviru *By changing cells:* upisati raspon C6:I12 (polje varijabla odlučivanja), pa dodati ograničenja: prvo, da vrijednosti ćelija u rasponu J6:J12 moraju biti jednake vrijednostima ćelija u rasponu L6:L12; drugo, da vrijednosti ćelija u rasponu C13:I13 moraju biti jednake vrijednostima ćelija u rasponu C15:I15 i treće, da su sve varijable odlučivanja (raspon C6:I12) binarni brojevi.

Sada kliknuti na dugme *Options* pa aktivirati opcije *Assume linear model* i *Assume nonnegative*, te nakon povratka u dijaloški okvir *Solver Parameters* kliknuti na dugme *Solve*.

Dobit će se rješenje prikazano na slici 5.24.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		OPIS		Efikasnost								
2		Funkcija cilja		65								
3												
4		Varijable odlučivanja (iz kojega se čvora u koji dolazi)								ograničenja odlaznih čvorova		
5			Čv_1	Čv_2	Čv_3	Čv_4	Čv_5	Čv_6	Čv_D	dodijeljeno čvorova		ponuda čvorova
6		Čv_P	0	1	0	0	0	0	0	1	=	1
7		Čv_1	1	0	0	0	0	0	0	1	=	1
8		Čv_2	0	0	0	1	0	0	0	1	=	1
9		Čv_3	0	0	1	0	0	0	0	1	=	1
10		Čv_4	0	0	0	0	1	0	0	1	=	1
11		Čv_5	0	0	0	0	0	0	1	1	=	1
12		Čv_6	0	0	0	0	0	1	0	1	=	1
13	ograničenja dolaznih čvorova	dobiveno čvorova	1	1	1	1	1	1	1			
14			=	=	=	=	=	=	=			
15		potražnja čvorova	1	1	1	1	1	1	1			
16												
17		Težine grana										
18			Čv_1	Čv_2	Čv_3	Čv_4	Čv_5	Čv_6	Čv_D			
19		Čv_P	9,00	14,00	15,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00			
20		Čv_1	0,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	24,00	-1000,00	-1000,00			
21		Čv_2	-1000,00	0,00	5,00	30,00	2,00	-1000,00	-1000,00			
22		Čv_3	-1000,00	-1000,00	0,00	20,00	-1000,00	-1000,00	44,00			
23		Čv_4	-1000,00	-1000,00	-1000,00	0,00	2,00	11,00	16,00			
24		Čv_5	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	0,00	6,00	19,00			
25		Čv_6	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	-1000,00	0,00	6,00			

Slika 5.24. *Primjer 5.11: Konačno rješenje.*

Dakle, kritični put ostvaruje se na putanji

Čv_P → Čv_2 → Čv_4 → Čv_5→ **Čv_D**

a trajanje toga puta je 65 vremenskih jedinica.

Prema dobivenim rezultatima čvorovi Čv_3 i Čv_6 dodijeljeni su samima sebi, tj ne nalaze se na kritičnom putu.

5.3.5. Problem trgovačkog putnika

Problem trgovačkog putnika (*Traveling Salesman Problem*) pripada području diskretne optimizacije a definicija mu je dosta jednostavna: Trgovački putnik mora obići niz gradova, u svaki od njih svratiti samo jednom i na kraju se vratiti u grad iz kojega je krenuo. Pri tome su poznati ti gradovi kao i njihove međusobne udaljenosti. Pitanje je kojim redoslijedom trgovački putnik treba obilaziti zadane gradove pa da ukupna duljina puta kojega će pri tom prevaliti bude minimalna.

Za jednostavno definiran problem očekivalo bi se i jednostavno rješenje. No problem je u tome što se n gradova može obići na $n!$ (n faktorijela) načina. Tako se za pet gradova dobije $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ mogućih kombinacija obilazaka, za deset gradova $10! = 3\,628\,800$ kombinacija, a za njih dvadeset $20! = 2,433 \cdot 10^{18}$ kombinacija.

Zato je razvijen čitav niz postupaka za rješavanje problema trgovačkog putnika: pretraga grubom silom, pohlepni postupak (algoritam), postupak grananja i ograđivanja, i tako dalje.

Ovdje će se prikazati postupak rješavanja problema trgovačkog putnika s pomoću *Excelovih* funkcija i *Solvera*.

Nova funkcija koja će se koristiti a do sada u ovim skriptama nije prikazana je funkcija INDEX kojoj je sintaksa sljedeća

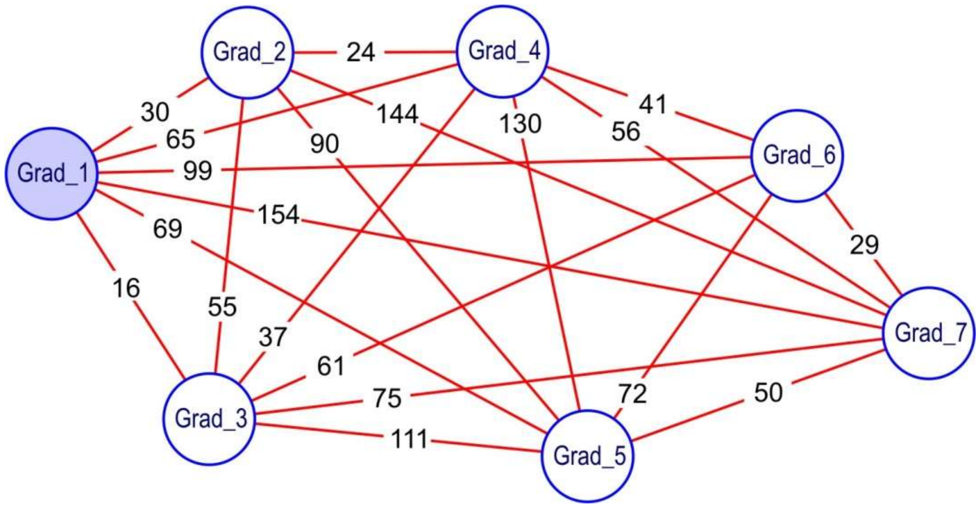
=INDEX(**RasponĆelija**;**RedakBr**;**StupacBr**)

a rezultat je vrijednost koja se nalazi u ćeliji na presjecištu retka **RedakBr** i stupca **StupacBr** tablice **RasponĆelija**.

Postupak rješavanja će se prikazati na sljedećim primjerima.

Primjer 5.12.

Odrediti kojim redoslijedom trgovački putnik mora obilaziti gradove, polazeći iz grada Grad_1, pa da pri tom prevaljeni put bude minimalan. Svi gradovi s međusobnim vezama i udaljenostima u km prikazani su neusmjerenim težinskim grafom na slici 5.25.



Slika 5.25. *Primjer 5.12: Neusmjereni težinski graf: međusobne udaljenosti gradova.*

Raspored gradova na slici ne odgovara stvarnom topološkom položaju, ovakav prikaz je dan samo zbog bolje preglednosti.

Rješenje:

U Excelovom radnom listu treba najprije kreirati tablicu sa svim gradovima i njihovim udaljenostima, kako je to prikazano na slici 5.27. Kako ne postoji izravna veza između gradova 2 i 6, upisana je jako velika udaljenost između tih gradova (1000 km).

Zbog preglednijeg rada uz imena gradova dodan je i redak/stupac s brojem koji odgovara pojedinom gradu.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2				Grad_1	Grad_2	Grad_3	Grad_4	Grad_5	Grad_6	Grad_7
3				1	2	3	4	5	6	7
4		Grad_1	1	0	30	16	65	69	99	154
5		Grad_2	2	30	0	55	24	90	1000	144
6		Grad_3	3	16	55	0	37	111	61	75
7		Grad_4	4	65	24	37	0	130	41	56
8		Grad_5	5	69	90	111	130	0	72	50
9		Grad_6	6	99	1000	61	41	72	0	29
10		Grad_7	7	154	144	75	56	50	29	0

Slika 5.26. *Primjer 5.12: Tablica s nazivima gradova i udaljenostima.*

U sljedećem koraku potrebno je ispod početne tablice (sl. 5.26) formirati polja prikazana na slici 5.27.

13	Imena gradova		Grad_1	Grad_2	Grad_3	Grad_4	Grad_5	Grad_6	Grad_7	
14	Brojevi gradova		1	2	3	4	5	6	7	1
15	Udaljenosti gradova									
16										
17								Ukupno prevaljeni put		

Slika 5.27. *Primjer 5.12: Priprema polja za izračun minimalnog puta.*

Dakle, u ćeliju B13 treba upisati naslov retka Imena gradova, u B14 naslov Brojevi gradova a u B15 Udaljenost gradova.

Sada se u redak 14, od ćelije D14, upisuje početno rješenje, odnosno brojevi gradova redom 1, 2, ..., do 7. Pretpostavlja se u početnom rješenju da će trgovački putnik krenuti iz grada 1 u 2, iz 2 u 3, pa sve tako do grada 7 nakon čega se treba vratiti u grad 1 iz kojega je krenuo. Zato se u ćeliju K14 mora upisati formula =D14.

Imena gradova u retku iznad dobit će se primjenom funkcije INDEX: u ćeliju D13 treba upisati formulu =INDEX($D$2:$J$3;1;D14).

Ova će formula kao rezultat dati ime grada koji se nalazi u retku 1 raspona ćelija D2:J3, i to upravo u stupcu broj D14; u ovom slučaju to je **Grad_1**.

Budući su za raspon korištene apsolutne adrese ćelija, ova se formula može kopirati sve do ćelije K14.

U ćelijama retka 15, od ćelije D15 do J15, upisuju se formule koje računaju udaljenost između dvaju gradova čije se brojčane oznake nalaze u dvjema susjednim ćelijama retka 14. Tako je u ćeliju D15 potrebno upisati formulu =INDEX($D$4:$J$10;D14;D15). Ova će formula za rezultat dati vrijednost iz ćelije koja se nalazi na presjecištu retka

D14 i stupca D15 u rasponu ćelija D4:J10 (međusobne udaljenosti gradova), što u danom slučaju iznosi 30 – udaljenost grada 1 do grada 2.

I ova se formula sada može kopirati u ćelije retka 15, do zaključno s ćelijom J15.

Konačno se u ćeliju K17 treba upisati formula =SUM(D15:K15) za izračun funkcije cilja ovog problema – ukupno prevaljenog puta trgovačkog putnika koji za početno rješenje iznosi 507 km.

Ovako pripremljen radni list prikazan je na slici 5.28.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2				Grad_1	Grad_2	Grad_3	Grad_4	Grad_5	Grad_6	Grad_7	
3				1	2	3	4	5	6	7	
4		Grad_1	1	0	30	16	65	69	99	154	
5		Grad_2	2	30	0	55	24	90	1000	144	
6		Grad_3	3	16	55	0	37	111	61	75	
7		Grad_4	4	65	24	37	0	130	41	56	
8		Grad_5	5	69	90	111	130	0	72	50	
9		Grad_6	6	99	1000	61	41	72	0	29	
10		Grad_7	7	154	144	75	56	50	29	0	
11											
12											
13		Imena gradova		Grad_1	Grad_2	Grad_3	Grad_4	Grad_5	Grad_6	Grad_7	
14		Brojevi gradova		1	2	3	4	5	6	7	1
15		Udaljenosti gradova		30	55	37	130	72	29	154	
16											
17									Ukupno prevaljeni put		507

Slika 5.28. *Primjer 5.12: Radni list pripremljen za pokretanje* Solvera.

Slijedi pokretanje *Solvera* odabirom *Data/Solver* na vrpci izbornika, nakon čega je u dijaloškom okviru *Solver Parameters* potrebno u polje *Set target cell:* upisati K17, u dijelu *Equal To:* odabrati *Min*, a u polju *By changing cells*: upisati raspon ćelija u kojima su varijable odlučivanja, dakle D14:J14.

