SVEUČILIŠTE
U SPLITU
SVEUČILIŠNI
ODJEL ZA
STRUČNE STUDIJE

NAUKA O ČVRSTOĆI

BOŽE PLAZIBAT

ADO MATOKOVIĆ

VLADIMIR VETMA

SKRIPTA

ISBN 978-953-7220-41-9

Split, 2019.

IZDAVAČ

Sveučilište u Splitu

Sveučilišni odjel za stručne studije

AUTORI

dr. sc. Bože Plazibat, profesor visoke škole u trajnom zvanju

dr. sc. Ado Matoković, profesor visoke škole u trajnom zvanju

Vladimir Vetma, predavač

RECENZENTI

prof. dr. sc. Frane Vlak

doc. dr. sc. Marko Vukasović

LEKTURA I KOREKTURA

izv. prof. dr. sc. Jadranka Nemeth-Jajić

ISBN 978-953-7220-41-9

Odlukom Povjerenstva za izdavačku djelatnost Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije, Urbroj: 2181-193-02-2/18-91, ovo djelo se objavljuje kao izdanje Sveučilišta u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije.

Predgovor

Ova su skripta namijenjena u prvom redu studentima stručnog studija Konstrukcijsko strojarstvo na Sveučilištu u Splitu, Sveučilišnom odjelu za stručne studije, koji u drugom semestru slušaju kolegij Nauka o čvrstoći. U ovim skriptama gradivo je izneseno malo drukčijim redoslijedom nego što je to uobičajeno na drugim fakultetima strojarstva, ponajprije što se tiče pojmova naprezanja i deformacije s obzirom na to da te veličine nisu odmah prikazane kao tenzorske veličine drugoga reda. Smatrali smo da je studentima stručnih studija pojmove naprezanja i deformacije primjerenije objasniti na primjerima jednoosnog stanja naprezanja, a tek su nakon aksijalnog opterećenja, smicanja, uvijanja i savijanja opisani naprezanje i deformacija kao tenzori. Unatoč tomu držimo da skripta mogu biti korisna i drugim studentima koji su upisali studij strojarstva na bilo kojem fakultetu u Hrvatskoj.

Skripta sadrže predavanja iz navedenog predmeta te, kao i skripta *Tehnička mehanika I* istih autora, sadrže niz ilustrativnih primjera s detaljno objašnjenim postupcima rješavanja, a na kraju svakog poglavlja dani su zadatci za samostalni rad studenata.

U prvome, uvodnom dijelu, objašnjeni su pojmovi čvrstoće, krutosti i stabilnosti. Navedene su vrste čvrstih deformabilnih tijela te dane osnovne veličine kao što su normalno i posmično naprezanje te duljinska i kutna deformacija. Opisana je vlačna proba i dijagram naprezanje – deformacija. Navedene su vrste opterećenja te opisani zadatci i metode nauke o čvrstoći. Kao bitne za određivanje naprezanja nabrojene su unutarnje sile koje se javljaju u poprečnom presjeku štapa. Spomenuto je dopušteno naprezanje i faktor sigurnosti.

Aksijalno opterećenje štapa promatrano je u drugom poglavlju skripata. Objašnjen je postupak izračunavanja normalnih naprezanja kod statički određenih zadataka i dimenzioniranje poprečnog presjeka štapa, odnosno određivanje dopuštenog opterećenja štapa. Obrađeni su i statički neodređeni zadatci, a unutar toga toplinska i početna naprezanja. Na kraju ovog poglavlja objašnjen je Saint-Venantov princip i pojava koncentracije naprezanja.

U trećem poglavlju opisano je izračunavanje posmičnog naprezanja pri smicanju. Pokazan je postupak dimenzioniranja vijaka i svornjaka kao čestih elemenata strojarskih konstrukcija.

Četvrti dio skripata bavi se geometrijskim karakteristikama poprečnog presjeka štapa. Definirani su položaj težišta, statički momenti površine, aksijalni i devijacijski momenti tromosti te momenti otpora. Objašnjeno je Steinerovo pravilo. Definirani su glavni momenti inercije i glavne osi. Pokazan je način određivanja geometrijskih karakteristika složenih presjeka na primjeru poprečnih presjeka s jednom i dvjema osima simetrije te na primjeru nesimetričnih poprečnih presjeka.

Peti dio posvećen je uvijanju štapova okrugloga poprečnog presjeka. Dan je postupak dimenzioniranja poprečnog presjeka pri uvijanju i prema kriteriju čvrstoće i prema kriteriju krutosti. Objašnjen je postupak kod rješavanja statički neodređenih zadataka pri uvijanju.

Čisto savijanje i poprečno savijanje dani su u šestom poglavlju skripata. Navedene su osnovne pretpostavke te izrazi za izračunavanje normalnih i posmičnih naprezanja. Prikazana je raspodjela normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka te opisan postupak kod dimenzioniranja pri savijanju. Definirana je elastična linija te dana njena diferencijalna jednadžba. Na nekoliko jednostavnih primjera dan je postupak određivanja funkcije progiba i nagiba metodom rješavanja diferencijalne jednadžbe elastične linije te je na kraju na nekoliko primjera pokazan način rješavanja statički neodređenih zadataka.

U sedmom poglavlju naprezanje je dano kao tenzor drugog reda. Prikazana je matrica tenzora naprezanja u prostoru i u ravnini s naglaskom na to da se radi o simetričnoj matrici. Opisan je orijentirani element te su izvedeni izrazi za transformaciju komponenata tenzora naprezanja pri rotaciji koordinatnog sustava. Definirana su glavna naprezanja i pravci glavnih naprezanja. Detaljno je opisan postupak određivanja glavnih naprezanja i komponenata naprezanja za zarotirane osi grafičkim postupkom pomoću Mohrove kružnice naprezanja.

U osmom poglavlju prikazana je deformacija kao tenzor drugog reda. Definirana je tenzorska kutna deformacija u odnosu na kutnu deformaciju koja se upotrebljava u tehničkoj literaturi. Po analogiji s tenzorom naprezanja prikazan je orijentirani element te su izvedeni izrazi za transformaciju komponenata tenzora deformacije pri rotaciji koordinatnog sustava; dani su izrazi za izračunavanje glavnih deformacija i pravaca glavnih deformacija te je opisana Mohrova kružnica deformacije. Pokazan je način kako se iz triju duljinskih deformacija dobivenih mjerenjem pomoću tenzometarskih traka u rasporedu 0-45-90 i 0-60-120 stupnjeva može dobiti osnovno stanje.

Međusobna ovisnost komponenata tenzora naprezanja i tenzora deformacije za prostorno stanje naprezanja dana je u devetom poglavlju. Iz prostornog stanja izvedeni su izrazi koji povezuju komponente tenzora naprezanja s komponentama tenzora deformacije, i obratno, za slučaj ravninskog stanja naprezanja i za slučaj ravninskog stanja deformacije. Dana je veza među konstantama elastičnosti materijala.

Deseto poglavlje posvećeno je teorijama čvrstoće. Navedene su teorija najvećeg normalnog naprezanja kao prikladna za krte materijale te teorija najvećeg posmičnog naprezanja i HMH teorija kao prikladne za duktilne materijale. Dan je način određivanja ekvivalentnog naprezanja prema navedenim teorijama.

U jedanaestom poglavlju promatrano je složeno opterećenje. Opisane su osnovne kombinacije: aksijalno opterećenje i savijanje, aksijalno opterećenje i uvijanje, uvijanje i savijanje te aksijalno opterećenje, uvijanje i savijanje. Pokazan je način određivanja ekvivalentnog opterećenja pri navedenim kombinacijama opterećenja.

U dvanaestom poglavlju obrađeno je izvijanje. Objašnjen je pojam stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže. Definirana je vitkost štapa te pokazan Eulerov izraz za kritično naprezanje u elastičnom području i grafički prikaz tog izraza. Za slučaj izvijanja u plastičnom području naveden je Tetmajerov izraz za izračunavanje kritičnog naprezanja.

Koristimo se ovom prigodom zahvaliti recenzentima prof. dr. sc. Frani Vlaku i doc. dr. sc. Marku Vukasoviću na pažljivom čitanju teksta i korisnim savjetima kojima su podigli kvalitetu ovih skripata.

Svima koji upozore na eventualne slovne ili računske pogreške koje su promaknule i autorima i recenzentima unaprijed zahvaljujemo.

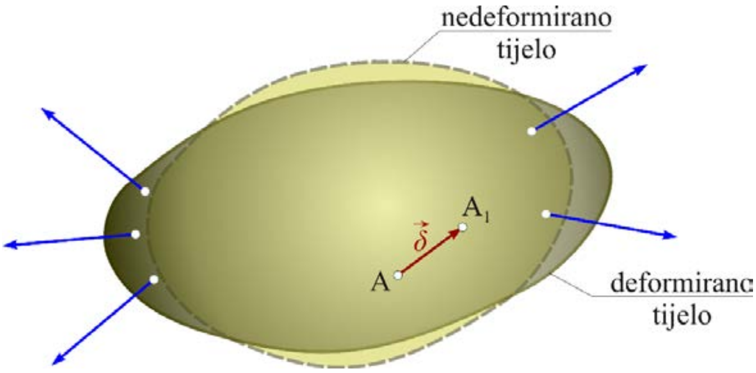
Autori

S A D R Ž A J

1. UVOD

1.1. NAZIV I SADRŽAJ NAUKE O ČVRSTOĆI

Tehnička mehanika I – Statika bavi se krutim tijelima koja pod djelovanjem vanjskog opterećenja ne mijenjaju svoj oblik i dimenzije. Takva tijela su idealizirana. U stvarnosti opterećena realna tijela se deformiraju. Točke tijela pod opterećenjem doživljavaju pomake, tj. tijelo mijenja svoj oblik i dimenzije (slika 1.1.).



Slika 1.1. *Deformabilno tijelo – tijelo koje pod opterećenjem mijenja oblik i dimenzije*

Nauka o čvrstoći proučava deformabilna tijela. Udžbenici koji obrađuju ovu materiju pisani su i pod drugim nazivima kao što su *Otpornost materijala* ili *Mehanika deformabilnih tijela*. Slično i udžbenici pisani na engleskom jeziku imaju nazive *Mechanics of Materials*, *Strength of Materials*, *Mechanics of deformable solids*. Ovdje će se rabiti tradicionalni naziv *Nauka o čvrstoći*, a tako se naziva i kolegij za koji su ova skripta namijenjena.

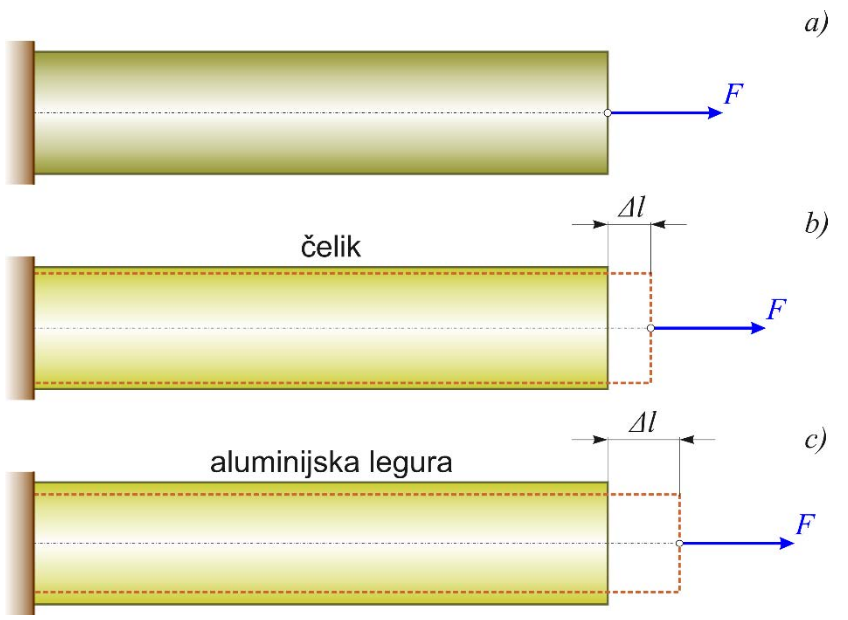
Nauka o čvrstoći bavi se metodama proračuna čvrstoće, krutosti i stabilnosti dijelova konstrukcija i strojeva.

Slika 1.2. *Oštećeni stup ulične rasvjete u orkanskoj buri u Splitu*

Pod pojmom *čvrstoće* konstrukcije ili dijela konstrukcije smatra se sposobnost prenošenja opterećenja bez pojave loma, bez trajnih plastičnih deformacija ili oštećenja.

Na slici 1.2. prikazan je oštećeni stup ulične rasvjete nakon orkanske bure u Splitu. Stup nije izdržao opterećenje vjetra bez pojave oštećenja, pa se kaže da njegova čvrstoća nije bila zadovoljavajuća.

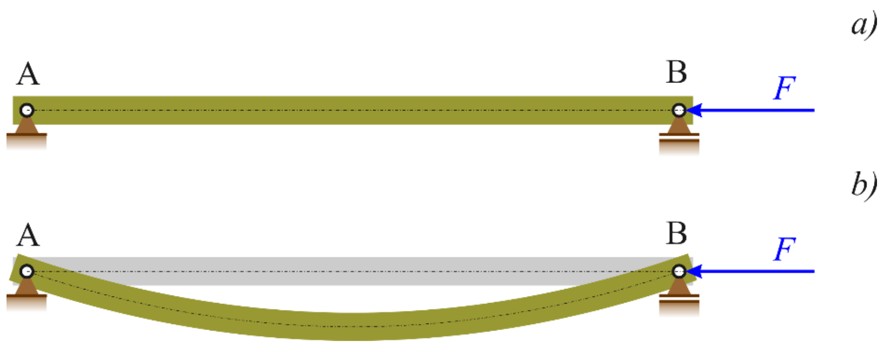
Otpornost konstrukcije ili njezina dijela prema deformiranju (tj. promjeni oblika i dimenzija pod opterećenjem) naziva se *krutošću*. Tako na primjer dva štapa istih dimenzija i opterećena silom jednakog intenziteta na slobodnom kraju (slika 1.3.a), a izrađena od različitih materijala (čelik, aluminijska legura) imat će ista naprezanja, ali različita produljenja (slike 1.3.b i c.). Čelični štap manje će se produljiti, pa stoga ima veću krutost (slika 1.3.b).



Slika 1.3.: *a) dva aksijalno opterećena štapa izrađena od čelika i aluminijske legure, b) produljenje čeličnog štapa (veća krutost), c) produljenje aluminijskog štapa (manja krutost)*

Elastična stabilnost konstrukcije je sposobnost elementa konstrukcije da pri opterećivanju zadrži početni ravnotežni oblik.

Dugi i vitki štapovi podvrgnuti tlačnom opterećenju mogu izgubiti svoj prvotni oblik pa dolazi do njihova izvijanja, kao što je prikazano na slikama 1.4. i 1.5.



Slika 1.4.: *a) štap podvrgnut tlačnoj sili, b) gubitak elastične stabilnosti – izvijanje štapa*

Slika 1.5. *Gubitak elastične stabilnosti – realna konstrukcija*

Unutar ovih skripata razmatra se idealizirano čvrsto tijelo koje ima sljedeća svojstva:

- tijelo je neprekinuto ili kontinuirano,
- tijelo je u cijelosti ili u pojedinim dijelovima homogeno,
- postoji točno određena veza između naprezanja i deformacija.

Čvrsta tijela mogu biti:

- *izotropna* – svojstva čvrstog tijela u svim su pravcima ista,
- *anizotropna* – svojstva čvrstog tijela nisu ista u svim pravcima.

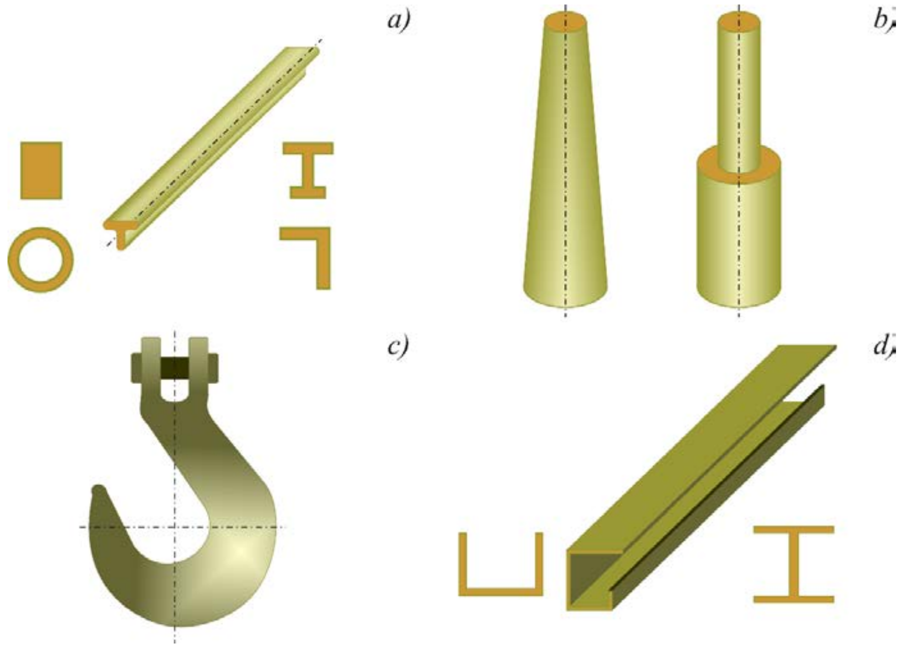
Unutar ovog kolegija proučavat će se izotropna tijela.

Idealizirana čvrsta tijela također se mogu podijeliti na *elastična*, *plastična* i *viskoelastična.*

Elastična tijela nakon rasterećenja vraćaju se u svoj početni oblik i dimenzije. Kod *plastičnih* tijela nakon rasterećenja zaostaju trajne ili plastične deformacije. *Viskoelastična* tijela su ona tijela kod kojih zbog konstantnog opterećenja dolazi do pojave *puzanja* ili *relaksacije*. *Puzanje* je pojava gdje pri konstantnom opterećenju nastaju trenutačne deformacije koje s vremenom rastu. Opadanje unutarnjih sila tijekom vremena pri deformaciji viskoelastičnih tijela naziva se *relaksacija*.

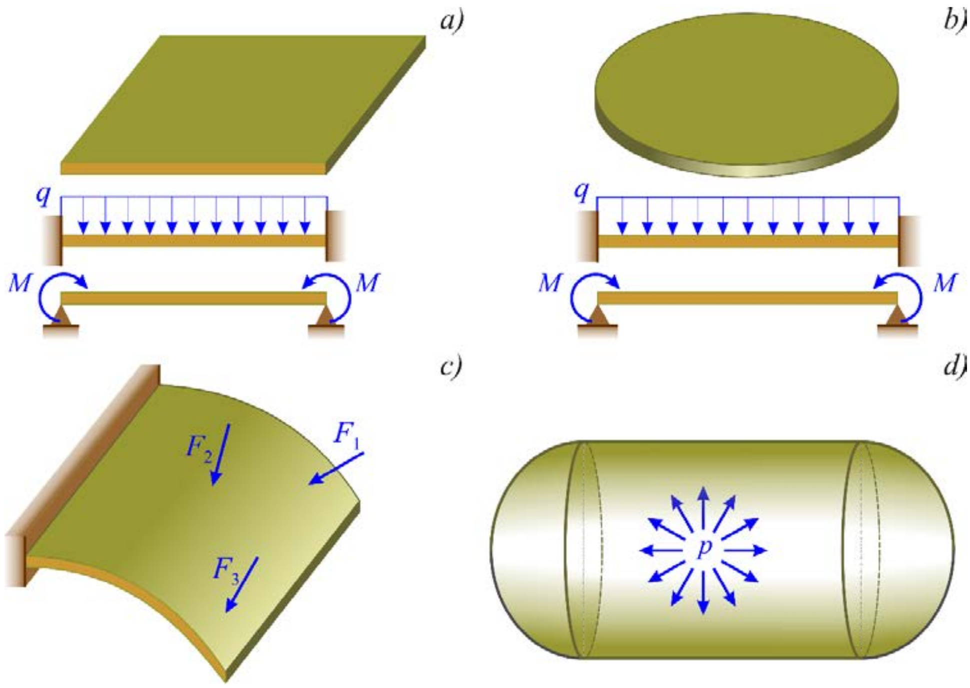
Matematički pristup mehanici deformabilnih tijela izlaže se u okviru teorije elastičnosti, teorije plastičnosti i teorije viskoelastičnosti. Nauka o čvrstoći pojednostavnjuje matematički pristup i daje rješenja koja nisu sasvim egzaktna, ali koja su prihvatljiva za inženjersku praksu. Unutar nauke o čvrstoći razmatraju se tijela raznih oblika kao što su štapovi, ploče, ljuske.

Štap je tijelo kojem su poprečne dimenzije znatno manje u odnosu na uzdužnu. Štap može biti ravan ili zakrivljen, konstantnog ili promjenjivog poprečnog presjeka (slika 1.6.).



Slika 1.6.: *a) ravni štap različitih oblika poprečnog presjeka, b) ravni štap kontinuirano promjenjivog poprečnog presjeka te štap od dvaju segmenata različitih presjeka, c) debeli zakrivljeni štap, d) tankostjeni štap otvorenog poprečnog presjeka*

Ploče i ljuske su elementi konstrukcija kojima je debljina malena u odnosu na ostale dimenzije. Ploče imaju ravnu središnju površinu, tj. površinu koja je jednako udaljena od obiju vanjskih površina (slika 1.7.a i b). Kod ljuski je središnja površina zakrivljena (slika 1.7.c i d).



Slika 1.7.: *a) pravokutna ploča, b) kružna ploča, c) cilindrična ljuska, d) spremnik sastavljen od sferne i cilindrične ljuske*

U ovim skriptama proučavat će se štapovi, dok će ploče, ljuske i tankostjeni štapovi otvorenog poprečnog presjeka biti razmatrani u kolegiju Čvrstoća konstrukcija koji se izvodi na specijalističkom diplomskom stručnom studiju Strojarstvo.

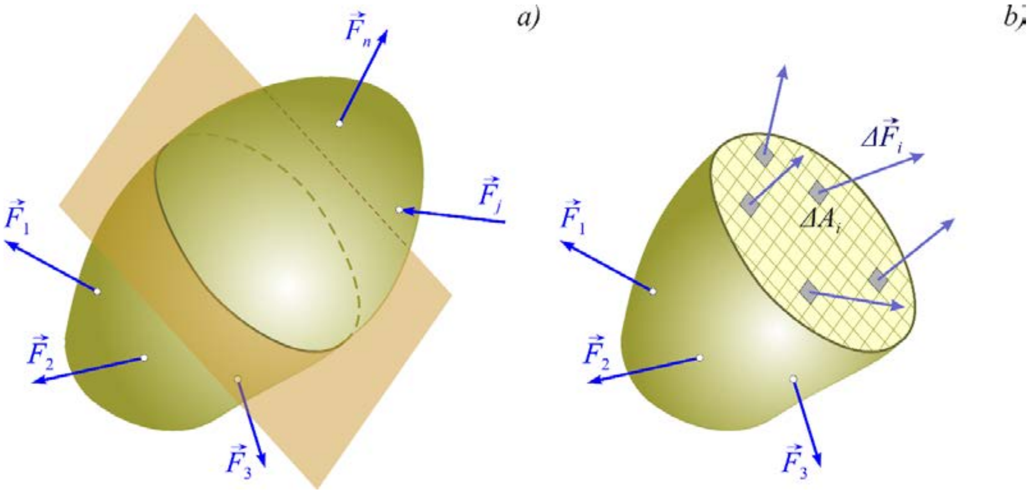
1.2. KRATKI PRIKAZ RAZVOJA NAUKE O ČVRSTOĆI KROZ POVIJEST

U ovom kratkom prikazu navode se imena samo nekih od mnogobrojnih velikana i znanstvenika koji su se bavili sadržajima nauke o čvrstoći. Prema sačuvanim zapisima, jedan od prvih velikih umova koji su se bavili proučavanjem čvrstoće tehničkih konstrukcija bio je ***Leonardo da Vinci*** (1452. – 1519.). On je obavio prve značajnije pokuse čvrstoće konstrukcijskih materijala na ispitivanjima čvrstoće žice, greda i stupova. Prva sustavna istraživanja na području nauke o čvrstoći provodio je ***Galileo Galilei*** (1564. – 1642.) koji je prvi proučavao čvrstoću nosača vršeći praktične pokuse s nosačem ukliještenim na jednom kraju, a opterećenim na slobodnom kraju. Njemu pripada zasluga da je prvi počeo eru eksperimentalnog ispitivanja mehaničkih svojstava konstrukcijskih elemenata. Engleski fizičar ***Robert Hooke*** (1635. – 1703.) postavio je 1660., a objavio 1678. godine zakon linearne ovisnosti između opterećenja i deformacija. Nezavisno od Hookea, francuski fizičar ***Edme Mariotte*** (1620. – 1684.) došao je 1680. do istog zakona na osnovi svojih eksperimentalnih istraživanja. Matematičku formulaciju Hookeova zakona za jednoosno stanje rastezanja dao je 1807. godine engleski fizičar ***Thomas Young*** (1773. – 1829.). On je uveo pojam modula elastičnosti koji se po njemu naziva i Youngov modul, a uveo je i pojam posmičnog naprezanja. Francuski inženjer i fizičar ***S. D. Poisson*** (1781. – 1840) uveo je 1828. godine pojam omjera poprečne i uzdužne deformacije pri rastezanju, koji se po njemu naziva Poissonov koeficijent. Velik doprinos izgradnji osnova teorije elastičnosti i analitičkim metodama u nauci o čvrstoći dali su švicarski matematičari ***Jacob*** (1654. – 1705.) i ***Johann*** (1667. – 1748.) ***Bernoulli*** te Johannov sin ***Daniel Bernoulli*** (1700. – 1782.) i njegov učenik ***Leonhard Euler*** (1707. – 1783.). Posebno su se bavili problemom savijanja greda, a Euler je 1774. izveo izraz za kritičnu silu izvijanja vitkog štapa.

1.3. TEMELJNI POJMOVI

1.3.1. Vektor naprezanja, normalno i posmično naprezanje

Neka na neko zamišljeno tijelo djeluje niz vanjskih sila (slika 1.8.a).



Slika 1.8.: *a) opterećeno zamišljeno tijelo s ravninom presjeka, b) dio tijela s jedne strane presjeka s prikazom vanjskih i unutarnjih sila*

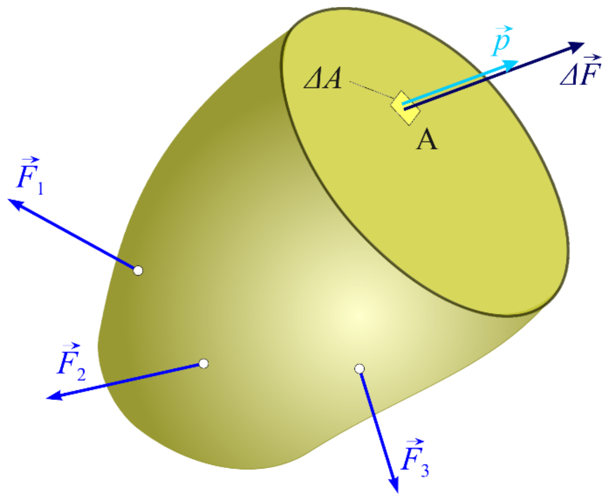
Ove sile nastoje razdvojiti ili približiti pojedine čestice tijela, čemu se protive unutarnje sile među česticama tijela. Za prikaz unutarnjih sila rabi se metoda presjeka. Neka se zamišljeno tijelo presječe ravninom na dva dijela i razmatra dio tijela s jedne strane presjeka (slika 1.8.b). Neka je površina presjeka podijeljena na niz elementarnih površina ΔA_i. Na svaku od tih površina kao reakcija na vanjsko opterećenje djelovat će elementarna unutarnja sila $\Delta \vec{F}_i$.

Vektor srednjeg naprezanja definira se kao omjer sile $\Delta \vec{F}_i$ i površine ΔA_i (slika 1.8.b), tj.

$$\vec{p}_{sr} = \frac{\Delta \vec{F}_i}{\Delta A_i}. \tag{1.1}$$

Ako se površina oko točke A smanjuje tako da teži nuli, dobije se vektor punog naprezanja u proizvoljnoj točki presjeka (slika 1.9.):

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}. \tag{1.2}$$



Slika 1.9. *Vektor naprezanja*

Iz izraza (1.2) slijedi i izvedena jedinica za naprezanje od jednog paskala:

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

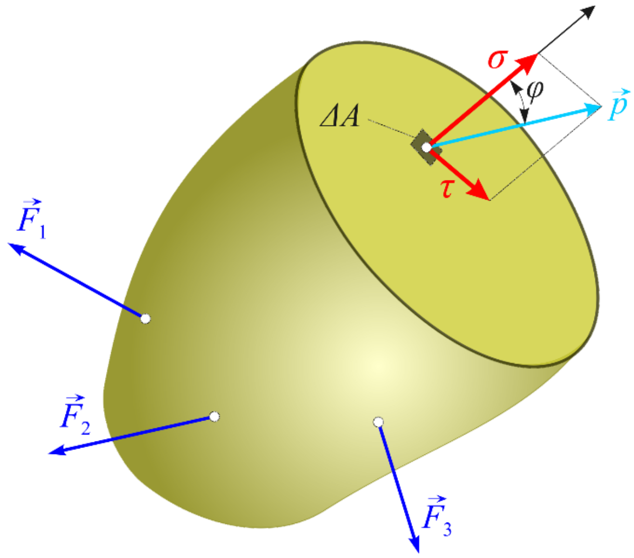
To je vrlo mala jedinica pa se u inženjerskim proračunima rabi jedinica od jednog megapaskala (MPa): $1\,\mathrm{MPa} = 10^6\,\mathrm{Pa}$, što odgovara jedinici od jednog njutna po milimetru kvadratnom: $1\,\mathrm{MPa} = 1\,\mathrm{N/mm^2}$.

U građevinarstvu se često u proračunima upotrebljava jedinica $\mathrm{kN/cm^2}$, što je ekvivalent naprezanju od deset megapaskala: $1\,\mathrm{kN/cm^2} = 10\,\mathrm{MPa}$.

U općem slučaju vektor punog naprezanja $\vec{p}$ nije okomit na površinu presjeka (slika 1.10.), nego s normalom na presjek zatvara kut φ tako da se može rastaviti na dvije komponente: normalnu komponentu σ koja je okomita na presjek i posmičnu (tangencijalnu) komponentu τ koja leži u ravnini presjeka. Te dvije komponente određene su izrazima:

$$\sigma = p \cdot \cos\varphi, \quad \tau = p \cdot \sin\varphi. \tag{1.3}$$

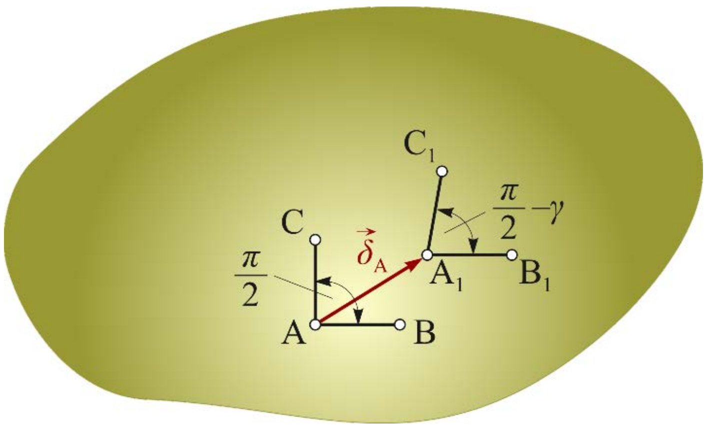
U tekstu će se umjesto izraza normalna i posmična komponenta naprezanja dalje rabiti nazivi normalno i posmično naprezanje.



Slika 1.10. *Normalna i posmična komponenta naprezanja*

1.3.2. Duljinska i kutna deformacija

Već je spomenuto da se tijela zbog djelovanja vanjskih sila deformiraju i da pojedine točke tijela dobivaju pomake $\vec{\delta}$ (slika 1.11.).



Slika 1.11. *Duljinska i kutna deformacija*

Ako se razmotre dvije međusobno okomite dužine na tijelu $\overline{\mathrm{AB}}$ i $\overline{\mathrm{AC}}$ prije i poslije opterećenja, može se primijetiti promjena duljina tih dužina i promjena pravog kuta među njima (slika 1.11.).

Pri tome se srednje duljinske deformacije u smjeru osi x i y definiraju kao omjeri promjene duljina i početnih duljina navedenih dužina, tj. kao relativne promjene duljina:

$$\varepsilon_{sr,x} = \frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}} - \overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}, \qquad \varepsilon_{sr,y} = \frac{\overline{\mathrm{A_1C_1}} - \overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}.$$

Stvarne duljinske deformacije u točki A granične su vrijednosti gornjih izraza kada točke B i C teže k točki A:

$$\varepsilon_x = \lim_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}} \frac{\overline{\mathrm{A_1B_1}} - \overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}, \qquad \varepsilon_y = \lim_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}} \frac{\overline{\mathrm{A_1C_1}} - \overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}.$$

Kutna deformacija γ predstavlja nastalu promjenu početnog pravog kuta između dužina $\overline{\mathrm{AB}}$ i $\overline{\mathrm{AC}}$.

Duljinske deformacije, kao i kutna deformacija, nedimenzionalne su veličine, a u proračunima realnih konstrukcija njihov je red veličine 10^{-4}.

1.3.3. Veza naprezanja i deformacija

Između naprezanja i deformacija postoji odgovarajuća veza. Veća naprezanja izazivaju veće deformacije, ali isto tako deformacije uz naprezanja ovise i o materijalu od kojeg je tijelo izrađeno. Ovisnost naprezanja i deformacija za razne materijale određuje se laboratorijskim pokusima sukladno normama ISO 6892-1:2016 i EN ISO 6892-1:2016, na uređajima kao što je univerzalna hidraulička kidalica prikazana na slici 1.12.

Slika 1.12. *Univerzalna kidalica*

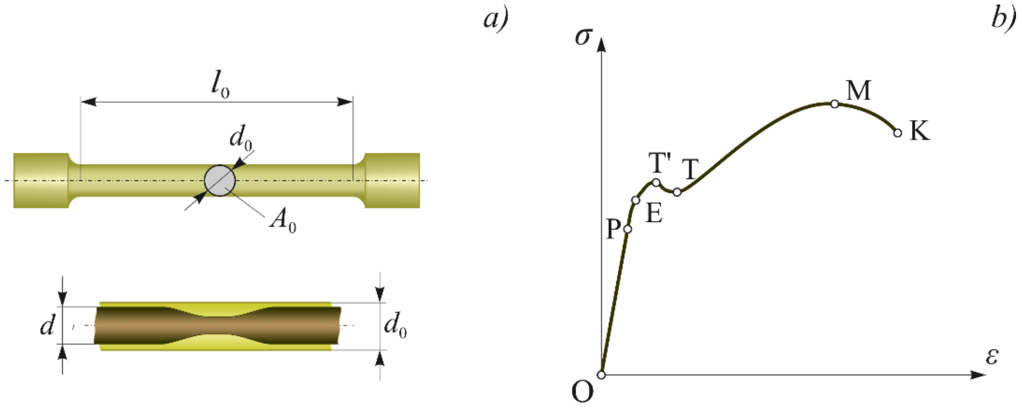
Najčešće se provodi pokus rastezanja na standardnoj epruveti (slika 1.13.a) koja obično ima kružni poprečni presjek promjera d_o. Epruveta se optereti vlačnom silom F, koja se postupno povećava, pri čemu se za svaku vrijednost sile mjeri produljenje Δl početno označene dužine na epruveti kojoj je duljina l_o. Dijeljenjem sile F s površinom poprečnog presjeka $A_o = d_o^2 \cdot \pi/4$ dobije se konvencionalno naprezanje σ_o:

$$\sigma_o = \frac{F}{A_o}, \tag{1.4}$$

a dijeljenjem produljenja Δl s početnom duljinom l_o izračunava se prosječna duljinska deformacija ε:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o}. \tag{1.5}$$

Dobivene vrijednosti unose se u dijagram $\sigma = f(\varepsilon)$. Primjer tako dobivenog dijagrama za niskougljični konstrukcijski čelik prikazan je na slici 1.13.b.



Slika 1.13. *a) izgled standardne epruvete, b) dijagram naprezanje – deformacija*

Iz dijagrama se može vidjeti kako do neke vrijednosti iznosa naprezanja postoji linearna veza između naprezanja i deformacija (točka P na dijagramu), dok je pri većim iznosima naprezanja od tog veza naprezanja i deformacija nelinearna (krivulja od točke P do točke K na dijagramu).