Slijedi unos ograničenja. Jedino ograničenje koje se javlja u ovom slučaju jest da trgovački putnik ni u jedan grad ne može doći dva puta. To se ograničenje dobije ako se u padajućem izborniku dijaloškog okvira *Add Constraints* za cijelo polje varijabla odlučivanja odabere *dif* (*All diferent*). Ovo ograničenje znači da se u rasponu ćelija D14:J14 isti broj ne smije pojaviti dva puta.

Nakon toga treba kliknuti na dugme *Options*, pa odabrati *Assume linear model* i *Assume non-negative,* te konačno odabrati *Evolutionary* u polju *Select a Solving Model:* (ovaj se model mora odabrati kada su varijable diskretne kao u vom slučaju).

Klikom na dugme *Solve* pokreće se rješavač (kod rješavanja problema trgovačkog putnika to može potrajati i nekoliko minuta). *Solver* će na kraju poredati brojeve gradove (redoslijed obilaska) u retku 14 tako da ukupno prevaljeni put bude minimalan.

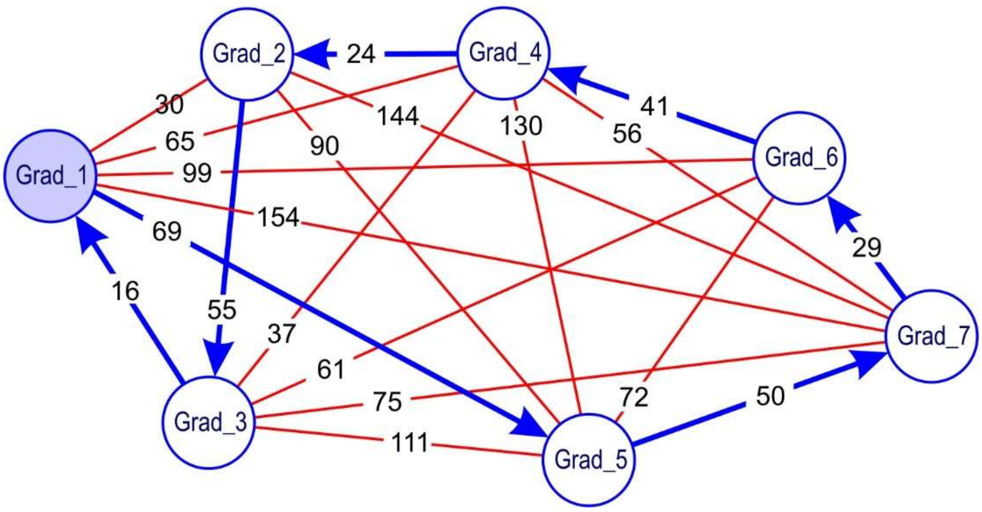
Na slici 5.29 prikazan je konačni rezultat za razmatrani primjer.

		Grad_1	Grad_2	Grad_3	Grad_4	Grad_5	Grad_6	Grad_7	
		1	2	3	4	5	6	7	
Grad_1	1	0	30	16	65	69	99	154	
Grad_2	2	30	0	55	24	90	1000	144	
Grad_3	3	16	55	0	37	111	61	75	
Grad_4	4	65	24	37	0	130	41	56	
Grad_5	5	69	90	111	130	0	72	50	
Grad_6	6	99	1000	61	41	72	0	29	
Grad_7	7	154	144	75	56	50	29	0	
Imena gradova		Grad_6	Grad_4	Grad_2	Grad_3	Grad_1	Grad_5	Grad_7	
Brojevi gradova		6	4	2	3	1	5	7	6
Udaljenosti gradova		41	24	55	16	69	50	29	
								Ukupno prevaljeni put	284

Slika 5.29. *Primjer 5.12: Konačno rješenje.*

Može se zaključiti da će najkraći put, u iznosu od 284 km, trgovački putnik prevaliti ako krećući iz grada 1 ode do grada 5, pa iz 5 u 7, iz 7 u 6, iz 6 u 4, iz 4 u 2, iz 2 u 3 i konačno, iz 3 u 1 (u grad iz kojega je krenuo).

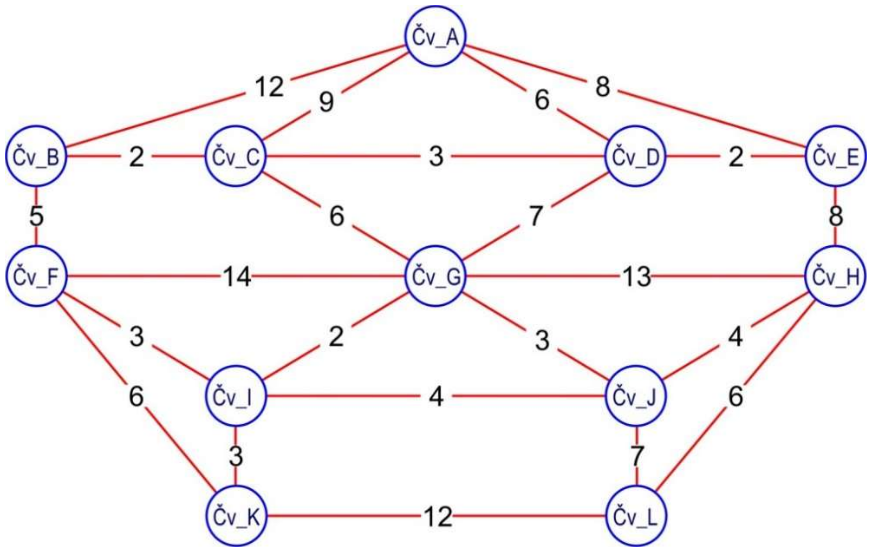
Ovo je rješenje grafički prikazano na slici 5.30.



Slika 5.30. *Primjer 5.12: Grafički prikaz najkraćeg puta trgovačkog putnika.*

Primjer 5.13.

Odrediti kojim je redoslijedom potrebno obilaziti čvorove (kroz svaki čvor proći samo jednom) neusmjerenog težinskog grafa (međusobna udaljenost čvorova) prikazanog na slici 5.31, polazeći iz čvora Čv_A, pa da ukupno prevaljeni put bude minimalan.



Slika 5.31. *Primjer 5.13: Neusmjereni težinski graf: međusobna udaljenost čvorova.*

Rješenje:

U Excelovom radnom listu treba najprije kreirati tablicu sa svim čvorovi i njihovim udaljenostima, kako je to prikazano na slici 5.32. Kod čvorova koji međusobno nisu povezani upisana je jako velika udaljenost (1000).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2				Cv_A	Cv_B	Cv_C	Cv_D	Cv_E	Cv_F	Cv_G	Cv_H	Cv_I	Cv_J	Cv_K	Cv_L
3				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4		Cv_A	1	0	12	9	6	8	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
5		Cv_B	2	12	0	2	1000	1000	5	1000	1000	1000	1000	1000	1000
6		Cv_C	3	9	2	0	3	1000	1000	6	1000	1000	1000	1000	1000
7		Cv_D	4	6	1000	3	0	2	1000	7	1000	1000	1000	1000	1000
8		Cv_E	5	8	1000	1000	2	0	1000	1000	4	1000	1000	1000	1000
9		Cv_F	6	1000	5	1000	1000	1000	0	14	1000	3	1000	6	1000
10		Cv_G	7	1000	1000	6	7	1000	14	0	13	1	2	1000	1000
11		Cv_H	8	1000	1000	1000	1000	8	1000	13	0	1000	4	1000	6
12		Cv_I	9	1000	1000	1000	1000	1000	3	1	1000	0	4	3	1000
13		Cv_J	10	1000	1000	1000	1000	1000	1000	2	4	4	0	1000	7
14		Cv_K	11	1000	1000	1000	1000	1000	6	1000	1000	3	1000	0	12
15		Cv_L	12	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	6	1000	7	12	0

Slika 5.32. *Primjer 5.13: Tablica s nazivima gradova i udaljenostima.*

U sljedećem koraku potrebno je ispod početne tablice (sl. 5.33.) formirati polja prikazana na slici 5.33.

18	Čvorovi	Cv_A	Cv_B	Cv_C	Cv_D	Cv_E	Cv_F	Cv_G	Cv_H	Cv_I	Cv_J	Cv_K	Cv_L	
19	Brojevi čvorova	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1
20	Udaljenosti čvorova	12	2	3	2	1000	14	13	1000	4	1000	12	1000	
21														
22											Ukupno prevaljeni put			4062

Slika 5.33. *Primjer 5.13: Priprema polja za izračun minimalnog puta.*

Dakle, u ćeliju B18 treba upisati naslov retka Čvorovi, u B19 naslov Brojevi čvorova a u B20 Udaljenost čvorova.

Sada se u redak 10, od ćelije D19, upisuje početno rješenje, odnosno brojevi čvorova redom 1, 2, ..., do 12. Pretpostavlja se u početnom rješenju da će se krenuti iz čvora 1 u 2, iz 2 u 3, pa sve tako do čvora 12 nakon čega se treba vratiti u čvor 1 iz kojega je započeta „šetnja“. Zato se u ćeliju P19 mora upisati formula =D19.

Imena čvorova u retku iznad dobit će se primjenom funkcije INDEX: u ćeliju D18 treba upisati formulu =INDEX($D$2:$O$3;1;D19).

Ova će formula kao rezultat dati ime čvora koji se nalazi u retku 1 raspona D2:O3, i to upravo u stupcu broj D19; u ovom slučaju to je **Cv_A**.

Budući su za raspon korištene apsolutne adrese ćelija, ova se formula može kopirati sve do ćelije O19.

U ćelijama retka 20, od ćelije D20 do O20, upisuju se formule koje računaju udaljenost između onih dvaju čvorova čije se brojčane oznake nalaze u susjednim ćelijama retka 19.

Tako je u ćeliju D20 potrebno upisati formulu =INDEX($D$4:$O$15;D19;D20). Ova će formula za rezultat dati vrijednost iz ćelije koja se nalazi na presjecištu retka D19 i stupca D20 u rasponu ćelija D4:O15 (međusobne udaljenosti čvorova), što u danom slučaju iznosi 12 – udaljenost čvora 1 (Cv_A) do čvora 2 (Cv_B).

I ova se formula sada može kopirati u ćelije retka 20, do zaključno s ćelijom O20.

Konačno se u ćeliju P22 treba upisati formula =SUM(D20:O20) za izračun funkcije cilja ovog problema – ukupno prevaljenog puta koji za početno rješenje iznosi 4062 jedinica duljine.

Slijedi pokretanje *Solvera* odabirom *Data*/*Solver* na vrpci izbornika, nakon čega je u dijaloškom okviru *Solver Parameters* potrebno u polje *Set target cell:* upisati P22 (adresa ćelije u kojoj je funkcija cilja), u dijelu *Equal To:* odabrati *Min*, a u polju *By changing cells*: upisati raspon ćelija u kojima su varijable odlučivanja, tj. D19:O19.

Slijedi unos ograničenja. Jedino ograničenje koje se javlja u ovom slučaju jest da trgovački putnik ni u jedan grad ne može doći dva puta. To se ograničenje dobije ako se u padajućem izborniku dijaloškog okvira *Add Constraints* za cijelo polje varijabla odlučivanja odabere *dif* (*All diferent*). Ovo ograničenje znači da se u rasponu ćelija D19:O19 isti broj neće pojaviti dva puta.