Značenje označenih točaka na dijagramu je sljedeće:

- naprezanje koje odgovara točki P naziva se granica proporcionalnosti σ_P, i do tog iznosa naprezanja postoji linearna veza između naprezanja i deformacija koja se može prikazati jednadžbom;

  $$\sigma = E \cdot \varepsilon , \tag{1.6}$$

  koja predstavlja Hookeov zakon za jednoosno stanje naprezanja; u jednadžbi E predstavlja konstantu elastičnosti koja se naziva Youngeov modul elastičnosti;
- točka E označava granicu elastičnosti σ_E; ako se epruveta pri toj i nižim vrijednostima naprezanja rastereti, vraća se u početni oblik, tj. nakon rasterećenja nema deformacija;
- kada iznos naprezanja premaši granicu elastičnosti σ_E, materijal se počinje ponašati neelastično ili plastično što znači da u epruveti nakon rasterećenja ostaju trajne plastične deformacije; nakon što naprezanje dostigne gornju granicu razvlačenja R_{eH} (starija oznaka $\sigma_T^{'}$ – točka T′ na slici 1.14.a), naglo opada na vrijednost R_{eL}, što je donja granica razvlačenja (starija oznaka σ_T – točka T na slici 1.14.a), dakle deformacije rastu bez povećanja naprezanja;
- nakon određene deformacije konvencionalno naprezanje σ_o ponovno raste do iznosa R_m (starija oznaka σ_M – točka M na slici 1.14.a); ta vrijednost predstavlja vlačnu ili rasteznu čvrstoću materijala;

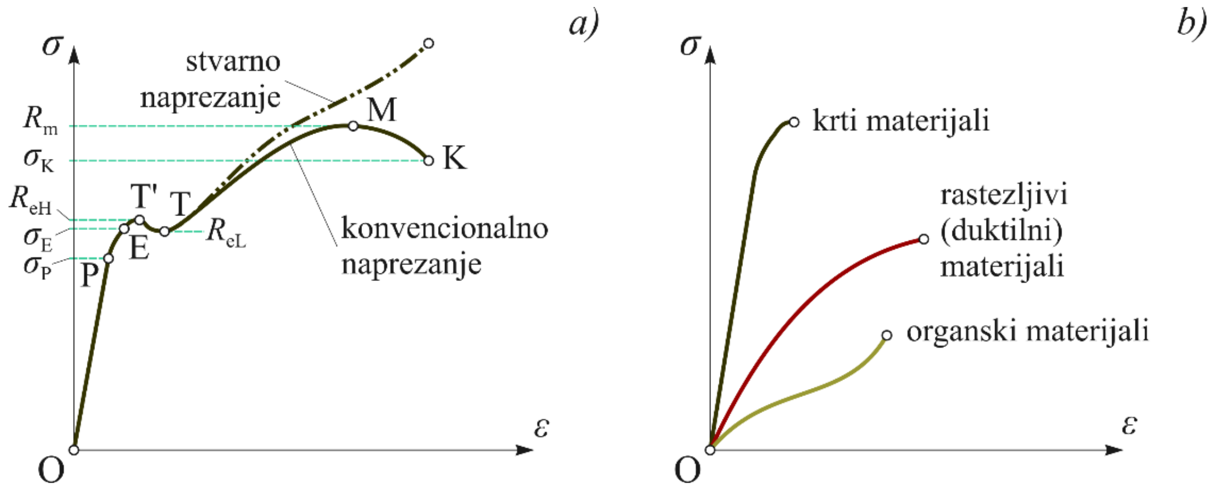
- nakon toga konvencionalno naprezanje opada dok se epruveta ne slomi (točka K na slici 1.14.a).

Na slici 1.14.a punom linijom prikazano je konvencionalno naprezanje gdje se sila stalno dijeli s početnom površinom poprečnog presjeka A_o.

Kako se pri rastezanju približavanjem iznosa naprezanja granici tečenja epruveta naglo sužava – pojava vrata epruvete – smanjuje se početni promjer d_o, a time i površina stvarnog poprečnog presjeka (slika 1.13.a).

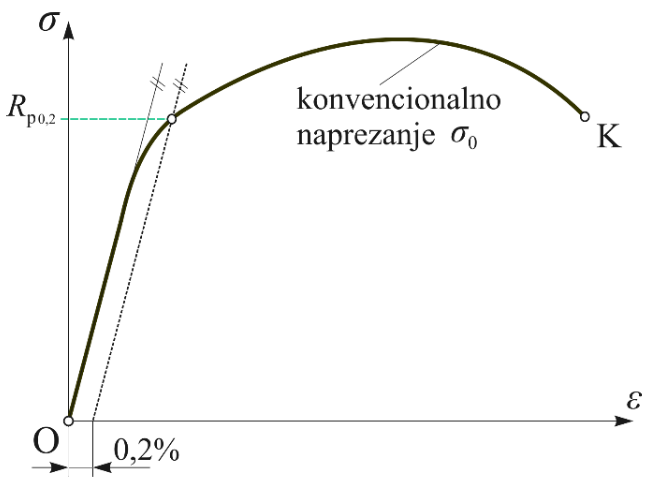
Ako se sila dijeli sa stvarnom površinom poprečnog presjeka A, dobiva se stvarno naprezanje σ. Do pojave vrata naprezanja i deformacije jednoliko su raspodijeljeni u epruveti.

Nakon pojave vrata naprezanja i deformacije u blizini vrata veći su od naprezanja i deformacija u ostalom dijelu epruvete, a konvencionalno naprezanje σ_o i stvarno naprezanje σ sve se više razlikuju. Stvarno naprezanje prikazano je na slici 1.14.a isprekidanom linijom.



Slika 1.14.: *a) dijagram naprezanje – deformacija za niskougljični konstrukcijski čelik, b) izgled dijagrama za neke druge materijale*

Na slici 1.14.b prikazan je izgled $\sigma - \varepsilon$ dijagrama za neke krte, duktilne i polimerne materijale.



Slika 1.15. *Konvencionalna granica razvlačenja* $R_{p0,2}$

Kod materijala koji imaju kontinuirani prijelaz iz područja elastičnih u područje plastičnih deformacija (duktilni materijali kao npr. aluminij i njegove legure, bakar i njegove legure i dr.) utvrđuje se konvencionalna granica razvlačenja $R_{p0,2}$ (slika 1.15.).

To je ono naprezanje koje će u materijalu nakon rasterećenja ostaviti plastičnu deformaciju od 0,2 %.

Budući da se pri rastezanju epruvete mijenja i njen promjer, može se definirati i prosječna poprečna duljinska deformacija:

$$\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d_o}. \tag{1.7}$$

Omjer poprečne i uzdužne duljinske deformacije daje novu konstantu elastičnosti koja se naziva Poissonov koeficijent:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon} \tag{1.8}$$

Slično pokusu rastezanja na normiranoj epruveti laboratorijskim pokusima dobivena je veza posmičnog naprezanja i kutne deformacije koja se u elastičnom području može prikazati jednadžbom:

$$\tau = G \cdot \gamma, \tag{1.9}$$

gdje je G još jedna konstanta elastičnosti nazvana modulom smicanja.

Može se pokazati da su konstante elastičnosti Youngeov modul elastičnosti – E, Poissonov keoficijent – ν i modul smicanja – G povezani izrazom (izvod dan u 9. poglavlju):

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}. \tag{1.10}$$

Konstante elastičnosti E i G imaju dimenziju naprezanja, dok je konstanta elastičnosti ν nedimenzionalna veličina.

Vrijednosti ovih konstanta za neke izotropne materijale dane su u tablici 1.1.

Tablica 1.1. Vrijednosti konstanta elastičnosti nekih izotropnih materijala

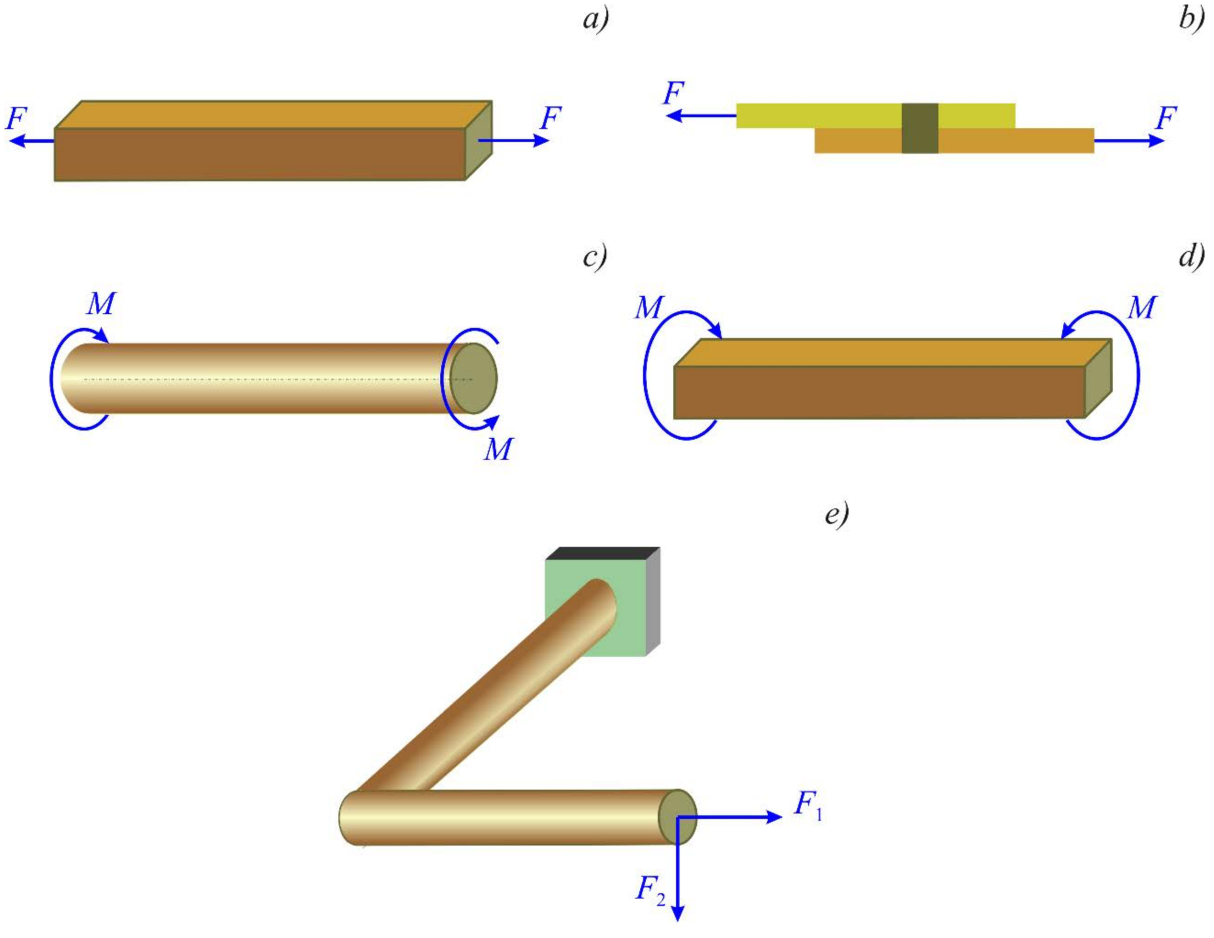
	E, GPa	G, GPa	ν
Aluminij	72	27	0,34
Aluminijske legure	69 – 72	26	0,33
Bakar	125	46	0,35
Mjed	80 – 125	46	0,35
Bronca	115 – 120	42 – 44	0,35
Konstrukcijski čelici	200 – 210	76 – 80	0,3 – 0,33
Sivi lijev	100 – 120	40	0,26
Titan legure	105	39	0,33

1.4. VRSTE OPTEREĆENJA

U ovim skriptama razmatrat će se sljedeća osnovna opterećenja štapa kojima će posljedica biti pojava ili samo normalnih ili samo posmičnih naprezanja u njegovim poprečnim presjecima:

- aksijalno opterećenje štapa (slika 1.16.a) – u poprečnom presjeku javljaju se normalna naprezanja,
- smicanje (slika 1.16.b) – u poprečnom presjeku nastaju posmična naprezanja,
- uvijanje (slika 1.16.c) – u poprečnom presjeku javljaju se posmična naprezanja,
- čisto savijanje (slika 1.16.d) – u poprečnom presjeku javljaju se normalna naprezanja.

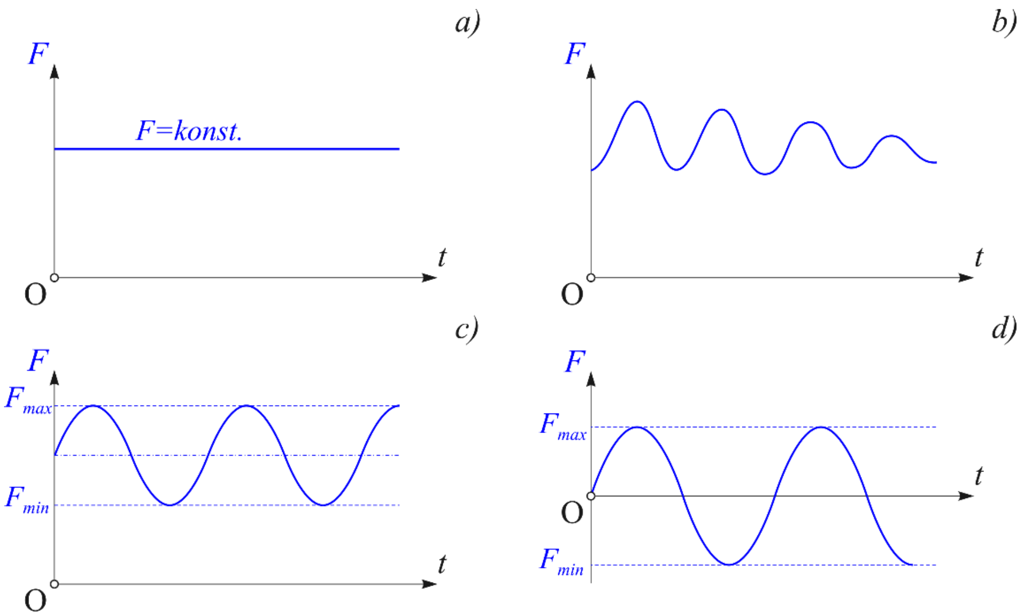
Proučavat će se također složeno opterećenje nastalo različitim kombinacijama osnovnih opterećenja (slika 1.16.e) kada u poprečnom presjeku štapa nastaju normalna i posmična naprezanja.



Slika 1.16. *Vrste opterećenja štapa: a) aksijalno opterećenje, b) smicanje, c) uvijanje ili torzija, d) savijanje, e) složeno opterećenje*

Navedena opterećenja mogu djelovati konstantnim iznosom – statička opterećenja (slika 1.17.a) ili promjenjivim iznosom – dinamička opterećenja (slika 1.17.b, c i d).

Kao poseban slučaj dinamičkih opterećenja javljaju se ciklička opterećenja: promjenjivo opterećenje istog predznaka (slika 1.17.c) i promjenjivo opterećenje različitog predznaka (slika 1.17.d).



Slika 1.17. *Vrste opterećenja štapa: a) konstantno – statičko opterećenje, b) promjenjivo – dinamičko opterećenje, c) istosmjerno pulsirajuće opterećenje, d) naizmjenično opterećenje*

U ovim skriptama razmatrat će se statička opterećenja.

1.5. ZADATCI I METODE NAUKE O ČVRSTOĆI

Tri su tipa zadataka koja će biti razmatrana za navedena osnovna opterećenja štapa:

1. poznati su vanjsko opterećenje, geometrija poprečnog presjeka i materijal od kojeg je štap napravljen, a treba izračunati normalno ili posmično naprezanje i **provjeriti čvrstoću**;
2. poznati su vanjsko opterećenje, oblik i materijal konstrukcije, a treba prema kriteriju čvrstoće ili kriteriju krutosti odrediti najmanje potrebne dimenzije poprečnih presjeka konstrukcije – drugim riječima, treba **dimenzionirati** konstrukciju;
3. poznati su geometrija konstrukcije i materijal od kojeg je napravljena, a treba izračunati najveće **dopušteno opterećenje**.

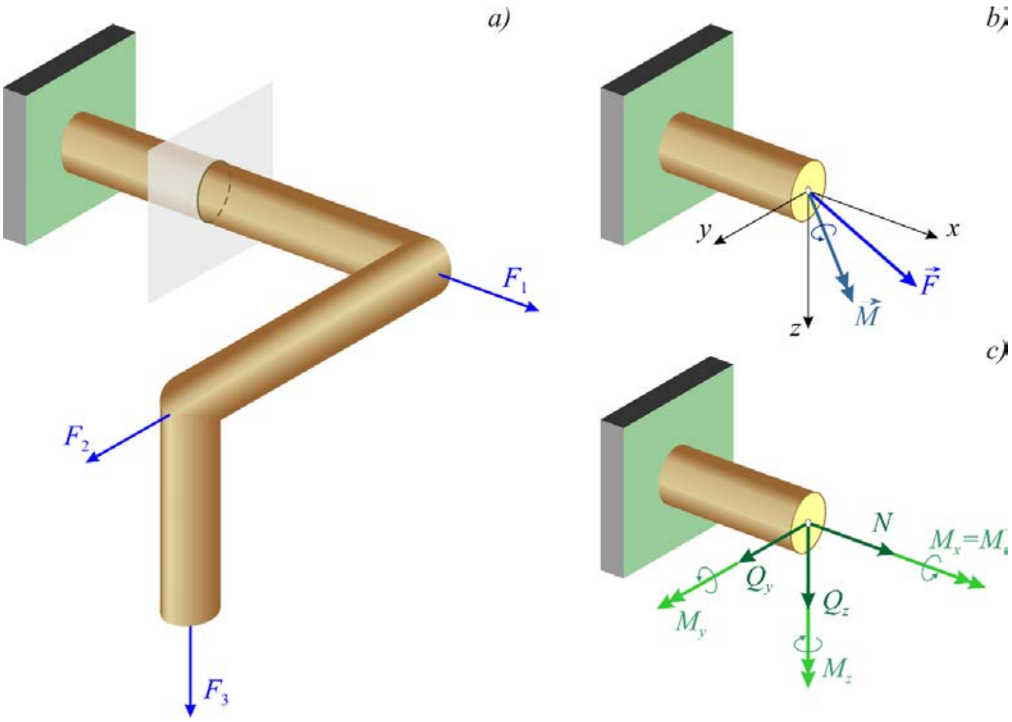
Kod sva tri tipa zadataka prvi je korak određivanje unutarnjih sila u poprečnim presjecima dijelova konstrukcije s pomoću metode presjeka. Prema unutarnjim silama i geometrijskim karakteristikama poprečnih presjeka računat će se normalna i posmična naprezanja te njihova raspodjela.

1.5.1. Unutarnje sile u poprečnom presjeku štapa

Neka je zadan prostorni štap opterećen trima koncentriranim silama prema slici 1.18.a. Koristeći se metodom presjeka zamišlja se presjek štapa ravninom okomitom na njegovu uzdužnu os pri čemu je štap podijeljen na dva dijela. Na lijevi dio štapa utjecaj desnog dijela zamijenit će se nizom sila kojima čestice desnog dijela djeluju na lijevi dio. Sve te sile reduciraju se na težište poprečnog presjeka na glavni vektor unutarnjih sila $\vec{F}$ i glavni moment $\vec{M}$ (slika 1.18.b).

Ta dva vektora mogu se rastaviti na komponente duž koordinatnih osi (slika 1.18.c) koje su poznate kao sljedeće unutarnje sile u poprečnom presjeku štapa:

- N – uzdužna sila
- Q_z – poprečna sila u smjeru lokalne osi z
- Q_y – poprečna sila u smjeru lokalne osi y
- M_y – moment savijanja s obzirom na lokalnu os y
- M_z – moment savijanja s obzirom na lokalnu os z
- $M_x \equiv M_t$ – moment s obzirom na lokalnu os x ili moment uvijanja.



Slika 1.18.: *a) prostorni štap s prikazom opterećenja, b) unutarnje sile reducirane na težište poprečnog presjeka s glavnim vektorom sila i glavnim momentom, c) unutarnje sile u poprečnom presjeku: uzdužna sila, poprečne sile, momenti savijanja i moment uvijanja*

1.6. DOPUŠTENO NAPREZANJE, KOEFICIJENT SIGURNOSTI

Pri dimenzioniranju štapa bilo kao samostalnog elementa bilo kao dijela konstrukcije primjenjivat će se deterministički pristup, tj. uvjet ili kriterij čvrstoće bit će zadovoljen ako naprezanje ne prelazi unaprijed određenu vrijednost dopuštenog naprezanja σ_d odnosno τ_d.

Dopušteno naprezanje σ_d određuje se ovisno o materijalu od kojeg je štap napravljen.

Za duktilne materijale s jasno izraženom granicom elastičnosti (niskougljični konstrukcijski čelik) dopušteno naprezanje određuje se prema gornjoj granici razvlačenja (slika 1.19.a):

$$\sigma_\mathrm{d} = \frac{R_\mathrm{eH}}{S}. \qquad (1.11)$$

Za krte materijale kao što je npr. sivi lijev dopušteno naprezanje određuje se prema vlačnoj čvrstoći (slika 1.19.b):

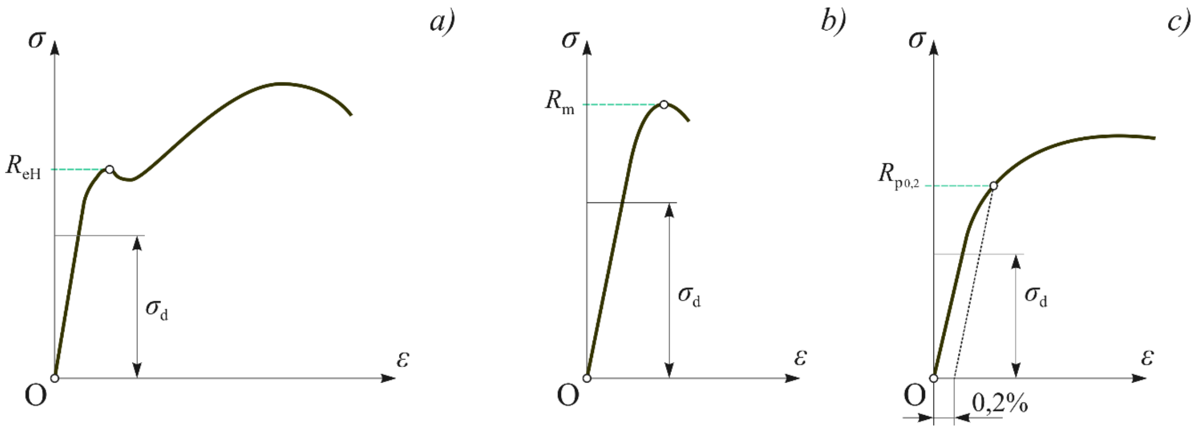
$$\sigma_d = \frac{R_m}{S}. \qquad (1.12)$$

Za duktilne materijale koji nemaju jasno izraženu granicu elastičnosti kao što su aluminij ili aluminijske legure dopušteno naprezanje određuje se prema konvencionalnoj granici razvlačenja (slika 1.19.c):

$$\sigma_d = \frac{R_{p0,2}}{S}. \qquad (1.13)$$

U izrazima (1.11), (1.12) i (1.13) S predstavlja faktor sigurnosti koji se za konstrukcije u strojarstvu uzima u granicama

$$S = 1{,}5 \text{ do } S = 2{,}5 \quad \text{(iznimno 5 – 10)}. \qquad (1.14)$$



Slika 1.19. *Dopušteno naprezanje: a) duktilni materijal – konstrukcijski čelik, b) krti materijal, c) duktilni materijal koji nema jasno izraženu granicu elastičnosti*

Vrijednosti granice razvlačenja R_e, konvencionalne granice razvlačenja $R_{p0,2}$ odnosno vlačne čvrstoće R_m za neke materijale dane su u tablici 1.2.

Tablica 1.2. Vrijednosti R_e, $R_{p0,2}$, R_m za neke materijale

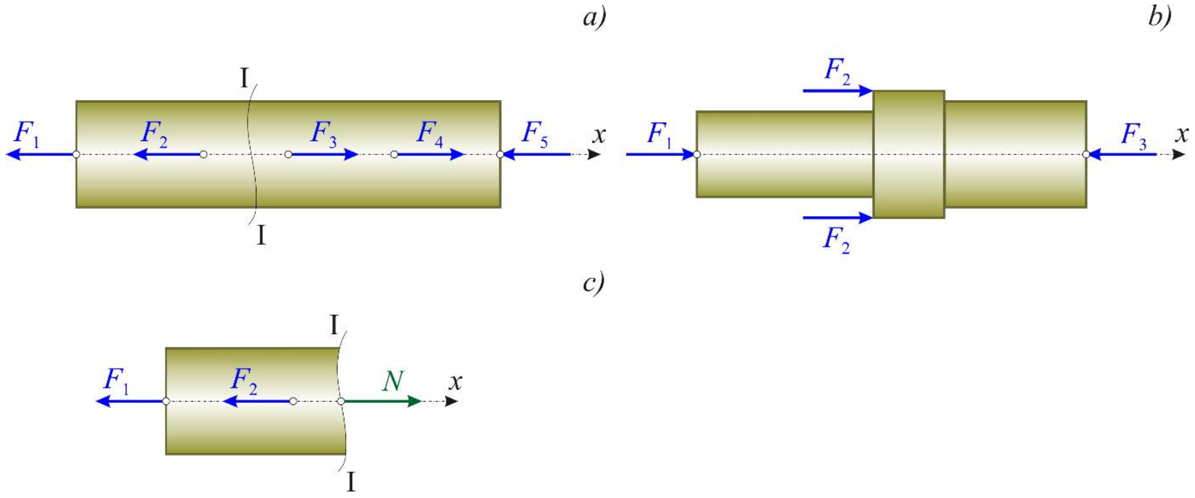
	R_e, $R_{p0,2}$, MPa
Aluminij	50 – 125
Aluminijske legure	60 – 450
Bakar	200 – 360
Mjed	200 – 390
Bronca	120 – 270
Konstrukcijski čelici	215 – 365
Sivi lijev	R_m = 100 – 400
Titan – legure	820 – 1140

2. AKSIJALNO OPTEREĆENJE

Ako je štap opterećen silama čiji se pravci djelovanja poklapaju s osi koja prolazi težištem poprečnog presjeka štapa i okomita je na poprečni presjek, radi se o aksijalnom opterećenju štapa (slika 2.1.a).

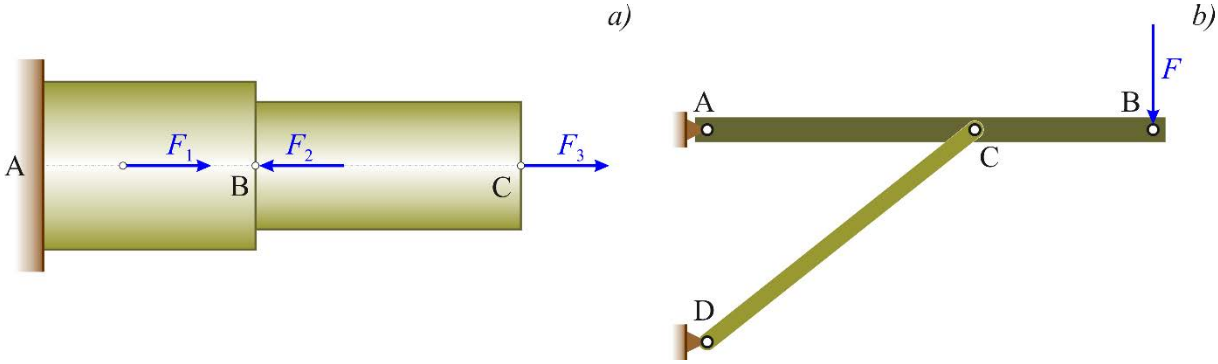
Štap opterećen sustavom sila prema slici 2.1.b smatra se također aksijalnim opterećenjem zbog toga što rezultanta dviju sila jednakog intenziteta F_2 pada na uzdužnu os štapa.

Dakle, pri aksijalnom opterećenju štapa u njegovu poprečnom presjeku od unutarnjih sila javlja se samo uzdužna sila N (slika 2.1.c).



Slika 2.1. *Aksijalno opterećenje štapa: a) sve sile na uzdužnoj osi, b) neke sile izvan uzdužne osi štapa, c) uzdužna sila kao jedina unutarnja sila u poprečnom presjeku štapa*

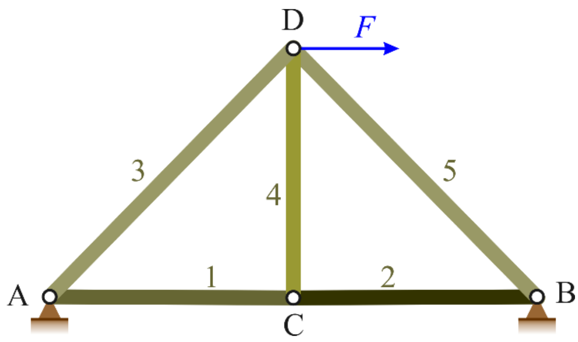
U ovom poglavlju razmatraju se aksijalno opterećeni štapovi bilo kao samostalne konstrukcije (slika 2.2.a) bilo kao dijelovi konstrukcija kao što je štap CD zanemarive težine u konstrukciji prema slici 2.2.b.



Slika 2.2. *Aksijalno opterećeni štapovi: a) kao samostalne konstrukcije, b) kao nosivi dijelovi konstrukcije*

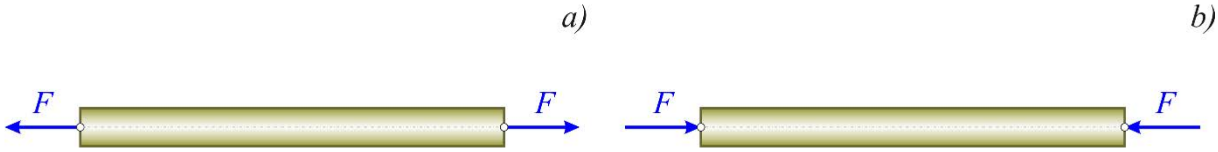
Pretpostavka je da štapovi po čitavoj duljini ili po pojedinim segmentima imaju konstantan poprečni presjek.

Tako su npr. i svi štapovi rešetkaste konstrukcije aksijalno opterećeni (slika 2.3).



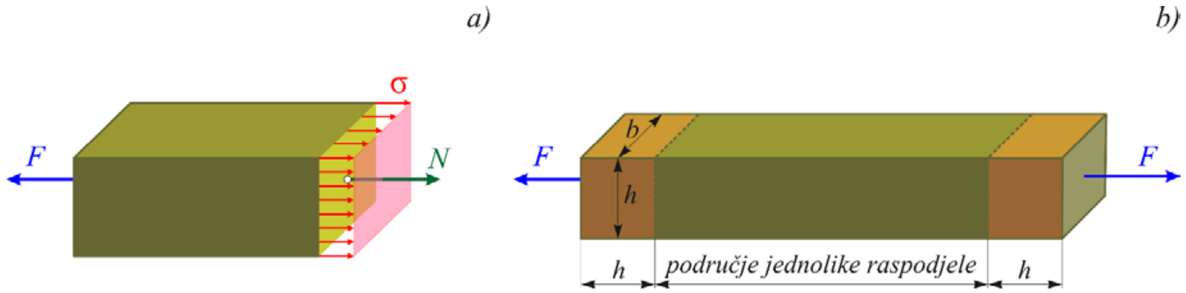
Slika 2.3. *Štapovi rešetkaste konstrukcije*

Najjednostavniji slučaj aksijalnog opterećenja štapa jest kada je opterećen dvjema silama na svojim krajevima. Pri tome se razlikuje vlačno opterećenje štapa – rastezanje (slika 2.4.a) i tlačno opterećenje štapa – sabijanje (slika 2.4.b).



Slika 2.4.: *a) vlačno opterećenje – rastezanje, b) tlačno opterećenje – sabijanje*

Pri aksijalnom opterećenju štapa u njegovu poprečnom presjeku okomitom na uzdužnu os javljaju se normalna naprezanja jednoliko raspodijeljena po poprečnom presjeku (slika 2.5.a). Područje jednolike raspodjele normalnog naprezanja po poprečnom presjeku prikazano je slikom 2.5.b.



Slika 2.5.: *a) jednolika raspodjela normalnog naprezanja, b) područje jednolike raspodjele normalnog naprezanja po poprečnom presjeku štapa*

Uzdužna sila N predstavlja rezultantu svih sila koje se javljaju u poprečnom presjeku štapa kao reakcija na vanjsko djelovanje i može se izraziti integralom:

$$N = \int_A \sigma_x \cdot \mathrm{d}A \,.$$

Uz $\sigma_x = konst.$ gornji izraz postaje:

$$N = \sigma_x \int_A \mathrm{d}A = \sigma_x \cdot A \,,$$

odakle se dobije izraz za normalno naprezanje:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}, \tag{2.1}$$

gdje je A površina poprečnog presjeka štapa.

Deformacija se može odrediti prema Hookeovu zakonu za jednoosno stanje naprezanja:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \tag{2.2}$$

pri čemu je E modul elastičnosti ovisan o materijalu od kojeg je štap napravljen.

Ovisno o tome je li štap opterećen vlačno ili tlačno, doći će do njegova rastezanja ili sabijanja, tako da se uzdužni pomak proizvoljne točke štapa može dobiti prema izrazu:

$$u = \int \varepsilon_x \cdot \mathrm{d}x . \tag{2.3}$$

Ukupno produljenje odnosno skraćenje štapa računa se prema izrazu:

$$\Delta l = \varepsilon_x \cdot l = \frac{\sigma_x}{E} \cdot l = \frac{N \cdot l}{A \cdot E}. \tag{2.4}$$

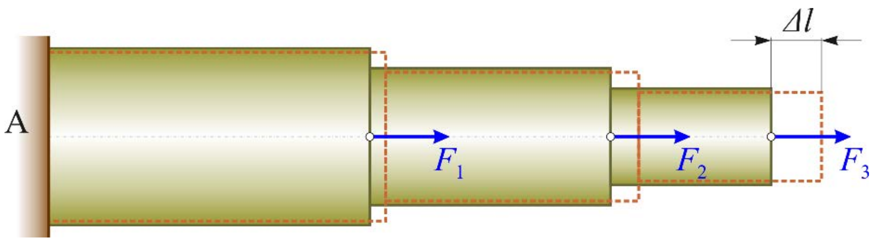
Kada je štap sastavljen od više segmenata (slika 2.6.), ukupno produljenje odnosno skraćenje štapa računa se prema izrazu:

$$\Delta l = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{N_\mathrm{i} \cdot l_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i} \cdot E_\mathrm{i}}, \tag{2.5}$$

gdje je n broj segmenata štapa.

Što je veća površina poprečnog presjeka štapa i modul elastičnosti materijala od kojeg je štap napravljen, odnosno što je veći produkt $A \cdot E$, to je manje produljenje odnosno skraćenje štapa, tj. štap ima veću krutost. Navedeni produkt naziva se aksijalna krutost štapa.

Konstanta krutosti štapa kao ekvivalent krutosti opruge bila bi $c = A \cdot E / l$.



Slika 2.6. *Aksijalno opterećenje štapa sastavljenoga od više segmenata*

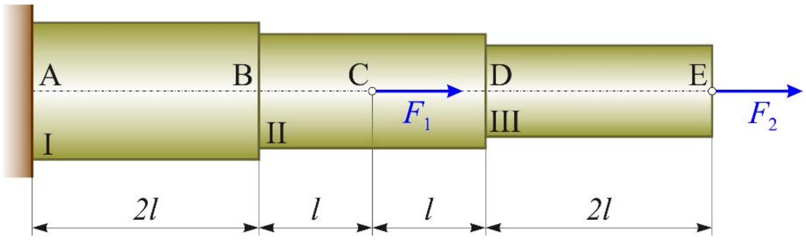
2.1. STATIČKI ODREĐENI ZADATCI

Kod statički određenih zadataka uvjeti ravnoteže postavljeni bilo za cijeli štap i za pojedini njegov dio (metoda presjeka), bilo za cijelu konstrukciju ili dio konstrukcije dovoljni su za određivanje uzdužnih sila u poprečnom presjeku štapa, a onda i naprezanja prema jednadžbi (2.1).

Primjenom Hookeova zakona može se prema (2.2) odrediti deformacija u štapu, a prema (2.3) raspodjela pomaka po duljini štapa te prema (2.4) i (2.5.) njegovo ukupno produljenje odnosno skraćenje.

Primjer 2.1.

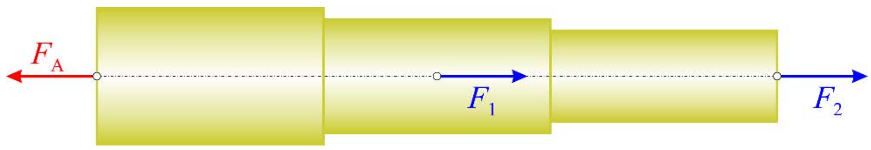
Štap sastavljen od triju segmenata opterećen je silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ prema slici 2.7. Valja skicirati i kotirati dijagrame: uzdužne sile N, normalnog naprezanja σ_x, uzdužne deformacije ε_x i pomaka u. Zadano je: $F_1 = 50\ \text{kN}$, $F_2 = 20\ \text{kN}$, $l = 0{,}5\ \text{m}$, $A_\text{I} = 400\ \text{mm}^2$, $A_\text{II} = 324\ \text{mm}^2$, $A_\text{III} = 225\ \text{mm}^2$, $E = 200\ \text{GPa}$.



Slika 2.7. *Primjer 2.1.*

***Rješenje*:**

Štap se oslobađa od veze na mjestu uklještenja u A te se djelovanje uklještenja nadomješta samo reakcijskom silom F_A jer se radi o aksijalnom opterećenju štapa (slika 2.8.).



Slika 2.8. *Primjer 2.1.: Štap oslobođen od veze*

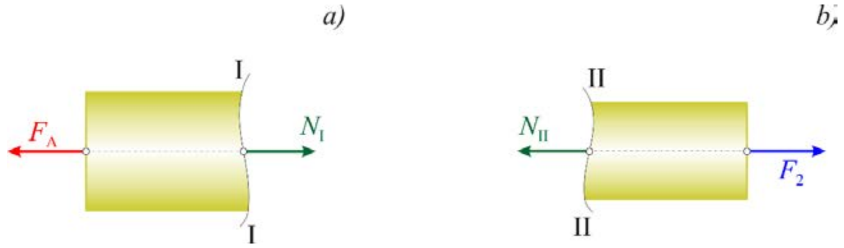
Uvjet ravnoteže za tako oslobođeni štap glasi:

$$\sum F_x = 0: \qquad -F_\text{A} + F_1 + F_2 = 0,$$

odakle je

$$F_\text{A} = F_1 + F_2 = 50 + 20 = 70\ \text{kN}.$$

Dva su područja raspodjele uzdužne sile N. Za oba područja uzdužne sile određuju se metodom presjeka (slika 2.9.).



Slika 2.9. *Primjer 2.1.: a) dio štapa lijevo od presjeka, b) dio štapa desno od presjeka*

- *I. područje*: $0 \le x \le 3l$

Uzdužna sila dobivena iz uvjeta ravnoteže za dio štapa lijevo od presjeka (slika 2.9.a) jest:

$$\sum F_x = 0: \qquad N_\text{I} - F_\text{A} = 0, \qquad N_\text{I} = F_\text{A} = 70\ \text{kN}.$$

- *II. područje*: $3l \le x \le 6l$

Uzdužna sila dobivena iz uvjeta ravnoteže za dio štapa desno od presjeka (slika 2.9.b) jest:

$$\sum F_x = 0: \qquad -N_{\mathrm{II}} + F_2 = 0, \quad N_{\mathrm{II}} = F_2 = 20\ \mathrm{kN}.$$

Kako su površine poprečnih presjeka segmenata različite, četiri su područja raspodjele normalnog naprezanja σ_x, uzdužne deformacije ε_x te pomaka u koji se dobiju prema (2.1), (2.2) i (2.3):

- *I. područje*: $0 \le x \le 2l$

$$\sigma_x = \frac{N_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}} = \frac{70 \cdot 10^3}{400} = 175\ \mathrm{MPa}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{175}{200 \cdot 10^3} = 8,75 \cdot 10^{-4},$$

$$u = \int \varepsilon_x \cdot \mathrm{d}x = \int 8,75 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{d}x = 8,75 \cdot 10^{-4} \cdot x + C.$$

Za $x = 0$ je $u_{\mathrm{A}} = 0$, pa je konstanta integracije $C = 0$.

Funkcija pomaka za prvo područje glasi:

$$u = 8,75 \cdot 10^{-4} \cdot x,$$

a na kraju prvog područja za $x = 2l = 1\ \mathrm{m}$ pomak točke B jest:

$$u_{\mathrm{B}} = 8,75 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^3 = 0,875\ \mathrm{mm}.$$

- *II. područje*: $2l \le x \le 3l$

$$\sigma_x = \frac{N_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{II}}} = \frac{70 \cdot 10^3}{324} = 216\ \mathrm{MPa}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{216}{200 \cdot 10^3} = 10,8 \cdot 10^{-4},$$

$$u = \int \varepsilon_x \cdot \mathrm{d}x = \int 10,8 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{d}x = 10,8 \cdot 10^{-4} \cdot x + C.$$

Za $x = 1\ \mathrm{m}$ je $u_{\mathrm{B}} = 8,75 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$, pa je konstanta integracije $C = -2,05 \cdot 10^{-4}$.

Funkcija pomaka za drugo područje jest:

$$u = 10,8 \cdot 10^{-4} \cdot x - 2,05 \cdot 10^{-4},$$

a na kraju drugog područja za $x = 3l = 1,5\ \mathrm{m}$ pomak točke C iznosi:

$$u_{\mathrm{C}} = 10,8 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 - 2,05 \cdot 10^{-4} = 14,15 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = 1,415\ \mathrm{mm}.$$

- *III. područje*: $3l \le x \le 4l$

$$\sigma_x = \frac{N_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{II}}} = \frac{20 \cdot 10^3}{324} = 61,7\ \mathrm{MPa}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{61,7}{200 \cdot 10^3} = 3,1 \cdot 10^{-4},$$

$$u = \int \varepsilon_x \cdot \mathrm{d}x = \int 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{d}x = 3,1 \cdot 10^{-4} \cdot x + C.$$

Za $x = 1,5\ \mathrm{m}$ je $u_{\mathrm{C}} = 14,15 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$, pa je konstanta integracije $C = 9,5 \cdot 10^{-4}$.

Funkcija pomaka za treće područje jest:

$$u = 3{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot x + 9{,}5 \cdot 10^{-4},$$

a na kraju trećeg područja za $x = 4l = 2\ \text{m}$ pomak točke D iznosi:

$$u_{\text{D}} = 3{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot 2 + 9{,}5 \cdot 10^{-4} = 15{,}7 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 1{,}57\ \text{mm}.$$

- *IV. područje*: $4l \le x \le 6l$

$$\sigma_x = \frac{N_{\text{II}}}{A_{\text{III}}} = \frac{20 \cdot 10^3}{225} = 88{,}9\ \text{MPa}, \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{88{,}9}{200 \cdot 10^3} = 4{,}4 \cdot 10^{-4},$$

$$u = \int \varepsilon_x \cdot \text{d}x = \int 4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot \text{d}x = 4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot x + C.$$

Za $x = 2\ \text{m}$ je $u_{\text{D}} = 15{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$, pa je konstanta integracije $C = 6{,}9 \cdot 10^{-4}$.

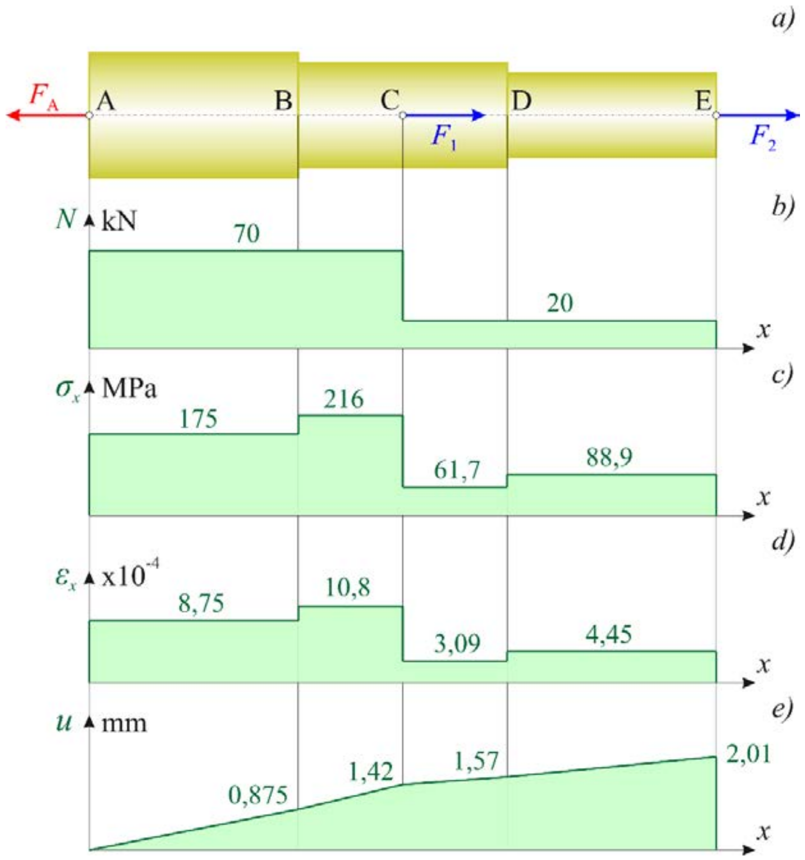
Funkcija pomaka za četvrto područje jest:

$$u = 4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot x + 6{,}9 \cdot 10^{-4},$$

a na kraju četvrtog područja za $x = 6l = 3\,\text{m}$ pomak točke E iznosi:

$$u_{\text{E}} = 4{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot 3 + 6{,}9 \cdot 10^{-4} = 20{,}1 \cdot 10^{-4}\,\text{m} = 2{,}01\,\text{mm}.$$

Traženi dijagrami prikazani su na slici 2.10.

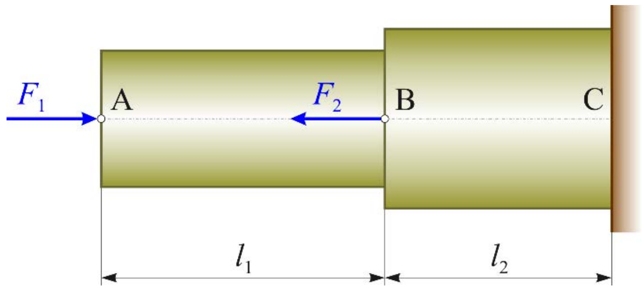


Slika 2.10. *Primjer 2.1.: a) štap oslobođen od veze, b) dijagram uzdužne sile, c) dijagram normalnog naprezanja, d) dijagram uzdužne deformacije, e) dijagram uzdužnih pomaka*

Primjer 2.2.

Štap sastavljen od dvaju segmenata opterećen je koncentriranim silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ prema slici 2.11. Oba su segmenta kružnoga poprečnog presjeka. Valja dimenzionirati oba segmenta (dobivenu vrijednost promjera zaokružiti na cijeli broj u milimetrima). Za tako dimenzionirane segmente odrediti ukupno produljenje ili skraćenje štapa.

Zadano je: $F_1 = 8\ \mathrm{kN}$, $F_2 = 20\ \mathrm{kN}$, $l = 0{,}8\ \mathrm{m}$, $l_1 = l$, $l_2 = 0{,}8l$, $\sigma_\mathrm{d} = 180\ \mathrm{MPa}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$.



Slika 2.11. *Primjer 2.2.*

***Rješenje*:**

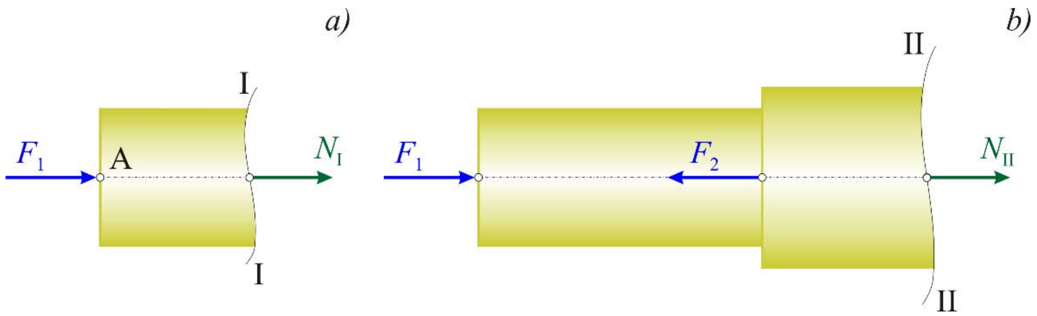
Za oba segmenta uzdužne sile određuju se metodom presjeka (slika 2.12.) prema

- *I. područje*: $0 \le x \le l_1$ (slika 2.12.a)

$$\sum F_x = 0: \qquad F_1 + N_\mathrm{I} = 0,\ N_\mathrm{I} = -F_1 = -8\ \mathrm{kN};$$

- *I. područje*: $l_1 \le x \le l_1 + l_2$ (slika 2.12.b)

$$\sum F_x = 0: \qquad F_1 - F_2 + N_\mathrm{II} = 0, \qquad N_\mathrm{II} = F_2 - F_1 = 20 - 8 = 12\ \mathrm{kN}.$$



Slika 2.12. *Primjer 2.2.: a) dio štapa za određivanje uzdužne sile u I. području, b) dio štapa za određivanje uzdužne sile u II. području*

Traženi promjeri određuju se na osnovi kriterija čvrstoće prema kojemu normalno naprezanje u poprečnom presjeku štapa mora biti manje od dopuštenog naprezanja σ_d koje ovisi o materijalu, a računa se prema izrazu:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le \sigma_\mathrm{d}, \qquad \frac{N}{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}} \le \sigma_\mathrm{d}, \qquad d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot |N|}{\pi \cdot \sigma_\mathrm{d}}}.$$

Za prvi je segment:

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |N_1|}{\pi \cdot \sigma_\text{d}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180}} = 7{,}5\ \text{mm}, \quad d_1 = 8\ \text{mm}.$$

Na isti način računa se i promjer drugog segmenta:

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N_\text{II}}{\pi \cdot \sigma_\text{d}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12 \cdot 10^3}{\pi \cdot 180}} = 9{,}2\ \text{mm}, \quad d_2 = 10\ \text{mm}.$$

Površine poprečnih presjeka iznose:

$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{8^2 \cdot \pi}{4} = 50{,}265\ \text{mm}^2; \quad A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{10^2 \cdot \pi}{4} = 78{,}54\ \text{mm}^2.$$

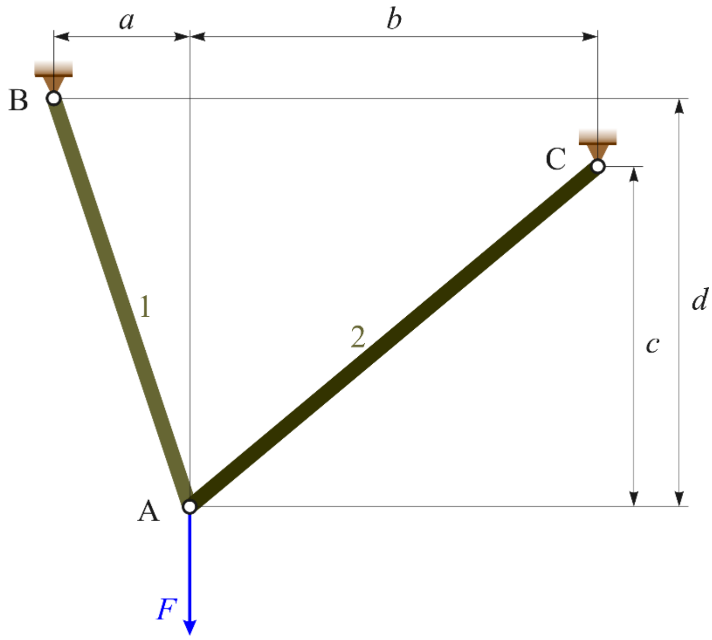
Ukupno produljenje ili skraćenje štapa računa se prema (2.5):

$$\Delta l = \frac{N_\text{I} \cdot l_1}{A_1 \cdot E} + \frac{N_\text{II} \cdot l_2}{A_2 \cdot E} = \frac{-8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8 \cdot 10^3}{50{,}265 \cdot 210 \cdot 10^3} + \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 10^3}{78{,}54 \cdot 210 \cdot 10^3} = -0{,}14\ \text{mm}.$$

Negativan predznak u rezultatu znači da se štap skratio za tu vrijednost.

Primjer 2.3.

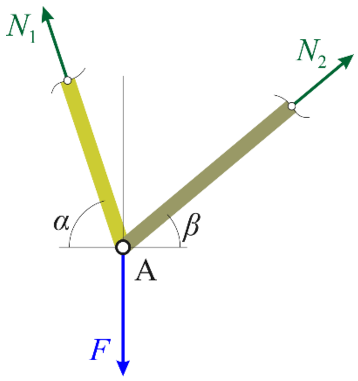
Dva štapa spojena su međusobno zglobom u A te zglobnim vezama za podlogu u B i C. Na zglob A djeluje sila iznosa F (slika 2.13.). Štapovi su kružnog poprečnog presjeka zadanih promjera d_1 i d_2. Valja odrediti naprezanja i deformacije u štapovima te njihova produljenja. Zadano je: $F = 15\ \text{kN}$, $a = 0{,}6\ \text{m}$, $b = d = 1{,}8\ \text{m}$, $c = 1{,}5\ \text{m}$, $d_1 = 12\ \text{mm}$, $d_2 = 8\ \text{mm}$, $E = 200\ \text{GPa}$.



Slika 2.13. *Primjer 2.3.*

***Rješenje*:**

Sile u štapovima mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže postavljenih za čvor A (slika 2.14.).



Slika 2.14. *Primjer 2.3.: Ravnoteža čvora A*

$$\sum F_x = 0: \qquad -N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 \cdot \cos\beta = 0\,,$$

$$\sum F_y = 0: \qquad N_1 \cdot \sin\alpha + N_2 \cdot \sin\beta - F = 0\,,$$

gdje su kutovi α i β dobiveni kako slijedi:

$$\tan\alpha = \frac{d}{a} = \frac{1{,}8}{0{,}6} = 3\,, \qquad \alpha = 71{,}57^\circ\,;$$

$$\tan\beta = \frac{c}{b} = \frac{1{,}5}{1{,}8} = 0{,}83333\,, \qquad \beta = 39{,}81^\circ\,.$$

Uvrštavanjem tih vrijednosti u uvjete ravnoteže dobije se:

$$-N_1 \cdot \cos 71{,}57^\circ + N_2 \cdot \cos 39{,}81^\circ = 0\,,$$

$$N_1 \sin 71{,}57^\circ + N_2 \sin 39{,}81^\circ = 15\,.$$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobiju se sile u štapovima:

$$N_1 = 12{,}38\ \text{kN}\,; \qquad N_2 = 5{,}092\ \text{kN}\,.$$

Naprezanja u štapovima računaju se prema izrazu:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}\,; \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}\,;$$

gdje su površine poprečnih presjeka štapova:

$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{12^2 \cdot \pi}{4} = 113{,}1\ \text{mm}^2\,; \qquad A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{8^2 \cdot \pi}{4} = 50{,}27\ \text{mm}^2\,.$$

Naprezanja i deformacije u štapovima iznose:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{12{,}38 \cdot 10^3}{113{,}1} = 109{,}5\ \text{MPa}\,; \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{5{,}092 \cdot 10^3}{50{,}27} = 101{,}3\ \text{MPa}\,;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{109{,}5}{200 \cdot 10^3} = 5{,}48 \cdot 10^{-4}\,; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{101{,}3}{200 \cdot 10^3} = 5{,}07 \cdot 10^{-4}\,.$$

Produljenja se računaju prema izrazu:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E};$$

gdje su l_1 i l_2 duljine štapova izračunane kako slijedi:

$$l_1 = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{0,6^2 + 1,8^2} = 1,897 \text{ m};$$

$$l_2 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1,8^2 + 1,5^2} = 2,343 \text{ m}.$$

Uvrštenjem tih vrijednosti u izraze za produljenja dobije se:

$$\Delta l_1 = \frac{12,38 \cdot 10^3 \cdot 1,897 \cdot 10^3}{113,1 \cdot 200 \cdot 10^3} = 1,04 \text{ mm};$$

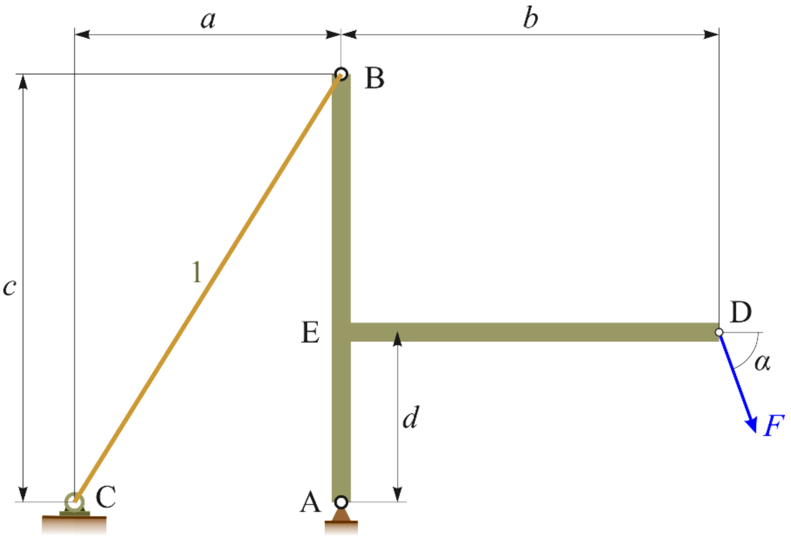
$$\Delta l_2 = \frac{5,092 \cdot 10^3 \cdot 2,343 \cdot 10^3}{50,27 \cdot 200 \cdot 10^3} = 1,19 \text{ mm}.$$

Primjer 2.4.

Odrediti najveću vrijednost sile F kojom se može opteretiti kruto tijelo ABD prema slici 2.15. ako je zadano dopušteno normalno naprezanje u štapu (1). Štap je kružnoga poprečnog presjeka promjera d_1. Iznos sile potrebno je zaokružiti na cijeli broj u kN.

Za tako određenu vrijednost sile F izračunati naprezanje u štapu (1) te primjenjujući plan pomaka odrediti pomake točaka B i D.

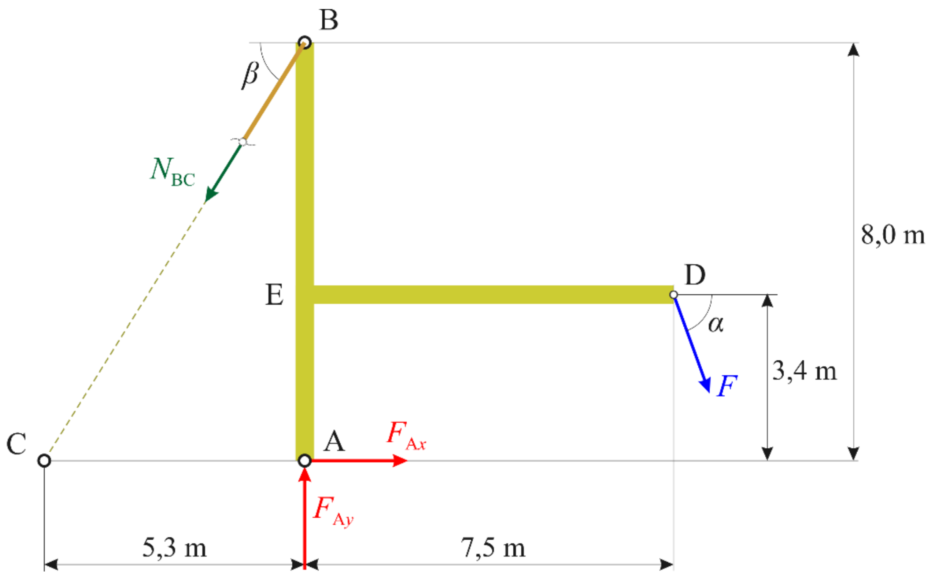
Zadano je: $a = 5,3 \text{ m}$, $b = 7,5 \text{ m}$, $c = 8 \text{ m}$, $d = 3,4 \text{ m}$, $d_1 = 15 \text{ mm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\sigma_\text{d} = 180 \text{ MPa}$, $E = 210 \text{ GPa}$.



Slika 2.15. *Primjer 2.4.*

***Rješenje*:**

Uvjeti ravnoteže postavljeni za kruto tijelo ABD nakon oslobađanja od veza glase (slika 2.16.):



Slika 2.16. *Primjer 2.4.: Kruto tijelo oslobođeno od veza*

$$\sum F_x = 0: \qquad F_{Ax} - N_{BC} \cdot \cos\beta + F \cdot \cos\alpha = 0\,,$$

$$\sum F_y = 0: \qquad F_{Ay} - N_{BC} \cdot \sin\beta - F \cdot \sin\alpha = 0\,,$$

$$\sum M_A = 0: \qquad N_{BC} \cdot \cos\beta \cdot 8 - F \cdot \cos\alpha \cdot 3{,}4 - F \cdot \sin\alpha \cdot 7{,}5 = 0\,.$$

Kut β dobije se prema izrazu:

$$\tan\beta = \frac{c}{a} = \frac{8}{5{,}3} = 1{,}50943\,, \qquad \beta = 56{,}48^\circ\,.$$

Iz treće jednadžbe jest:

$$N_{BC} = \frac{\left(3{,}4 \cdot \cos 60^\circ + 7{,}5 \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot F}{8 \cdot \cos 56{,}48^\circ} = 1{,}855 \cdot F\,.$$

Iznos sile F određen je prema kriteriju čvrstoće kako slijedi:

$$\sigma = \frac{N_{BC}}{A} \le \sigma_d\,, \qquad N_{BC} \le \sigma_d \cdot A\,, \qquad 1{,}855 \cdot F \le 180 \cdot \frac{\pi \cdot 15^2}{4}\,,$$

$$F \le 17148\ \mathrm{N}\,, \quad F = 17\ \mathrm{kN}\,.$$

Uzdužna sila u štapu ima vrijednost:

$$N_{BC} = 1{,}855 \cdot 17 = 31{,}535\ \mathrm{kN}\,,$$

a normalno naprezanje iznosi:

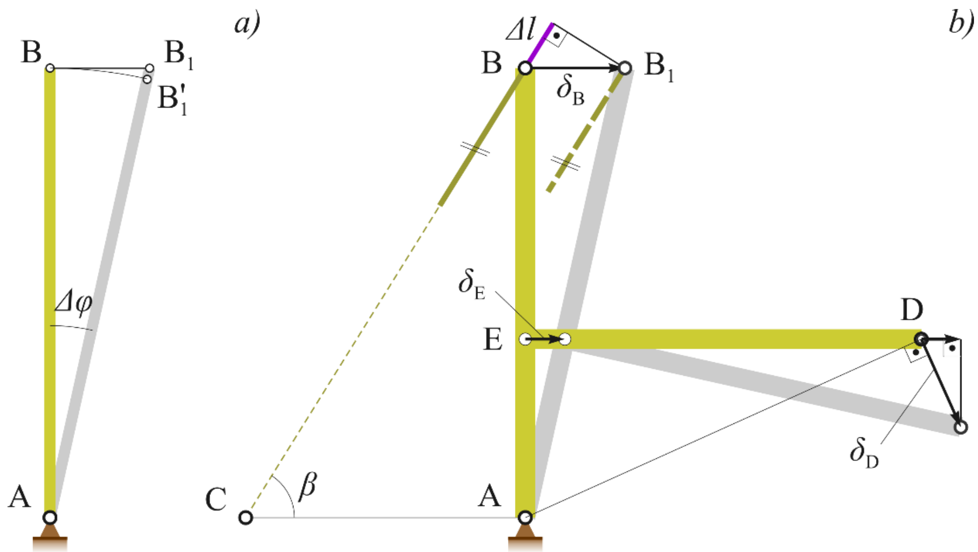
$$\sigma = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{31{,}535 \cdot 10^3}{\pi \cdot 15^2 / 4} = 178{,}45\ \mathrm{MPa}\,.$$

Deformacija štapa i njegovo produljenje jesu:

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}=\frac{178{,}45}{210\cdot 10^{3}}=8{,}5\cdot 10^{-4};$$

$$\Delta l=l\cdot\varepsilon\,,\ l=\sqrt{5{,}3^{2}+8^{2}}=9{,}596\ \mathrm{m}\,,\qquad \Delta l=9{,}596\cdot 10^{3}\cdot 8{,}5\cdot 10^{-4}=8{,}16\ \mathrm{mm}\,.$$

Iz plana pomaka (slika 2.17.b) jest:



Slika 2.17. *Primjer 2.4.: Plan pomaka*

$$\cos\beta=\frac{\Delta l}{\delta_{B}}\,,\qquad \delta_{B}=\frac{\Delta l}{\cos 56{,}48^{\circ}}=\frac{8{,}16}{0{,}5522}=14{,}78\ \mathrm{mm}\,,$$

pri čemu se luk $\overset{\frown}{BB_1'}$ za male kutne zakrete $\Delta\varphi$ može zamijeniti dužinom $\overline{BB_1}$.

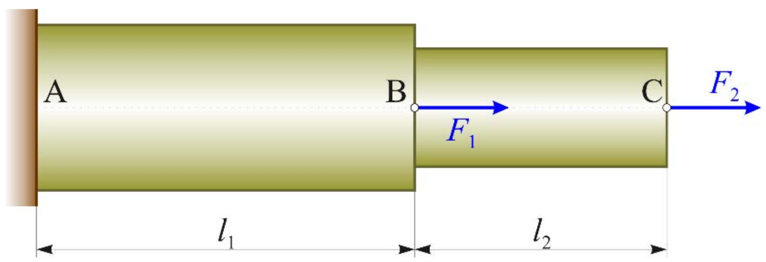
Pomak točke D dobije se prema izrazu:

$$\frac{\delta_{D}}{\overline{AD}}=\frac{\delta_{B}}{\overline{AB}}\,,\qquad \overline{AD}=\sqrt{b^{2}+d^{2}}=\sqrt{7{,}5^{2}+3{,}4^{2}}=8{,}235\ \mathrm{m}\,,$$

$$\delta_{D}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\cdot\delta_{B}=\frac{8{,}235}{8}\cdot 14{,}78=15{,}21\ \mathrm{mm}\,.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 2.1. Valja odrediti dopušteno opterećenje štapa ($F=?$) ako su poznati dopušteno naprezanje i maksimalno dopušteni pomak točke C (slika Z.2.1.).



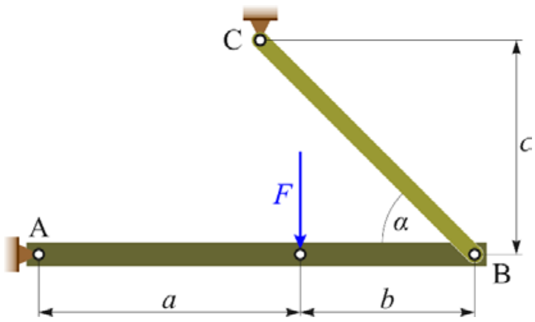
Slika Z.2.1. *Zadatak 2.1.*

Zadanu vrijednost iznosa sile F zaokružiti na cijeli broj u kN. Za tu vrijednost sile izračunati naprezanja u segmentima te ukupno produljenje štapa.

Zadano je: $F_1 = 2F$, $F_2 = F$, $l_1 = 2l$, $l_2 = 0{,}8l$, $l = 0{,}5\ \text{m}$, $A_1 = 1{,}5A$, $A_2 = A$, $A = 100\ \text{mm}^2$, $E = 210\ \text{GPa}$, $\sigma_\text{d} = 200\ \text{MPa}$, $\delta_\text{C} = 0{,}5\ \text{mm}$.

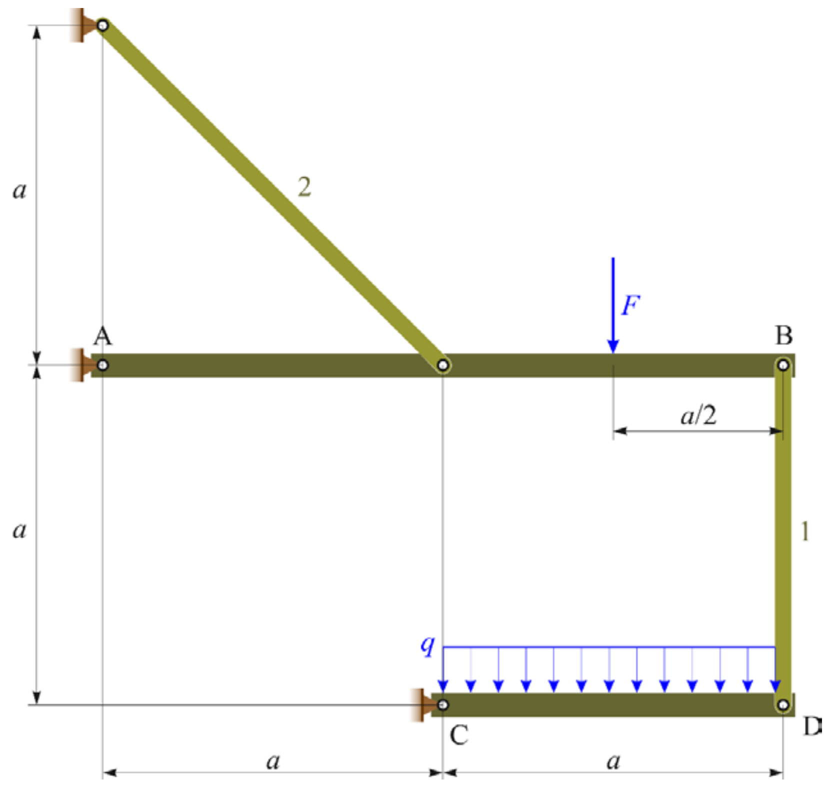
Zadatak 2.2. Konstrukcija sastavljena od krute grede AB i deformabilnog štapa BC kružnoga poprečnog presjeka opterećena je silom iznosa F (slika Z.2.2.). Valja odrediti dopušteno opterećenje konstrukcije ($F = ?$ – iznos sile zaokružiti na cijeli broj u kN). Za tako određenu vrijednost sile F izračunati naprezanje u štapu BC te pomak točke B.

Zadano je: $a = 3\ \text{m}$, $b = 2\ \text{m}$, $c = 3{,}2\ \text{m}$, $d = 15\ \text{mm}$, $\alpha = 45^\circ$, $\sigma_\text{d} = 180\ \text{MPa}$, $E = 200\ \text{GPa}$.



Slika Z.2.2. *Zadatak 2.2.*

Zadatak 2.3. Konstrukcija sastavljena od krutih greda AB i CD te deformabilnih štapova (1) i (2) opterećena je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q i koncentriranom silom iznosa F (slika Z.2.3.).



Slika Z.2.3. *Zadatak 2.3.*

Valja dimenzionirati štapove (1) i (2) ($A_1 = ?$, $A_2 = ?$) te odrediti vertikalne pomake točaka B i D ako je zadano: $a = 1\ \mathrm{m}$, $F = 10\ \mathrm{kN}$, $q = 10\ \mathrm{kN/m}$, $\sigma_\mathrm{d} = 150\ \mathrm{MPa}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$.

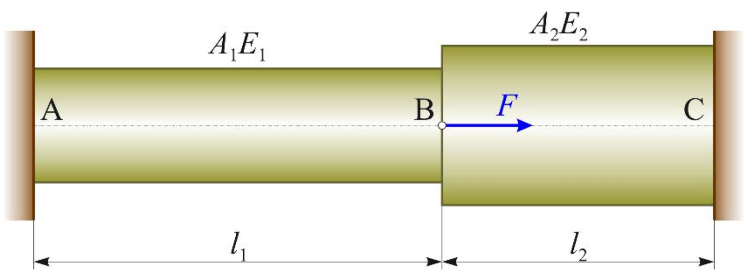
2.2. STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI

Za razliku od statički određenih zadataka kod statički neodređenih zadataka pored uvjeta ravnoteže za rješavanje zadataka potrebni su i dodatni uvjeti koji se dobivaju iz plana pomaka. Koliko je puta zadatak statički neodređen, toliko je potrebno dodatnih uvjeta. Ovdje će se razmatrati zadatci koji su jedanput statički neodređeni, tj. oni za koje je pored uvjeta ravnoteže potreban jedan dodatni uvjet dobiven iz plana pomaka.

Primjer 2.5.

Štap sastavljen od dvaju segmenata opterećen je koncentriranom silom F prema slici 2.18. Oba su segmenta kružnoga poprečnog presjeka zadanih promjera.

Valja odrediti normalna naprezanja u obama segmentima štapa te uzdužni pomak točke B ako je zadano: $d_1 = 12\ \mathrm{mm}$, $d_2 = 18\ \mathrm{mm}$, $l_1 = 1{,}6\ \mathrm{m}$, $l_2 = 1{,}8\ \mathrm{m}$, $E_1 = 210\ \mathrm{GPa}$, $E_2 = 100\ \mathrm{GPa}$, $F = 12\ \mathrm{kN}$.

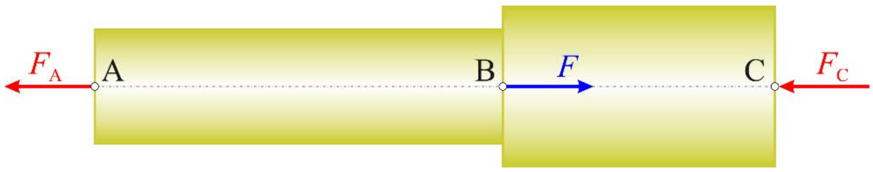


Slika 2.18. *Primjer 2.5.*

***Rješenje*:**

Uvjet ravnoteže postavljen za štap AC nakon oslobađanja od veza glasi (slika 2.19.):

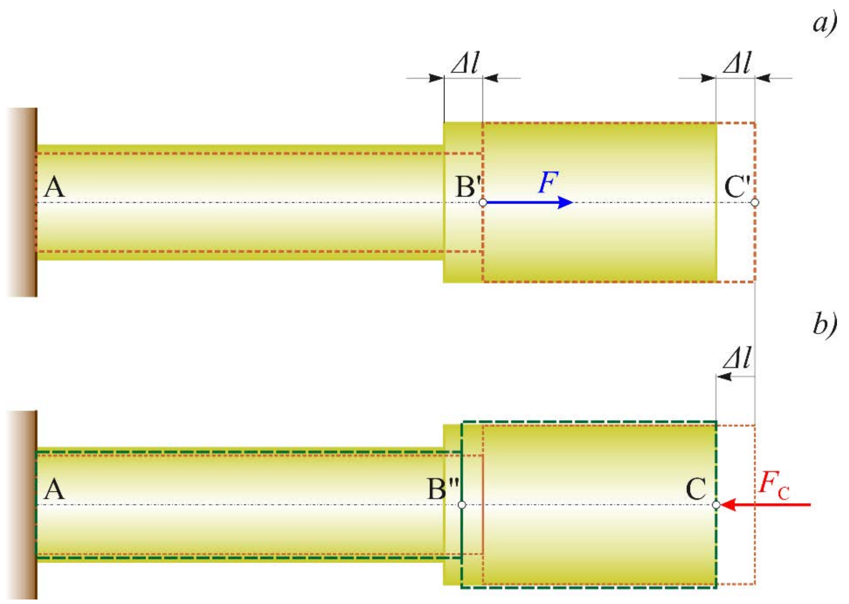
$$\sum F_x = 0: \qquad -F_\mathrm{A} + F - F_\mathrm{C} = 0\,.$$



Slika 2.19. *Primjer 2.5.: štap oslobođen od veza*

Budući da je zadatak jedanput statički neodređen, potrebna je i dodatna jednadžba dobivena iz plana pomaka prema kojoj uzdužni pomak točke C mora biti jednak nuli odnosno ukupno produljenje štapa je prema (2.5) jednako nuli.