Nakon toga treba kliknuti na dugme *Options*, pa odabrati *Assume linear model* i *Assume non-negative,* te konačno odabrati *Evolutionary* u polju *Select a Solving Model:* (diskretne varijable odlučivanja).

Klikom na dugme *Solve* pokreće se rješavač koji će u retku 19 poredati brojeve čvorova, odnosno redoslijed njihovog obilaska, tako da ukupno prevaljeni put bude minimalan.

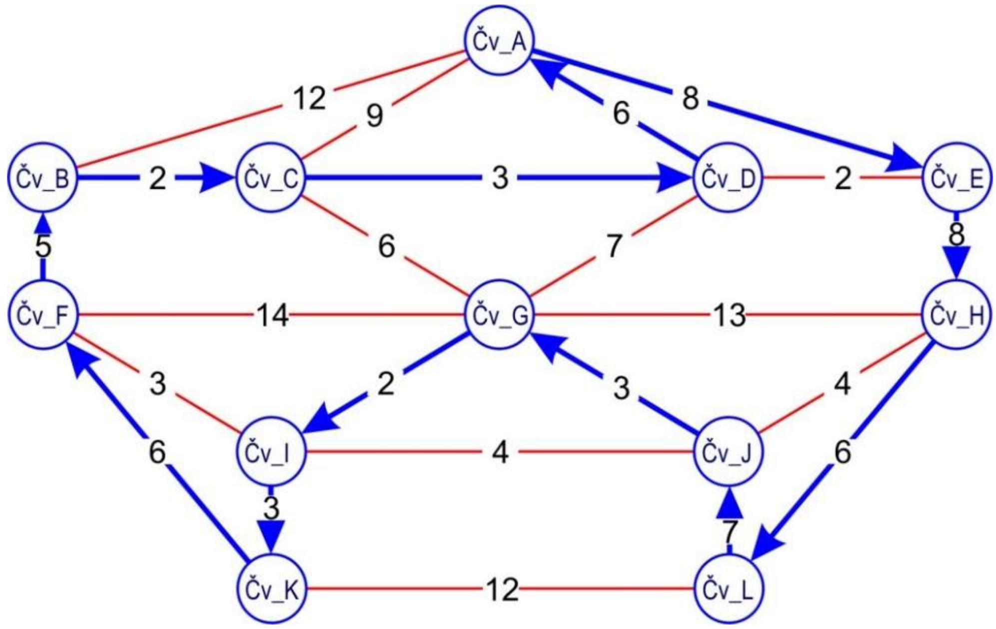
Na slici 5.34. prikazan je konačni rezultat izračuna.

18	Čvorovi	Cv_B	Cv_C	Cv_D	Cv_A	Cv_E	Cv_H	Cv_L	Cv_J	Cv_G	Cv_I	Cv_K	Cv_F	
19	Brojevi čvorova	2	3	4	1	5	8	12	10	7	9	11	6	2
20	Udaljenosti čvorova	2	3	6	8	4	6	7	2	1	3	6	5	
21														
22											Ukupno prevaljeni put			53

Slika 5.34. *Primjer 5.13: Konačno rješenje.*

Može se zaključiti da će se najkraći put, u iznosu od 53 jedinice, prevaliti ako se krećući iz čvora 1 ode do čvora 5, pa iz 5 u 8, iz 8 u 12, iz 12 u 10, iz 10 u 7, iz 7 u 9, iz 9 u 11, iz 11 u 6, iz 6 u 2, iz 2 u 3, iz 3 u 4 i konačno, iz 4 u 1 (u polazni čvor).

Ovo je rješenje grafički prikazano na slici 5.35.



Slika 5.35. *Primjer 5.13: Grafički prikaz najkraćeg puta.*

Kod rješavanja problema trgovačkog putnika na ovaj način, *Solver* ne javlja da je pronašao optimalno rješenje, već da u zadnjih nekoliko iteracija nije došlo do poboljšanja rješenja što mu je znak da završi s radom.

Solveru je za rješenje primjera 5.12 trebala 101 sekunda, a za 5.13 nešto više od 95 sekunda.

5.3.6. Problem kineskog poštara

Za razliku od problema trgovačkog putnika, gdje trgovački putnik mora posjetiti svaki čvor (grad) u zadanom grafu, problem kineskog poštara definira se na sljedeći način: pronaći najkraći put kojega treba prevaliti poštar a da barem jednom prođe svakom granom grafa.

Kako bi s pojasnio algoritam za rješavanje ovoga problema potrebno je uvesti neke nove pojmove iz teorije grafova.

Tako se stupnjem čvora u grafu naziva broj koji je jednak broju grana koje se sastaju u tom čvoru. Taj broj može biti paran ili neparan.

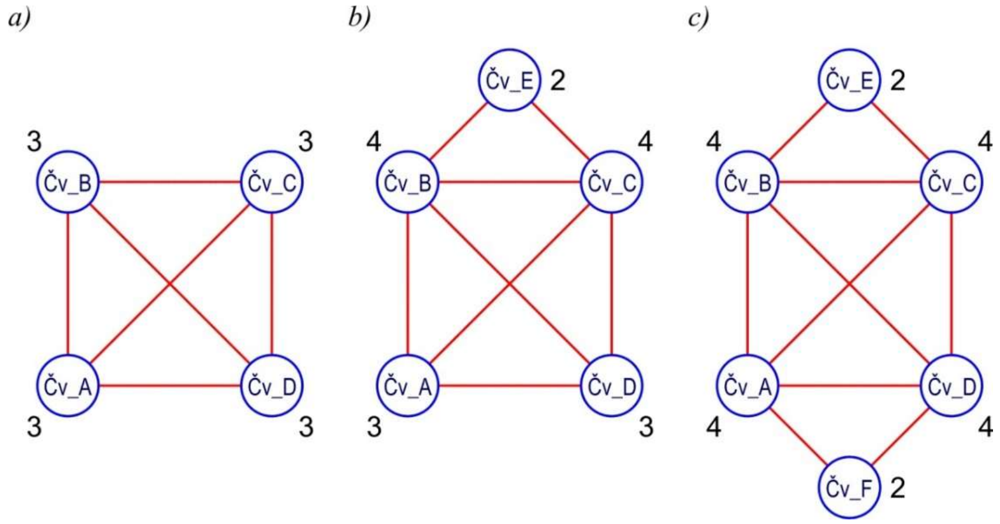
Budući da svaka grana grafa ima dva kraja, onda je zbroj stupnjeva svih čvorova u grafu jednak dvostrukom broju svih grana toga grafa i sukladno tomu paran broj.

Proizlazi da u svakom grafu broj čvorova s neparnim stupnjem (ako ih ima) mora biti paran. Dakle, u jednom grafu može biti 2, 4, 6, ..., čvorova neparnog stupnja.

Eulerovim grafom se naziva graf kod kojega je moguće poći iz jednog čvora, proći sve grane grafa bez ponavljanja i vratiti se u čvor iz kojega se krenulo. Eulerovom stazom (putanjom) se naziva putanja kojom se prolaze sve grane (bez ponavljanja) u Eulerovom grafu.

Da bi neki graf bio Eulerov moraju mu svi čvorovi biti parnog stupnja.

Ovo se može pokazati na jednostavnim primjerima grafova prikazanim na slici 5.36.



Slika 5.36. *Tipovi grafova s obzirom na stupnjeve njihovih čvorova: a) graf s 4 čvora neparnog stupnja, b) graf s dva čvora neparnog stupnja, c) graf kojemu su stupnjevi svih čvorova parni.*

Graf na slici 5.36.a ima sva četiri čvora neparnog stupnja (3). Taj se graf ne može nacrtati bez dizanja olovke s papira, ili pak bez prolaska olovke preko već nacrtane grane. Da bi se olovka vratila u čvor odakle je krenulo crtanje olovka mora ponovo prijeći preko dviju grana grafa (npr. Čv_A→Čv_B→Čv_D→Čv_C→Čv_A→Čv_D→Čv_C→Čv_B→Čv_A. Dakle, po dva se puta prolazilo granama CD i AB.

Graf na slici 5.36.b ima tri čvora parnoga stupnja: Čv_B (4), Čv_C (4) i Čv_E (2), te dva čvora neparnog stupnja: Čv_A(3) i Čv_D(3). Taj se graf može nacrtati bez dizanja olovke s papira (npr. Čv_A→Čv_B→Čv_E→Čv_C→Čv_D→Čv_A→Čv_C→Čv_D), ali crtanje ne završava u grafu odakle je započelo.

Da bi se crtanje (bez podizanja olovke s papira) završilo u početnom čvoru mora se jedna grana preći drugi put (u ovom slučaju grana AD).

Graf na slici 5.36.c ima sve čvorova parnoga stupnja: Čv_A (4), Čv_B (4) ,Čv_C (4), Čv_D (4), Čv_E (2) i Čv_F (2). Taj se graf može nacrtati u jednom potezu, bez podizanja olovke s papira ili pak bez prelaska preko neke od grana po drugi put (ta putanja je npr. Čv_A→Čv_B→Čv_E→Čv_C→Čv_D→Čv_A→Čv_C→Čv_B→Čv_D→Čv_F→Čv_A).

Ovaj se graf naziva Eulerovim grafom, a prikazana putanja Eulerova putanja ili Eulerova staza. Minimalni put kod Eulerove staze jednak je zbroju duljina (težina) svih grana grafa:

$$F_C = \sum_{i=1}^{n} c_i ,$$

gdje je c_i duljina (težina) i-te grane.

Ako graf nije Eulerov, ukupni je put jednak

$$F_C = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot k_i ,$$

gdje je c_i duljina (težina) i-te grane, a k_i je broj prolazaka tom granom.

Iz navedenoga slijedi da se problem kineskog poštara može riješiti dovođenjem svih čvorova na parni stupanj. To se izvodi spajanjem čvorova neparnog stupnja dodatnim granama.

Ako graf ima dva čvora neparnog stupnja, njihovo se spajanje može izvesti na samo jedan način, a ako pak ima 4 čvora neparnog stupnja broj mogućih načina spajanja je 3.

Općenito, za graf s n čvorova neparnog stupnja, broj mogućih načina spajanja tih čvorova je

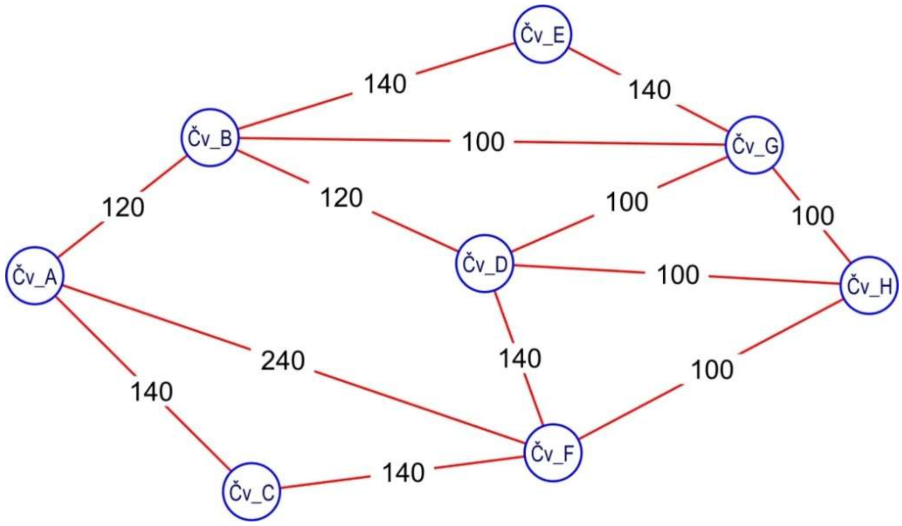
$$(n-1)\cdot(n-3)\cdot(n-5)\cdot\ldots\cdot 1 .$$

Slijedi postupak iznalaženja najkraćeg puta kod problema kineskog poštara:

1. Odrediti sve čvorove neparnog stupnja.
2. Odrediti sve moguće načine spajanja tih čvorova.
3. Za svaki od načina pronaći grane (koje spajaju čvorove neparnog stupnja) minimalne duljine (težine).
4. Sada pronaći sva potrebna spajanja na način da ukupna duljina tih spajanja bude minimalna.
5. Na izvorni graf dodati grane određene u 4. koraku.
6. Izračunati ukupnu duljinu optimalne rute kineskog poštara koja je jednaka sumi duljina svih grana izvornog grafa uvećanoj za duljinu nastalu spajanjem čvorova neparnog stupnja, a koja je određena u 4. koraku.
7. Nacrtati optimalnu putanju.