Drugim riječima, produljenje štapa uzrokovano djelovanjem sile F (slika 2.20.a) jednako je skraćenju štapa uzrokovanom reakcijskom silom F_C (slika 2.20.b):



Slika 2.20. *Primjer 2.5.: a) produljenje štapa od sile* F *, a) skraćenje štapa od sile* F_C

$$u_\mathrm{C} = \Delta l = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \frac{N_\mathrm{i} \cdot l_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i} \cdot E_\mathrm{i}} = 0 .$$

Uzdužne sile mogu se odrediti metodom presjeka te iznose:

$$N_1 = -F_\mathrm{C} + F \, ; \qquad N_2 = -F_\mathrm{C} .$$

Dodatna jednadžba sada glasi:

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} = \frac{\left(-F_\mathrm{C} + F\right) \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{-F_\mathrm{C} \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} = 0 ,$$

odakle je

$$F_\mathrm{C} \cdot \left(\frac{l_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{l_2}{A_2 \cdot E_2} \right) = F \cdot \frac{l_1}{A_1 \cdot E_1} \, ;$$

$$F_\mathrm{C} = \frac{\dfrac{l_1}{A_1 \cdot E_1}}{\dfrac{l_1}{A_1 \cdot E_1} \cdot \left(1 + \dfrac{l_2 \cdot A_1 \cdot E_1}{l_1 \cdot A_2 \cdot E_2} \right)} \cdot F = \frac{1}{1 + \dfrac{l_2 \cdot A_1 \cdot E_1}{l_1 \cdot A_2 \cdot E_2}} \cdot F ,$$

gdje su površine poprečnih presjeka:

$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{12^2 \cdot \pi}{4} = 113{,}097 \ \mathrm{mm}^2 \, ;$$

$$A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{18^2 \cdot \pi}{4} = 254{,}469 \ \mathrm{mm}^2 .$$

Reakcijska sila F_C sada je

$$F_{\mathrm{C}} = \frac{1}{1+\dfrac{1{,}8\cdot 113{,}097\cdot 210}{1{,}6\cdot 254{,}469\cdot 100}}\cdot 12 = 5{,}854\ \mathrm{kN}\,,$$

a uzdužne sile u poprečnim presjecima:

$$N_1 = -5{,}854 + 12 = 6{,}146\ \mathrm{kN}\,; \qquad N_2 = -5{,}854\ \mathrm{kN}\,.$$

Tražena normalna naprezanja iznose:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{6{,}146\cdot 10^3}{113{,}097} = 54{,}34\ \mathrm{MPa}\,; \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-5{,}854\cdot 10^3}{254{,}469} = -23{,}0\ \mathrm{MPa}\,.$$

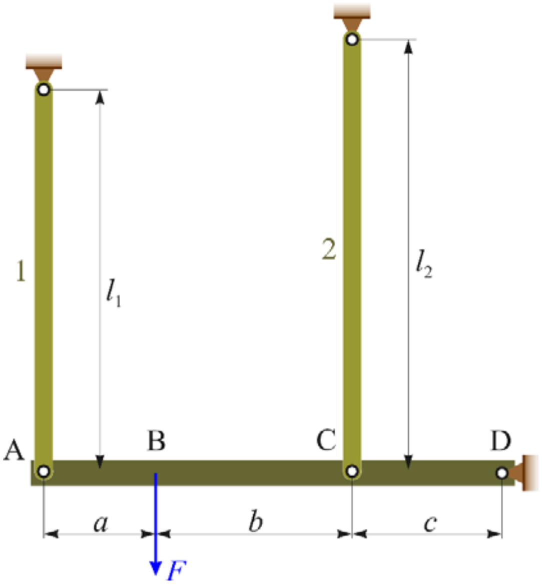
Uzdužni pomak točke B jednak je produljenju prvog segmenta:

$$u_{\mathrm{B}} = \Delta l_{\mathrm{I}} = \frac{N_1\cdot l_1}{A_1\cdot E_1} = \frac{6{,}146\cdot 10^3\cdot 1{,}6\cdot 10^3}{113{,}097\cdot 210\cdot 10^3} = 0{,}414\ \mathrm{mm}\,.$$

Primjer 2.6.

Konstrukcija sastavljena od krute grede AD i deformabilnih štapova (1) i (2) opterećena je silom iznosa F u točki B (slika 2.21.).

Valja odrediti normalna naprezanja u štapovima (1) i (2) te vertikalni pomak točke B ako je zadano: $a = 0{,}8\ \mathrm{m}$, $b = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $c = 1{,}2\ \mathrm{m}$, $l_1 = 2{,}9\ \mathrm{m}$, $l_2 = 3{,}3\ \mathrm{m}$, $A_1 = 200\ \mathrm{mm}^2$, $A_2 = 400\ \mathrm{mm}^2$, $E_1 = 210\ \mathrm{GPa}$, $E_2 = 100\ \mathrm{GPa}$, $F = 12\ \mathrm{kN}$.



Slika 2.21. *Primjer 2.6.*

Analizirati kako promjene karakteristika štapa (1) (poprečni presjek, modul elastičnosti i duljina) utječu na sile i normalna naprezanja u štapovima.

***Rješenje*:**

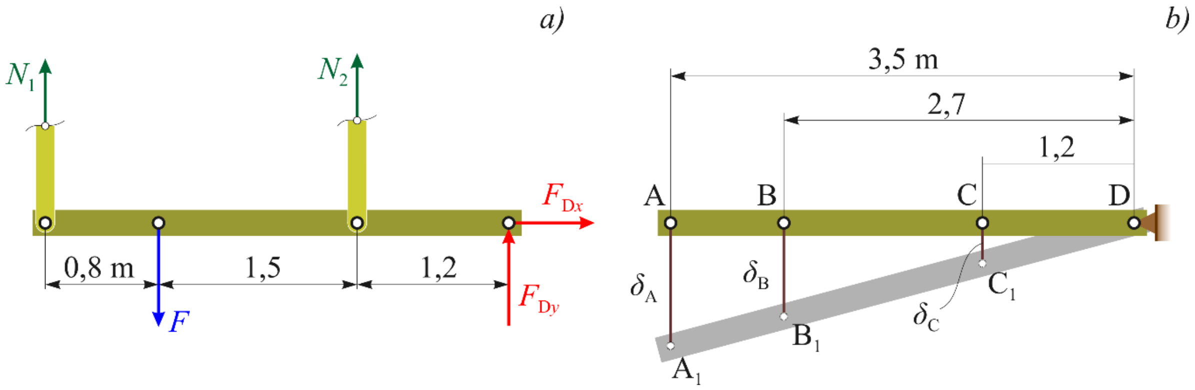
Zadatak je jedanput statički neodređen jer na gredu djeluju četiri nepoznate sile, a mogu se postaviti tri uvjeta ravnoteže (slika 2.22.a).

Budući da se ne traže komponente reakcije u osloncu D grede AD, otpadaju dva od uvjeta ravnoteže (sume projekcija sila na osi x i y). Zato je uz uvjet ravnoteže:

$$\sum M_{\mathrm{D}} = 0: \quad -N_1 \cdot 3,5 - N_2 \cdot 1,2 + F \cdot 2,7 = 0,$$

potrebna i dodatna jednadžba dobivena iz plana pomaka (slika 2.22.b) koja glasi:

$$\frac{\delta_{\mathrm{A}}}{3,5} = \frac{\delta_{\mathrm{C}}}{1,2}.$$



Slika 2.22. *Primjer 2.6.: a) greda oslobođena od veza, b) plan pomaka*

Budući da je $\delta_{\mathrm{A}} = \Delta l_1$ a $\delta_{\mathrm{C}} = \Delta l_2$, gornja jednadžba može se napisati kao

$$\Delta l_1 = \frac{3,5}{1,2} \cdot \Delta l_2 = 2,917 \cdot \Delta l_2$$

odnosno

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = 2,917 \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2},$$

$$N_1 = 2,917 \cdot \frac{A_1 \cdot E_1 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2 \cdot l_1} \cdot N_2 \qquad \text{(A)},$$

$$N_1 = 2,917 \cdot \frac{200 \cdot 210 \cdot 3,3}{400 \cdot 100 \cdot 2,9} \cdot N_2 = 3,485 \cdot N_2.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnoteže slijedi:

$$-3,485 N_2 \cdot 3,5 - N_2 \cdot 1,2 + F \cdot 2,7 = 0.$$

Rješavanjem gornje jednadžbe dobije se sila u štapu (2):

$$N_2 = \frac{2,7 \cdot 12}{3,485 \cdot 3,5 + 1,2} = 2,418 \text{ kN},$$

a onda i sila u štapu (1):

$$N_1 = 3,485 \cdot 2,418 = 8,427 \text{ kN}.$$

Naprezanja u štapovima (1) i (2) jesu:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{8,427 \cdot 10^3}{200} = 42,13 \text{ MPa} \; ; \; \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{2,418 \cdot 10^3}{400} = 6,05 \text{ MPa} \, .$$

Vertikalni pomak točke B prema planu pomaka (slika 2.22.b) jest:

$$\frac{\delta_\mathrm{B}}{2,7} = \frac{\delta_\mathrm{A}}{3,5} \, .$$

Kako je $\delta_\mathrm{A} = \Delta l_1$, slijedi:

$$\delta_\mathrm{B} = \frac{2,7}{3,5} \cdot \Delta l_1 = 0,771 \cdot \Delta l_1 \, , \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{8,427 \cdot 10^3 \cdot 2,9 \cdot 10^3}{200 \cdot 210 \cdot 10^3} = 0,582 \text{ mm} \, ,$$

$$\delta_\mathrm{B} = 0,771 \cdot \Delta l_1 = 0,771 \cdot 0,582 = 0,449 \text{ mm} \, .$$

Utjecaj krutosti elemenata konstrukcije (štapova) i njihovih duljina na iznose sila u tim elementima slijedi iz razmatranja prethodno dobivene veze između sila u štapovima 1 i 2 (izraz A):

$$N_1 = 2,917 \cdot \frac{A_1 \cdot E_1 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2 \cdot l_1} \cdot N_2 \, .$$

Može se zaključiti da kod statički neodređenih zadataka promjena aksijalne krutosti (površine poprečnog presjeka ili/i materijala, tj. modula elastičnosti) nekog od elemenata konstrukcije (štapa), odnosno promjena duljine tog elementa, utječe na iznose sila u štapovima.

Tako iznos sile N_1 (u odnosu na iznos N_2) raste upravo proporcionalno s površinom poprečnog presjeka i modula elastičnosti materijala štapa 1, a obrnuto proporcionalno duljini toga štapa, odnosno, s druge strane, iznos sile N_1 (u odnosu na iznos N_2) raste upravo proporcionalno s duljinom štapa 2, a obrnuto proporcionalno s površinom poprečnog presjeka i modula elastičnosti tog štapa (2).

U tablici 2.1. prikazani su iznosi sila i normalnih naprezanja u štapovima (1) i (2) za niz vrijednosti poprečnog presjeka štapa (1). Ostali ulazni podatci pri tom se ne mijenjaju.

Tablica 2.1. Utjecaj promjene površine poprečnog presjeka štapa (1) na sile i naprezanja u štapovima

A_1 mm^2	N_1 / N_2	N_1 kN	N_2 kN	σ_1 MPa	σ_2 MPa
100	1,743	7,74	4,44	77,35	11,10
200	3,485	8,43	2,42	42,14	6,05
300	5,228	8,69	1,66	28,96	4,15
400	6,971	8,82	1,27	22,06	3,16

Iznosi sila i normalnih naprezanja u štapovima za različite vrijednosti modula elastičnosti štapa (1) (za različite materijale) prikazane su u tablici 2.2., dok su u tablici 2.3. dani iznosi sila i normalnih naprezanja u štapovima za različite duljine štapa (1).

Ostali ulazni podatci pri tom se ne mijenjaju.

Tablica 2.2. Utjecaj promjene modula elastičnosti štapa (1) na sile i naprezanja u štapovima

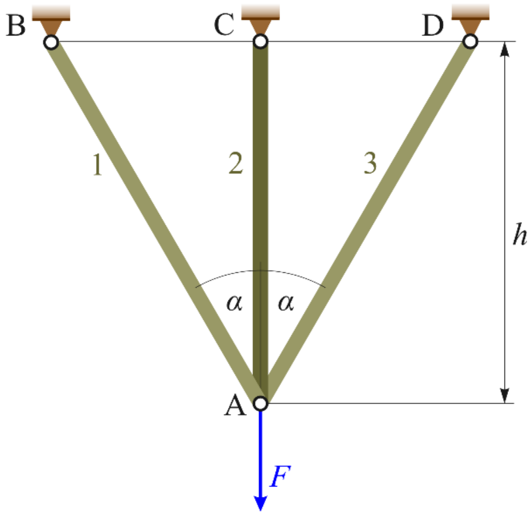
E_1 GPa	N_1 / N_2	N_1 kN	N_2 kN	σ_1 MPa	σ_2 MPa
70	1,162	7,15	6,15	35,74	15,38
100	1,660	7,67	4,62	38,36	11,56
150	2,490	8,14	3,27	40,68	8,17
200	3,485	8,43	2,42	42,14	6,05

Tablica 2.3. Utjecaj promjene duljine štapa (1) na sile i naprezanja u štapovima

l_1 m	N_1 / N_2	N_1 kN	N_2 kN	σ_1 MPa	σ_2 MPa
2,4	4,211	8,56	2,03	42,80	5,08
2,9	3,485	8,43	2,42	42,14	6,05
3,4	2,973	8,30	2,79	41,50	6,98
3,9	2,592	8,18	3,15	40,88	7,89

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 2.4. Konstrukcija sastavljena od triju deformabilnih štapova međusobno povezanih zglobom u A opterećena je u istom zglobu silom F (slika Z.2.4.).

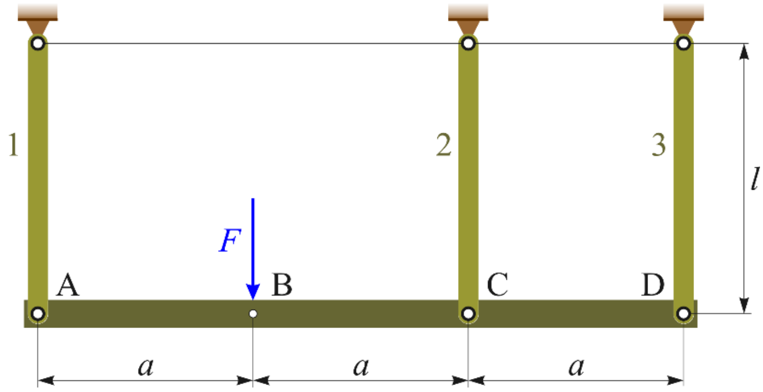


Slika Z.2.4. *Zadatak 2.4.*

Valja odrediti normalna naprezanja u štapovima te pomak točke A. Zadano je: $h = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $F = 6\ \mathrm{kN}$, $A_1 = A_3 = 100\ \mathrm{mm}^2$, $A_2 = 144\ \mathrm{mm}^2$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$.

Zadatak 2.5. Kruta greda AD vezana je za podlogu deformabilnim štapovima (1), (2) i (3) prema slici Z.2.5. Valja odrediti dopušteno opterećenje grede ($F = ?$). Iznos sile F zaokružiti na cijeli broj u kN.

Za tu vrijednost sile izračunati naprezanja u svim štapovima te pomak točke B ako je zadano: $a = 1,2$ m, $l = 1,5$ m, $A_1 = 225\ \mathrm{mm}^2$, $A_2 = 144\ \mathrm{mm}^2$, $A_3 = 100\ \mathrm{mm}^2$, $\sigma_\mathrm{d} = 200$ MPa, $E = 200$ GPa.

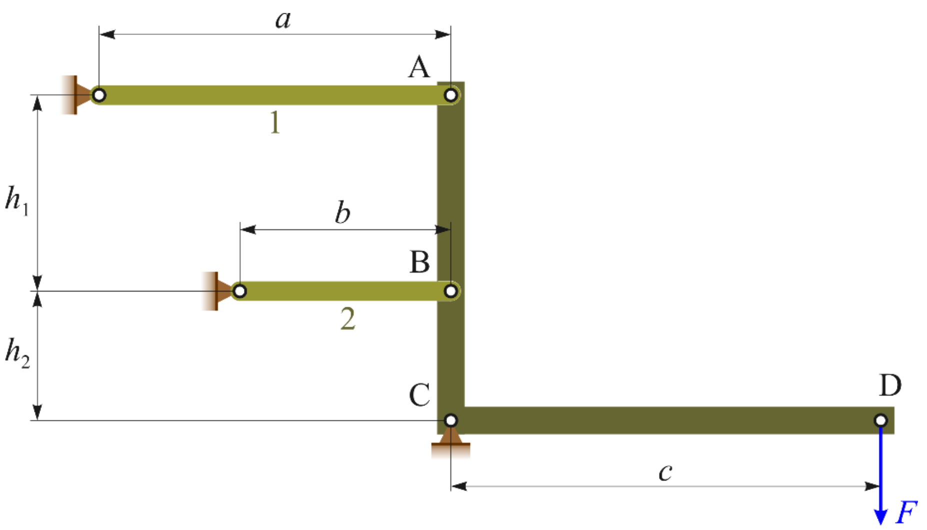


Slika Z.2.5. *Zadatak 2.5.*

Zadatak 2.6. Kruta greda ABCD vezana je za podlogu nepomičnim osloncem u C te deformabilnim štapovima (1) i (2) (slika Z.2.6.).

Potrebno je odrediti normalna naprezanja u štapovima te vertikalni pomak točke D.

Zadano je: $a = 1,2$ m, $b = 0,8$ m, $h_1 = 1$ m, $h_2 = 0,5$ m, $c = 1,8$ m, $A_1 = 225\ \mathrm{mm}^2$, $A_2 = 144\ \mathrm{mm}^2$, $F = 25$ kN, $E = 210$ GPa.



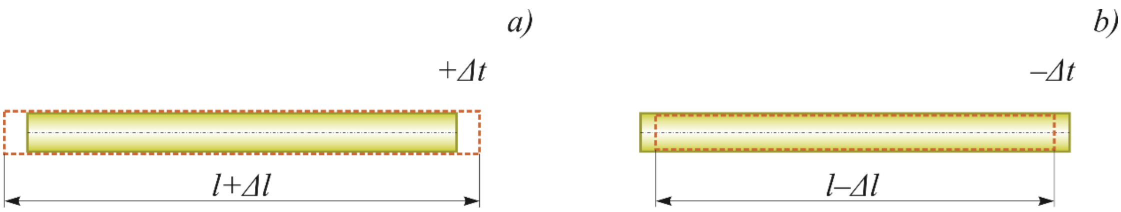
Slika Z.2.6. *Zadatak 2.6.*

2.2.1. Toplinska naprezanja

Zagrijavanjem slobodnog neopterećenog štapa za iznos $+\Delta t$ dolazi do njegova produljenja (slika 2.23.a) odnosno hlađenjem štapa za iznos $-\Delta t$ dolazi do njegova skraćivanja (slika 2.23.b). Tako nastala promjena duljine štapa računa se prema izrazu:

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t\,, \tag{2.6}$$

gdje je α koeficijent linearnog toplinskog rastezanja koji je ovisan o materijalu.



Slika 2.23.: *a) produljenje štapa uzrokovano zagrijavanjem,*
b) skraćenje štapa uzrokovano hlađenjem

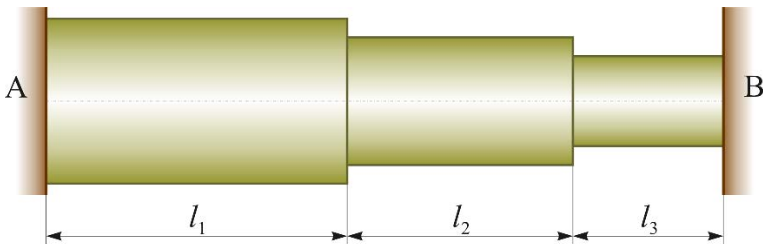
Ako slobodno produljenje ili skraćenje štapa nije omogućeno, npr. zbog djelovanja veza ili drugih dijelova konstrukcije, javit će se u štapu naprezanja bez njegova vanjskog opterećenja. Tako nastala naprezanja nazivaju se *toplinska* (temperaturna) naprezanja ili naprezanja od promjene temperature. Vrijednosti koeficijenta linearnoga toplinskog rastezanja α za neke materijale dane su u tablici 2.4.

Tablica 2.4. *Koeficijent linearnoga toplinskog rastezanja α za neke materijale*

Materijal	Koeficijent linearnoga toplinskog rastezanja 1/°C
čelik	$12,5 \cdot 10^{-6}$
aluminijske legure	$22,5 \cdot 10^{-6}$
bakar	$16,0 \cdot 10^{-6}$
bronca	$17,0 \cdot 10^{-6}$

Primjer 2.7.

Štap AB sastavljen od triju segmenata načinjena od bronce ukliješten je na krajevima A i B (slika 2.24.). Odrediti normalna naprezanja u svim segmentima nastala zbog povećanja temperature za $\Delta t = 60\ ^\circ\text{C}$ ako je zadano: $l_1 = 1,2\ \text{m}$, $l_2 = 0,8\ \text{m}$, $l_3 = 0,5\ \text{m}$, $A_1 = 225\ \text{mm}^2$, $A_2 = 144\ \text{mm}^2$, $A_3 = 100\ \text{mm}^2$, $E = 100\ \text{GPa}$, $\alpha = 16,9 \cdot 10^{-6}\ 1/°\text{C}$.



Slika 2.24. *Primjer 2.7.*

***Rješenje*:**

Budući da je štap ukliješten na obama krajevima, radi se o jedanput statički neodređenom zadatku.

Pored uvjeta ravnoteže:

$$\sum F_x = 0: \qquad F_A - F_B = 0,$$

potrebna je dodatna jednadžba koja slijedi iz plana pomaka.

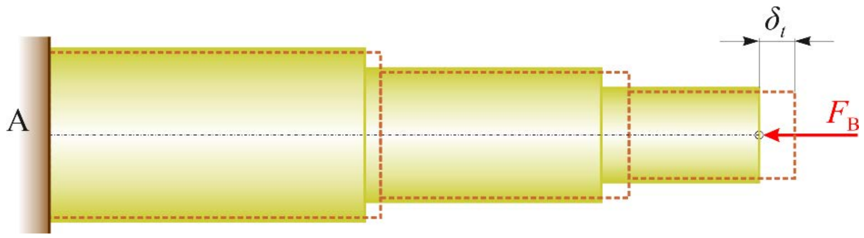
Naime, ukupno produljenje štapa mora biti jednako nuli, tj. reakcija F_{B} mora biti takva da poništi ukupno produljenje štapa od povećanja temperature (slika 2.25.), pa dodatna jednadžba glasi:

$$\left(l_1+l_2+l_3\right)\cdot\alpha\cdot\Delta t-\frac{F_{\mathrm{B}}\cdot l_1}{A_1\cdot E}-\frac{F_{\mathrm{B}}\cdot l_2}{A_2\cdot E}-\frac{F_{\mathrm{B}}\cdot l_3}{A_3\cdot E}=0 \text{ ili}$$

$$\left(\frac{l_1}{A_1}+\frac{l_2}{A_2}+\frac{l_3}{A_3}\right)\cdot\frac{F_{\mathrm{B}}}{E}=\left(l_1+l_2+l_3\right)\cdot\alpha\cdot\Delta t\,,$$

odakle je

$$F_{\mathrm{B}}=\frac{\left(l_1+l_2+l_3\right)}{\left(\frac{l_1}{A_1}+\frac{l_2}{A_2}+\frac{l_3}{A_3}\right)}\cdot E\cdot\alpha\cdot\Delta t\,.$$



Slika 2.25. Primjer 2.7.: *ukupno produljenje štapa*

Nakon uvrštavanja zadanih vrijednosti slijedi:

$$F_{\mathrm{B}}=\frac{\left(1,2\cdot10^3+0,8\cdot10^3+0,5\cdot10^3\right)}{\left(\frac{1,2\cdot10^3}{225}+\frac{0,8\cdot10^3}{144}+\frac{0,5\cdot10^3}{100}\right)}\cdot100\cdot10^3\cdot16,9\cdot10^{-6}\cdot60\,,$$

$$F_{\mathrm{B}}=15954\ \mathrm{N}=15,954\ \mathrm{kN}\,.$$

Uzdužne sile u svim su segmentima jednake i iznose:

$$N_1=N_2=N_3=-F_{\mathrm{B}}=-15,954\ \mathrm{kN}\,.$$

Normalna naprezanja u pojedinim segmentima štapa jesu:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{-15,954\cdot10^3}{225}=-70,91\ \mathrm{MPa}\,,$$

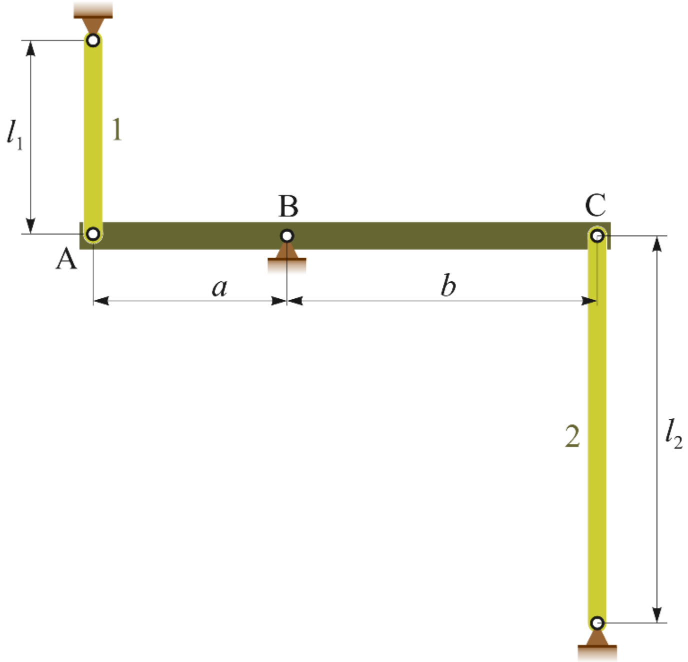
$$\sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{-15,954\cdot10^3}{144}=-110,79\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$\sigma_3=\frac{N_3}{A_3}=\frac{-15,954\cdot10^3}{100}=-159,54\ \mathrm{MPa}\,.$$

Primjer 2.8.

Konstrukcija prema slici sastoji se od krute grede AC i deformabilnih štapova (1) i (2) (slika 2.26.). Štap (1) napravljen je od aluminijske legure, a štap (2) od bronce.

Potrebno je odrediti naprezanja u štapovima nakon što se štapu (1) poveća temperatura za $\Delta t = 60\ ^\circ\text{C}$ ako je zadano: $a = 250\ \text{mm}$, $b = 400\ \text{mm}$, $l_1 = 300\ \text{mm}$, $l_2 = 600\ \text{mm}$, $d_1 = 18\ \text{mm}$, $d_2 = 28\ \text{mm}$, $E_1 = 70\ \text{GPa}$, $E_2 = 100\ \text{GPa}$, $\alpha_1 = 22{,}5 \cdot 10^{-6}\ \frac{1}{^\circ\text{C}}$.

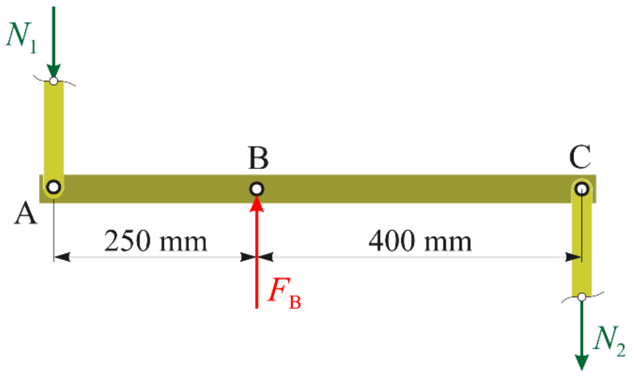


Slika 2.26. *Primjer 2.8.*

***Rješenje*:**

Očito je da je štap (1) opterećen tlačno, a štap (2) vlačno (slika 2.27). Iz uvjeta ravnoteže dobije se:

$$\sum M_B = 0: \quad N_1 \cdot 250 - N_2 \cdot 400 = 0,\ N_1 = 1{,}6 \cdot N_2 .$$



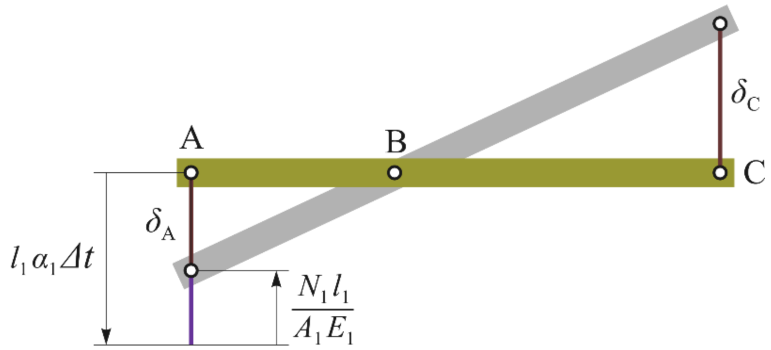
Slika 2.27. *Primjer 2.8.: kruta greda ABC oslobođena od veza*

Dodatni uvjet prema planu pomaka (slika 2.28.) glasi:

$$\frac{\delta_C}{400}=\frac{\delta_A}{250},\ \delta_C=1,6\cdot\delta_A\,,$$

gdje su pomaci točaka A i B jednaki:

$$\delta_A=l_1\cdot\alpha_1\cdot\Delta t-\frac{N_1\cdot l_1}{A_1\cdot E_1},\ \delta_C=\frac{N_2\cdot l_2}{A_2\cdot E_2}.$$



Slika 2.28. *Primjer 2.8.: plan pomaka*

Dalje je

$$\frac{N_2\cdot l_2}{A_2\cdot E_2}=1,6\cdot\left(l_1\cdot\alpha_1\cdot\Delta t-\frac{N_1\cdot l_1}{A_1\cdot E_1}\right),\quad \frac{N_2\cdot l_2}{A_2\cdot E_2}=1,6\cdot\left(l_1\cdot\alpha_1\cdot\Delta t-\frac{1,6N_2\cdot l_1}{A_1\cdot E_1}\right),$$

$$\left(\frac{l_2}{A_2\cdot E_2}+1,6\cdot\frac{1,6\cdot l_1}{A_1\cdot E_1}\right)\cdot N_2=1,6\cdot l_1\cdot\alpha_1\cdot\Delta t\,.$$

Površine poprečnih presjeka štapova iznose:

$$A_1=\frac{d_1^2\cdot\pi}{4}=\frac{18^2\cdot\pi}{4}=254,47\ \text{mm}^2,\quad A_2=\frac{d_2^2\cdot\pi}{4}=\frac{28^2\cdot\pi}{4}=615,75\ \text{mm}^2,$$

pa su sile u štapovima:

$$\left(\frac{0,6\cdot10^3}{615,75\cdot100\cdot10^3}+1,6\cdot\frac{1,6\cdot0,3\cdot10^3}{254,47\cdot70\cdot10^3}\right)\cdot N_2=1,6\cdot0,3\cdot10^3\cdot22,5\cdot10^{-6}\cdot60,$$

$$5,286\cdot10^{-5}\cdot N_2=64,8\cdot10^{-5},\quad N_2=12,26\ \text{kN};$$

$$N_1=1,6\cdot N_2=1,6\cdot12,26=19,61\ \text{kN}.$$

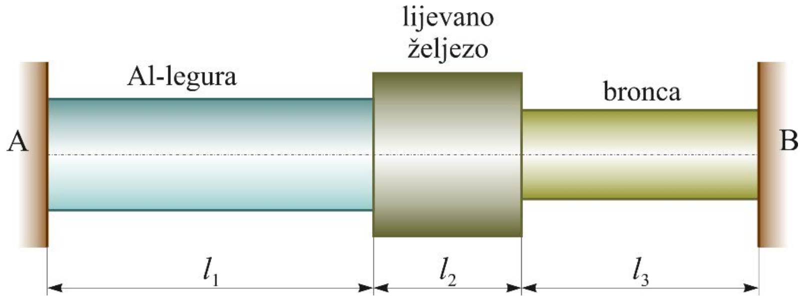
Tražena naprezanja u štapovima jesu:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{-19,61\cdot10^3}{254,47}=-77,1\ \text{MPa},$$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{12,26\cdot10^3}{615,75}=19,9\ \text{MPa}.$$

Zadatak 2.7. Štap AB sastavljen od triju segmenata načinjena od različitih materijala ukliješten je na krajevima A i B (slika Z.2.7.). Odrediti normalna naprezanja u svim segmentima nastala zbog povećanja temperature za $\Delta t = 80\ ^\circ\mathrm{C}$.

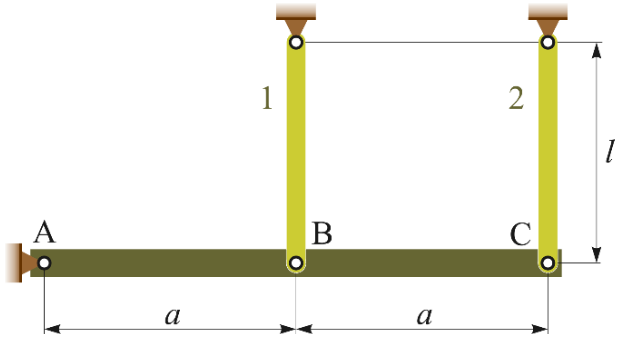
Zadano je: $l_1 = 440\ \mathrm{mm}$, $l_2 = 200\ \mathrm{mm}$, $l_3 = 320\ \mathrm{mm}$, $A_1 = 625\ \mathrm{mm}^2$, $A_2 = 900\ \mathrm{mm}^2$, $A_3 = 400\ \mathrm{mm}^2$, $E_1 = 70\ \mathrm{GPa}$, $E_2 = 155\ \mathrm{GPa}$, $E_3 = 100\ \mathrm{GPa}$, $\alpha_1 = 22{,}5 \cdot 10^{-6}\ 1/^\circ\mathrm{C}$, $\alpha_2 = 13{,}5 \cdot 10^{-6}\ 1/^\circ\mathrm{C}$, $\alpha_3 = 17 \cdot 10^{-6}\ 1/^\circ\mathrm{C}$.



Slika Z.2.7. *Zadatak 2.7.*

Zadatak 2.8. Kruta greda ABC vezana je za podlogu deformabilnim štapovima (1) i (2) načinjenima od istog materijala (slika Z.2.8.). Valja odrediti normalna naprezanja u štapovima nastala zbog povećanja temperature za $\Delta t = 80\ ^\circ\mathrm{C}$.

Zadano je: $a = 800\ \mathrm{mm}$, $l = 600\ \mathrm{mm}$, $A_1 = A_2 = A$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$, $\alpha = 12{,}6 \cdot 10^{-6}\ 1/^\circ\mathrm{C}$.



Slika Z.2.8. *Zadatak 2.8.*

2.2.2. Početna naprezanja

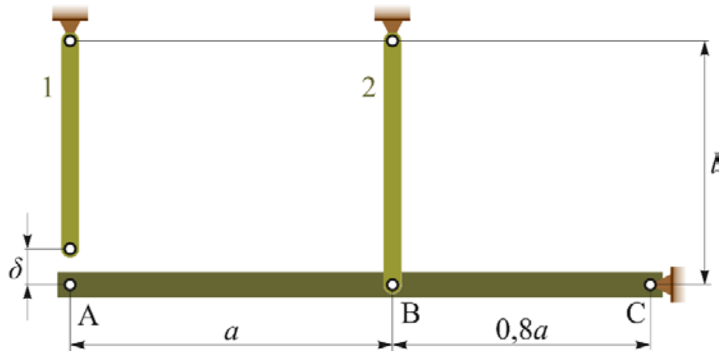
Ova naprezanja javljaju se zbog prisilne montaže konstrukcije uzrokovane netočnostima u izradi pojedinih elemenata konstrukcije.

Primjer 2.9.

Konstrukcija prema slici sastoji se od krute grede AC i deformabilnih štapova (1) i (2). Greškom je štap (2) napravljen kraći za iznos $\delta = 1{,}5\ \mathrm{mm}$ (slika 2.29.).

Potrebno je odrediti naprezanja u štapovima nakon prisilne montaže.

Zadano je: $a = 3\ \text{m}$, $l = 1{,}2\ \text{m}$, $d_1 = 12\ \text{mm}$, $d_2 = 15\ \text{mm}$, $E = 200\ \text{GPa}$.



Slika 2.29. *Primjer 2.9.*

***Rješenje*:**

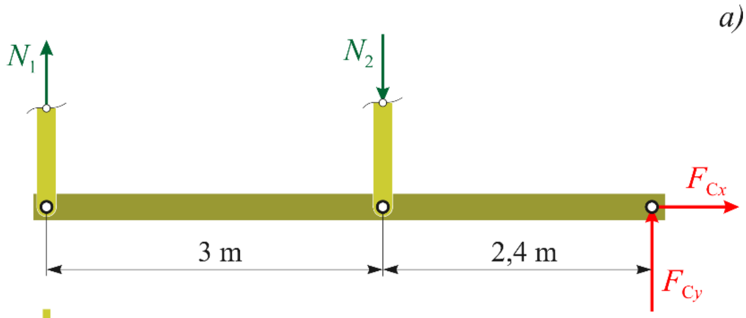
Nakon prisilne montaže štap (1) je opterećen na vlak, a štap (2) na tlak (slika 2.30.a). Uvjet ravnoteže glasi:

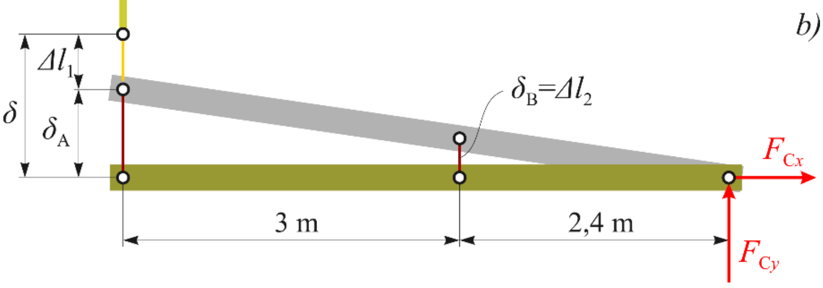
$$\sum M_C = 0: \quad -N_1 \cdot 1{,}8 \cdot a + N_2 \cdot 0{,}8 \cdot a = 0,\ N_2 = 2{,}25 \cdot N_1 .$$

Dodatna jednadžba dobije se razmatranjem plana pomaka (slika 2.30.b) i glasi:

$$\frac{\delta_A}{5{,}4} = \frac{\delta_B}{2{,}4}, \quad \delta_A = 2{,}25 \cdot \delta_B ,$$

gdje su $\delta_A = \delta - \Delta l_1$; $\delta_B = \Delta l_2$.