Primjer 5.14.

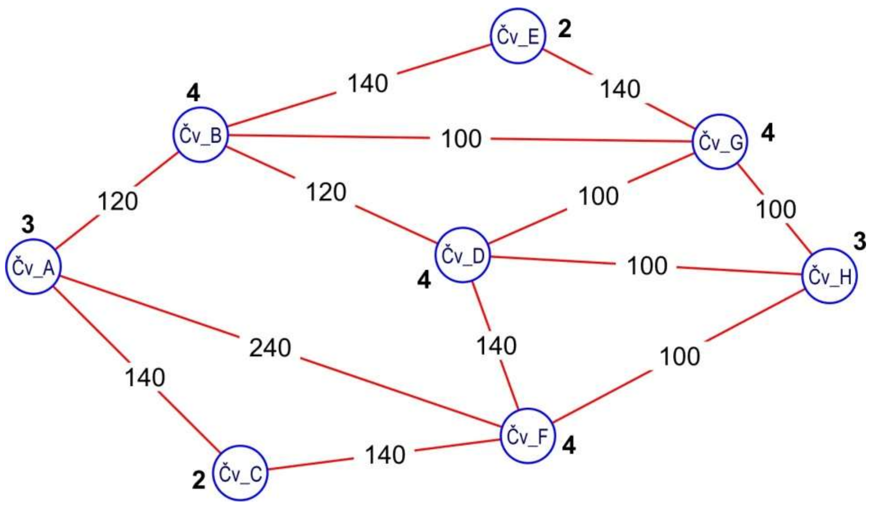
Odrediti kojim redoslijedom mora poštar obilaziti grane, polazeći iz čvora Čv_A, pa da pri tom prevaljeni put bude minimalan. Poštar mora barem jednom proći svaku od grana i vratiti se u čvor iz kojega je krenuo. Graf sa svim čvorovima i granama, kao i s odgovarajućim duljinama (težinama) grana prikazani su neusmjerenim težinskim grafom na slici 5.37.



Slika 5.37. *Primjer 5.14: Neusmjereni težinski graf: međusobne udaljenosti čvorova [21].*

Rješenje:

Sukladno opisanom postupku, rješavanje problema započinje određivanjem stupnja svakog pojedinog čvora. Stupnjevi svih čvorova prikazani su na slici 5.38.



Slika 5.38. *Primjer 5.14: Stupnjevi čvorova grafa.*

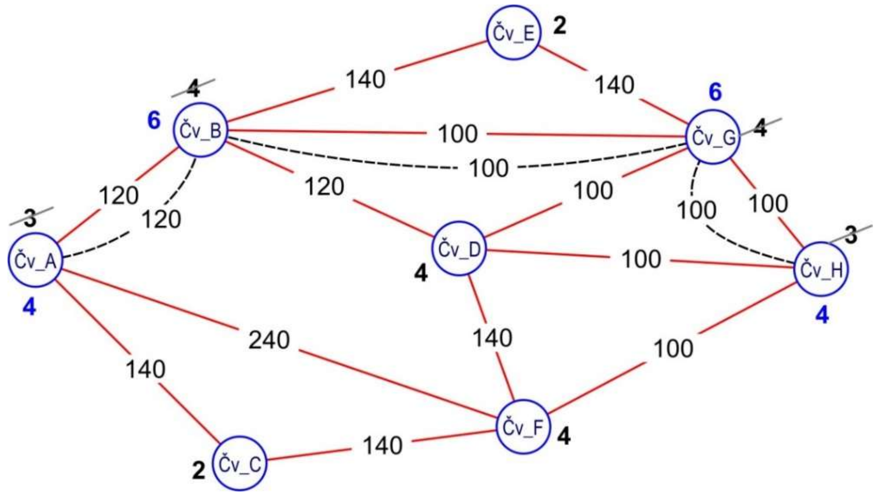
Sa slike 5.38. je vidljivo da razmatrani graf ima dva čvora neparnoga stupnja. To su čvorovi Čv_A i Čv_H, a oba imaju stupanj 3. Stupnjeve ovih čvorova treba učiniti parnima, dodavanjem grana koje će ih povezati, za što postoji jedna kombinacija spajanja, ali se čvorovi Čv_A i Čv_H mogu spojiti na više načina. Samo je jedan od tih načina optimalan (najkraćega puta), pa u sljedećem koraku treba odrediti koja je to način.

Iz čvora Čv_A u čvor Čv_H može se, između ostaloga, doći na sljedeće načine:

- Čv_A→Čv_B→Čv_G→Čv_H – duljine 120+100+100=320 m
- Čv_A→Čv_F→Čv_H – duljine 240+100=340 m i
- Čv_A→Čv_B→Čv_D→Čv_H – duljine 120+120+100=340 m.

Postoje i drugi načini spajanja, ali su oni veće ukupne duljine.

Može se zaključiti da je optimalni način spajanja čvorova Čv_A i Čv_H putanjom Čv_A→Čv_B→Čv_G→Čv_H ukupne duljine puta 320 m. Graf s dodanom putanjom spajanja čvorova neparnog stupnja (crtkane linije) prikazan je na slici 5.39.



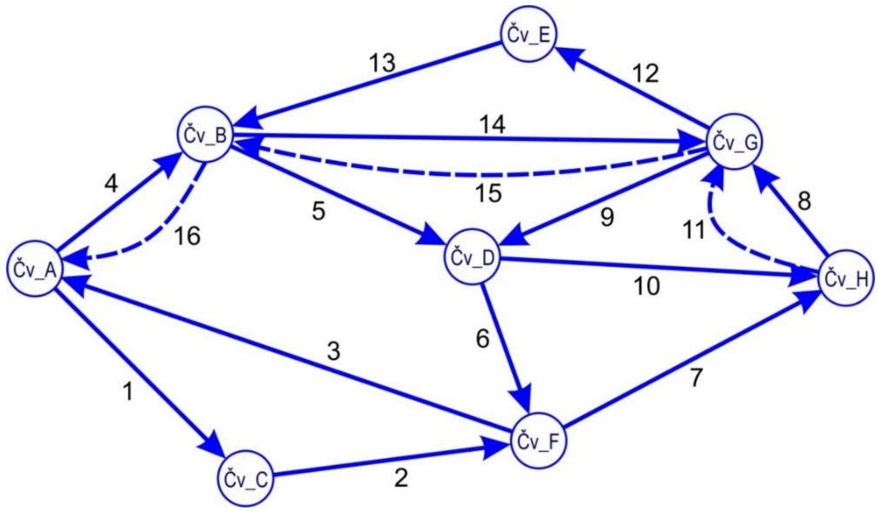
Slika 5.39. *Primjer 5.14: Graf s dodanom putanjom spajanja čvorova neparnog stupnja.*

Sada je moguće izračunati najmanju duljinu puta kojega treba prevaliti poštar da bi se, polazeći iz čvora Čv_A i obilazeći sve grane prikazanog grafa ponovo vratio u čvor Čv_A. Ta je duljina jednaka zbroju duljina svih grana grafa uvećanom za duljinu dodane putanje između čvorova Čv_A i Čv_H:

$$\begin{aligned} F_{C\min} &= \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{AF}} + \overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{BE}} + \overline{\mathrm{BG}} + \overline{\mathrm{DG}} + \overline{\mathrm{DF}} + \overline{\mathrm{DH}} + \overline{\mathrm{EG}} + \overline{\mathrm{FH}} + \overline{\mathrm{GH}} + \overline{\mathrm{AH}}_{\min} = \\ &= 120 + 140 + 240 + 120 + 140 + 100 + 100 + 140 + 100 + 140 + 100 + 100 + 320 = \\ &= 2000 \text{ m.} \end{aligned}$$

Dakle, najkraći put koji treba prevaliti poštar u zadanom slučaju iznosi 2000 metara.

Na slici 5.40 nacrtan je jedan od mogućih redoslijeda kojima poštar treba obilaziti pojedine grane (broj uz granu na slici) da bi se to ostvarilo.



Slika 5.40. *Primjer 5.14: Optimalna putanja poštara po grafu.*

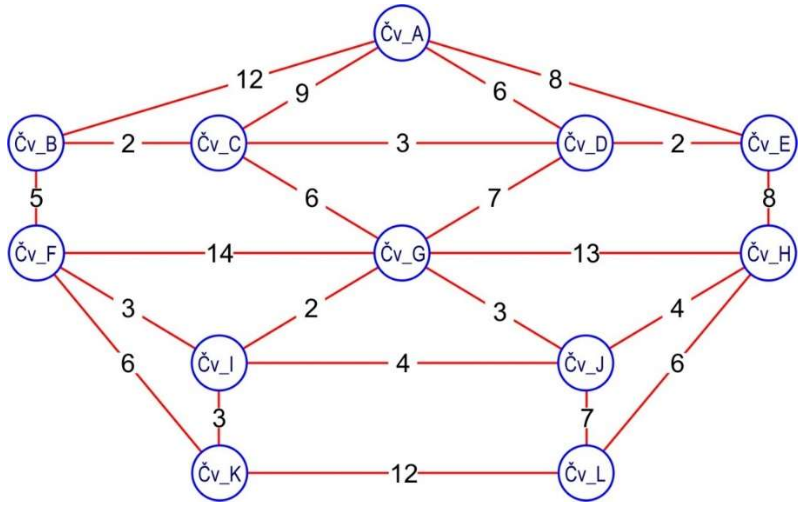
Tražena putanja je (crvena strjelica znači ponovni prolazak tom granom):

Čv_A→Čv_C→Čv_F→Čv_A→Čv_B→Čv_D→Čv_F→Čv_H→Čv_G→Čv_D→

→Čv_H→Čv_G→Čv_E→Čv_B→Čv_G→Čv_B→Čv_A.

Primjer 5.15.

Odrediti kojim redoslijedom mora poštar obilaziti grane, polazeći iz čvora Čv_A, pa da pri tom prevaljeni put bude minimalan. Poštar mora barem jednom proći svaku od grana i vratiti se u čvor iz kojega je krenuo. Graf sa svim čvorovima i granama, kao i s odgovarajućim duljinama (težinama) grana prikazani su neusmjerenim težinskim grafom na slici 5.41.

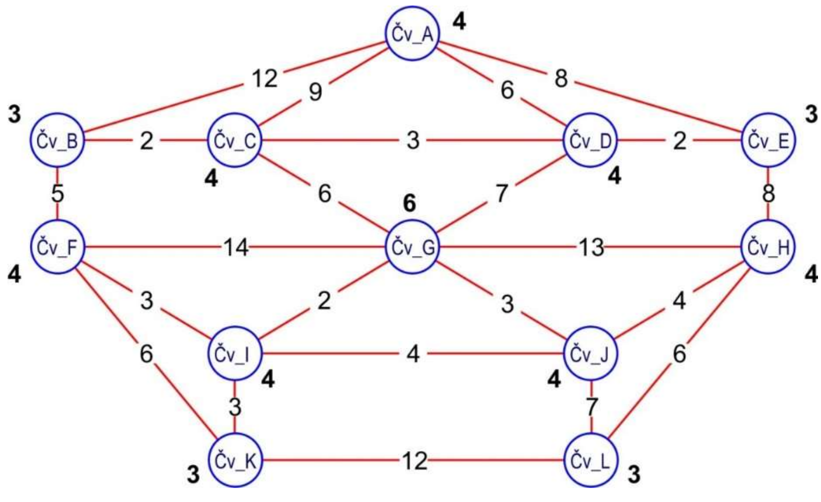


Slika 5.41. *Primjer 5.15: Neusmjereni težinski graf: međusobne udaljenosti čvorova.*

Rješenje:

Može se ustvrditi da je zbroj duljina svih grana grafa 145 jedinica duljine (=12+9+6+8+2+3+2+5+6+7+8+14+13+3+2+3+4+4+6+3+7+6+12).

Sukladno opisanom postupku, rješavanje problema započinje određivanjem stupnja svakog pojedinog čvora. Stupnjevi svih čvorova prikazani su na slici 5.42.



Slika 5.42. *Primjer 5.15: Stupnjevi čvorova grafa.*

Sa slike 5.43. je vidljivo da razmatrani graf ima četiri čvora neparnoga stupnja. To su čvorovi Čv_B, Čv_E, Čv_K i Čv_L, a svi imaju stupanj 3. Stupnjeve ovih čvorova treba učiniti parnima dodavanjem grana koje će ih povezati.

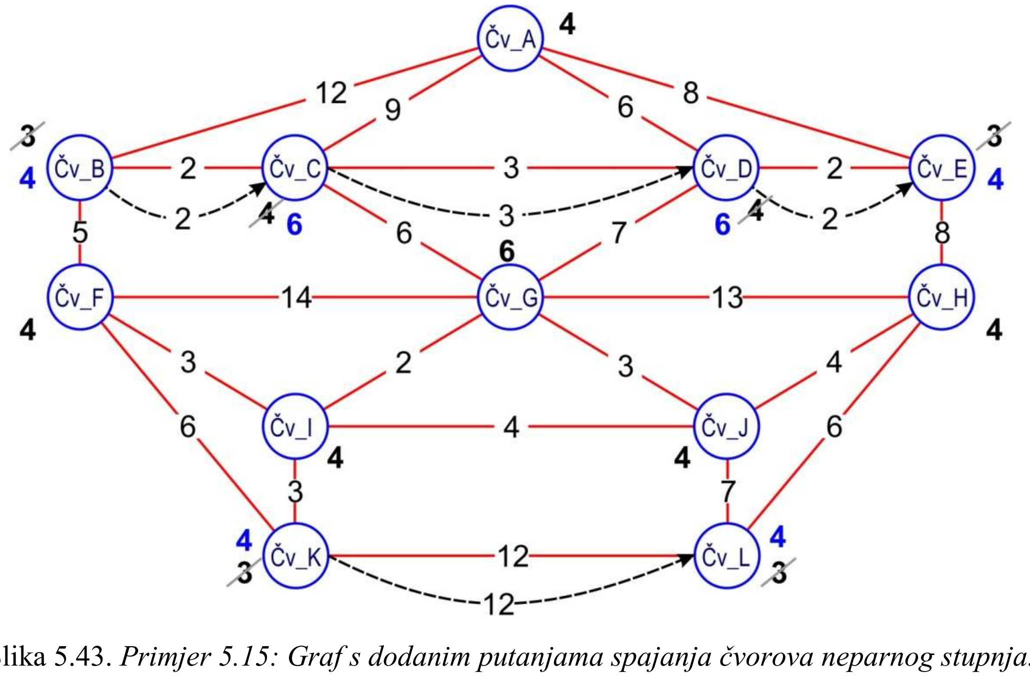
Postoje tri kombinacije spajanja ovih čvorova: prva je spojiti Čv_B s Čv_E te Čv_K s Čv_L, druga je spojiti Čv_B s Čv_K te Čv_E s Čv_L, dok je treća spojiti Čv_B s Čv_L te Čv_E s Čv_K.

Razmotre li se navedene kombinacije, slijedi duljina puta spajanja:

- I. kombinacija: najkraći put od Čv_B do Čv_E preko čvorova Čv_C i Čv_D je 7 jedinica, a od Čv_K do Čv_L najkraća udaljenost 12 jedinica, što ukupno čini 19 jedinica duljine;
- II. kombinacija: najkraći put od Čv_B do Čv_K (preko Čv_F) iznosi 11 jedinica, dok najkraći put od Čv_E do Čv_L (preko Čv_H) iznosi 14 jedinica, što ukupno iznosi 25 jedinica duljine;
- III. kombinacija: najkraći put od Čv_B do Čv_L (preko čvorova Čv_C, Čv_G i Čv_J) iznosi 18 jedinica, dok najkraći put od Čv_E do Čv_K (preko čvorova Čv_D, Čv_G i Čv_I) iznosi 14 jedinica, ili ukupno 29 jedinica duljina.

Razvidno je da će I. kombinacija spajanja čvorova neparnog stupnja dati najmanji put (19 jedinica).

Graf s dodatnim putanjama spajanja čvorova neparnog stupnja (crtkane linije) i tako dobivenim parnim stupnjevima tih čvorova prikazan je na slici 5.43.

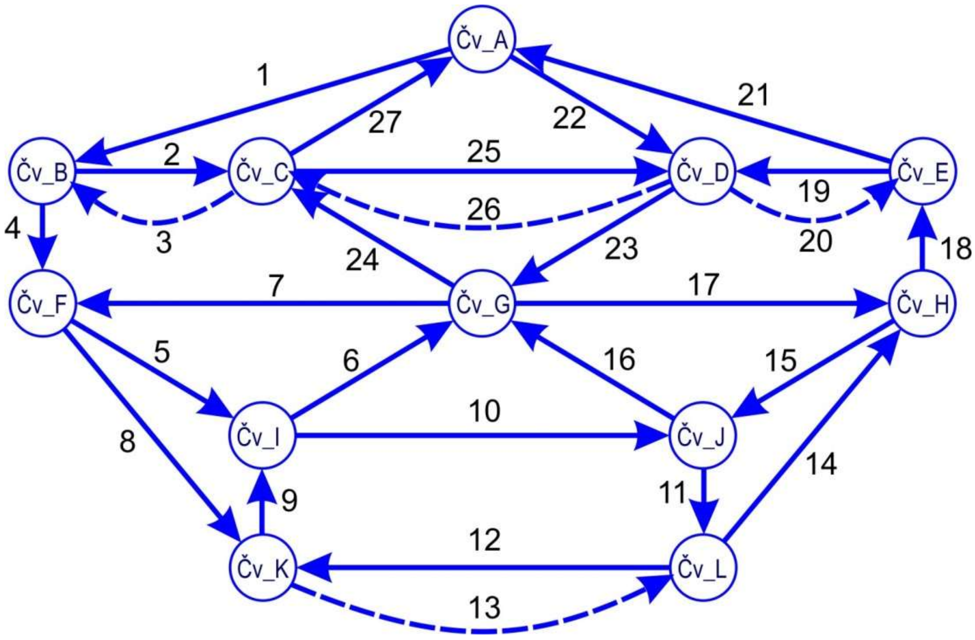


Slika 5.43. *Primjer 5.15: Graf s dodanim putanjama spajanja čvorova neparnog stupnja.*

Sada je moguće izračunati najmanju duljinu puta kojega treba prevaliti poštar da bi se, polazeći iz čvora Čv_A i obilazeći sve grane prikazanog grafa ponovo vratio u čvor Čv_A. Ta je duljina jednaka zbroju duljina svih grana grafa uvećanom za duljinu dodane putanje između čvorova Čv_B i Čv_E te čvorova Čv_K i Čv_L, odnosno:

$F_{C\min} = 145 + 19 = 164$ jedinice duljine.

Na slici 5.44. nacrtana je jedna od mogućih putanja kojima se treba kretati poštar da bi se to ostvarilo. Brojevi uz grane na toj slici predstavljaju redoslijed prolaska svakom od tih grana.



Slika 5.44. *Primjer 5.15: Optimalna putanja poštara po grafu.*

5.4. Solver i višestruki optimumi

U slučajevima kod kojih postoji više optimalnih rješenja, tj. kod kojih maksimalna odnosno minimalna vrijednost funkcije cilja ne mijenja iznos i za neku drugu ili i za neke druge kombinacije varijabla odlučivanja, Excelov Solver (Rješavač) nudi korisniku samo jedno optimalno rješenje.

Višestrukost optimalnih rješenja diskutirana je kod grafičkog načina rješavanja problema linearnog programiranja (slika 4.21 i primjer 4.17.d) gdje je ustvrđeno da, ako funkcija cilja ima optimalnu vrijednost u dva vrha konveksnog poligonskog skupa, tada su optimalne točke i sve točke (njih beskonačno mnogo) na pravcu koji spaja ta dva poligonska skupa. To se može dogoditi kod problema kod kojih pravac funkcije cilja ima koeficijent smjera jednak koeficijentu smjera jednog od graničnih pravaca.

U ovom bi slučaju Excelov Solver dao samo jedno optimalno rješenje, i to prvo na koje naiđe u postupku rješavanja problema simpleks metodom.

Dok je pri korištenju profesionalnih alata za rješavanje problema linearnog programiranja kao što su LINDO, AIMMS, IBM CPLEX Optimizer, …, pronalaženje drugih optimalnih rješenja omogućeno programski, kod Solvera se višestruki optimumi moraju detektirati analizom podataka o osjetljivosti.

Na postojanje višestrukih optimuma upućuju podatci u izvještaju o analizi osjetljivosti (*Sensitivity Report*), i to:

a) podatak da je oportunitetni trošak (*Reduced Cost*) jednak nuli uz varijablu odlučivanja čija je vrijednost u točki optimuma jednaka nuli;
b) podatak da je moguće povećavanje (*Allowable Increase*) ili smanjivanje (*Allowable Decrease*) koeficijenta funkcije cilja jednako nuli uz varijablu odlučivanja čija je vrijednost u točki optimuma različita od nule;
c) podatak da je cijena u sjeni (*Shadow Price*) nekog od ograničenja jednaka nuli, premda postoji mogućnost i smanjivanja i povećavanja desne strane tog ograničenja za konačan iznos (iznos različit od ∞).

Ad. a) Ako je oportunitetni trošak uz varijablu odlučivanja koja u optimalnom rješenju ima vrijednost nula također jednak nuli, to znači da se funkcija cilja neće promijeniti ako ta varijabla poprimi vrijednost različitu od nule. To nadalje znači da uz prikazano postoji barem još jedno optimalno rješenje.

Ad. b) Ako se koeficijent funkcije cilja uz neku varijablu odlučivanja koja u točki optimuma ima vrijednost različitu od nule (koja dakle sudjeluje u „građi“ optimuma) može povećati (ili smanjiti) za nultu vrijednost, to znači da će pri najmanjoj promjeni tog koeficijenta ta varijabla ili postati jednaka nuli ili će joj se vrijednost promijeniti.

S druge strane, vrijednost funkcije cilja neće se promijeniti pa slijedi zaključak da i u ovom slučaju postoji barem još jedno optimalno rješenje.

Ad. c) Kada se desna strana nekog ograničenja može i povećati i smanjiti za konačan iznos a da se ne poremeti bazično rješenje, i ako je pri tom cijena u sjeni tog ograničenja upravo jednaka nuli, i tada se najvjerojatnije radi o postojanju više (najmanje dva) optimuma.