Slika 2.30. *Primjer 2.9. a) kruta greda oslobođena od veza, b) plan pomaka*

Dalje je

$$\delta - \Delta l_1 = 2{,}25 \cdot |\Delta l_2|, \text{ odnosno } \Delta l_1 + 2{,}25 \cdot |\Delta l_2| = \delta .$$

Budući da je $\Delta l_1 = N_1 \cdot l_1 / (A_1 \cdot E_1)$, $\Delta l_2 = N_2 \cdot l_2 / (A_2 \cdot E_2)$, te $N_2 = 2,25 \cdot N_1$, može se pisati

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E_1} + 2,25 \cdot \frac{2,25 N_1 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} = \left(\frac{l_1}{A_1 \cdot E_1} + \frac{5,0625 \cdot l_2}{A_2 \cdot E_2} \right) \cdot N_1 = \delta .$$

Površine poprečnih presjeka štapova jesu:

$$A_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{12^2 \cdot \pi}{4} = 113,097 \text{ mm}^2 , \quad A_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{15^2 \cdot \pi}{4} = 176,71 \text{ mm}^2 ,$$

pa sile u štapovima iznose:

$$\left(\frac{1,2 \cdot 10^3}{113,097 \cdot 200 \cdot 10^3} + \frac{5,0625 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{176,71 \cdot 200 \cdot 10^3} \right) N_1 = 1,5 ,$$

$$N_1 = 6668 \text{ N} = 6,668 \text{ kN} ,$$

$$N_2 = 2,25 \cdot N_1 = 2,25 \cdot 6,668 = 15,003 \text{ kN} .$$

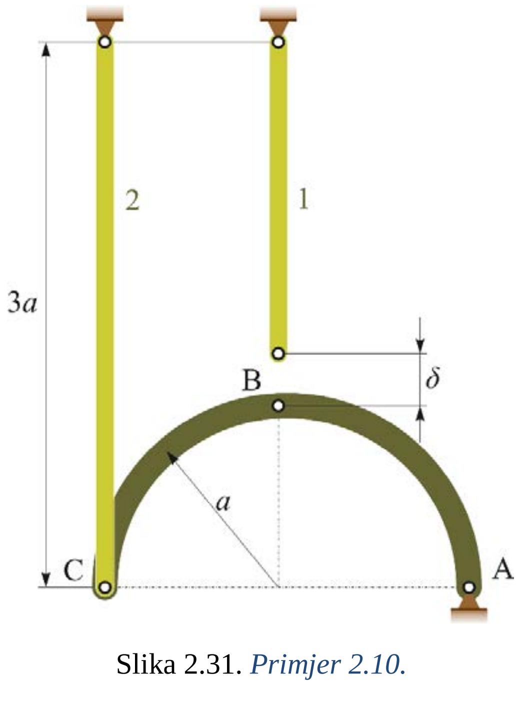
Naprezanja u štapovima nakon prisilne montaže jesu:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{6,668 \cdot 10^3}{113,097} = 58,96 \text{ MPa} , \quad \sigma_2 = -\frac{N_2}{A_2} = -\frac{15,003 \cdot 10^3}{176,71} = -84,90 \text{ MPa} .$$

Primjer 2.10.

Konstrukcija prema slici 2.31 sastoji se od zakrivljenoga krutog štapa ABC i deformabilnih štapova (1) i (2). Greškom je štap (1) napravljen kraći za iznos $\delta = 0,6$ mm. Valja odrediti naprezanja u štapovima nakon prisilne montaže.

Zadano je: $a = 0,4$ m, $A_1 = A_2 = A$, $E = 200$ GPa .



Slika 2.31. *Primjer 2.10.*

***Rješenje*:**

Nakon prisilne montaže štap (1) je opterećen vlačno, a štap (2) tlačno (slika 2.32.a). Uvjet ravnoteže glasi:

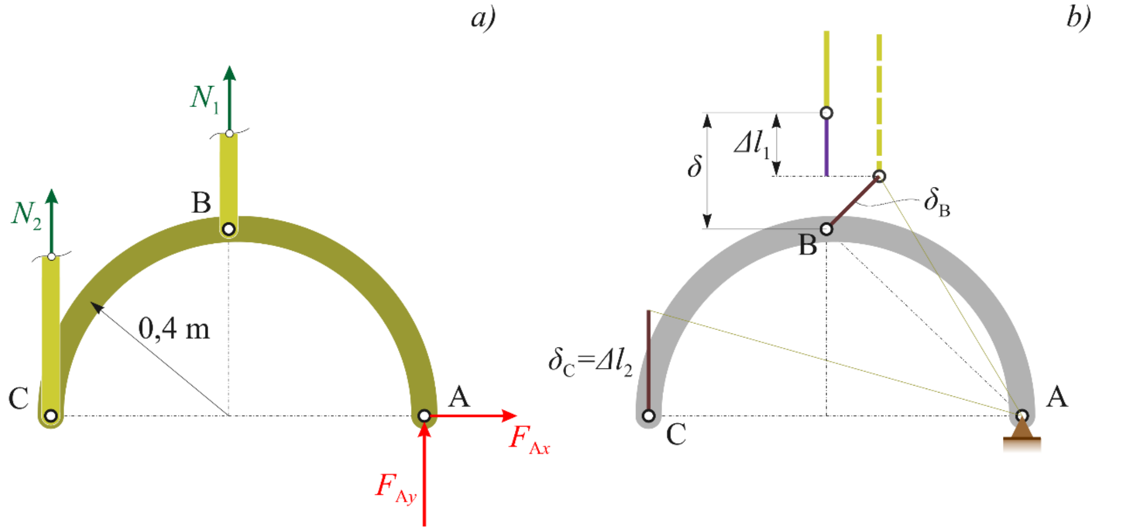
$$\sum M_{\mathrm{C}} = 0: \quad -N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a = 0\,, \; N_1 = 2 \cdot N_2\,.$$

Dodatna jednadžba dobije se razmatranjem plana pomaka (slika 2.32.b) i glasi:

$$\frac{\delta_{\mathrm{C}}}{2a} = \frac{\delta_{\mathrm{B}}}{\sqrt{2}a}\,, \qquad \delta_{\mathrm{C}} = \sqrt{2} \cdot \delta_{\mathrm{B}}\,,$$

gdje su

$$\delta_{\mathrm{B}} \cdot \cos 45^\circ + \Delta l_1 = \delta\,, \qquad \delta_{\mathrm{B}} = \sqrt{2} \cdot (\delta - \Delta l_1); \;\; \delta_{\mathrm{C}} = \Delta l_2\,.$$



Slika 2.32. *Primjer 2.10.: a) zakrivljeni štap oslobođen od veza, b) plan pomaka*

Sile u štapovima dobiju se kako slijedi:

$$\Delta l_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\delta - \Delta l_1) = 2 \cdot \delta - 2 \cdot \Delta l_1\,,$$

$$\Delta l_2 + 2 \cdot \Delta l_1 = 2 \cdot \delta\,,$$

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{A \cdot E} + 2 \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{A \cdot E} = 2 \cdot \delta\,, \qquad \frac{N_2 \cdot 3 \cdot a}{A \cdot E} + 2 \cdot \frac{2N_2 \cdot 2 \cdot a}{A \cdot E} = 2 \cdot \delta\,, \qquad N_2 = \frac{2 \cdot A \cdot E \cdot \delta}{11 \cdot a};$$

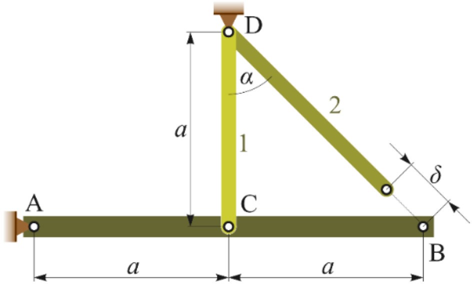
$$N_1 = \frac{4 \cdot A \cdot E \cdot \delta}{11 \cdot a}\,.$$

Naprezanja u štapovima nastala zbog prisilne montaže iznose:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4 \cdot E \cdot \delta}{11 \cdot a} = \frac{4 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{11 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3} = 109{,}1\,\mathrm{MPa}\,,$$

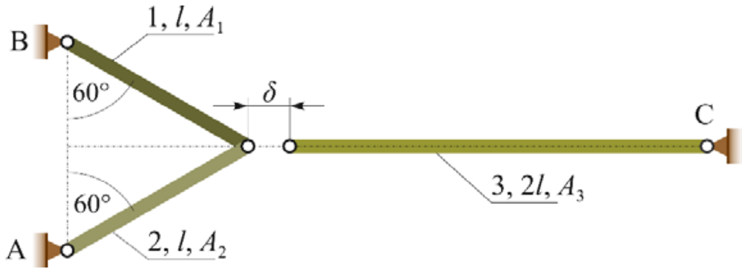
$$\sigma_2 = -\frac{N_2}{A_2} = -\frac{2 \cdot E \cdot \delta}{11 \cdot a} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{11 \cdot 0{,}4 \cdot 10^3} = 54{,}55\,\mathrm{MPa}\,.$$

Zadatak 2.9. Konstrukcija koja se sastoji od krute grede ABC i deformabilnih štapova (1) i (2) prisilno je montirana jer je štap (2) greškom napravljen kraći za $\delta = 0,9\ \mathrm{mm}$ (slika Z.2.9.). Potrebno je odrediti naprezanja u štapovima nakon prisilne montaže. Zadano je: $a = 1,2\ \mathrm{m}$, $\alpha = 45^\circ$, $A_1 = 2 \cdot A$, $A_2 = A$, $E = 200\ \mathrm{GPa}$.



Slika Z.2.9. *Zadatak 2.9.*

Zadatak 2.10. Konstrukcija sastavljena od triju deformabilnih štapova prisilno je montirana jer je štap (3) greškom napravljen kraći za $\delta = 2\ \mathrm{mm}$ (slika Z.2.10.). Potrebno je odrediti naprezanja u štapovima nakon prisilne montaže. Zadano je: $l = 1\ \mathrm{m}$, $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = 2A$, $E = 200\ \mathrm{GPa}$.



Slika Z.2.10. *Zadatak 2.10.*

2.3. SAINT-VENANTOV PRINCIP I KONCENTRACIJA NAPREZANJA

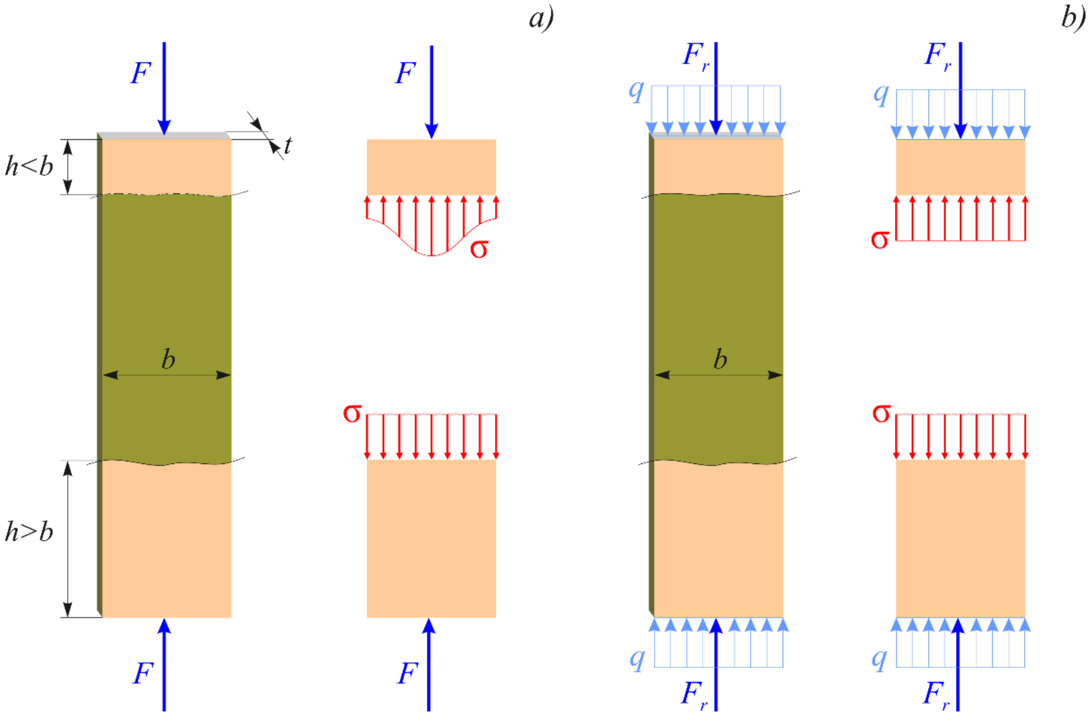
Saint-Venantov princip može se izreći na sljedeći način: *U točkama tijela koje su dovoljno udaljene od mjesta djelovanja vanjskog opterećenja naprezanja će se neznatno promijeniti ako jedno opterećenje zamijenimo drugim, njemu statički ekvivalentnim opterećenjem*. U kolegiju Tehnička mehanika I rečeno je da su dva sustava sila statički ekvivalentna ako se u bilo kojoj točki tijela reduciraju na isti glavni vektor sila i isti glavni moment.

Neka je plosnati štap pravokutnoga poprečnog presjeka širine b i debljine t opterećen tlačno dvjema koncentriranim silama iznosa F na svojim krajevima (slika 2.33.a) te jednoliko raspodijeljenim silama kojima je rezultanta također iznosa $F_r = F$ (slika 2.33.b). U presjecima dovoljno udaljenima od djelovanja opterećenja – presjeci udaljeni od djelovanja opterećenja za iznos $h > b$, raspodjela normalnih naprezanja po poprečnom presjeku bit će ista za oba slučaja vanjskog opterećenja.

Razlike će postojati u presjecima na udaljenostima $h < b$ (slika 2.33.a) te se može reći da su te razlike lokalnog karaktera.

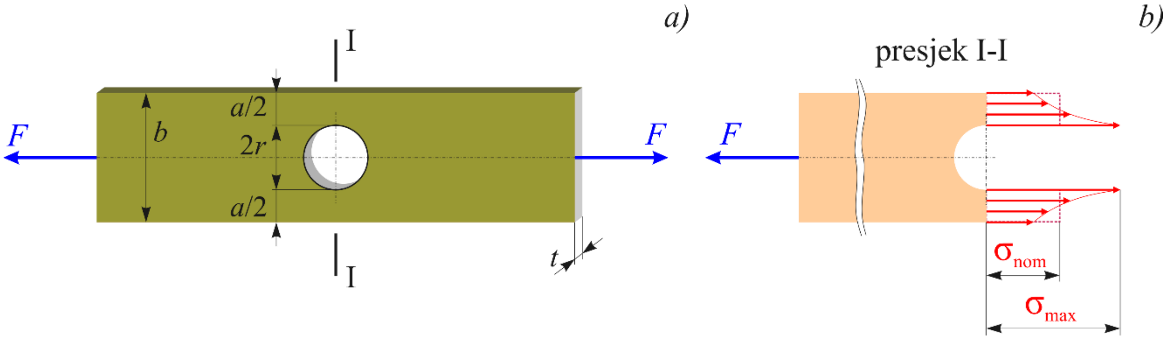
Za slučaj tlačnog opterećenja s dvije koncentrirane sile na krajevima u presjecima na udaljenostima $h < b$ raspodjela normalnih naprezanja po poprečnom presjeku nije jednolika. Maksimalno naprezanje znatno je veće od nominalnoga. Ta se pojava naziva koncentracija naprezanja:

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}}, \qquad \sigma_{\text{nom}} = \frac{F}{a \cdot t}.$$



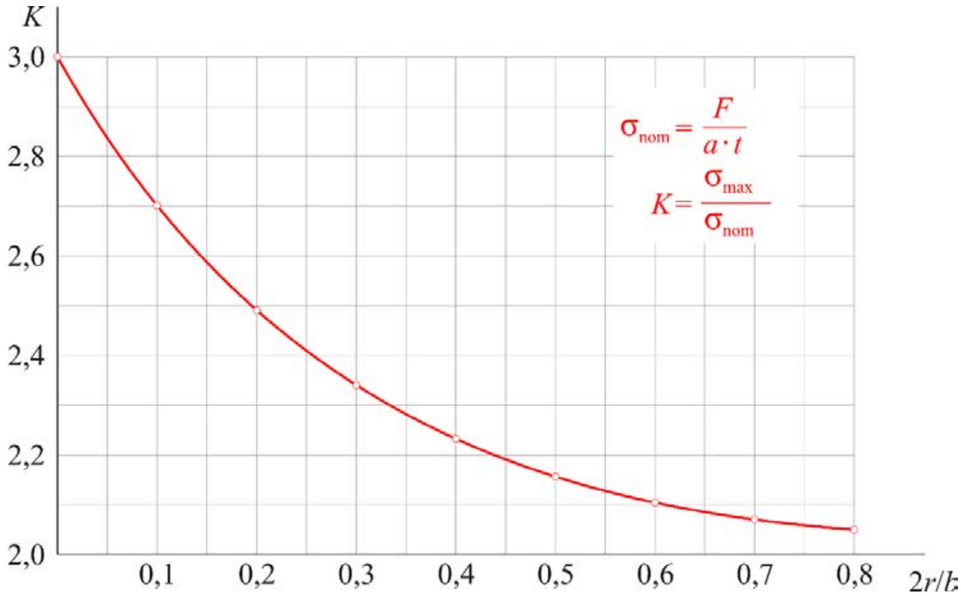
Slika 2.33.: *a) opterećenje štapa dvjema koncentriranim silama, b) opterećenje štapa jednoliko raspodijeljenim silama*

Na slici 2.34.a prikazan je vlačno opterećen plosnati štap pravokutnoga poprečnog presjeka širine b i debljine t ($b >> t$) s kružnim otvorom po sredini štapa promjera $2 \cdot r$. Raspodjela normalnih naprezanja u poprečnom presjeku I-I dana je na slici 2.34.b. Omjer maksimalnog naprezanja i nominalnog naprezanja predstavlja faktor koncentracije naprezanja.



Slika 2.34.: *a) vlačno opterećeni plosnati štap s kružnim otvorom u sredini, b) nejednolika raspodjela normalnih naprezanja po poprečnom presjeku štapa*

Na slici 2.35. dan je dijagram ovisnosti faktora koncentracije naprezanja K o omjeru $2 \cdot r/b$.



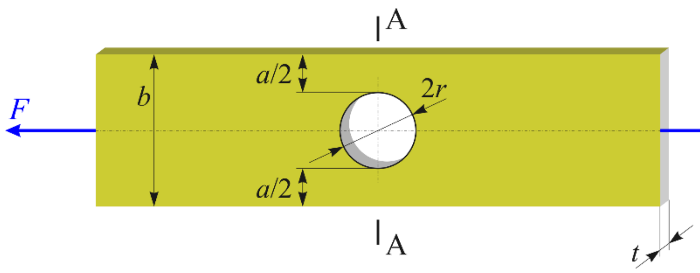
Slika 2.35. *Faktor koncentracije naprezanja K u ovisnosti o omjeru $2 \cdot r / b$*

Primjer 2.11.

Za plosnati štap pravokutnoga poprečnog presjeka širine b i debljine t ($b >> t$), s kružnim otvorom po sredini štapa promjera $2 \cdot r$ i opterećenoga na rastezanje silom iznosa F na slobodnim krajevima (slika 2.36.), potrebno je izračunati maksimalno normalno naprezanje.

Faktor koncentracije naprezanja uzeti iz dijagrama na slici 2.35.

Zadano je: $b = 100$ mm, $2 \cdot r = 20$ mm, $t = 5$ mm, $F = 24$ kN.



Slika 2.36. *Primjer 2.11.*

***Rješenje*:**

Površina poprečnog presjeka A – A iznosi:

$$A = a \cdot t = (b - 2 \cdot r) \cdot t = (100 - 20) \cdot 5 = 400 \text{ mm}^2,$$

a nominalno je naprezanje:

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{24000}{400A} = 60 \text{ MPa}.$$

Prema dijagramu na slici 2.35., za omjer $2 \cdot r / b = 20/100 = 0,2$, faktor koncentracije naprezanja je $K = 2,5$.

Maksimalno normalno naprezanje iznosi:

$$\sigma_{\mathrm{max}} = K \cdot \sigma_{\mathrm{nom}} = 2,5 \cdot 60 = 150 \text{ MPa} .$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 2.11. Odrediti najveći iznos sile F kojom se može opteretiti štap prema slici 2.36. tako da najveće normalno naprezanje σ_{max} ne bude veće od dopuštenoga normalnog naprezanja σ_{d} ako je zadano: $b = 120$ mm, $2 \cdot r = 12$ mm, $t = 6$ mm, $\sigma_{\mathrm{d}} = 200$ MPa.

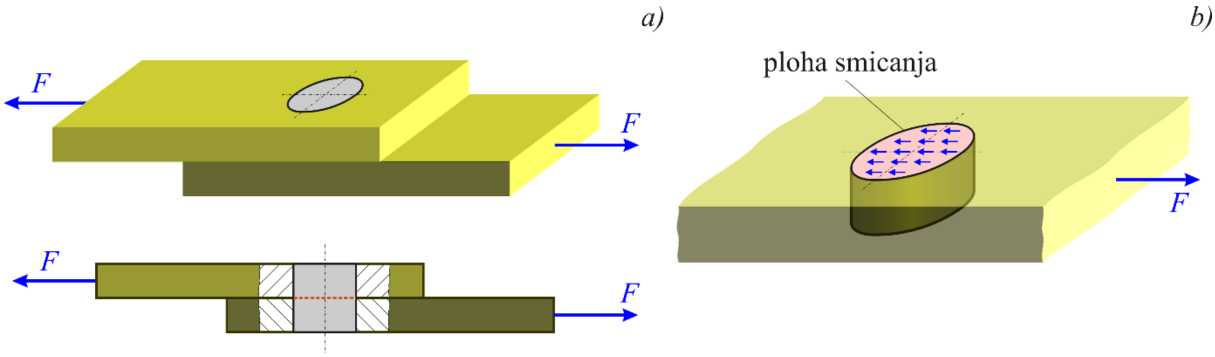
3. SMICANJE

Neko tijelo opterećeno je na smicanje kada vanjsko opterećenje djelujući na tijelo nastoji pomaknuti jedan dio tijela u odnosu na drugi duž plohe smicanja. Takvo je tijelo na primjer zakovica koja spaja dva lima (slika 3.1.a). U zamišljenoj plohi smicanja zakovice niz sila drži u ravnoteži vanjsko opterećenje predstavljeno silom F (slika 3.1.b).

Raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku nije jednolika i teško ju je odrediti, pa se u praksi provodi pojednostavnjen približan proračun s računanjem srednjega posmičnog naprezanja. Srednje posmično naprezanje u poprečnom presjeku zakovice računa se prema izrazu:

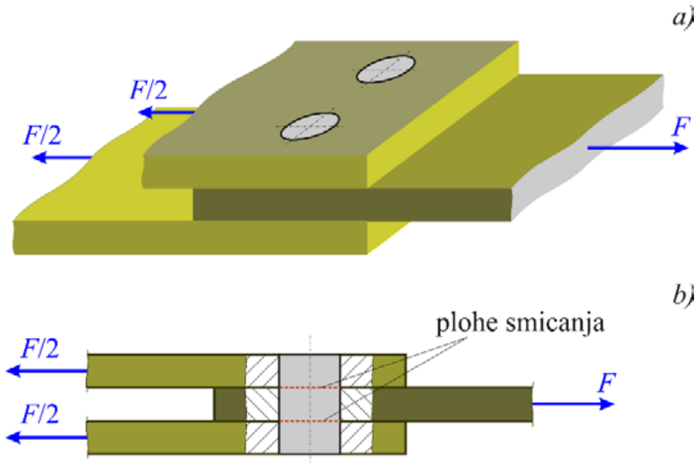
$$\tau = \frac{F}{A}, \tag{3.1}$$

gdje je A površina plohe smicanja.



Slika 3.1.: *a) dva lima spojena zakovicom, b) zamišljena ploha smicanja s unutarnjim silama koje su posljedica vanjskog opterećenja*

Ako se radi o spoju s više zakovica i više smičnih ploha po svakoj zakovici (slika 3.2.a i b), izraz za srednje posmično naprezanje glasi:



Slika 3.2.: *a) spoj s dvjema zakovicama, b) dvije plohe smicanja po jednoj zakovici*

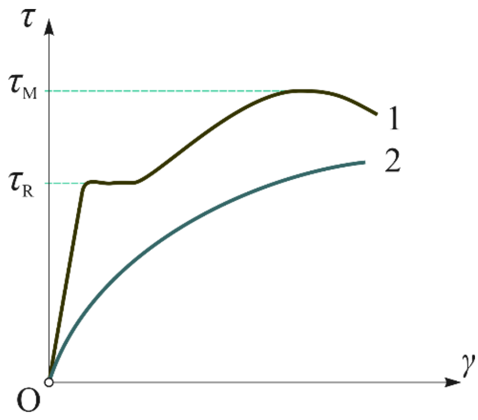
$$\tau = \frac{F}{i \cdot n \cdot A}, \tag{3.2}$$

gdje i predstavlja broj ploha smicanja po jednoj zakovici, n broj zakovica u spoju , a A površinu poprečnog presjeka zakovice.

U zadatcima u kojima treba dimenzionirati zakovice upotrijebit će se kriterij čvrstoće koji glasi:

$$\tau = \frac{F}{i \cdot n \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}} \leq \tau_{\mathrm{d}}, \quad d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{i \cdot n \cdot \pi \cdot \tau_{\mathrm{d}}}}, \tag{3.3}$$

gdje τ_{d} predstavlja dopušteno posmično naprezanje ovisno o materijalu od kojeg je zakovica izrađena. Dopušteno posmično naprezanje τ_{d} može se odrediti iz krivulja koje su dobivene pokusima u laboratoriju sličnima pokusima rastezanja. Najčešće se za dobivanje dijagrama smicanja $\tau = f(\gamma)$ (slika 3.3.) koji se po obliku podudaraju s dijagramima rastezanja rabi uvijanje tankih cijevi.



Slika 3.3. *Dijagrami smicanja dvaju materijala*

Dopušteno posmično naprezanje τ_{d} povezuje se često s dopuštenim vlačnim naprezanjem σ_{d} prema izrazu:

$$\tau_{\mathrm{d}} = k_{\mathrm{d}} \cdot \sigma_{\mathrm{d}}, \tag{3.4}$$

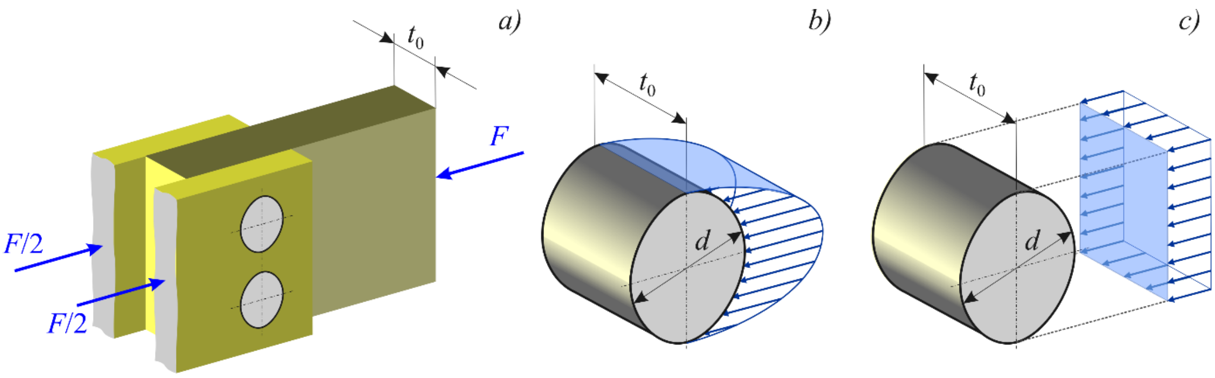
gdje je koeficijent k_{d} određen za razne materijale na temelju pokusa i iskustva. Tako za čelik njegova vrijednost iznosi $k_{\mathrm{d}} = 0{,}8$.

Kod dimenzioniranja zakovica (slika 3.4.a) treba često kontrolirati i veličinu bočnoga površinskog pritiska, kojemu je trup zakovice izvrgnut. Zakon raspodjele tog pritiska (slika 3.4.b) nije poznat, pa se u proračunima uzima srednja vrijednost bočnog pritiska (slika 3.4.c) dobivena prema izrazu:

$$p = \frac{F}{n \cdot t_{\mathrm{o}} \cdot d}. \tag{3.5}$$

Pri dimenzioniranju srednji pritisak mora biti manji od dopuštenoga, pa je

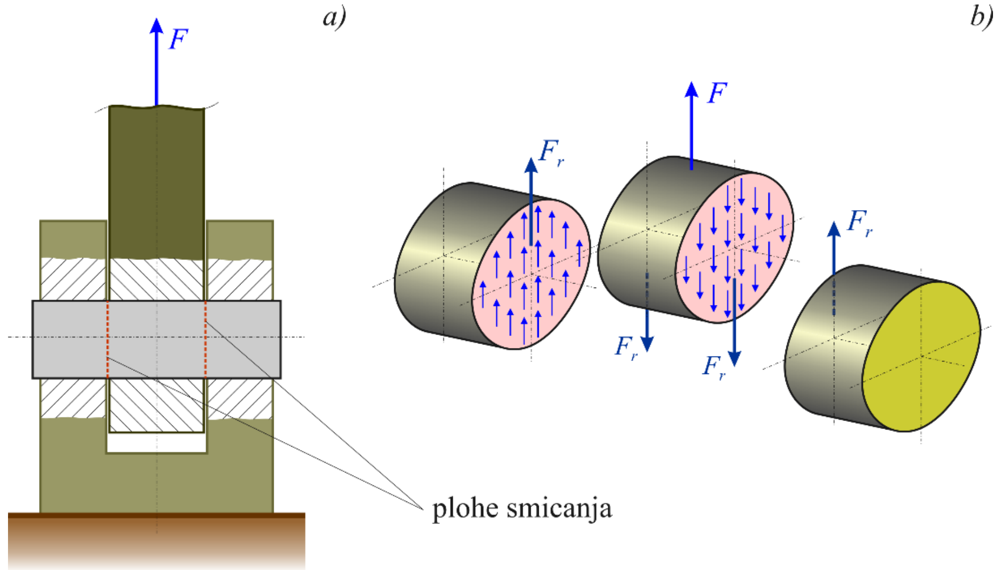
$$p = \frac{F}{n \cdot t_{\mathrm{o}} \cdot d} \leq p_{\mathrm{d}}, \quad d \geq \frac{F}{n \cdot t_{\mathrm{o}} \cdot p_{\mathrm{d}}}. \tag{3.6}$$



Slika 3.4.: *a) spoj s dvjema zakovicama, b) raspodjela bočnog pritiska po tijelu zakovice, c) srednji pritisak*

Primjer 3.1.

Odrediti srednje posmično naprezanje u plohama smicanja zakovice za slučaj opterećenja prema slici 3.5.a. Zadano je: $d = 15\ \mathrm{mm}$, $F = 25\ \mathrm{kN}$.



Slika 3.5. *Primjer 3.1.*

***Rješenje*:**

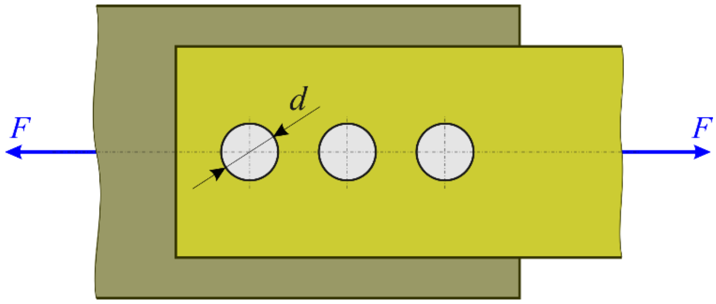
Dvije su plohe smicanja (slika 3.5.b), pa srednje posmično naprezanje izračunano prema (3.2) iznosi:

$$\tau_{\mathrm{sr}} = \frac{F}{i \cdot n \cdot A} = \frac{F}{2 \cdot 1 \cdot \dfrac{d^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{2 \cdot F}{d^2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^3}{15^2 \cdot \pi} = 70,7\ \mathrm{MPa}\,.$$

Primjer 3.2.

Dimenzionirati zakovice u spoju opterećenom prema slici 3.6. ako su poznati dopušteno srednje posmično naprezanje τ_{d}, dopušteni bočni pritisak p_{d} i debljina lima t_{o}.

Zadano je: $F = 30\ \mathrm{kN}$, $\tau_{\mathrm{d}} = 90\ \mathrm{MPa}$, $p_{\mathrm{d}} = 100\ \mathrm{MPa}$, $t_{\mathrm{o}} = 8\ \mathrm{mm}$.



Slika 3.6. *Primjer 3.2.*

***Rješenje*:**

Prema kriteriju da srednje posmično naprezanje mora biti manje od dopuštenoga posmičnog naprezanja (3.3), jest:

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F}{1 \cdot 3 \cdot \pi \cdot \tau_d}},$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3}{1 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 90}} = 11,89 \text{ mm},$$

a prema uvjetu da srednji bočni pritisak mora biti manji od dopuštenoga (3.6), jest:

$$d \geq \frac{F}{n \cdot t_o \cdot p_d},$$

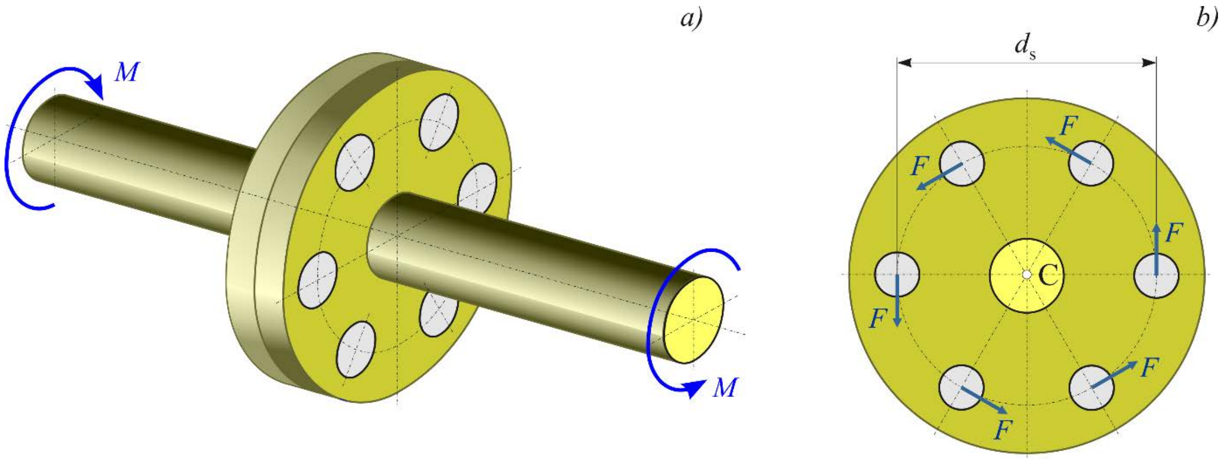
$$d \geq \frac{30 \cdot 10^3}{3 \cdot 8 \cdot 100} = 12,5 \text{ mm}.$$

Oba uvjeta bit će zadovoljena ako se za promjer zakovice izabere vrijednost $d = 13$ mm .

Primjer 3.3.

Odrediti maksimalnu vrijednost momenta M kojim se smije opteretiti spojka prema slici 3.7.a.

Zadano je: $d = 15$ mm , $d_s = 800$ mm , $\tau_d = 90$ MPa .



Slika 3.7. *Primjer 3.3. a) zadana spojka opterećena momentom M, b) opterećenje vijaka*

***Rješenje*:**

Prema kriteriju čvrstoće prema (3.3) dobije se sila koja opterećuje jedan vijak:

$$\tau = \frac{F}{i \cdot n \cdot \dfrac{d^2 \cdot \pi}{4}} \le \tau_\mathrm{d}, \qquad F \le i \cdot n \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \tau_\mathrm{d},$$

$$F \le 1 \cdot 1 \cdot \frac{15^2 \cdot \pi}{4} \cdot 90,$$

$$F \le 15904\ \mathrm{N}.$$

Iz uvjeta ravnoteže lijevog ili desnog dijela spojke dobije se tražena vrijednost momenta:

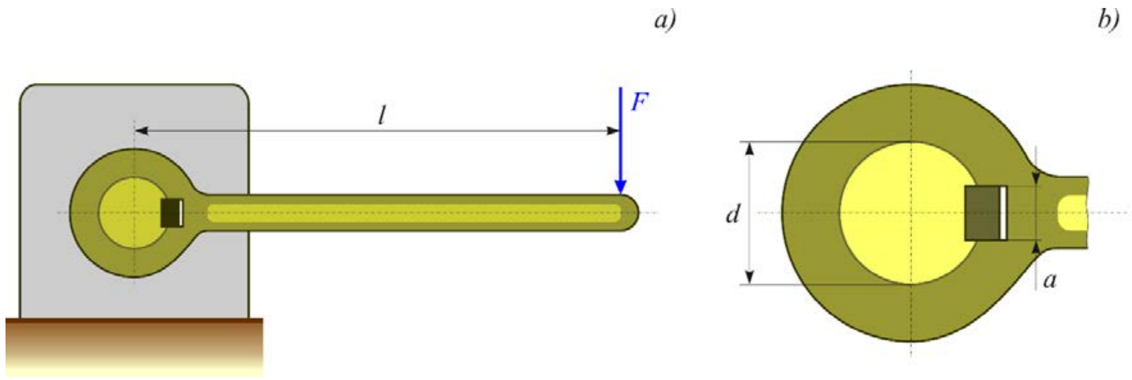
$$\Sigma M_\mathrm{C} = 0: \qquad M - 6 \cdot F \cdot \frac{d_\mathrm{s}}{2} = 0,$$

$$M = 3 \cdot F \cdot d_\mathrm{s} = 3 \cdot 15904 \cdot 800 = 38169600\ \mathrm{N \cdot mm} = 38{,}17\ \mathrm{kN \cdot m}.$$

Primjer 3.4.

Pomoću pera širine a i duljine b ostvaren je čvrst spoj osovine i poluge prema slici 3.8.a i b. Potrebno je izračunati srednje posmično naprezanje u plohi smicanja pera.