Naime, kada se desna strana nekog ograničenja može smanjiti za konačan iznos, a povećati za beskonačan, cijena u sjeni je nula jer to ograničenje ni sa zadanom desnom stranom nije iskorišteno do kraja. Slično se zaključuje i kada se desna strana nekog ograničenja može povećati za konačan iznos, a smanjiti za iznos po volji (beskonačno).

Ako je pri tom broj vezanih ograničenja manji od broja varijabla odlučivanja, sigurno postoji barem još jedno optimalno rješenje.

Bez obzira na način na koji se ustvrdi postojanje višestrukih optimuma, relativno je lako doći do još jednog ili dva alternativna optimuma. S druge strane, menadžmentu je, u smislu donošenja odluke, dobro znati da postoji veći broj optimalnih rješenja. Međutim, određivanje većeg broja optimuma funkcije cilja (ako postoje) može tražiti od korisnika veliku dozu i strpljenja i truda, a postupak je sljedeći:

- razmatranom se problemu dodaje novo ograničenje prema kojem je vrijednost odabrane, *i*-te varijable jednaka njenoj optimalnoj vrijednosti ($x_i = x_i^o$),
- riješi se tako postavljeni problem pa se u izvještaju o analizi osjetljivosti analizira moguća promjena desne strane dodanog ograničenja; ako se desna strana dodanog ograničenja može mijenjati za neki iznos $\Delta x_i \neq 0$ pri čemu je cijena u sjeni tog ograničenja jednaka nuli, to znači da se vrijednost *i*-te varijable može mijenjati u dobivenim granicama bez promjene optimalne vrijednosti funkcije cilja,
- novo bazično optimalno rješenje tada se dobije rješavanjem razmatranog problema uz dodatno ograničenje $x_i = x_i^o + \Delta x_i$,
- navedeni se postupak ponavlja za sve varijable odlučivanja.

Konačno, korisnik treba razlučiti koja su među dobivenim rješenjima međusobno različita.

Primjer 5.16.

Zadana je funkcija cilja jednog dijetnog problema:

$$F_C = 15 \cdot x_1 + 21 \cdot x_2 + 36 \cdot x_3 + 18 \cdot x_4 .$$

Odrediti minimum funkcije F_C uz sljedeća ograničenja:

$$8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \geq 2800 \qquad (1)$$

$$3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \geq 1200 \qquad (2)$$

$$15 \cdot x_1 5 \cdot x_3 + 20 \cdot x_4 \geq 2400 \qquad (3)$$

i nenegativne varijable odlučivanja ($x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$).

Rješenje:

Predložak, prilagođen postavljenom zadatku, s unesenim zadanim veličinama, prilagođenim parametrima Solvera i dobivenim rješenjem, prikazan je na slici 5.45.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Trošak			
5		0,0	0,0	213,3	66,7	**8880,0**			
6	Koeficijenti Fc	15,0	21,0	36,0	18,0				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	8,0	5,0	12,0	4,0	2826,7	>=	2800,0	1
11	resurs 2	0,0	3,0	5,0	2,0	1200,0	>=	1200,0	2
12	resurs 3	15,0	0,0	5,0	20,0	2400,0	>=	2400,0	3

Slika 5.45. *Primjer 5.16: Prilagođeni predložak i rješenje zadatka.*

Dakle, funkcija cilja postići će minimum u iznosu od $F_{C\min} = 8.880$ za vrijednosti varijabla odlučivanja: $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 213,3;\ x_4 = 66,7$.

Izvještaj o analizi osjetljivosti prikazan je na slici 5.46.

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	x1	0	12	15	1E+30	12
10	$C$5	x2	0	0	21	1E+30	0
11	$D$5	x3	213,333333	0	36	0	31,5
12	$E$5	x4	66,6666667	0	18	14,4	0
13							
14	Constraints						
15			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
16	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
17	$F$10	resurs 1 LSO	2826,66667	0	2800	26,6666667	1E+30
18	$F$11	resurs 2 LSO	1200	7	1200	1200	10,9090909
19	$F$12	resurs 3 LSO	2400	0,2	2400	600	1200

Slika 5.46. *Primjer 5.16: Izvještaj o analizi osjetljivosti.*

Iz izvještaja o analizi osjetljivosti vidljivo je da je, unatoč činjenici da je u optimumu varijabla odlučivanja $x_2 = 0$, i oportunitetni trošak (*Reduced Cost*) uz tu varijablu jednak nuli. Slijedi zaključak da se minimum funkcije cilja neće promijeniti ako se varijabla x_2 učini različitom od nule.

Isto tako, moguće povećanje koeficijenta funkcije cilja uz varijablu x_3 jednako je nuli, kao i moguće smanjenje koeficijenta funkcije cilja uz varijablu x_4. Sve to upućuje na postojanje većeg broja optimuma.

Uzme li se da je vrijednost varijable $x_2 = 10$, što se može „nametnuti“ Solveru uvođenjem dodatnog, 4. ograničenja koje odgovara upravo toj jednakosti, dobit će se rješenje prikazano na slici 5.47. Može se vidjeti da će funkcija cilja zadržati istu minimalnu vrijednost $F_{C2\min} = 8.880$, ali sada za vrijednosti varijabla odlučivanja: $x_1 = 0;\ x_2 = 10;\ x_3 = 206,7;\ x_4 = 68,3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3		Varijable odlučivanja				Funkcija cilja			
4		x1	x2	x3	x4	Trošak			
5		0,0	10,0	206,7	68,3	**8880,0**			
6	Koeficijenti Fc	15,0	21,0	36,0	18,0				
7									
8									
9	Opis ograničenja	Koeficijenti LSO				LSO	Operator	DSO	Br.
10	resurs 1	8,0	5,0	12,0	4,0	2803,3	>=	2800,0	1
11	resurs 2	0,0	3,0	5,0	2,0	1200,0	>=	1200,0	2
12	resurs 3	15,0	0,0	5,0	20,0	2400,0	>=	2400,0	3
13	uvjet	0,0	1,0	0,0	0,0	10,0	=	10,0	4

Slika 5.47. *Primjer 5.16: Rješenje problema uz dodatni uvjet* $(x_2 = 10)$.

Dobiveni izvještaj o analizi osjetljivosti u ovom slučaju prikazan je na slici 5.48.

6	Variable Cells						
7			Final	Reduced	Objective	Allowable	Allowable
8	Cell	Name	Value	Cost	Coefficient	Increase	Decrease
9	$B$5	x1	0	12	15	1E+30	12
10	$C$5	x2	10	0	21	1E+30	1E+30
11	$D$5	x3	206,6666667	0	36	9	31,5
12	$E$5	x4	68,33333333	0	18	14,4	3,6
13							
14	Constraints						
15			Final	Shadow	Constraint	Allowable	Allowable
16	Cell	Name	Value	Price	R.H. Side	Increase	Decrease
17	$F$10	resurs 1 LSO	2803,333333	0	2800	3,333333333	1E+30
18	$F$11	resurs 2 LSO	1200	7	1200	1230	1,363636364
19	$F$12	resurs 3 LSO	2400	0,2	2400	75	1230
20	$F$13	uvjet LSO	10	0	10	1,428571429	10

Slika 5.48. *Primjer 5.16: Izvještaj o analizi osjetljivosti uz dodatni uvjet* $(x_2 = 10)$.

Iz izvještaja je vidljivo da se desna strana dodanoga četvrtog ograničenja može mijenjati u granicama od $10-10=0$ do $10+1,43=11,43$. Istovremeno, cijena u sjeni tog ograničenja jednaka je nuli, odakle se može zaključiti da promjena desne strane istog ograničenja u danim granicama uopće neće utjecati na promjenu funkcije cilja.

Dakle, varijabla odlučivanja x_2 može poprimiti bilo koju vrijednost između 0 i 11,43. Pri tome će se mijenjati iznosi ostalih varijabla odlučivanja, ali će funkcija cilja ostati nepromijenjena što znači da razmatrani problem ima beskonačno mnogo optimuma.

5.5. Uvod u teoriju igara

Iako je linearno programiranje našlo široku primjenu u svim područjima ljudske djelatnosti, postoji velika skupina problema koja se ne može jednostavno matematički opisati funkcijom cilja i nizom ograničenja, pa čak ni tada kada se prijeđe na metode programiranja koje ovdje nisu obrađene: nelinearno, cjelobrojno, dinamičko, višekriterijalno (gdje postoji više od jedne funkcije cilja) programiranje, i druge.

Toj skupini problema, koje nije moguće riješiti nekom od metoda programiranja, pripadaju problemi pronalaženja optimalnog rješenja u konfliktnim uvjetima, dakle u uvjetima u kojima protivnici imaju sukobljene ili djelomično sukobljene interese.

Upravo se *teorija igara* definira kao dio matematike koji se bavi rješavanjem konfliktnih ili djelomično konfliktnih situacija, odnosno kao matematička analiza interaktivnog odlučivanja racionalnih igrača (agenata).

To nije jedina definicija teorije igara. Tako je, prema Mayersonu, teorija igara studija o konfliktima i kooperaciji između inteligentnih i racionalnih igrača – donositelja odluka.

Iako se primjeri primjene onoga što se danas naziva teorijom igara mogu pronaći još u dalekoj prošlosti (Sun Tzu: *Umijeće ratovanja*, 3. stoljeće prije Krista), najčešće se početkom razvoja teorije igara smatra djelo *Teorija igara i ekonomsko ponašanje* Johna von Neumana i Oscara Morgensterna iz 1944. godine. To je djelo rezultat zapažanja autora, osobito von Neumana – strastvena zaljubljenika u poker, da su neke ekonomske situacije vrlo slične onima u kojima se nalaze igrači društvenih igara (poker, bridž, šah ...).

Za današnji stupanj razvoja teorije igara zaslužan je i veliki matematičar John Nash, koji je 1950. godine objavio dvije knjige iz tog područja: *Nashova ravnoteža* i *Nashovo rješenje problema cjenkanja* kojima je bacio novo svjetlo na rješavanje i kooperativnih i nekooperativnih igara.

Vrijedi napomenuti kako je Nash za svoj rad dobio Nobelovu nagradu, ali tek 1994. godine nakon što je pobijedio tešku bolest. To je ovjekovječeno u veoma uspješnom filmu *Genijalni um* kojemu je predložak bila istoimena knjiga o Nashovu životu. Usput, film je dobio četiri Oskara 2001. godine.

Od samih početaka usmjerena ka ekonomiji i ekonomskim problemima teorija igara je do današnjih dana naišla na široku primjenu u području biologije, psihologije, filozofije, računalnih znanosti, prava, međunarodnih odnosa, vojne strategije, ali i u igranju društvenih igara, sportu i tako dalje.

O značaju te teorije i širini njene primjene najbolje govori činjenica da je ukupno jedanaest znanstvenika za rad na unaprjeđivanju i implementaciji teorije igara postalo nositeljima Nobelove nagrade za ekonomiju, posljednji među njima Jean Tirole 2014. godine.

Autori ove knjige ne mogu propustiti ovdje navesti jednu veliku nepravdu: veliki John von Neuman, koji se smatra ocem suvremene arhitekture računala, aktivni znanstvenik na projektu

Manhattan, zaslužan za razvoj teorije linearnog programiranja i teorije igara, nikada nije postao nobelovcem.

5.5.1. Osnovni elementi i vrste igara

Osnovni elementi igre su igra sa svojim pravilima, igrači, strategija i rezultat igre, odnosno „isplate“ igračima.

Igra je aktivnost u kojoj sudjeluju dva ili više igrača sukobljenih ili djelomično sukobljenih interesa, a pravila igre definiraju dopuštene, odnosno nedopuštene poteze igrača.

Igrači (agenti) su osobe, poduzeća, vlade, etničke skupine i slično, koji ravnopravno sudjeluju u igri, pri čemu se pretpostavlja da „povlače“ inteligentne i racionalne poteze s ciljem postizanja za sebe što boljeg rezultata.

Strategija je plan igre svakog od igrača, pri čemu je za pojedinog igrača dominantna ona strategija koja mu osigurava najbolji rezultat igre.

Rezultat igre je dobitak (isplata) jednog i/ili drugog igrača ovisno o tome je li riječ o igri s konstantnom ili promjenjivom sumom.

Ovisno o karakteru opisanih elementa igre se dijele na sljedeće načine:

a) podjela igara u širem smislu:
    - igre vještine,
    - igre na sreću,
    - strateške igre (teorija igara u užem smislu, gdje svaki od igrača ima djelomičnu kontrolu nad konačnim rezultatom igre);
b) prema broju igrača:
    - igre s dva igrača,
    - igre s brojem igrača većim od dva;
c) prema broju poteza u igri:
    - igre s jednim potezom,
    - igre s većim brojem poteza,
    - igre s beskonačno mnogo poteza;
d) prema vremenu povlačenja poteza:
    - sekvencijalne igre (igrači poteze rade naizmjenično i reagiraju na prethodni potez protivnika),
    - simultane igre (igrači poteze rade istodobno);
e) prema odnosu između igrača:
    - kooperativne igre (igrači međusobno surađuju s ciljem ostvarivanja što boljeg rezultata za sve igrače),
    - nekooperativne igre (svaki igrač nastoji za sebe izvući što bolji rezultat);
f) prema konačnom rezultatu:
    - igre s nultom sumom (dobitak jednog igrača jednak je gubitku drugog),
    - igre s nenultom sumom (rezultat obično ovisi o suradnji igrača);

g) prema ovisnosti ishoda igre o identitetu igrača:
   - simetrične igre (rezultat ne ovisi o identitetu igrača),
   - nesimetrične igre (rezultat ovisi o identitetu igrača);

h) prema informacijama kojima raspolažu igrači:
   - igre s potpunom informacijom,
   - igre s nepotpunom informacijom;

i) prema mogućoj primjeni strategije:
   - igre s dominantnom strategijom (igre u kojima jedan od igrača ima mogućnost odabira strategije koja će mu donijeti optimalan rezultat neovisno o potezu, odnosno potezima drugoga),
   - igre s nedominantnom strategijom.

Postoje i druge podjele igara, ali ovo su one koje se u literaturi najčešće spominju.

Bez namjere daljnjeg produbljivanja teorijskih znanja iz područja teorije igara u nastavku će se navesti neki najčešće isticani primjeri igara i mogućnost njihove primjene u realnim situacijama, a potom i nekoliko primjera sekvencijalnih društvenih igara.

5.5.2. Najistaknutiji primjeri igara

U literaturi se može naći opis čitavog niza naizgled banalnih igara i usporedni prikaz realnih problema koji odgovaraju tim igrama.

Među tim igrama najčešće opisivane su:

- *Zatvorenikova dilema*,
- *Sukob spolova* i
- *Igra kukavice*.

5.5.2.1. Zatvorenikova dilema

Zatvorenikova dilema (*Prisoner's dilemma*) svakako je najpoznatija i najcitiranija igra u teoriji igara, a prvi je put predstavljena 1950. godine. Slobodno se može kazati da je odigrala ključnu ulogu u popularizaciji same teorije.

Priča je jednostavna. Dva zatvorenika zajedno su izvršili teško kriminalno djelo. Uhićeni su i smješteni u odvojene ćelije bez mogućnosti međusobne komunikacije.

Tužiteljstvo ne raspolaže dovoljno čvrstim dokazima da s optužnicom izađe pred sudca i stoga svakom od zatvorenika nudi sljedeću nagodbu: „Ako priznaš djelo i svjedočiš protiv svog partnera, a on ne prizna, bit ćeš pušten, a on osuđen na sedam godina zatvora. Ako pak oba priznate, dobit ćete po dvije godine zatvora. Ako nijedan od vas ne prizna, bit ćete za ranija, blaža djela osuđeni na po jednu godinu zatvora. Ako ti ne priznaš, a tvoj partner prizna i svjedoči protiv tebe, on će biti pušten, a ti osuđen na sedam godina zatvora."

Postavlja se pitanje što je najbolje za pojedinog zatvorenika, priznati kriminalno djelo ili ne.

Igra je nekooperativna i prikazuje se tablicom (matricom) mogućih ishoda (Tablica 5.10).

Tablica 5.10 *Zatvorenikova dilema – matrica ishoda.*

		Zatvorenik B	
		ne priznaje	priznaje
Zatvorenik A	ne priznaje	**1; 1**	**7; 0**
	priznaje	**0; 7**	**2; 2**

Naravno da je cilj svakog od zatvorenika izbjeći zatvor (0) ili dobiti što manju kaznu (1). Sljedeća u poretku preferencije je dvogodišnja kazna zatvora (2), a najmanje poželjna je maksimalna kazna od sedam godina.

Po tome bi optimalna strategija bila da obojica odbiju priznanje i svjedočenje protiv drugoga. No oni se međusobno ne mogu dogovarati, a dugoročno nemaju ni povjerenje da onaj drugi kad-tad neće „propjevati“.

Stoga je, iako pomalo paradoksalno zvuči, strategija za koju se trebaju odlučiti razumni racionalni igrači (zatvorenici) – **priznati**! Ta strategija koja jednom od igrača osigurava najbolji ishod bez obzira na strategiju drugog igrača naziva se dominantnom.

Jasno je da obojica priznavanjem ne biraju najbolji ishod (obojici po godinu dana zatvora), već biraju za sebe najbolje rješenje. Naime ako se zatvorenik A odluči na strategiju priznavanja, zatvoreniku B puno je bolje priznati (dvije godine zatvora) nego zadržati strategiju nepriznavanja i dobiti sedam godina.

Ovakve igre u kojima igrači žele maksimizirati osobnu korist, ne vodeći računa o ukupnoj zajedničkoj koristi (i za sebe i za drugog igrača), nazivaju se nekooperativnima.

Rješenje zatvorenikove dileme poklapa se s ravnotežom (Nashovom) same igre, a ravnoteža se definira kao ishod u kojem svaki od igrača ima najbolji odgovor u odnosu na izbor onoga drugoga. Ni jednom od igrača ne isplati se odmak od njegove strategije pod uvjetom da ni drugi igrač ne mijenja svoju.

Puno je praktičnih primjera igara koje se svode na zatvorenikovu dilemu, a jedna od često opisivanih je utrka u naoružanju između SAD-a i SSSR-a u vrijeme Hladnog rata (što nije previše daleko od odnosa SAD-a i Rusije u drugom desetljeću 21. stoljeća), a prikazuje se tablicom (matricom) mogućih ishoda 5.11.

Tablica 5.11. *Zatvorenikova dilema na primjeru utrke u naoružanju.*

		SSSR/Rusija	
		ne razvijati naoružanje	razvijati naoružanje
SAD	ne razvijati naoružanje	**n; n**	**n; d**
	razvijati naoružanje	**d; n**	**d; d**

Iako bi ekonomski najisplativiji rezultat bio da vlade obiju zemalja odluče ne razvijati naoružanje jer bi se oslobodila golema sredstva za razvoj, zemlje nemaju povjerenja jedna u drugu i odabiru strategiju razvoja naoružanja jer na taj način neće doći u poziciju apsolutne nadmoći one druge u naoružanju.

Slična bi se tablica mogla kreirati za rat cijena dvaju poduzeća na tržištu monopolističke konkurencije (npr. „rat“ između operatera AT&T i Deutsche Telekoma pri ulasku potonjega na američko telekomunikacijsko tržište).

5.5.2.2. Sukob spolova

U ovoj se igri „sukobljavaju“ bračni partneri, suprug i supruga. On bi htio poći na utakmicu, ali bi volio da i supruga ide s njim. Ona bi htjela ići u kazalište, ali bi voljela da je i suprug s njom.

Na njihovu žalost, ne mogu međusobno komunicirati, već moraju samostalno donijeti odluku kamo ići, u kazalište ili na utakmicu.

Ova igra spada u skupinu igara uvjeravanja. Opis igre može se naći na internetu pod nazivom *Battle of the Sexes*, a često i pod imenom *Bach or Stravinsky*.

Ovdje je riječ o djelomično konfliktnoj igri zbog činjenice da bi oboje supružnika voljelo večer provesti zajedno.

Pojedinom igraču u ovoj igri bodovi se mogu dodijeliti na sljedeći način: 0 bodova ako se večer ne provede zajedno s partnerom, 1 bod ako se večer provede zajedno, ali ne prema osobnoj preferenciji (dakle 1 bod će dobiti suprug ako ode u kazalište, odnosno supruga ako večer provedu na utakmici) i 2 boda ako se večer provede zajedno i na željenom događaju (2 boda će dobiti suprug ako zajedno odu na utakmicu, odnosno supruga ako zajedno odu u kazalište).

U tablici 5.12 prikazane su kombinacije mogućih ishoda ove igre.

Tablica 5.12. *Sukob spolova – matrica ishoda.*

		SUPRUG	
		nogometna utakmica	kazališna predstava
SUPRUGA	nogometna utakmica	**1; 2**	**0; 0**
	kazališna predstava	**0; 0**	**2; 1**

Ovo je igra s koordinacijom i s dva optimuma, dvije točke Nashove ravnoteže i uz jednostavnu strategiju. Problem je u tome što je igra potencijalno nepravedna jer se može dogoditi da se uvijek ide na ruku jednom od supružnika (npr. kada bi svaka ovakva večer završila u kazalištu).

Izvrsno bi rješenje bilo kada bi, za slučaj ponavljanja navedene situacije, među supružnicima vladao dogovor da naizmjenično biraju gdje će provesti večer.

5.5.2.3. Igra kukavice

Igra kukavice (*Chicken game* ili *Hawk-Dove game*) primjer je konfliktne nekoordinirane igre u kojoj gubi igrač koji prvi odustane (popusti), a najgori mogući ishod je ako ne popusti nijedan.

U tablici 5.13 prikazane su kombinacije mogućih ishoda ove igre.

Tablica 5.13. *Igra kukavice – matrica ishoda.*

		IGRAČ B	
		odustaje	ne odustaje
IGRAČ A	odustaje	**2; 2**	**1; 3**
	ne odustaje	**3; 1**	**0; 0**

Kao primjer ove igre može se navesti vožnja dvaju biciklista uskim puteljkom jedan prema drugome, vožnja automobilom jedan prema drugome, paralelna vožnja automobilom prema litici (gubitnik je igrač koji prvi iskoči iz automobila) ili u ovom podneblju kada dvojica igrača zarone, a pobjeđuje onaj koji duže izdrži pod vodom.

Ako nijedan od igrača u gornjim primjerima ne odustane, prijeti sudar, odnosno pad niz liticu ili ostanak bez zraka, s mogućim katastrofalnim posljedicama.

Vožnja automobilom dvojice igrača prikazana je u filmu *Buntovnik bez razloga* s Jamesom Deanom u naslovnoj ulozi, a iz njegovih riječi upućenih suparniku: „We are both heading for the cliff, who jumps first is the **Chicken**“, nastao je i naziv ove igre.

Ovom se igrom može opisati npr. ponašanje svjetskih moćnika na rubu nuklearnog rata (Kubanska kriza 1962. godine), ali i napetost između demokrata i republikanaca pri donošenju proračuna SAD-a za 2014. godinu.