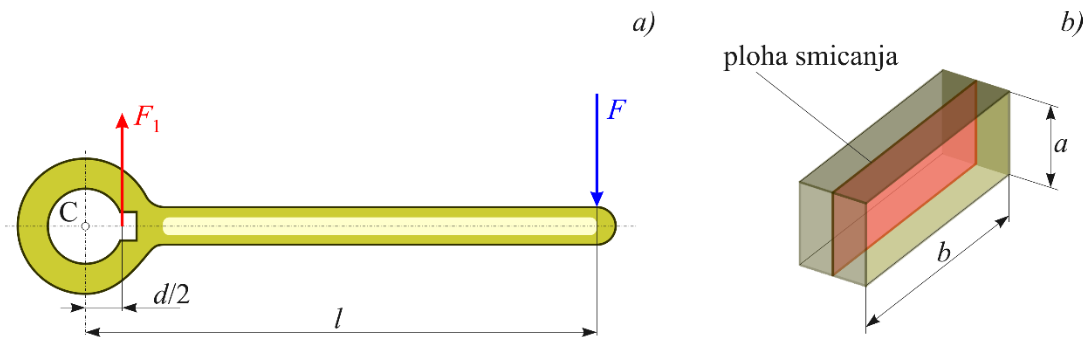
Zadano je: $F = 6\ \mathrm{kN}$, $l = 400\ \mathrm{mm}$, $d = 60\ \mathrm{mm}$, $a = 14\ \mathrm{mm}$, $b = 60\ \mathrm{mm}$.



Slika 3.8. *Primjer 3.4.: a) veza osovine i poluge, b) dimenzije osovine i pera*

***Rješenje*:**

Sila F_1 kojom je opterećeno pero dobije se iz uvjeta ravnoteže poluge (slika 3.9.a).



Slika 3.9. *Primjer 3.4.: a) poluga oslobođena od veza, b) ploha smicanja pera*

$$\Sigma M_C = 0: \quad -F \cdot l + F_1 \cdot \frac{d}{2} = 0,$$

$$-6 \cdot 400 + F_1 \cdot \frac{60}{2} = 0,$$

$$F_1 = 80 \text{ kN}.$$

Površina plohe smicanja pera iznosi (slika 3.9.b):

$$A = a \cdot b = 14 \cdot 60 = 840 \text{ mm}^2,$$

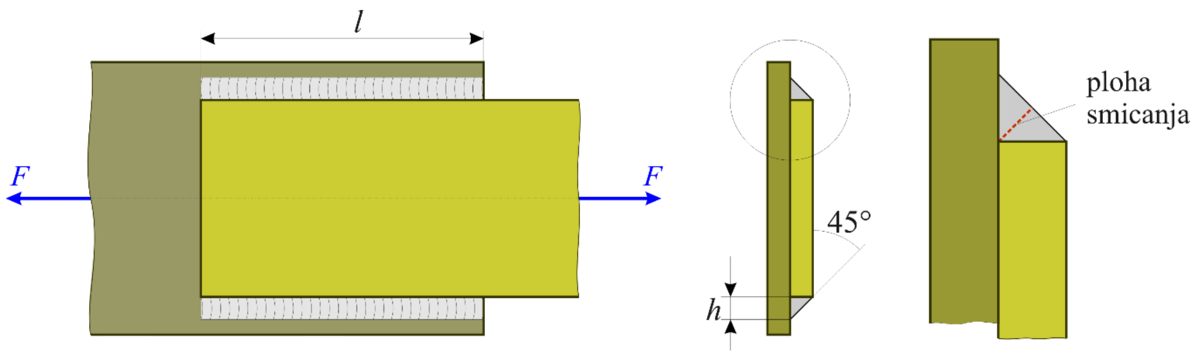
a srednje posmično naprezanje:

$$\tau = \frac{F_1}{A} = \frac{80 \cdot 10^3}{840} = 95,2 \text{ MPa}.$$

Primjer 3.5.

Zavareni spoj dvaju limova prikazan je na slici 3.10. Valja provjeriti čvrstoću zavarenog spoja.

Zadano je: $F = 120 \text{ kN}$, $l = 120 \text{ mm}$, $h = 8 \text{ mm}$, $\tau_d = 80 \text{ MPa}$.



Slika 3.10. *Primjer 3.5.*

***Rješenje*:**

Dvije su plohe smicanja, a površina svake plohe jest:

$$A = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h = 120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 = 678,8 \text{ mm}^2.$$

Srednje posmično naprezanje u svakoj plohi smicanja iznosi:

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot A} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 678,8} = 88,4 \text{ MPa}.$$

Budući da je srednje posmično naprezanje veće od dopuštenoga, čvrstoća zavara ne zadovoljava. Da bi kriterij čvrstoće bio zadovoljen, trebalo bi povećati duljinu zavara.

Tako bi za duljinu zavara $l = 180$ mm srednje posmično naprezanje iznosilo:

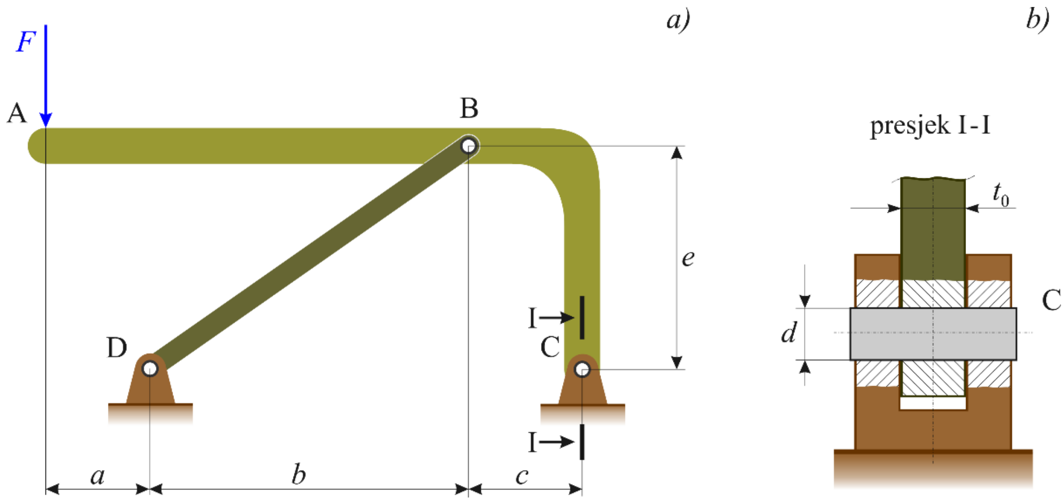
$$A = l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h = 180 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 8 = 1018,2 \text{ mm}^2,$$

$$\tau = \frac{F}{2 \cdot A} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 1018,2} = 58,9 \text{ MPa} .$$

Primjer 3.6.

Za konstrukciju prema slici 3.11.a valja dimenzionirati svornjak u zglobu C prema dopuštenom posmičnom naprezanju te dopuštenom bočnom pritisku.

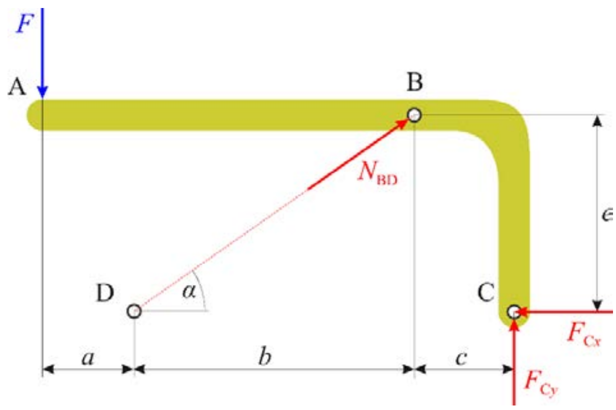
Zadano je: $a = 1,2$ m, $b = 2,8$ m, $c = 2,4$ m, $e = 1,8$ m, $F = 18$ kN, $\tau_{\mathrm{d}} = 90$ MPa, $p_{\mathrm{d}} = 100$ MPa, $t_{\mathrm{o}} = 18$ mm.



Slika 3.11. *Primjer 3.6.*

***Rješenje*:**

Da bismo odredili potreban promjer svornjaka, najprije treba izračunati reakciju zgloba C konstrukcije.



Slika 3.12. *Primjer 3.6. Konstrukcija oslobođena od veza*

Uvjeti ravnoteže postavljeni za konstrukciju ABC oslobođenu od veza (slika 3.12.) glase:

$$\sum M_{\mathrm{C}} = 0: \qquad F \cdot (a + b + c) - N_{\mathrm{BD}} \cdot \cos\alpha \cdot e - N_{\mathrm{BD}} \cdot \sin\alpha \cdot c = 0,$$

$$\sum F_x = 0: \qquad N_{\mathrm{BD}} \cdot \cos\alpha - F_{\mathrm{C}x} = 0,$$

$$\sum F_y = 0: \qquad N_{\mathrm{BD}} \cdot \sin\alpha - F + F_{\mathrm{C}y} = 0,$$

gdje je $\alpha = 32,7^\circ$ jer je $\tan\alpha = e/b = 1,8/2,8 = 0,64286$. Dalje je:

$$N_{\mathrm{BD}} = \frac{F\cdot(a+b+c)}{e\cdot\cos\alpha + c\cdot\sin\alpha} = \frac{18\cdot(1,2+2,8+2,4)}{1,8\cdot\cos 32,7^\circ + 2,4\cdot\sin 32,7^\circ} = 40,978\ \mathrm{kN},$$

$$F_{\mathrm{C}x} = N_{\mathrm{BD}}\cdot\cos\alpha = 40,978\cdot\cos 32,7^\circ = 34,483\ \mathrm{kN},$$

$$F_{\mathrm{C}y} = 18 - 40,978\cdot\sin 32,7^\circ = -4,138\ \mathrm{kN},$$

$$F_{\mathrm{C}} = \sqrt{F_{\mathrm{C}x}^2 + F_{\mathrm{C}y}^2} = \sqrt{34,483^2 + (-4,138)^2} = 34,73\ \mathrm{kN}.$$

Svornjak ima dvije plohe smicanja (slika 3.11.b), pa je prema kriteriju da srednje posmično naprezanje mora biti manje od dopuštenoga posmičnog naprezanja (3.3):

$$\tau = \frac{F_{\mathrm{C}}}{i\cdot n\cdot\frac{d^2\cdot\pi}{4}} \le \tau_{\mathrm{d}}, \qquad d \ge \sqrt{\frac{4\cdot F_{\mathrm{C}}}{2\cdot 1\cdot\pi\cdot\tau_{\mathrm{d}}}},$$

$$d \ge \sqrt{\frac{4\cdot 34,73\cdot 10^3}{2\cdot 1\cdot\pi\cdot 90}}, \qquad d \ge 15,7\ \mathrm{mm};$$

a prema uvjetu da srednji bočni pritisak mora biti manji od dopuštenoga (3.6):

$$p = \frac{F_{\mathrm{C}}}{n\cdot t_{\mathrm{o}}\cdot d} \le p_{\mathrm{d}}, \qquad d \ge \frac{F_{\mathrm{C}}}{n\cdot t_{\mathrm{o}}\cdot p_{\mathrm{d}}},$$

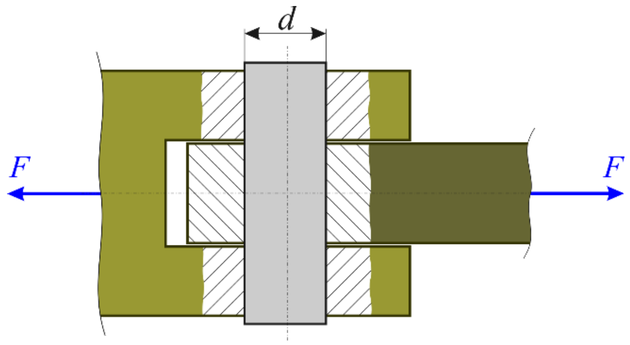
$$d \ge \frac{34,73\cdot 10^3}{18\cdot 100}, \qquad d \ge 19,3\ \mathrm{mm}.$$

Oba uvjeta bit će zadovoljena ako se za promjer svornjaka izabere vrijednost $d = 20\ \mathrm{mm}$.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 3.1. Za spoj opterećen silom F (slika Z.3.1.) valja odrediti srednje posmično naprezanje u plohama smicanja svornjaka.

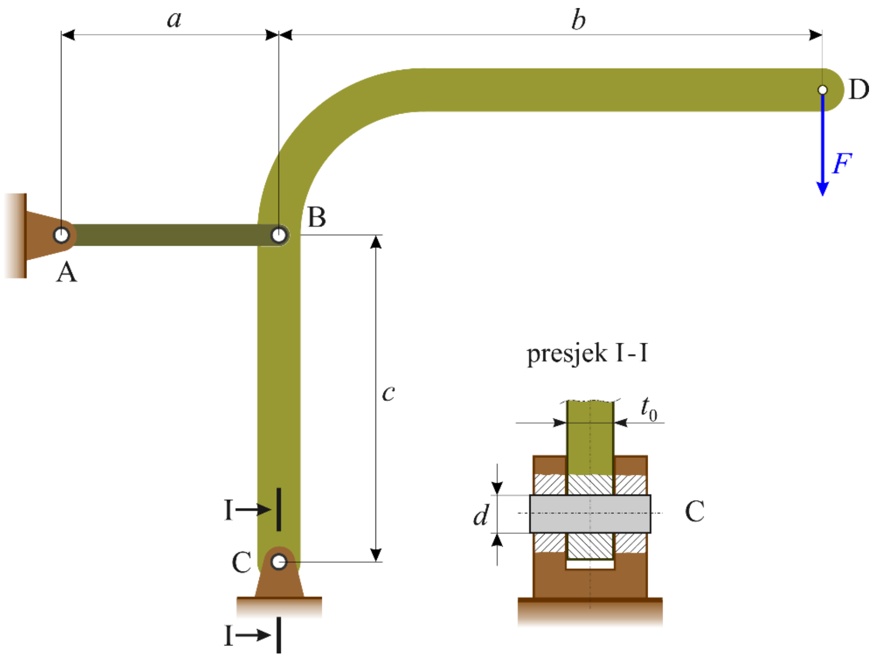
Zadano je: $F = 18\ \mathrm{kN}$, $d = 16\ \mathrm{mm}$.



Slika Z.3.1. *Zadatak 3.1.*

Zadatak 3.2. Za konstrukciju prema slici Z.3.2. valja dimenzionirati svornjak u zglobu C prema dopuštenom posmičnom naprezanju te dopuštenom bočnom pritisku.

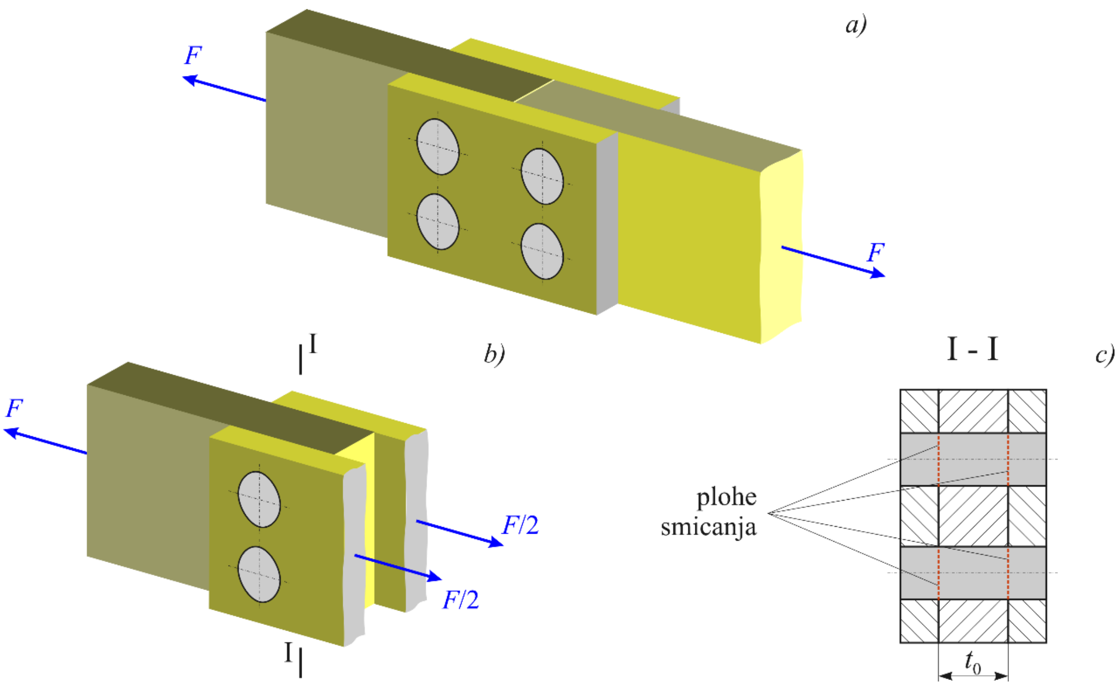
Zadano je: $a = 1{,}2\ \text{m}$, $b = 2{,}8\ \text{m}$, $c = 2{,}4\ \text{m}$, $F = 18\ \text{kN}$, $\tau_\text{d} = 90\ \text{MPa}$, $p_\text{d} = 100\ \text{MPa}$, $t_\text{o} = 18\ \text{mm}$.



Slika Z.3.2. *Zadatak 3.2.*

Zadatak 3.3. Valja odrediti dopušteno opterećenje ($F = ?$) spoja prema slici Z.3.3. ako su poznati dopušteno posmično naprezanje i dopušteni bočni pritisak.

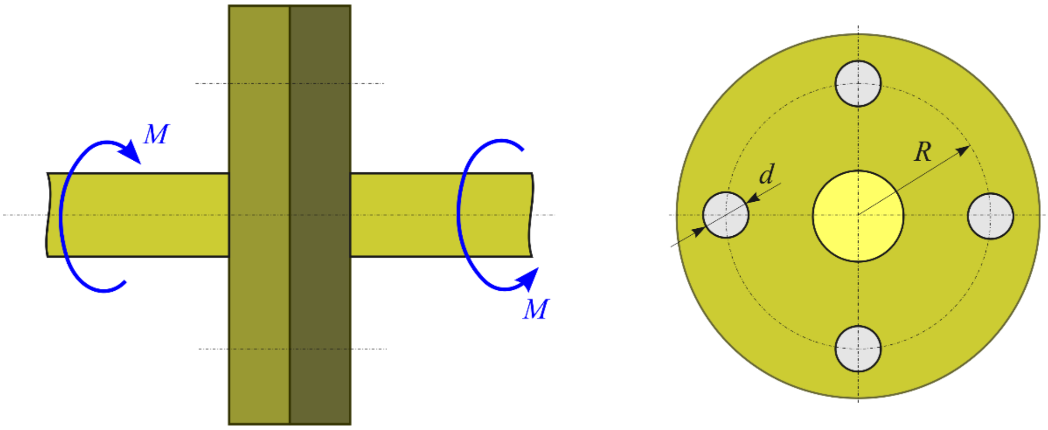
Zadano je: $\tau_\text{d} = 80\ \text{MPa}$, $p_\text{d} = 90\ \text{MPa}$, $d = 12\ \text{mm}$, $t_\text{o} = 14\ \text{mm}$.



Slika Z.3.3. *Zadatak 3.3.*

Zadatak 3.4. Dimenzionirati vijke u spojci prema slici Z.3.4.

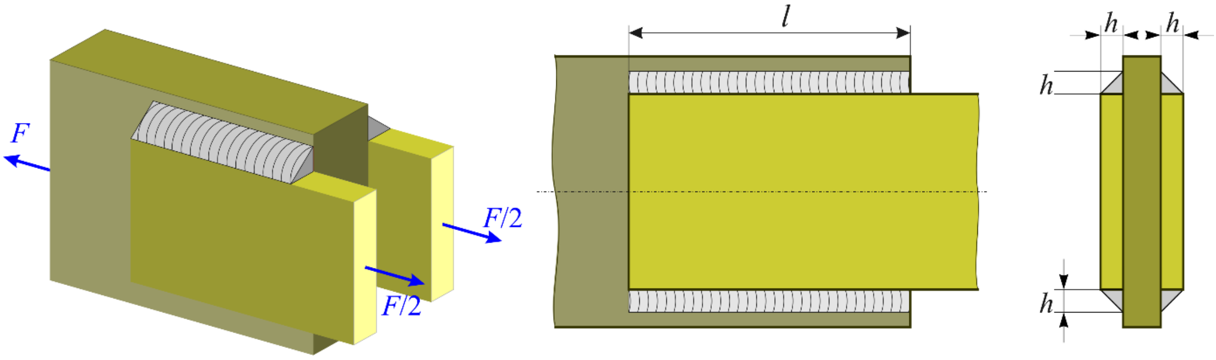
Zadano je: $M = 20\ \mathrm{kN \cdot m}$, $R = 200\ \mathrm{mm}$, $\tau_\mathrm{d} = 90\ \mathrm{MPa}$.



Slika Z.3.4. *Zadatak 3.4.*

Zadatak 3.5. U zavarenom spoju dvaju limova (slika Z.3.5.) valja odrediti potrebnu duljinu zavara ($l = ?$).

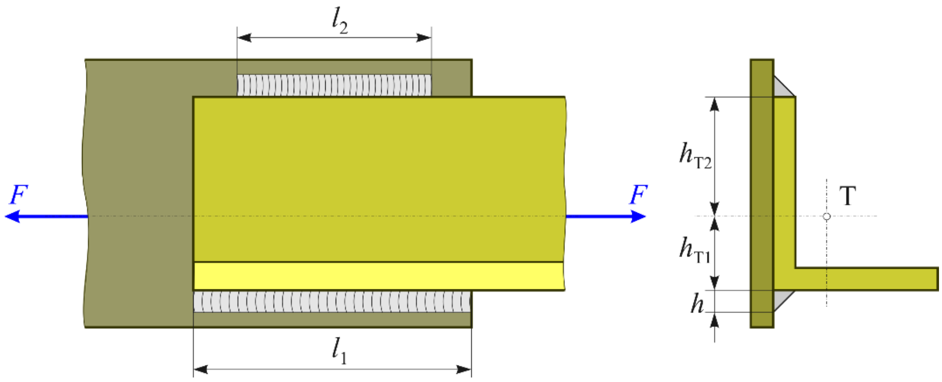
Zadano je: $F = 15\ \mathrm{kN}$, $h = 8\ \mathrm{mm}$, $\tau_\mathrm{d} = 90\ \mathrm{MPa}$.



Slika Z.3.5. *Zadatak 3.5.*

Zadatak 3.6. Jednakokračni L profil dimenzija 50 x 50 x 5 mm zavaren je za ploču prema slici Z.3.6. Valja odrediti duljine zavara ($l_1 = ?, l_2 = ?$) ako je zavareni spoj opterećen silom F.

Zadano je: $F = 38\ \mathrm{kN}$, $h = 5\ \mathrm{mm}$, $\tau_\mathrm{d} = 50\ \mathrm{MPa}$.



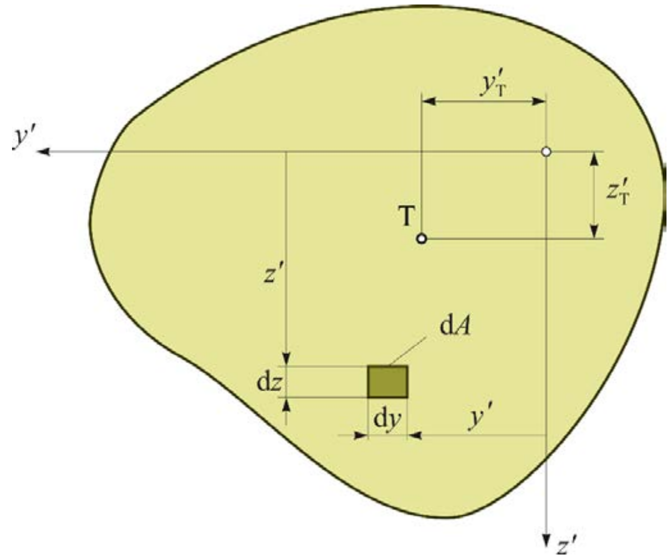
Slika Z.3.6. *Zadatak 3.6.*

4. GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE POPREČNIH PRESJEKA

U prethodnim poglavljima vezanima za aksijalno opterećenje i smicanje za izračunavanje normalnih i tangencijalnih naprezanja potrebna je bila samo površina poprečnog presjeka. U sljedećim poglavljima razmatrat će se uvijanje i savijanje štapa te kontrola njegove stabilnosti. Za tu svrhu trebat će odrediti i neke druge karakteristike poprečnog presjeka, koje se razmatraju u ovom poglavlju.

4.1. STATIČKI MOMENTI POVRŠINE I TEŽIŠTE POPREČNOG PRESJEKA

Neka je zadan poprečni presjek proizvoljnog oblika prema slici 4.1.



Slika 4.1. *Poprečni presjek proizvoljnog oblika*

Statički momenti površine poprečnog presjeka u odnosu na pomoćne osi y' i z' definiraju se kao

$$S_{y'} = \int_A z' \cdot \mathrm{d}A, \quad S_{z'} = \int_A y' \cdot \mathrm{d}A. \tag{4.1}$$

Isto tako za čitav poprečni presjek vrijedi da su statički momenti jednaki produktu površine i udaljenosti njezina težišta od odgovarajuće osi:

$$S_{y'} = A \cdot z'_{\mathrm{T}}, \quad S_{z'} = A \cdot y'_{\mathrm{T}}. \tag{4.2}$$

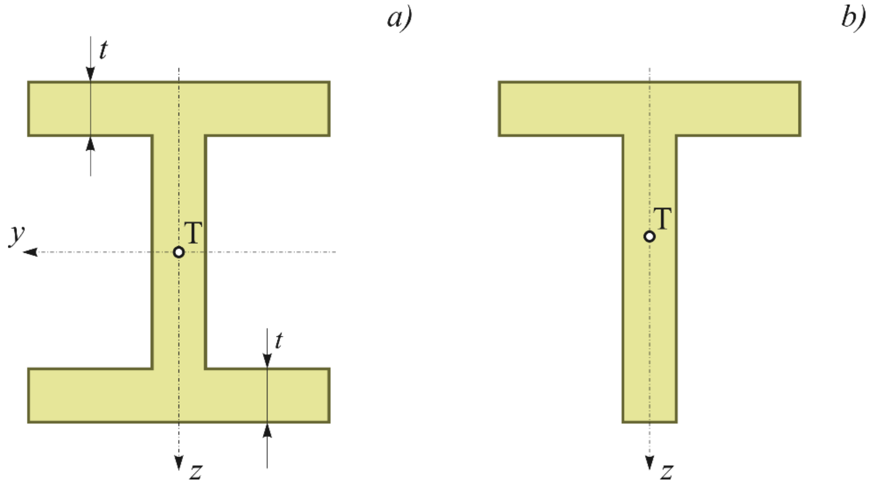
Uspoređivanjem jednadžbi (4.1) i (4.2) mogu se odrediti koordinate težišta u odnosu na pomoćne osi y'_{T} i z'_{T}:

$$y'_{\mathrm{T}} = \frac{S_{z'}}{A}, \quad z'_{\mathrm{T}} = \frac{S_{y'}}{A}. \tag{4.3}$$

Iz jednadžbi (4.2) vidljivo je da su statički momenti površine poprečnog presjeka za osi y i z koje prolaze težištem poprečnog presjeka jednaki nuli, tj.:

$$S_y = 0, \quad S_z = 0. \tag{4.4}$$

Važno je naglasiti sljedeće: ako poprečni presjek ima dvije osi simetrije, težište leži u sjecištu tih simetrala (slika 4.2.a), a ako se radi o poprečnom presjeku s jednom osi simetrije, položaj težišta je na toj osi (slika 4.2.b).



Slika 4.2. *Položaj težišta za poprečni presjek: a) s dvjema osima simetrije, b) s jednom osi simetrije*

4.2. AKSIJALNI, POLARNI I DEVIJACIJSKI (CENTRIFUGALNI) MOMENTI TROMOSTI (INERCIJE) POPREČNOG PRESJEKA

Aksijalni momenti tromosti (inercije) poprečnog presjeka odnose se uvijek na neke osi, pa su za osi y' i z' (slika 4.3.) definirani izrazima:

$$I_y' = \int_A z'^2 \cdot \mathrm{d}A, \quad I_z' = \int_A y'^2 \cdot \mathrm{d}A. \tag{4.5}$$

Polarni moment tromosti definiran je prema izrazu:

$$I_\mathrm{P} = \int_A \rho^2 \cdot \mathrm{d}A. \tag{4.6}$$

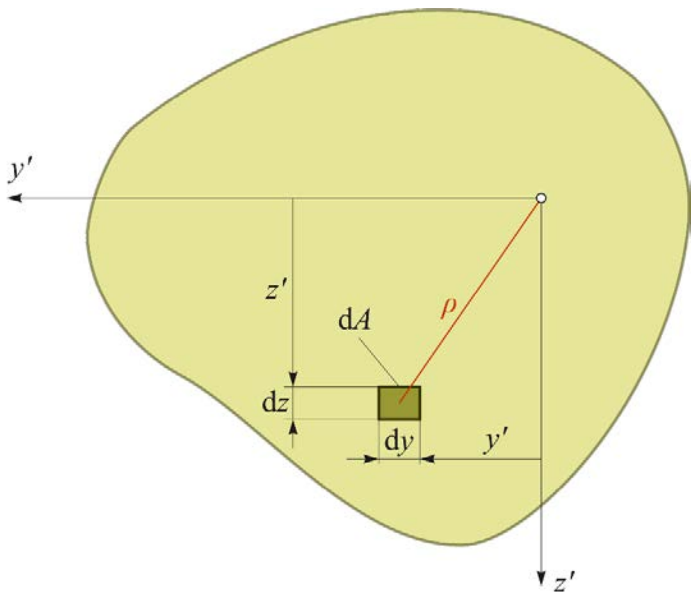
Može se dokazati da je polarni moment tromosti jednak zbroju aksijalnih momenata tromosti, odnosno zbroj aksijalnih momenata tromosti za dvije međusobno okomite osi jednak je polarnom momentu tromosti u odnosu na sjecište tih osi (slika 4.3.):

$$I_\mathrm{P} = \int_A \rho^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(y'^2 + z'^2\right) \cdot \mathrm{d}A = \int_A y'^2 \cdot \mathrm{d}A + \int_A z'^2 \cdot \mathrm{d}A = I_z' + I_y'. \tag{4.7}$$

Iz same definicije aksijalnih momenata tromosti i polarnog momenta tromosti uočava se da su oni uvijek pozitivni.

Devijacijski moment tromosti poprečnog presjeka odnosi se na koordinatni sustav i računa se prema izrazu:

$$I'_{yz} = \int_A y' \cdot z' \cdot \mathrm{d}A. \tag{4.8}$$



Slika 4.3. *Veza polarnog i aksijalnih momenata tromosti*

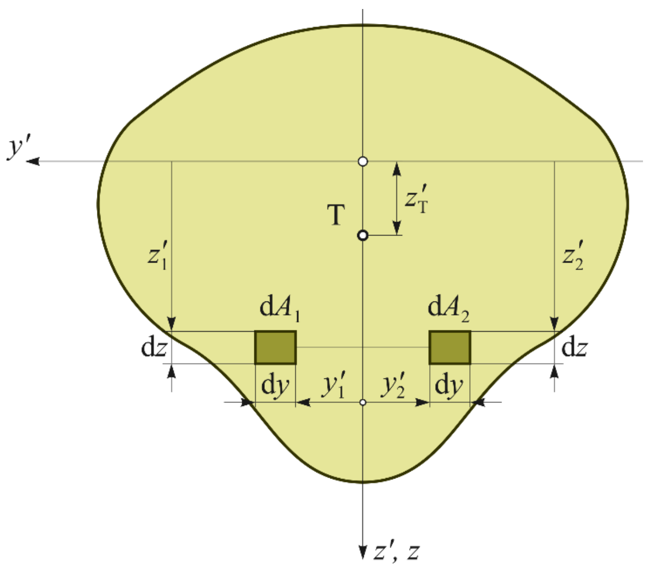
Ovaj moment tromosti može biti pozitivan, negativan ili jednak nuli.

Neka je zadan poprečni presjek s jednom osi simetrije (slika 4.4.). Za svaki elementarni dio površine poprečnog presjeka $\mathrm{d}A_1$ postoji njemu u odnosu na simetralu simetričan dio $\mathrm{d}A_2$ koji ima istu z koordinatu, a y koordinatu suprotnog predznaka, pa vrijedi:

$$y_1 \cdot z_1' \cdot \mathrm{d}A_1 = -y_2 \cdot z_2' \cdot \mathrm{d}A_2 .$$

Zbog toga je prema (4.8) devijacijski moment tromosti za presjek s jednom ili dvjema osima simetrije I'_{yz} jednak nuli:

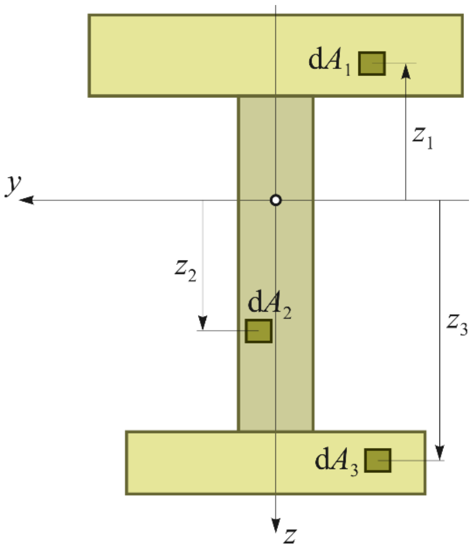
$$I'_{yz} = 0. \tag{4.9}$$



Slika 4.4. *Poprečni presjek s jednom osi simetrije*

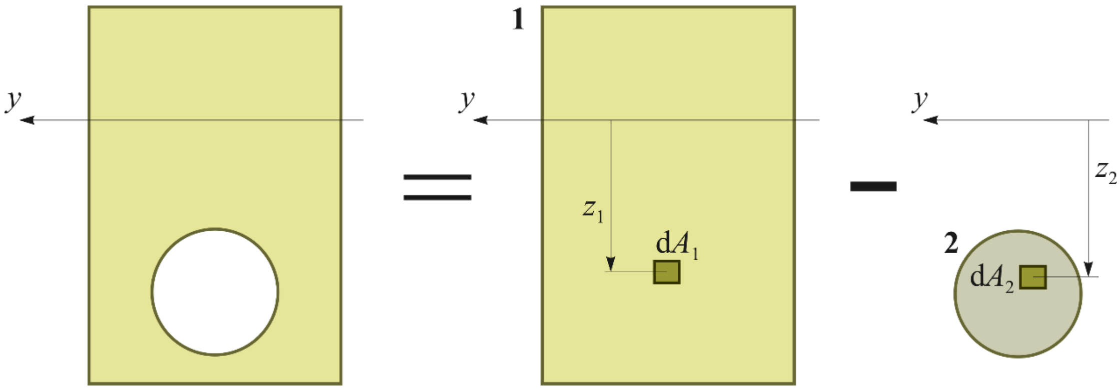
Ako se radi o složenom poprečnom presjeku koji je sastavljen od jednostavnih oblika, kao što je na primjer poprečni presjek na slici 4.5. sastavljen od triju pravokutnika, moment tromosti takva složenoga poprečnog presjeka u odnosu na neku os jednak je zbroju momenata tromosti pojedinih dijelova tog presjeka u odnosu na istu os:

$$I_y = \int_{A_1} z_1^2 \cdot \mathrm{d}A_1 + \int_{A_2} z_2^2 \cdot \mathrm{d}A_2 + \int_{A_3} z_3^2 \cdot \mathrm{d}A_3 \,. \tag{4.10}$$



Slika 4.5. *Složeni poprečni presjek*

Ako se radi o oslabljenom presjeku kao što je pravokutni presjek s otvorom oblika kruga (slika 4.6.), ukupni moment tromosti takva presjeka u odnosu na neku os jednak je razlici momenata tromosti pravokutnika i kruga u odnosu na istu os.

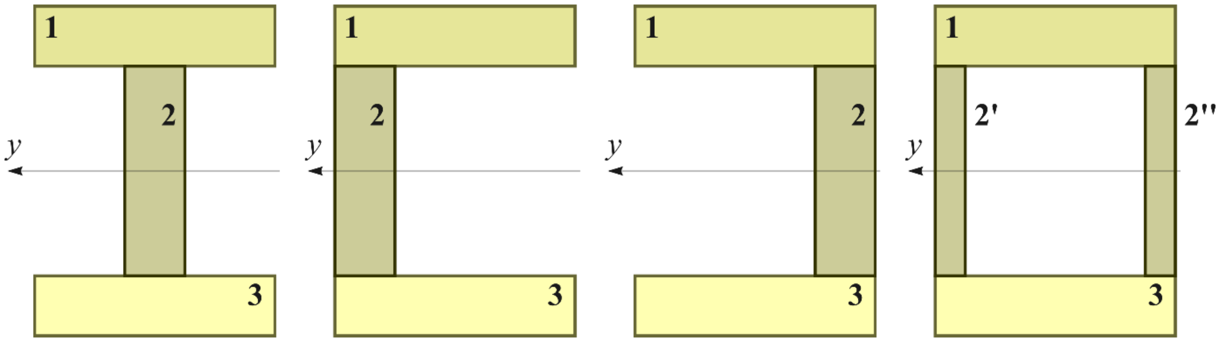


Slika 4.6. *Oslabljeni presjek*

$$I_y = \int_{A_1} z_1^2 \cdot \mathrm{d}A_1 - \int_{A_2} z_2^2 \cdot \mathrm{d}A_2 \,. \tag{4.11}$$

Vrijedi i pravilo o paralelnom pomaku presjeka: ***Moment tromosti poprečnog presjeka u odnosu na neku os neće se promijeniti ako se čitav presjek ili pojedini njegovi dijelovi pomiču paralelno s tom osi.***

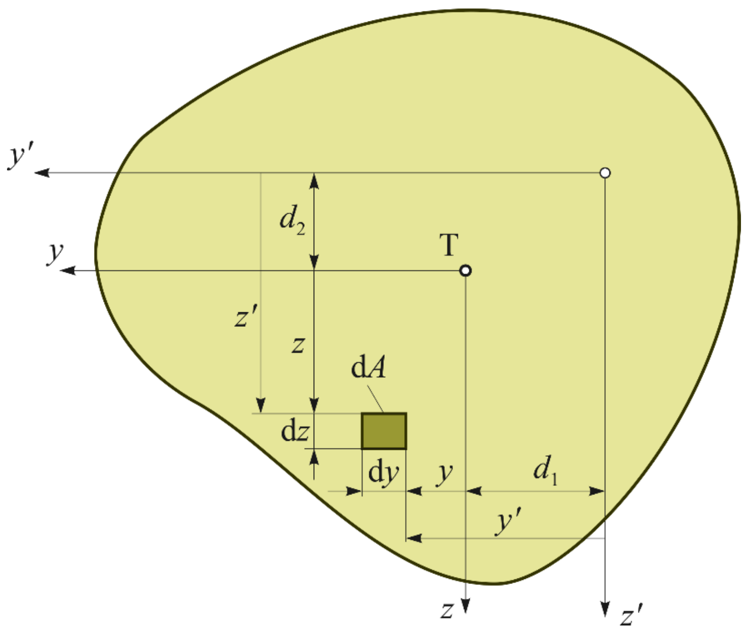
Tako svi presjeci na slici 4.7., nastali iz početnog presjeka paralelnim pomicanjem njegovih dijelova s osi y, istog su aksijalnog momenta tromosti u odnosu na os y.