Realni primjeri ovih dviju „igara“ vode k zaključku da se najpošteniji ishod postiže ako oba igrača odustanu, ali to na žalost nije uvijek slučaj.

5.5.3. Neki primjeri sekvencijalnih društvenih igara s dominantnom strategijom

Kao primjeri društvenih igara s ponavljanjem poteza (sekvencijalnih igara) i dominantnom strategijom, dakle igara u kojima igrači naizmjenično igraju i u kojima jedan od igrača sigurno dobiva ako ne napravi pogrešan potez, prikazat će se dvije igre poznate pod nazivima:

- *Igra 21* i
- *Igra 100.*

Igre s dominantnom strategijom ponekad se nazivaju i igrama s prednošću prvog poteza.

S obzirom na prethodno prikazanu podjelu igara, to su igre s nultom sumom jer je dobitak jednog igrača jednak gubitku drugoga.

5.5.3.1. Igra 21

U ovoj se igri na stolu nalazi 21 kamenčić (ili 21 karta ili 21 komad bilo čega).

Svaki od igrača može u jednom potezu uzeti 1, 2 ili 3 kamenčića, a pobjednik je onaj koji svojim posljednjim potezom uzme zadnji kamenčić (ili zadnja 2, odnosno 3 kamenčića koliko ih ima pravo uzeti u jednom potezu).

Pobjednička je strategija ona kojom će neki od igrača ostaviti na stolu 4 kamenčića, pa drugi igrač svojim potezom ne može pokupiti sve, a primoran je ostaviti toliko kamenčića (najmanje 1, a najviše 3) koje igrač koji je svojim pretposljednjim potezom ostavio na stolu 4 kamenčića može uzeti jednim potezom.

Pobjeđuje onaj igrač koji je prvi na potezu.

Naime, prvi igrač u prvom potezu mora uzeti samo jedan kamenčić, nakon čega će na stolu ostati 20 kamenčića. U svakom sljedećem potezu prvi igrač mora paziti da broj kamenčića na stolu bude višekratnik broja 4 (16, 12, 8, 4).

Dakle, ako drugi igrač u prvom potezu uzme 1 kamenčić, prvi će nakon njega uzeti 3, ako drugi u prvom potezu uzme 2 kamenčića, prvi će nakon njega isto uzeti 2, a ako drugi igrač u prvom potezu uzme 3 kamenčića, prvi će nakon njega uzeti 1.

Ovakva logika dovodi do toga da u svom pretposljednjem potezu prvi igrač na stolu ostavlja 4 kamenčića, što je dobitna kombinacija.

Ali koji igrač dobiva i koja je pobjednička strategija tog igrača ako igru gubi onaj igrač koji uzme zadnji/zadnje kamenčiće?

Pobjednička strategija ove igre temelji se na činjenici da igrač koji želi pobjedu mora u svom zadnjem potezu ostaviti na stolu samo jedan kamenčić pa tako prisiliti drugog igrača da povuče zadnji, gubitnički potez.

I opet, slično izvornoj igri, igrač koji slijedi pobjedničku strategiju mora u potezima prije ostaviti na stolu 5, 9, 13, odnosno 17 kamenčića.

Pobjeđuje igrač koji je drugi na potezu!

Naime, ako prvi igrač uzme bilo koji mogući broj kamenčića (1, 2 ili 3), drugi će uzeti toliko kamenčića da zbrojeno s onim što je uzeo prvi igrač daje 4 (21-4=17).

Istu će strategiju ponoviti i u svim sljedećim potezima dok na stolu ne ostane 1 kamenčić, što mu osigurava pobjedu.

5.5.3.2. Igra 100

U ovoj igri dva igrača dodaju bilo koji broj između 1 i 10 na prethodnu sumu, s tim da prvi igrač kreće od sume nula (0), doda svoj odabrani broj i kaže dostignutu sumu (ako je npr. odabrao broj 3, bit će i suma nakon prvog poteza 3).

Igru dobiva onaj igrač koji će dodavanjem svog odabranog broja doseći sumu sto (100).

Pobjednička je strategija ona kojom će neki od igrača u svom pretposljednjem potezu dodavanjem odabranog broja doseći sumu 89, jer onaj drugi igrač dodavanjem bilo kojeg od mogućih brojeva ne može doseći 100, a mora doseći najmanje 90 (89+1), što onome koji je prvi došao do 89 omogućuje završetak igre.

Pobjeđuje onaj igrač koji je drugi na potezu.

Naime, ako prvi igrač u prvom potezu doda bilo koji broj između 1 i 10, drugi će igrač dodati broj koji će u svom prvom koraku doseći sumu 12, u drugom 23, i tako redom 89, tj. drugi igrač mora uvijek doseći sumu koja je višekratnik broja 11 uvećan za 1, odnosno u svakom potezu dodati onaj broj koji zbrojen s brojem koji je dodao prvi igrač daje broj 11.

Naravno, ako drugi igrač tijekom igre napravi grešku, tada prvi igrač dolazi u dominantnu poziciju.

Razmisliti tko bi pobijedio i koja bi bila pobjednička strategija kada bi igru gubio igrač koji prvi dosegne sumu 100.

LITERATURA

[1] Babić, Zoran. *LINEARNO PROGRAMIRANJE*. Ekonomski fakultet, Split, 2005.

[2] Babić, Zoran. *MODELI I METODE POSLOVNOG ODLUČIVANJA*. Ekonomski fakultet, Split, 2011.

[3] Barković, Dražen. *OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA*, 2. izdanje. Ekonomski fakultet, Osijek, 2001.

[4] Churchman, C. West; Ackoff, L. Russel; Arnoff, E. Leonard. *INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH.* J. Whiley & Sons, 1957.

[5] Gass, I. Saul; Assat, A. Arjang. *AN ANNOTATED TIMELINE OF OPERATIONS RESEARCH: An Informal History.* Springer Science + Business Media, Boston, 2005.

[6] Hillier, S. Frederick; Lieberman, J. Gerald. *INTRODUCTION TO OPERATIONS RESEARCH.* McGraw-Hill, 2001.

[7] Kalpić, Damir; Mornar, Vedran. *OPERACIJSKA ISTRAŽIVANJA*. Zeus, Zagreb, 1996.

[8] Martić, Ljubomir. *PRIMJENA MATEMATIČKIH METODA U EKONOMSKOJ ANALIZI*. Informator, Zagreb, 1976.

[9] Martić, Ljubomir. *MATEMATIČKE METODE ZA EKONOMSKE ANALIZE II*. Narodne novine, Zagreb, 1979.

[10] Orlić, Ranko. *KADROVSKI MENADŽMENT.* Zoran Damnjanović i sinovi, Beograd, 2005.

[11] Pavić, Ivan; Benić, Đuro; Hashi, Iraj. *MIKROEKONOMJA,* 2. izdanje. Ekonomski fakultet, Split, 2007.

[12] Pavlović, Dušan. *TEORIJA IGARA*: Osnovne igre i njihova primena. Fakultet političkih nauka, Beograd, 2014. http://www.fpn.bg.ac.rs/wpcontent/uploads/Teorija_Igara_ osnovne_igre_i_njihova_primena .pdf

[13] Plazibat, Bože; Zorica, Siniša; Marinko, Lipovac; Reić, Lada; Antunović, Sandra; Štingl, Zvonimir. *INFORMATIKA I*. Skripta, web. Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2013. https://moodle.oss.unist.hr/

[14] Singiresu, S. Rao. *ENGINEERING OPTIMIZATION: Theory and Practice*, 3rd edition. J. Whiley & Sons, 1996.

[15] Sullivan, Michael; Mizrahi, Abe. *MATHEMATICS: An Applied Aproach*. J. Whiley & Sons, 2004.

[16] Taha, Hamdy A. *OPERATIONS RESEARCH: An Introduction, 8th edition*. PEARSON Prentice Hill, Upple Saddle River, New Jersey, 2006.

[17] Lebo, Renata; Plazibat, Bože; Reić, Lada. *DIJETNI PROBLEM: prehrana studenata na Sveučilištu u Splitu*. CIET 2014, zbornik radova. Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Split, 2014.

[18] *Business Modeling*. http://www.stephenlnelson.com/MBAXLch06.pdf

[19] *Chapter IV: Duality in Linear Programming*. http://agecon2.tamu.edu/people/faculty/mccarl-bruce/mccspr/new04.pdf

[20] *Chinese Postman Algorithm*. https://www.youtube.com/watch?v=Gciacqns680

[21] *Chinese Postman Problem*. http://www.suffolkmaths.co.uk/pages/Maths%20Projects/Projects/Topology%20and% 0Graph%20Theory/Chinese%20Postman%20Problem.pdf

[22] *Introduction to Linear Programming*. http://www.producao.ufrgs.br/arquivos/disciplinas/382_winston_cap3_introduction_to_linear_programming.pdf

[23] *Introduction to Optimization Modeling*. http://www.wadsworthmedia.com/marketing/sample_chapters/0534380328_ch03.pdf

[24] Lovrić, Ljiljana. *Kvantitativne metode za poslovno odlučivanje*. http://oliver.efri.hr/~kvmet/KMBpredavanja.pdf

[25] Petkoviček, Danijela. *Linearno programiranje*. http://matematika.fkit.hr /staro/izborna/referati /Daniela%20Petkovicek%20-20Linearno%20programiranje.pdf

[26] Rajgopal, Jajant. *Principles and Applications of Operations Research*. http://www.pitt.edu/~jrclass/or/or-intro.html

[27] *Linear Optimization With Microsoft Excel*. https://www.math.uwaterloo.ca/~pwood/doc/Solver_Notes.pdf

[28] *Linear Programming*. http://college.hmco.com/instructors/catalog/walkthroughs/pdf/061833291X_ch04.pdf

[29] *Linear Programming*. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/projects/mepres/alevel/discrete_ch5.pdf

[30] *Linear Programming*. http://www.swlearning.com/economics/salvatore/salvatore5e/linear_programming_chapter.pdf

[31] *Linear Programming*. http://catalogue.pearsoned.co.uk/assets/hip/gb/hip_gb_pearsonhighered/samplechapter/M02_HELB5053_01_SE_C02.pdf

[32] *Linear Programming Applications*. http://www.swlearning.com/economics/mcguigan/mcguigan9e/web_chapter_b.pdf

[33] *Linear Programming: Basic Concepts*. http://novellaqalive2.mhhe.com/sites/dl/free/0073129038/434041/Chapter_2_Sample.pdf

[34] *Linear Programming Notes VII: Sensitivity Analysis*. http://econweb.ucsd.edu/~jsobel/172aw02/notes7.pdf

[35] *Linear Programming Sensitivity Analysis*. http://ardent.mit.edu/real_options/RO_current_lectures/LPsensanal02.pdf

[36] *LP Methods.S3: The Dual Linear Program*. https://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/supplements/methods/lpmethod/S3_dual.pdf

[37] *Shortest Paths*. https://www.cs.princeton.edu/~rs/AlgsDS07/15ShortestPaths.pdf

[38] *The Simplex Method and the Standard Maximization Problem*. http://pblpathways.com/fm/ C4_3.pdf

[39] *The Simplex Method: Maximization*. http://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary_linear/4e/shared/downloads/c09s3.pdf

[40] *Transportation, Assignment, and Transshipment Problems*. http://www.producao.ufrgs.br/arquivos/disciplinas/382_winston_cap_7_transportation.pdf

[41] *Transportation and Assignment Solution Methods*. http://www.producao.ufrgs.http://wps.prenhall.com/wps/media/objects/14127/14466190/online_modules/taylor_ims11_module_B.pdf

[42] *Using EXCEL Solver*. http://homepages.wmich.edu/~butt/solver_camm.pdf