Slika 4.7. *Svi presjeci na slici imaju isti moment tromosti*

4.2.1. Promjena momenata tromosti pri translaciji koordinatnog sustava – Steinerovo pravilo

Ako su poznati aksijalni momenti tromosti za težišne osi y i z te devijacijski moment tromosti za koordinatni sustav, kroz težište pomoću izraza za transformaciju mogu se odrediti aksijalni momenti tromosti za proizvoljne osi y' i z' koje su paralelne osima y i z kao i devijacijski moment tromosti za pomaknuti koordinatni sustav (slika 4.8.).



Slika 4.8. *Steinerovo pravilo*

Prema definiciji aksijalnog momenta tromosti jest:

$$I'_y = \int_A z'^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(z + d_2\right)^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(z^2 + 2 \cdot z \cdot d_2 + d_2^2\right) \cdot \mathrm{d}A\,,$$

$$I'_y = \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A + 2 \cdot d_2 \cdot \int_A z \cdot \mathrm{d}A + d_2^2 \cdot \int_A \mathrm{d}A = I_y + 2 \cdot d_2 \cdot S_y + d_2^2 \cdot A\,.$$

Prema (4.4) je $S_y = 0$, pa je gornji izraz jednak:

$$I'_y = I_y + d_2^2 \cdot A = I_y + z_\mathrm{T}'^2 \cdot A\,. \tag{4.12}$$

Na isti je način:

$$I'_z = \int_A y'^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(y + d_1\right)^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot d_1 + d_1^2\right) \cdot \mathrm{d}A,$$

$$I'_z = \int_A y^2 \cdot \mathrm{d}A + 2 \cdot d_1 \cdot \int_A y \cdot \mathrm{d}A + d_1^2 \cdot \int_A \mathrm{d}A = I_z + 2 \cdot d_1 \cdot S_z + d_1^2 \cdot A.$$

Prema (4.4) je $S_z = 0$, pa je gornji izraz jednak:

$$I'_z = I_z + d_1^2 \cdot A = I_z + y_T'^2 \cdot A. \tag{4.13}$$

Za devijacijski moment tromosti u odnosu na pomaknuti koordinatni sustav vrijedi:

$$I'_{yz} = \int_A y' \cdot z' \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(y + d_1\right) \cdot \left(z + d_2\right) \mathrm{d}A = \int_A \left(y \cdot z + y \cdot d_2 + z \cdot d_1 + d_1 \cdot d_2\right) \cdot \mathrm{d}A,$$

$$I'_{yz} = \int_A y \cdot z \cdot \mathrm{d}A + d_2 \cdot \int_A y \cdot \mathrm{d}A + d_1 \cdot \int_A z \cdot \mathrm{d}A + d_1 \cdot d_2 \cdot \int_A \mathrm{d}A$$

$$I'_{yz} = I_{yz} + d_2 \cdot S_z + d_1 \cdot S_y + d_1 \cdot d_2 \cdot A$$

te se uz $S_y = 0$ i $S_z = 0$ dobije:

$$I'_{yz} = I_{yz} + d_1 \cdot d_2 \cdot A = I_{yz} + y'_T \cdot z'_T \cdot A. \tag{4.14}$$

Izrazi (4.12), (4.13) i (4.14) predstavljaju ***Steinerovo pravilo*** iskazano na sljedeći način:

- ***Aksijalni momenti tromosti u odnosu na osi koje ne prolaze težištem poprečnog presjeka jednaki su aksijalnim momentima tromosti u odnosu na paralelne težišne osi uvećanom za produkt površine poprečnog presjeka i kvadrata udaljenosti težišta od zadanih osi.***
- ***Devijacijski moment tromosti u odnosu na koordinatni sustav koji ne prolazi težištem poprečnog presjeka jednak je devijacijskom momentu tromosti u odnosu na paralelni koordinatni sustav kroz težište uvećanom za produkt površine poprečnog presjeka i koordinata težišta u zadanom koordinatnom sustavu.***

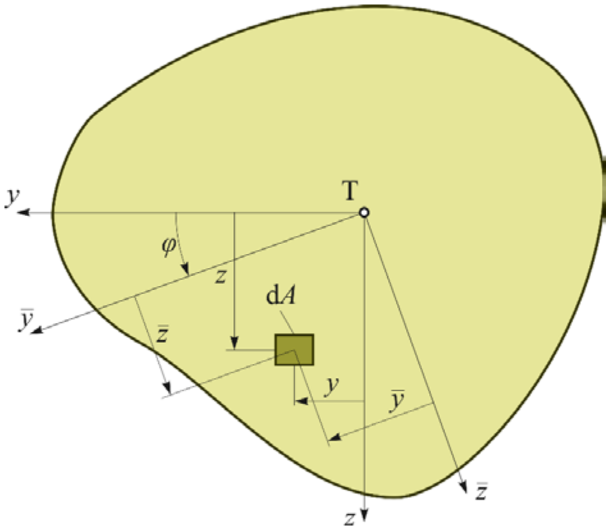
4.2.2. Promjena momenata tromosti pri rotaciji koordinatnog sustava

Ako su poznati aksijalni momenti tromosti u odnosu na težišne osi y i z te devijacijski moment tromosti u odnosu na koordinatni sustav, kroz težište poprečnog presjeka mogu se odrediti izrazi za aksijalne i devijacijski moment tromosti u odnosu na osi $\overline{y}$ i $\overline{z}$ dobivene rotacijom koordinatnog sustava za kut φ oko težišta (slika 4.9.).

Koordinate elementarnog dijela poprečnog presjeka ΔA u odnosu na zarotirane osi $\overline{y}$ i $\overline{z}$ mogu se dobiti prema izrazima:

$$\overline{y} = y \cdot \cos\varphi + z \cdot \sin\varphi, \tag{4.15}$$

$$\overline{z} = -y \cdot \sin\varphi + z \cdot \cos\varphi. \tag{4.16}$$



Slika 4.9. *Zarotirane koordinatne osi*

Aksijalni momenti tromosti u odnosu na zarotirane osi kao i devijacijski moment tromosti u odnosu na zarotirani koordinatni sustav sada su

$$\bar{I}_y = \int_A \bar{z}^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(-y \cdot \sin\varphi + z \cdot \cos\varphi\right)^2 \cdot \mathrm{d}A,$$

$$\bar{I}_y = \sin^2\varphi \cdot \int_A y^2 \cdot \mathrm{d}A - 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \int_A y \cdot z \cdot \mathrm{d}A + \cos^2\varphi \cdot \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A,$$

$$\bar{I}_z = \int_A \bar{y}^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(y \cdot \cos\varphi + z \cdot \sin\varphi\right)^2 \cdot \mathrm{d}A,$$

$$\bar{I}_z = \cos^2\varphi \cdot \int_A y^2 \cdot \mathrm{d}A + 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \int_A y \cdot z \cdot \mathrm{d}A + \sin^2\varphi \cdot \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A,$$

$$\bar{I}_{yz} = \int_A \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot \mathrm{d}A = \int_A \left(y \cdot \cos\varphi + z \cdot \sin\varphi\right) \cdot \left(-y \cdot \sin\varphi + z \cdot \cos\varphi\right) \mathrm{d}A,$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_{yz} &= -\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \int_A y^2 \cdot \mathrm{d}A + \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \cdot \int_A y \cdot z \cdot \mathrm{d}A + \\ &\quad + \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A\end{aligned}.$$

Sređivanjem gornji izrazi prelaze u

$$\bar{I}_y = \cos^2\varphi \cdot I_y + \sin^2\varphi \cdot I_z - 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot I_{yz},$$

$$\bar{I}_z = \sin^2\varphi \cdot I_y + \cos^2\varphi \cdot I_z + 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot I_{yz},$$

$$\bar{I}_{yz} = \left(I_y - I_z\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + I_{yz} \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right).$$

Uvrštavajući trigonometrijske relacije

$$2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \sin\left(2 \cdot \varphi\right), \quad \cos^2\varphi = \frac{1 + \cos\left(2 \cdot \varphi\right)}{2} \text{ i } \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \varphi\right)}{2}$$

u gornje jednadžbe, izrazi aksijalnih i devijacijskog momenta tromosti za zarotirani koordinatni sustav glase:

$$\overline{I}_y = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - I_{yz} \sin(2 \cdot \varphi) \ , \tag{4.17}$$

$$\overline{I}_z = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + I_{yz} \sin(2 \cdot \varphi) \ , \tag{4.18}$$

$$\overline{I}_z = \frac{I_y - I_z}{2} \cdot \sin \varphi + I_{yz} \cos(2 \cdot \varphi) \ . \tag{4.19}$$

Postoje takve osi y_o i z_o za koje će aksijalni momenti tromosti poprimiti najveću i najmanju vrijednost.

Ovi aksijalni momenti tromosti nazivaju se glavni momenti tromosti i računaju se prema izrazima:

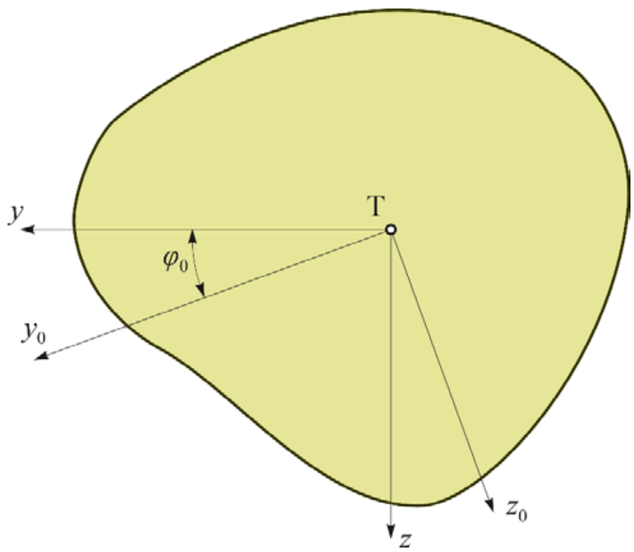
$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + \left(-I_{yz}\right)^2} \ , \tag{4.20}$$

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + \left(-I_{yz}\right)^2} \ . \tag{4.21}$$

Pravci glavnih momenata tromosti (slika 4.10.) određeni su izrazom:

$$\tan 2\varphi_o = -\frac{I_{yz}}{\frac{I_y - I_z}{2}} = -\frac{2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} . \tag{4.22}$$

Uvrštavanjem dobivenog kuta φ_o u (4.17) dobit će se vrijednost I_1, pa je os y_o glavna os 1, ili vrijednost I_2, pa je os y_o glavna os 2.



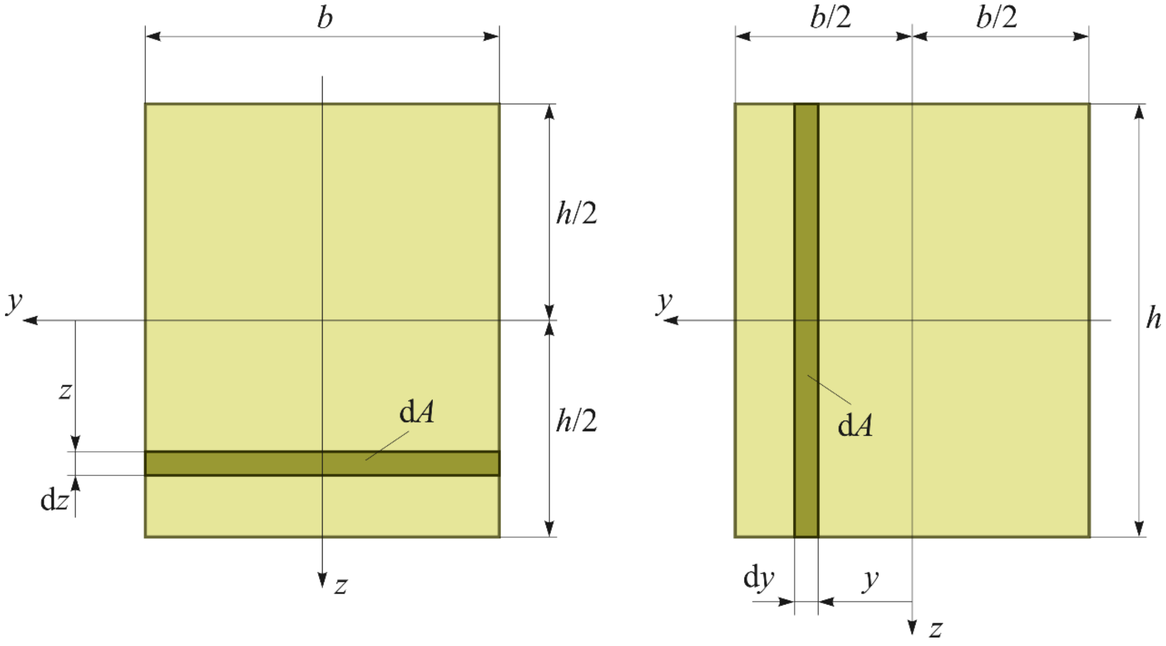
Slika 4.10. *Glavne osi tromosti*

4.2.3. Aksijalni i devijacijski momenti tromosti nekih jednostavnih oblika poprečnog presjeka

U ovom su dijelu izvedeni izrazi za osnovne oblike poprečnog presjeka: pravokutnik, krug i trokut.

- **Pravokutni poprečni presjek**

Za pravokutni poprečni presjek na slici 4.11. aksijalni momenti tromosti u odnosu na težišne osi y i z mogu se odrediti na sljedeći način:



Slika 4.11. *Pravokutni poprečni presjek*

$$I_y = \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \cdot b \cdot \mathrm{d}z = b \cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{b}{3} \cdot \left[\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{h^3}{8}\right)\right] = \frac{b}{3} \cdot \frac{h^3}{4},$$

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \tag{4.23}$$

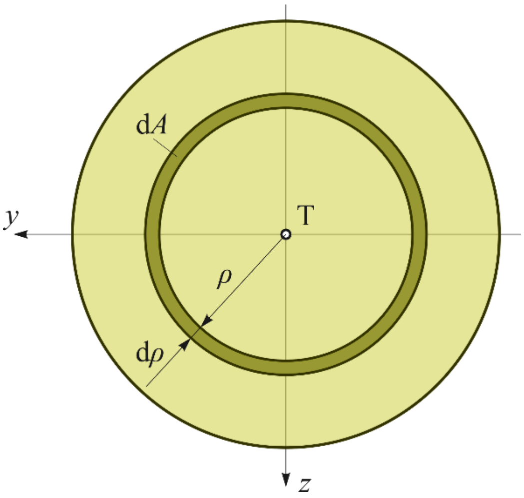
$$I_z = \int_A y^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot h \cdot \mathrm{d}y = h \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-b/2}^{+b/2} = \frac{h}{3} \cdot \left[\frac{b^3}{8} - \left(-\frac{b^3}{8}\right)\right] = \frac{h}{3} \cdot \frac{b^3}{4}$$

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}. \tag{4.24}$$

Kako su težišne osi y i z ujedno i osi simetrije poprečnog presjeka, prema (4.9) devijacijski moment tromosti I_{yz} jednak je nuli.

- **Kružni poprečni presjek**

Za krug (slika 4.12.) aksijalni momenti tromosti u odnosu na osi y i z su jednaki i iznosa koji je pola vrijednosti polarnog momenta tromosti.



Slika 4.12. *Kružni poprečni presjek*

Polarni moment tromosti računa se prema izrazu:

$$I_{\mathrm{P}} = \int_A \rho^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_0^R \rho^2 \cdot 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot \mathrm{d}\rho = 2 \cdot \pi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^R = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \tag{4.25}$$

pa su aksijalni momenti tromosti jednaki:

$$I_y = I_z = \frac{I_{\mathrm{P}}}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \tag{4.26}$$

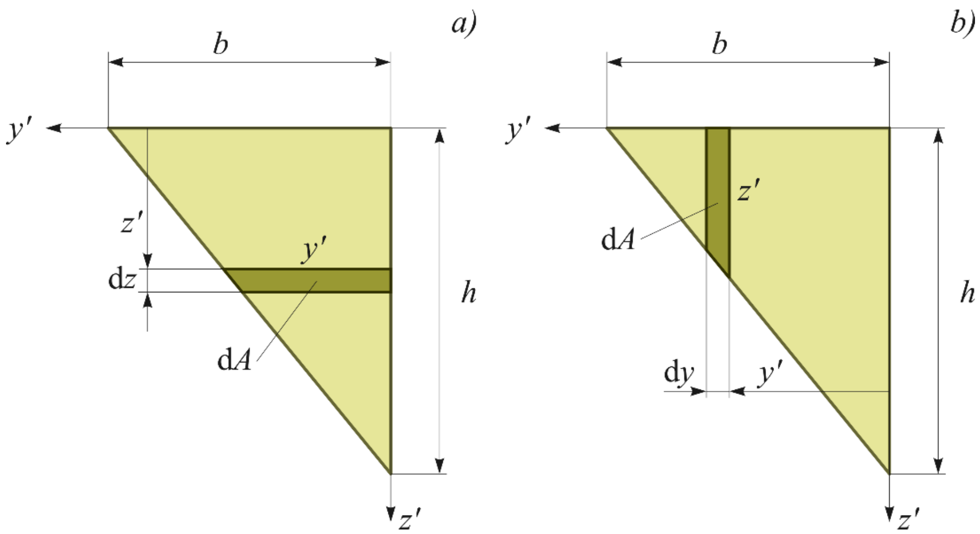
Za ovaj poprečni presjek također je devijacijski moment tromosti jednak nuli.

- **Trokutni poprečni presjek**

Radi jednostavnijeg izračunavanja aksijalnih i devijacijskog momenta tromosti za težišne osi izračunat će se najprije isti za pomoćne osi.

Iz sličnosti trokuta prema slici 4.13.a i b dobije se:

$$y' = \frac{b \cdot (h - z')}{h} = b - \frac{b}{h} \cdot z', \quad z' = \frac{h \cdot (b - y')}{b} = h - \frac{h}{b} \cdot y'.$$



Slika 4.13. *Trokutni poprečni presjek: a) pomoćna os y', b) pomoćna os z'*

Dalje je:

$$I'_y = \int_A z'^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_0^h z'^2 \cdot y' \cdot \mathrm{dz} = \int_0^h z'^2 \cdot \left(b - \frac{b}{h} \cdot z' \right) \mathrm{dz} = b \cdot \frac{z'^3}{3} \bigg|_0^h - \frac{b}{h} \cdot \frac{z'^4}{4} \bigg|_0^h$$

$$I'_y == \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

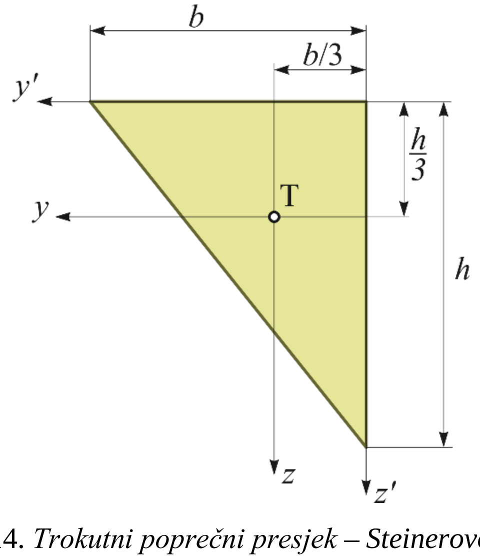
$$I'_z = \int_A y'^2 \cdot \mathrm{d}A = \int_0^h y'^2 \cdot z' \cdot \mathrm{dy} = \int_0^b y'^2 \cdot \left(h - \frac{h}{b} \cdot y' \right) \mathrm{d}y = h \cdot \frac{y'^3}{3} \bigg|_0^b - \frac{h}{b} \cdot \frac{y'^4}{4} \bigg|_0^h$$

$$I'_z = \frac{h \cdot b^3}{3} - \frac{h \cdot b^3}{4} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$I'_{yz} = \int_A \frac{y'}{2} \cdot z' \cdot \mathrm{d}A$$

$$I'_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^h \left(b - \frac{b}{h} \cdot z' \right) \cdot z' \cdot y' \cdot \mathrm{dz} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^h \left(b - \frac{b}{h} \cdot z' \right) \cdot z' \cdot \left(b - \frac{b}{h} \cdot z' \right) \mathrm{dz}$$

$$I'_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \left(b^2 \cdot \frac{z'^2}{2} \bigg|_0^h - 2 \cdot b \cdot \frac{b}{h} \cdot \frac{z'^3}{3} \bigg|_0^h + \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{z'^4}{4} \bigg|_0^h \right) = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}.$$



Slika 4.14. *Trokutni poprečni presjek – Steinerovo pravilo*

Primjenom Steinerova pravila može se dobiti (slika 4.14.):

$$I'_y = I_y + \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot A, \quad I'_z = I_z + \left(\frac{b}{3} \right)^2 \cdot A, \quad I'_{yz} = I_{yz} + \left(\frac{b}{3} \right) \cdot \left(\frac{h}{3} \right) \cdot A,$$

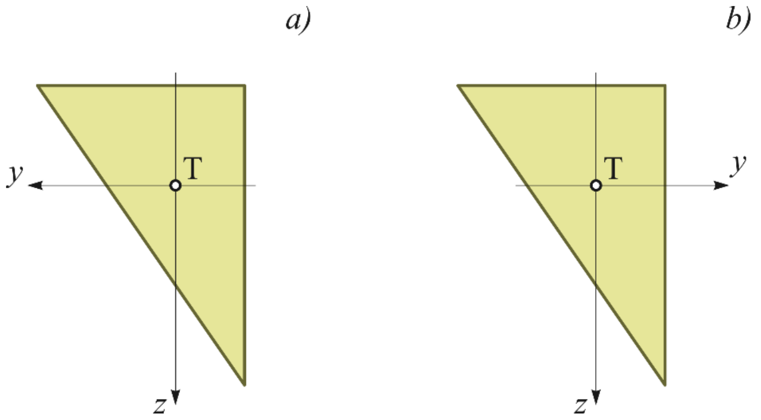
pa su aksijalni momenti tromosti u odnosu na težišne osi i devijacijski moment tromosti u odnosu na koordinatni sustav kroz težište:

$$I_y = I'_y - \left(\frac{h}{3} \right)^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{h^2}{9} \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{36} \ , \tag{4.27}$$

$$I_z = I'_z - \left(\frac{b}{3}\right)^2 \cdot A = \frac{h \cdot b^3}{12} - \frac{b^2}{9} \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{h \cdot b^3}{36} \ , \tag{4.28}$$

$$I_{yz} = I'_{yz} - \frac{b}{3} \cdot \frac{h}{3} \cdot A = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b \cdot h}{9} \cdot \frac{b \cdot h}{2} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72} \ . \tag{4.29}$$

Ako jedna od osi koordinatnog sustava promijeni smjer, mijenja se predznak devijacijskog momenta tromosti. Tako je za trokutni presjek s koordinatnim osima prema slici 4.15.a devijacijski moment tromosti negativan, a za trokutni presjek s koordinatnim osima prema slici 4.15.b pozitivan.



Slika 4.15. *Promjena predznaka devijacijskog momenta tromosti s promjenom smjera jedne osi*

Pri kontroli stabilnosti tlačno opterećenih štapova trebat će izračunavati minimalni polumjer tromosti poprečnog presjeka.

Polumjeri tromosti poprečnog presjeka izračunavaju se prema izrazu:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \ , \tag{4.30}$$

odnosno glavni polumjeri tromosti prema izrazu:

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}}, \quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} \ . \tag{4.31}$$

4.3. AKSIJALNI I POLARNI MOMENTI OTPORA POPREČNOG PRESJEKA

Kod izračunavanja maksimalnog normalnog naprezanja pri savijanju odnosno maksimalnog tangencijalnog naprezanja pri uvijanju štapa rabit će se aksijalni momenti otpora definirani prema izrazu:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \tag{4.32}$$

odnosno polarni moment otpora definiran prema izrazu:

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \ . \tag{4.33}$$

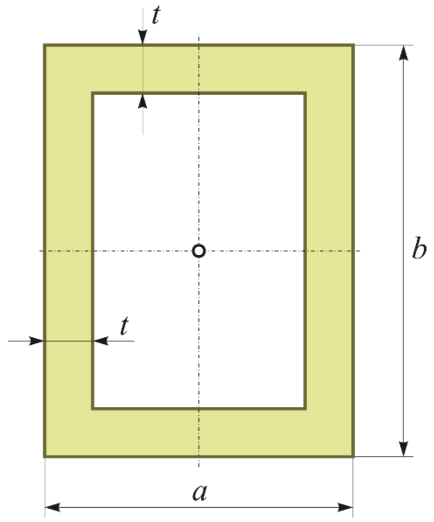
4.4. IZRAČUNAVANJE GEOMETRIJSKIH KARAKTERISTIKA SLOŽENIH POPREČNIH PRESJEKA

Pod složenim poprečnim presjekom smatrat će se presjek nastao zbrajanjem ili oduzimanjem jednostavnih oblika: pravokutnika, kruga i trokuta.

Primjer 4.1.

Za poprečni presjek s dvjema osima simetrije prema slici 4.16. valja odrediti položaj težišta, površinu poprečnog presjeka, aksijalne i devijacijski moment tromosti za težišne osi. Izračunati također polumjere tromosti i aksijalne momente otpora.

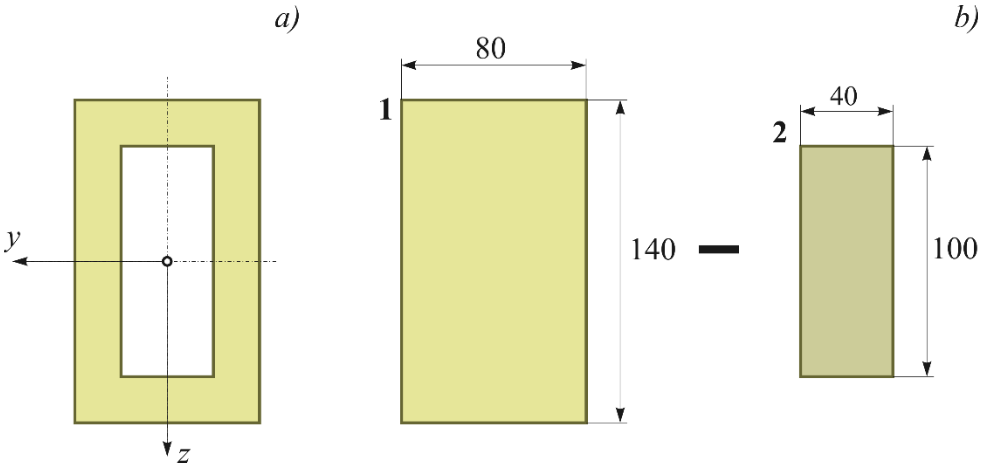
Zadano je: $a = 80\ \mathrm{mm}$, $b = 140\ \mathrm{mm}$, $t = 20\ \mathrm{mm}$.



Slika 4.16. *Primjer 4.1.*

***Rješenje*:**

Već je rečeno de se težište poprečnog presjeka s dvjema osima simetrije nalazi u sjecištu tih osi (slika 4.17.a). Može se uzeti da je složeni presjek nastao tako da smo od vanjskog pravokutnika oduzeli unutarnji pravokutnik (slika 4.17.b).



Slika 4.17. *Primjer 4.1.: a) zadani presjek, b) oduzimanje pravokutnika*

Površina poprečnog presjeka iznosi:

$$A = 80 \cdot 140 - 40 \cdot 100 = 7200 \text{ mm}^2 .$$

Aksijalni momenti tromosti jesu:

$$I_y = \frac{80 \cdot 140^3}{12} - \frac{40 \cdot 100^3}{12} = 14960000 \text{ mm}^4 ,$$

$$I_z = \frac{140 \cdot 80^3}{12} - \frac{100 \cdot 40^3}{12} = 5440000 \text{ mm}^4 .$$

Osi simetrije ujedno su i glavne osi, pa je $I_1 = I_y = 14960000 \text{ mm}^4$, $I_2 = I_z = 5440000 \text{ mm}^4$, dok je devijacijski moment tromosti jednak nuli: $I_{yz} = 0$.

Polumjeri tromosti računaju se prema izrazima:

$$i_1 = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{14960000}{7200}} = 45,6 \text{ mm} ,$$

$$i_2 = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{5440000}{7200}} = 27,5 \text{ mm} ,$$

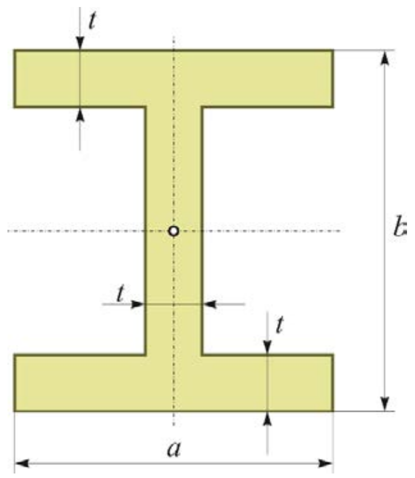
a aksijalni momenti otpora iznose:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{14960000}{70} = 213714 \text{ mm}^3 ,$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{5440000}{40} = 136000 \text{ mm}^3 .$$

Primjer 4.2.

Za poprečni presjek s dvjema osima simetrije prema slici 4.18. valja odrediti položaj težišta, površinu poprečnog presjeka, aksijalne i devijacijski moment tromosti za težišne osi.

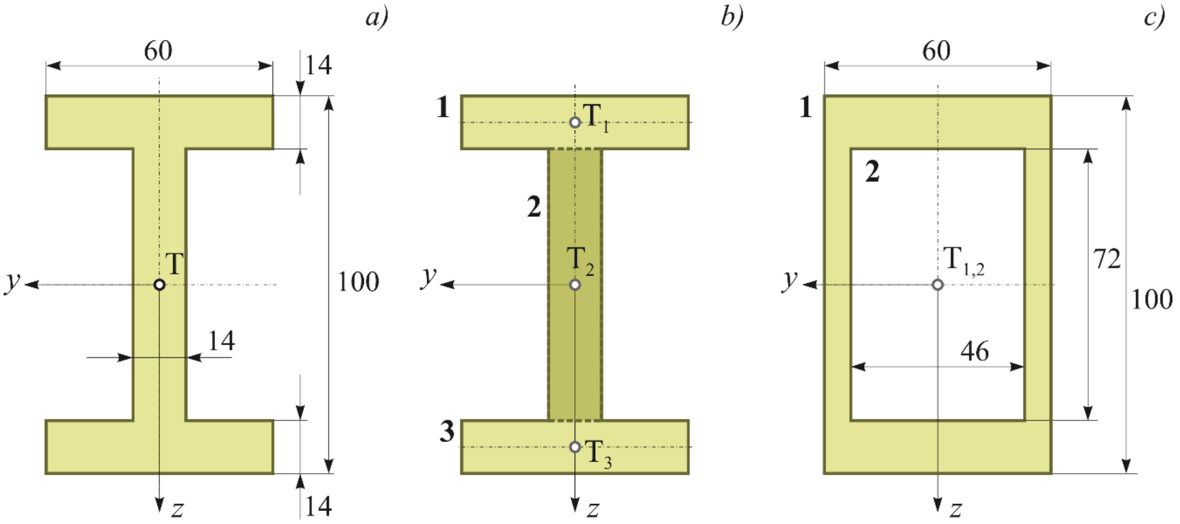


Slika 4.18. *Primjer 4.2.*

Izračunati također polumjere tromosti i aksijalne momente otpora ako je zadano: $a = 60 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $t = 14 \text{ mm}$.

***Rješenje*:**

Težište poprečnog presjeka nalazi se u sjecištu simetrala (slika 4.19.a). Može se uzeti da je složeni presjek sastavljen od triju pravokutnika prema slici 4.19.b.



Slika 4.19. *Primjer 4.2.: a) dimenzije presjeka, b) podjela presjeka na pravokutnike, c) paralelno pomicanju dijelova presjeka*

Površina poprečnog presjeka jest:

$$A = 60 \cdot 14 + 72 \cdot 14 + 60 \cdot 14 = 2688 \text{ mm}^2 .$$

Primjenom Steinerova pravila aksijalni momenti tromosti mogu se izračunati na sljedeći način:

$$I_y = \frac{60 \cdot 14^3}{12} + 43^2 \cdot 840 + \frac{14 \cdot 72^3}{12} + \frac{60 \cdot 14^3}{12} + 43^2 \cdot 840 = 3569216 \text{ mm}^4 ,$$

$$I_z = \frac{14 \cdot 60^3}{12} + \frac{72 \cdot 14^3}{12} + \frac{14 \cdot 60^3}{12} = 520464 \text{ mm}^4 .$$

Paralelnim pomicanjem dijelova presjeka aksijalni moment tromosti u odnosu na os y može se izračunati i na sljedeći način (slika 4.19.c):

$$I_y = \frac{60 \cdot 100^3}{12} - \frac{46 \cdot 72^3}{12} = 3569216 \text{ mm}^4 .$$

Kako se radi o poprečnom presjeku s dvjema osima simetrije, devijacijski moment tromosti I_{yz} jednak je nuli, a osi y i z glavne su osi.

Polumjeri tromosti glase:

$$i_1 = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3569316}{2688}} = 36,4 \text{ mm} ,$$

$$i_2 = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{520464}{2688}} = 13,9 \text{ mm} .$$

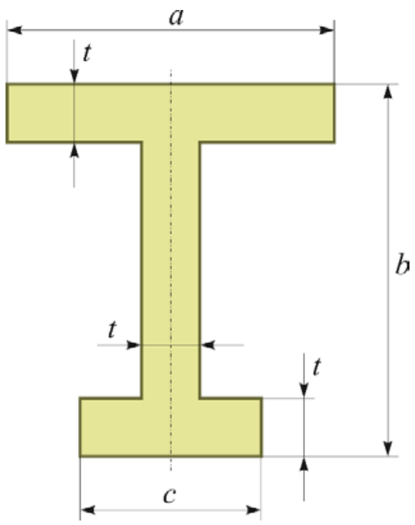
Aksijalni momenti otpora iznose:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{3569216}{50} = 71384 \text{ mm}^3, \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{520464}{30} = 17349 \text{ mm}^3.$$

Primjer 4.3.

Zadan je poprečni presjek s jednom osi simetrije (slika 4.20.). Valja izračunati položaj težišta, površinu poprečnog presjeka, aksijalne momente tromosti za težišne osi i polumjere tromosti te aksijalne momente otpora.

Zadano je: $a = 40$ mm, $b = 82$ mm, $c = 24$ mm, $t = 12$ mm.

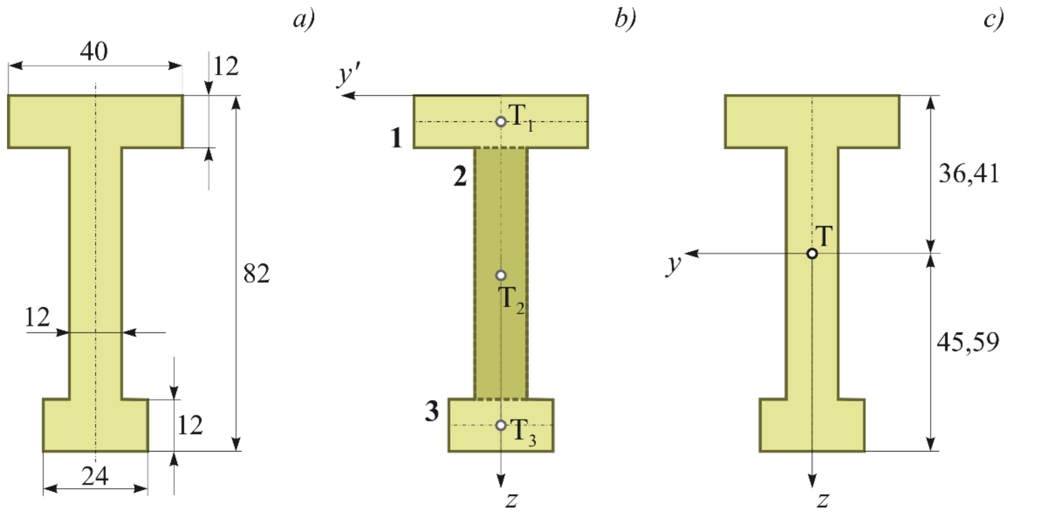


Slika 4.20. *Primjer 4.3.*

***Rješenje*:**

Može se uzeti da je složeni presjek sastavljen od triju pravokutnika prema slici 4.21.b, pa je površina poprečnog presjeka:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 40 \cdot 12 + 58 \cdot 12 + 24 \cdot 12 = 480 + 696 + 288 = 1464 \text{ mm}^2.$$



Slika 4.21. *Primjer 4.3.: a) dimenzije poprečnog presjeka, b) podjela presjeka na pravokutnike, c) težišne osi*

Statički moment površine u odnosu na pomoćnu os y' iznosi:

$$S'_y = A_1 \cdot z'_{T1} + A_2 \cdot z'_{T2} + A_3 \cdot z'_{T3} = 480 \cdot 6 + 696 \cdot 41 + 288 \cdot 76 = 53304 \text{ mm}^3 .$$

Težište poprečnog presjeka nalazi se na simetrali (slika 4.21.a), a položaj u odnosu na pomoćnu os y' (slika 4.21.c) određen je izrazom (4.3):

$$z'_T = \frac{S'_y}{A} = \frac{53304}{1464} = 36,41 \text{ mm} .$$

Primjenom Steinerova pravila aksijalni momenti tromosti mogu se izračunati na sljedeći način:

$$I_y = \frac{40 \cdot 12^3}{12} + 30,41^2 \cdot 480 + \frac{12 \cdot 58^3}{12} + 4,59^2 \cdot 696 + \frac{24 \cdot 12^3}{12} + 39,59^2 \cdot 288$$

$$I_y = 1114282 \text{ mm}^4$$

$$I_z = \frac{12 \cdot 40^3}{12} + \frac{58 \cdot 12^3}{12} + \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 86176 \text{ mm}^4 .$$

Zadani presjek ima jednu os simetrije, pa je devijacijski moment tromosti $I_{yz} = 0$, a osi y i z glavne su osi. Polumjeri tromosti jesu:

$$i_1 = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1114282}{1464}} = 27,6 \text{ mm} ,$$

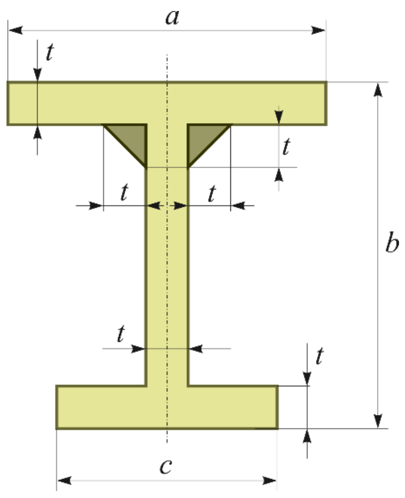
$$i_2 = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{86176}{1464}} = 7,7 \text{ mm} ,$$

a aksijalni momenti otpora iznose:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{1114282}{45,59} = 24441,4 \text{ mm}^3 , \quad W_z = \frac{86176}{20} = 4308,8 \text{ mm}^3 .$$

Primjer 4.4.

Poprečni presjek s jednom osi simetrije prikazan je na slici 4.22.

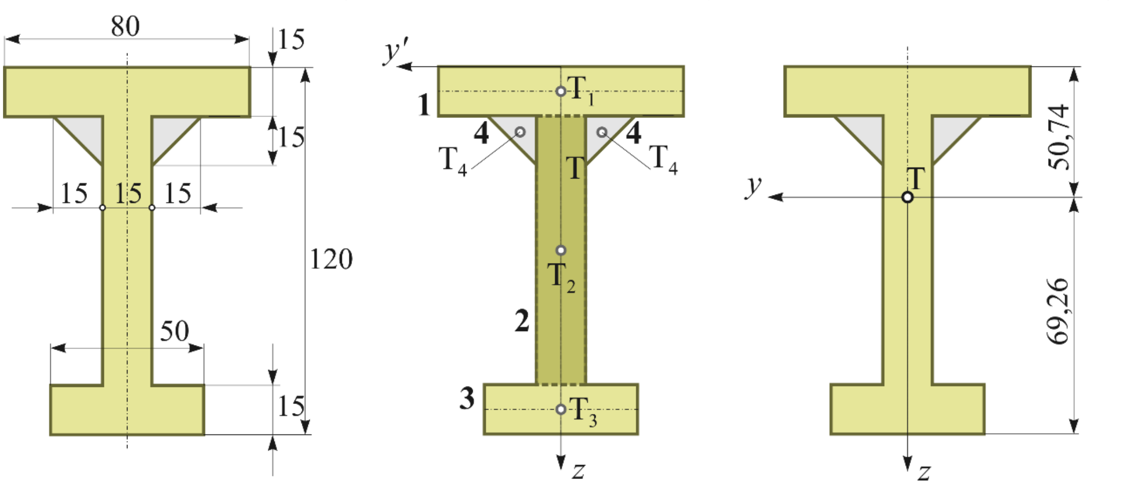


Slika 4.22. *Primjer 4.4.*

Valja izračunati položaj težišta, površinu poprečnog presjeka, aksijalne momente tromosti u odnosu na težišne osi, polumjere tromosti i aksijalne momente otpora. Zadano je: $a = 80\ \text{mm}$, $b = 120\ \text{mm}$, $c = 50\ \text{mm}$, $t = 15\ \text{mm}$.

***Rješenje*:**

Složeni presjek sastavljen je od triju pravokutnika i dvaju trokuta prema slici 4.23.b, pa je površina poprečnog presjeka:



Slika 4.23. *Primjer 4.4.: a) dimenzije poprečnog presjeka, b) podjela presjeka na pravokutnike i trokute, c) težišne osi*

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + 2 \cdot A_4$$

$$A = 80 \cdot 15 + 15 \cdot 90 + 50 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{15 \cdot 15}{2} = 1200 + 1350 + 750 + 2 \cdot 112,5$$

$$A = 3525\ \text{mm}^2.$$

Statički moment površine u odnosu na pomoćnu os y' iznosi:

$$S'_y = A_1 \cdot z'_{\text{T1}} + A_2 \cdot z'_{\text{T2}} + A_3 \cdot z'_{\text{T3}} + 2 \cdot A_4 \cdot z'_{\text{T4}}$$

$$S'_y = 1200 \cdot 7,5 + 1350 \cdot 60 + 750 \cdot 112,5 + 2 \cdot 112,5 \cdot 20 = 178875\ \text{mm}^3.$$

Težište poprečnog presjeka nalazi se na simetrali (slika 4.23.a), a položaj u odnosu na pomoćnu os y' (slika 4.23.b) određen je izrazom (4.3):

$$z'_{\text{T}} = \frac{S'_y}{A} = \frac{178875}{3525} = 50,74\ \text{mm}.$$

Primjenom Steinerova pravila aksijalni momenti tromosti izračunavaju se na sljedeći način:

$$I_y = \frac{80 \cdot 15^3}{12} + 43,24^2 \cdot 1200 + \frac{15 \cdot 90^3}{12} + 9,26^2 \cdot 1350 + \frac{50 \cdot 15^3}{12} + $$
$$+ 61,76^2 \cdot 750 + 2 \cdot \left(\frac{15 \cdot 15^3}{36} + 30,74^2 \cdot 112,5 \right) = 6383358\ \text{mm}^4,$$

$$I_z = \frac{15 \cdot 80^3}{12} + \frac{90 \cdot 15^3}{12} + \frac{15 \cdot 50^3}{12} + 2 \cdot \left(\frac{15 \cdot 15^3}{36} + 12,5^2 \cdot 112,5 \right) = 859531\ \text{mm}^4 .$$

Zadani presjek ima jednu os simetrije, pa je devijacijski moment tromosti $I_{yz} = 0$, a osi y i z glavne su osi.

Polumjeri tromosti jesu:

$$i_1 = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{6383358}{3525}} = 42,6\ \text{mm} ,$$

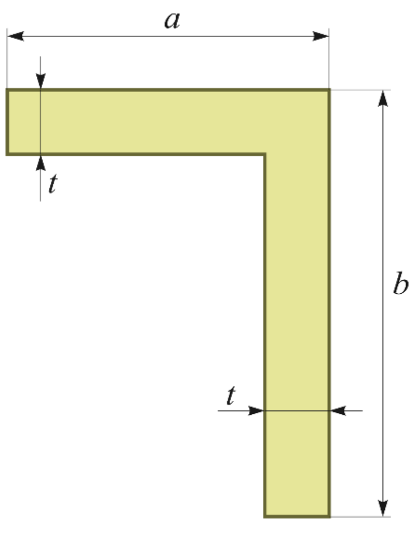
$$i_2 = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{859531}{3525}} = 15,6\ \text{mm} ,$$

a aksijalni momenti otpora iznose:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{6383358}{69,26} = 92165\ \text{mm}^3 , \quad W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{859531}{40} = 21488\ \text{mm}^3 .$$

Primjer 4.5.

Za poprečni presjek prema slici 4.24. potrebno je izračunati površinu, položaj težišta, aksijalne i devijacijski moment tromosti u odnosu na težišne osi, glavne momente tromosti i pravce glavnih momenata tromosti te glavne polumjere tromosti ako je zadano: $a = 60\ \text{mm}$, $b = 100\ \text{mm}$, $t = 20\ \text{mm}$.



Slika 4.24. *Primjer 4.5.*

***Rješenje*:**

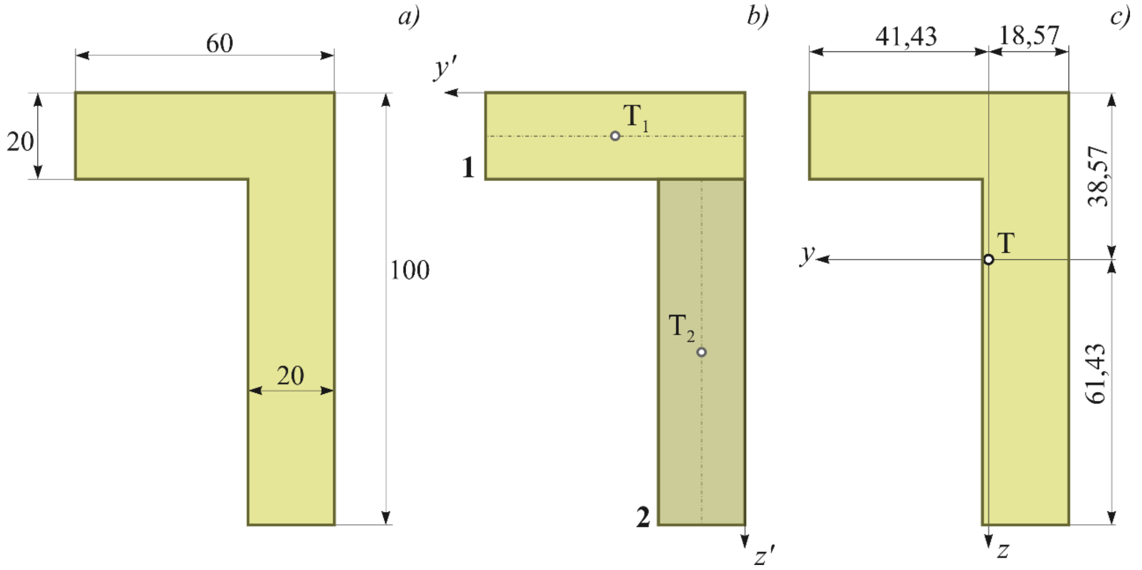
Složeni presjek podijeljen je na dva pravokutnika prema slici 4.25.b. Površina poprečnog presjeka iznosi:

$$A = A_1 + A_2 = 60 \cdot 20 + 20 \cdot 80 = 1200 + 1600 = 2800\ \text{mm}^2 .$$

Statički momenti površine u odnosu na pomoćne osi y' i z' iznose:

$$S'_y = A_1 \cdot z'_{T1} + A_2 \cdot z'_{T2} = 1200 \cdot 10 + 1600 \cdot 60 = 108000\ \text{mm}^3 ,$$

$$S'_z = A_1 \cdot y'_{T1} + A_2 \cdot y'_{T2} = 1200 \cdot 30 + 1600 \cdot 10 = 52000 \text{ mm}^3.$$



Slika 4.25. *Primjer 4.5.: a) dimenzije poprečnog presjeka, b) podjela presjeka na pravokutnike, c) težišne osi*

Težište poprečnog presjeka u odnosu na pomoćne osi y' i z' (slika 4.25.c) određeno je izrazom (4.3):

$$y'_T = \frac{S'_z}{A} = \frac{52000}{2800} = 18,57 \text{ mm},$$

$$z'_T = \frac{S'_y}{A} = \frac{108000}{2800} = 38,57 \text{ mm}.$$

Primjenom Steinerova pravila aksijalni momenti tromosti u odnosu na težišne osi kao i devijacijski moment tromosti u odnosu na koordinatni sustav kroz težište mogu se izračunati kao što je prikazano:

$$I_y = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + 28,57^2 \cdot 1200 + \frac{20 \cdot 80^3}{12} + 21,43^2 \cdot 1600 = 2607619 \text{ mm}^4,$$

$$I_z = \frac{20 \cdot 60^3}{12} + 11,43^2 \cdot 1200 + \frac{80 \cdot 20^3}{12} + 8,57^2 \cdot 1600 = 687619 \text{ mm}^4,$$

$$I_{yz} = 11,43 \cdot (-28,57) \cdot 1200 + (-8,57) \cdot 21,43 \cdot 1600 = -685714 \text{ mm}^4.$$

Glavni aksijalni momenti tromosti za težišne osi dobiju se prema (4.20) i (4.21):

$$I_1 = I_{yo} = \frac{2607619 + 687619}{2} + \sqrt{\left(\frac{2607619 - 687619}{2}\right)^2 + 685714^2}$$

$$I_1 = I_{yo} == 2827366 \text{ mm}^4,$$

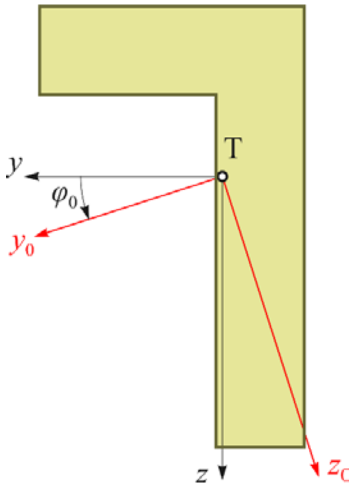
$$I_2 = I_{zo} = \frac{2607619 + 687619}{2} - \sqrt{\left(\frac{2607619 - 687619}{2}\right)^2 + 685714^2}$$

$$I_2 = I_{zo} = 467872 \text{ mm}^4 .$$

Pravci glavnih momenata tromosti određeni su prema (4.22):

$$\tan 2\varphi_o = \frac{-2 \cdot I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{-2 \cdot (-685714)}{2607619 - 687619} = 0,714285$$

$$2\varphi_o = 35,54^\circ , \qquad \varphi_o = 17,77^\circ .$$



Slika 4.26. *Primjer 4.5.: Glavne osi*

Glavni polumjeri tromosti jesu:

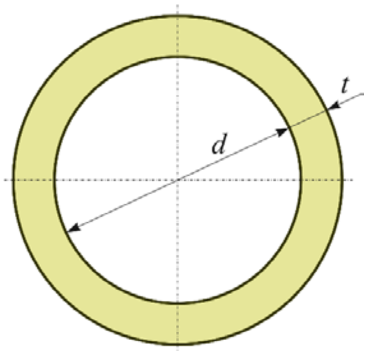
$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{2827366}{2800}} = 31,8 \text{ mm} ,$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{467872}{2800}} = 12,9 \text{ mm} .$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 4.1.

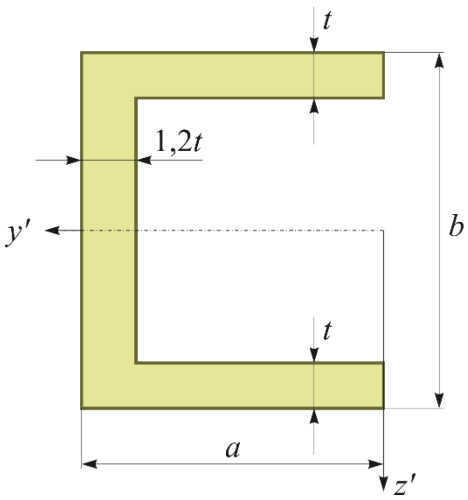
Za poprečni presjek s dvjema osima simetrije prema slici Z.4.1. valja odrediti površinu poprečnog presjeka, aksijalne i devijacijski moment tromosti za težišne osi. Izračunati također polumjere tromosti i aksijalne momente otpora ako je zadano: $d = 102$ mm , $t = 9$ mm .



Slika Z.4.1. *Zadatak 4.1.*

Zadatak 4.2. Za poprečni presjek s jednom osi simetrije (slika Z.4.2.) valja izračunati položaj težišta, površinu poprečnog presjeka, aksijalne momente tromosti u odnosu na težišne osi, polumjere tromosti i aksijalne momente otpora.

Zadano je: $a = 40\ \text{mm}$, $b = 70\ \text{mm}$, $t = 15\ \text{mm}$.

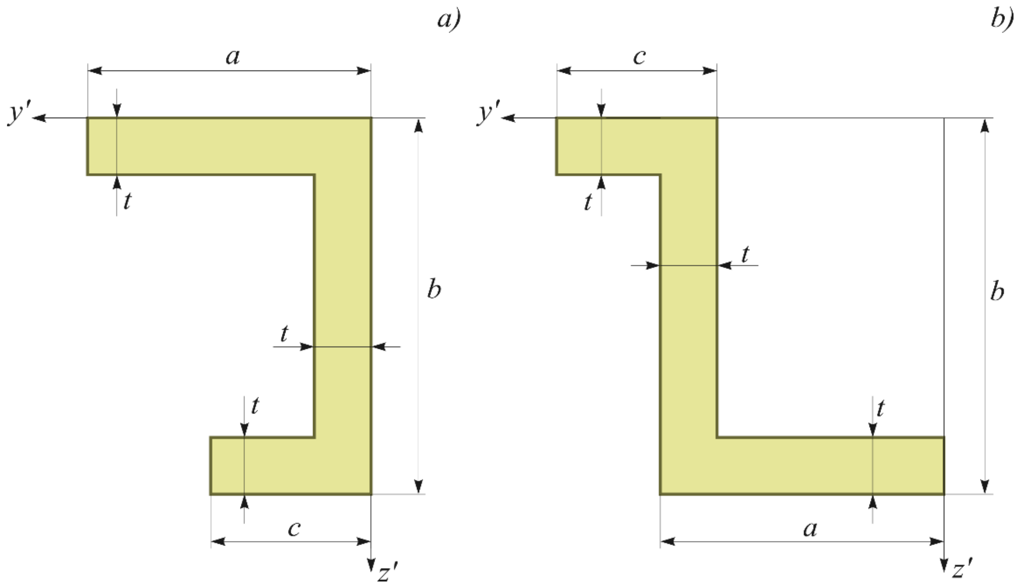


Slika Z.4.2. *Zadatak 4.2.*

Zadatak 4.3.

Za nesimetrične poprečne presjeke prema slici Z.4.3.a i Z.4.3.b potrebno je izračunati površinu, položaj težišta, aksijalne i devijacijski moment tromosti u odnosu na težišne osi, glavne momente tromosti i pravce glavnih momenata tromosti te glavne polumjere tromosti.

Zadano je: $a = 70\ \text{mm}$, $b = 100\ \text{mm}$, $c = 50\ \text{mm}$, $t = 20\ \text{mm}$.



Slika Z.4.3. *Zadatak 4.3.a i b*

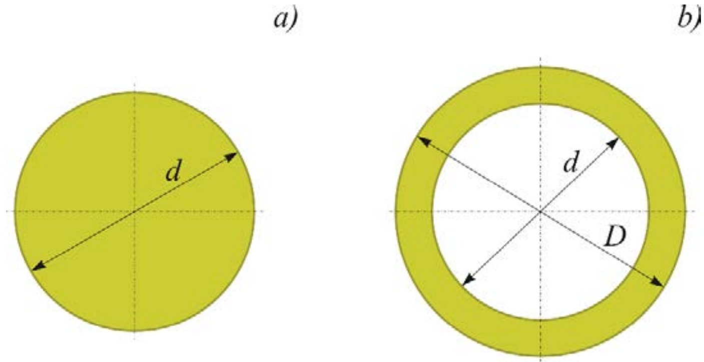
5. UVIJANJE

U ovom poglavlju razmatra se uvijanje štapova okruglog presjeka pri čemu se uvode sljedeće pretpostavke:

- pri deformiranju štapa poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os štapa,
- poprečni presjeci zakreću se kao krute figure, tj. ne deformiraju se u svojoj ravnini,
- normalno naprezanje σ_x jednako je nuli.

Dobiveni izrazi vrijedit će uz navedena ograničenja:

- promatrani presjeci dovoljno su udaljeni od mjesta djelovanja koncentriranih momenata,
- štapovi su ravni, konstantnog poprečnog presjeka,
- poprečni presjek može imati oblik kruga (slika 5.1.a) ili kružnog vijenca (slika 5.1.b).



Slika 5.1. *Okrugli presjeci: a) puni presjek, b) presjek u obliku kružnog vijenca*

Za izračunavanje posmičnih naprezanja u poprečnom presjeku i kuta uvijanja trebat će izračunavati polarni moment tromosti i polarni moment otpora.

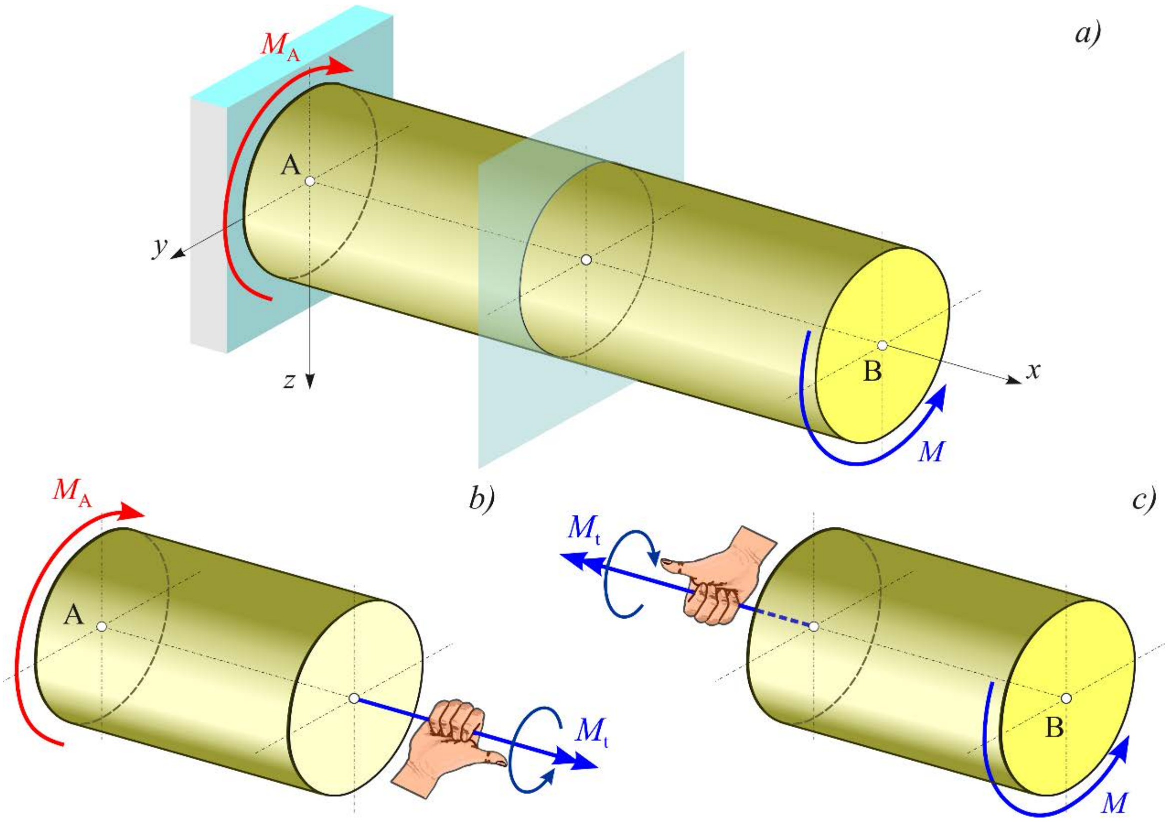
Ako je poprečni presjek štapa puni krug (slika 5.1.a), polarni moment tromosti i polarni moment otpora računaju se prema izrazu:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}, \qquad W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}, \tag{5.1}$$

a za presjek u obliku kružnog vijenca (slika 5.1.b) prema izrazu:

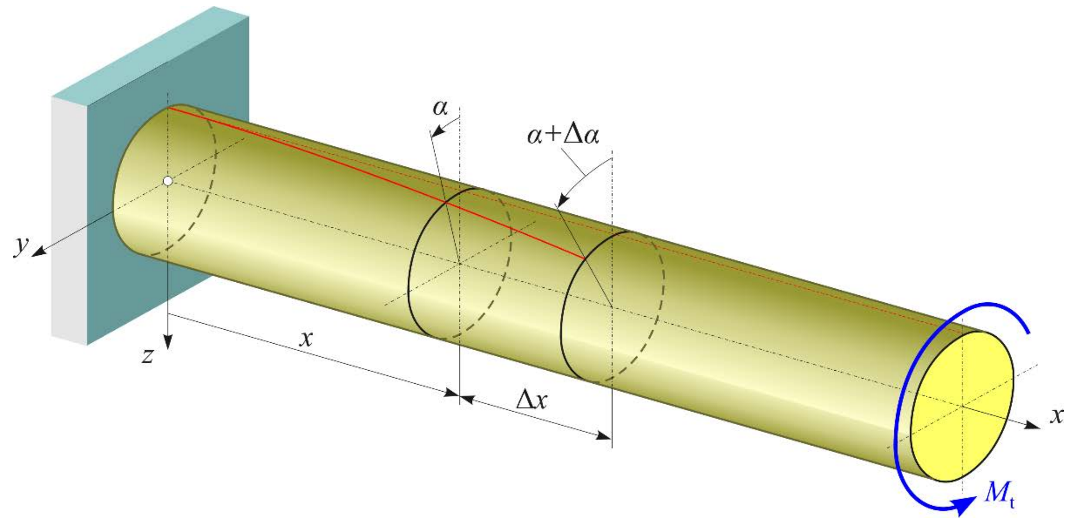
$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right], \quad W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]. \tag{5.2}$$

Za izračunavanje posmičnih naprezanja prethodno je potrebno odrediti moment uvijanja u poprečnom presjeku štapa, pri čemu će se rabiti metoda presjeka. Poprečni presjek smatra se pozitivnim ako mu vanjska normala ima isti smjer kao pozitivan smjer x osi, a negativnim ako mu vanjska normala ima suprotan smjer u odnosu na pozitivan smjer iste osi. Neka je zadan štap okrugloga poprečnog presjeka prema slici 5.2.a. Zamišljenom ravninom okomitom na uzdužnu os štap je presječen, te su dobivena dva dijela. Međusobno djelovanje jednog dijela štapa na drugi dano je kroz moment uvijanja. Pretpostavljat će se uvijek da je moment uvijanja u poprečnom presjeku pozitivan. To bi značilo da će na pozitivnom poprečnom presjeku pozitivan moment uvijanja imati smjer kao i pozitivan smjer x osi (slika 5.2.b), a na negativnom poprečnom presjeku suprotan od toga (slika 5.2.c). Drugim riječima, pozitivan moment uvijanja na pozitivnom i negativnom presjeku definiran je pravilom desne ruke.



Slika 5.2.: *a) zadani štap sa zamišljenom ravninom presijecanja, b) pozitivan moment uvijanja na pozitivnom presjeku, c) pozitivan moment uvijanja na negativnom presjeku*

Kut uvijanja poprečnog presjeka ovisan je o x koordinati, to jest $\alpha = \alpha\left(x\right)$ (slika 5.3.).



Slika 5.3. *Kut uvijanja za dva infinitezimalno bliska presjeka*

Relativni kut uvijanja ϑ definiran je izrazom:

$$\vartheta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\text{rad}}{\text{m}}. \tag{5.3}$$

Iz izraza (5.3) slijedi:

$$\mathrm{d}\alpha = \vartheta \cdot \mathrm{d}x,$$

odnosno

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathrm{d}\alpha = \int_{x_0}^{x} \vartheta \cdot \mathrm{d}x,$$

a uz pretpostavku da je relativni kut uvijanja konstantna veličina, dobije se:

$$\alpha = \alpha_0 + \vartheta \cdot \left(x - x_0 \right). \tag{5.4}$$

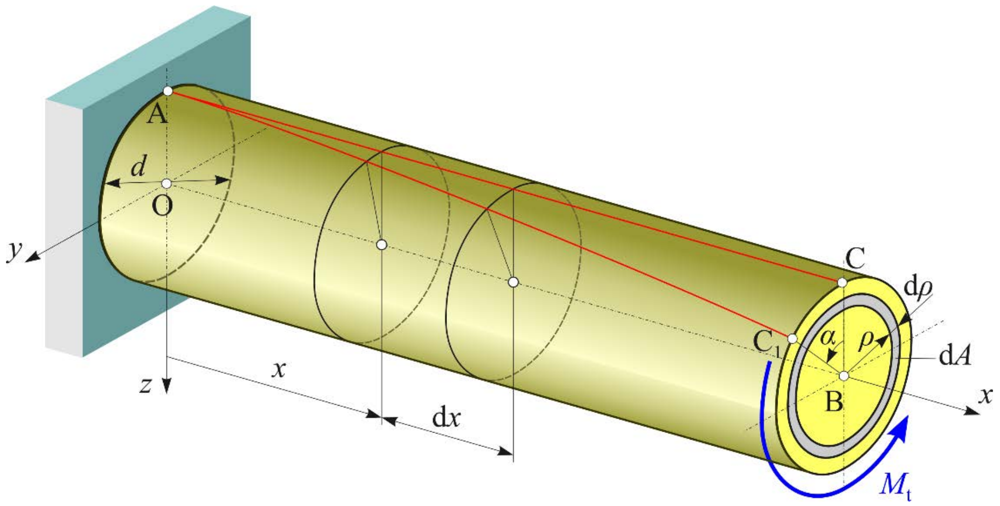
Relativni kut uvijanja ϑ ovisi o momentu uvijanja M_t, promjeru štapa d i o materijalu štapa (modulu smicanja G). Ako su sve te veličine konstantne, onda je ispunjena pretpostavka o relativnom kutu uvijanja kao konstantnoj veličini.

Za slučaj da je ishodište koordinatnog sustava na lijevom kraju štapa vrijedit će:

$$\alpha = \alpha_0 + \vartheta \cdot x. \tag{5.5}$$

U tom slučaju kut α_0 predstavlja zakret lijevog kraja štapa, tj. zakret štapa kao krutog tijela, i ne utječe na pojavu naprezanja i deformacija. Naprezanja i deformacije u štapu pojavit će se samo ako postoji relativni kut uvijanja jednog presjeka u odnosu na drugi.

Tako je na slici 5.4. lijevi kraj nepomičan, a slobodni se zakreće za neki kut. Pri tome ravnina OACB prelazi u zavojnu plohu OAC$_1$B.

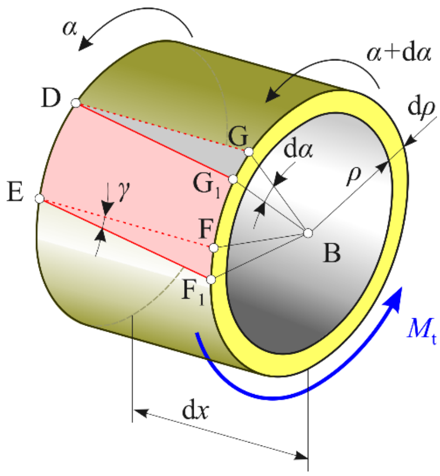


Slika 5.4. *Geometrijska analiza uvijanja elementa kružnog štapa*

Neka je iz štapa sa slike 5.4. isječen diferencijalni element štapa duljine $\mathrm{d}x$ i polumjera ρ i $\rho + \mathrm{d}\rho$ (slika 5.5.). Na njegovu plaštu ucrtan je pravokutnik DEFG. Kod zakreta desnog kraja za diferencijalno mali kut $\mathrm{d}\alpha$ pravokutnik prelazi u romboid DEF$_1$G$_1$.

Kutna deformacija γ kod smicanja elementa dobivena je kako slijedi:

$$\overline{\mathrm{DG}} = \mathrm{d}x\,,\ \overline{\mathrm{GG_1}} = \rho \cdot \mathrm{d}\alpha = \rho \cdot \vartheta \cdot \mathrm{d}x\,.$$



Slika 5.5. *Geometrijska analiza uvijanja elementa kružnog štapa*

Za male kutove jest:

$$\tan\gamma = \gamma = \frac{\overline{\mathrm{GG_1}}}{\overline{\mathrm{DG}}} = \frac{\rho \cdot \vartheta \cdot \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \rho \cdot \vartheta\,,$$

gdje je ϑ nepoznat parametar. Kutna deformacija u uzdužnoj osi štapa jednaka je nuli i raste linearno prema najvećoj vrijednosti na vanjskom rubu:

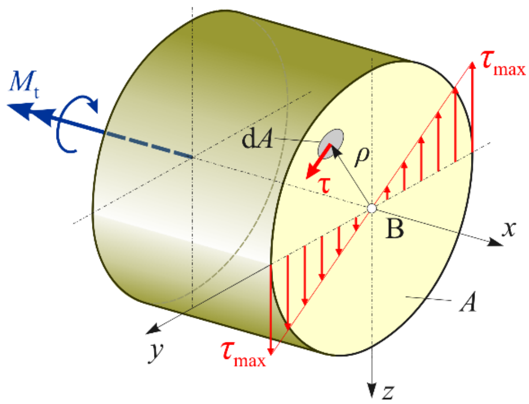
$$\gamma = \rho \cdot \vartheta, \quad \text{za } \rho = r \qquad \gamma_{\max} = r \cdot \vartheta\,.$$

Primjenom Hookeova zakona za čisto smicanje vrijedi:

$$\tau = \gamma \cdot G = \rho \cdot \vartheta \cdot G\,. \tag{5.6}$$

Iz gornjeg izraza vidljivo je kako posmično naprezanje linearno raste od nule u osi štapa do najveće vrijednosti $\tau_{\max} = r \cdot \vartheta \cdot G$ na vanjskom rubu.

Na slici 5.6. prikazan je dio štapa koji je u lijevom presjeku opterećen momentom uvijanja M_t, a u desnom presjeku nizom diferencijalno malih sila $\tau \cdot \mathrm{d}A$. Svaka od elementarnih sila stvara oko uzdužne osi moment $\tau \cdot \mathrm{d}A \cdot \rho$.



Slika 5.6. *Ravnoteža elementa okruglog štapa opterećenoga na uvijanje*

Ukupni moment svih elementarnih sila po poprečnom presjeku u ravnoteži je s momentom uvijanja M_t, pa se iz uvjeta ravnoteže dobije:

$$\Sigma M_x = 0: \qquad -M_t + \int_A \tau \cdot \mathrm{d}A \cdot \rho = 0, \qquad M_t = \int_A \tau \cdot \mathrm{d}A \cdot \rho .$$

Uvrštavanjem izraza (5.6) u gornju formulu slijedi:

$$M_t = \int_A \rho \cdot G \cdot \vartheta \cdot \mathrm{d}A \cdot \rho ,$$

a budući da je za sve točke poprečnog presjeka $G \cdot \vartheta$ konstantna vrijednost, dalje je:

$$M_t = G \cdot \vartheta \cdot \int_A \rho^2 \cdot \mathrm{d}A = G \cdot \vartheta \cdot I_p .$$

Iz gornje jednakosti slijedi izraz za relativni kut uvijanja:

$$\vartheta = \frac{M_t}{G \cdot I_p} . \qquad (5.7)$$

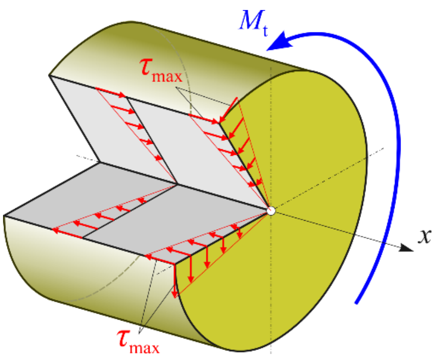
Uvrštavanjem (5.7) u (5.6) dobije se:

$$\tau = \rho \cdot \vartheta \cdot G = \rho \cdot \frac{M_t}{G \cdot I_p} \cdot G ,$$

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho , \qquad (5.8)$$

odakle se može uočiti da je raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku linearna.

U poglavlju 8 pokazat će se da su u okomitim presjecima posmična naprezanja međusobno jednaka, pa je raspored posmičnih naprezanja u dvama okomitim presjecima prikazan na slici 5.7.



Slika 5.7. *Raspodjela posmičnih naprezanja pri uvijanju u dvama okomitim presjecima*

Najveće posmično naprezanje pojavit će se na vanjskom rubu (za $\rho = d/2$):

$$\tau_{max} == \frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_t}{W_p} . \qquad (5.9)$$

5.1. DIMENZIONIRANJE ŠTAPOVA OPTEREĆENIH NA UVIJANJE

Dimenzioniranje štapova opterećenih na uvijanje vršit će se prema dvama uvjetima (kriterijima): uvjetu čvrstoće i uvjetu krutosti.

Iz uvjeta čvrstoće, prema kojemu najveće posmično naprezanje mora biti manje od dopuštenoga, dobije se:

$$\tau_{\max} = \frac{\left|M_{t,\max}\right|}{W_p} \leq \tau_{\mathrm{d}} \,. \tag{5.10}$$

Za kružni poprečni presjek kojemu je $W_{\mathrm{p}} = \pi \cdot d^3 / 16$ promjer d računa se prema izrazu:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot \left|M_t\right|}{\pi \cdot \tau_{\mathrm{d}}}} \,, \tag{5.11}$$

a za poprečni presjek oblika kružnog vijenca kojemu je $W_{\mathrm{p}} = \pi \cdot D^3 \cdot \left[1-\left(d/D\right)^4\right] / 16$, uz poznati omjer d/D, vanjski promjer D slijedi prema izrazu:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot \left|M_{t,\max}\right|}{\pi \cdot \tau_{\mathrm{d}} \cdot \left[1-\left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]}} \,. \tag{5.12}$$

Kriterij krutosti zahtijeva da najveći relativni kut uvijanja bude manji od dopuštenog kuta uvijanja izraženoga u radijanima po metru:

$$\vartheta_{\max} = \frac{\left|M_{t,\max}\right|}{G \cdot I_p} \leq \vartheta_{\mathrm{d}} \,. \tag{5.13}$$

Za kružni poprečni presjek kojemu je $I_{\mathrm{p}} = \pi \cdot d^4 / 32$ promjer d računa se prema izrazu:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot \left|M_t\right|}{G \cdot \pi \cdot \vartheta_{\mathrm{d}}}} \,, \tag{5.14}$$

a za poprečni presjek oblika kružnog vijenca kojemu je $I_{\mathrm{p}} = \pi \cdot D^4 \cdot \left[1-\left(d/D\right)^4\right] / 32$ vanjski promjer D jest:

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot \left|M_{t,\max}\right|}{G \cdot \pi \cdot \vartheta_{\mathrm{d}} \cdot \left[1-\left(\dfrac{d}{D}\right)^4\right]}} \,. \tag{5.15}$$

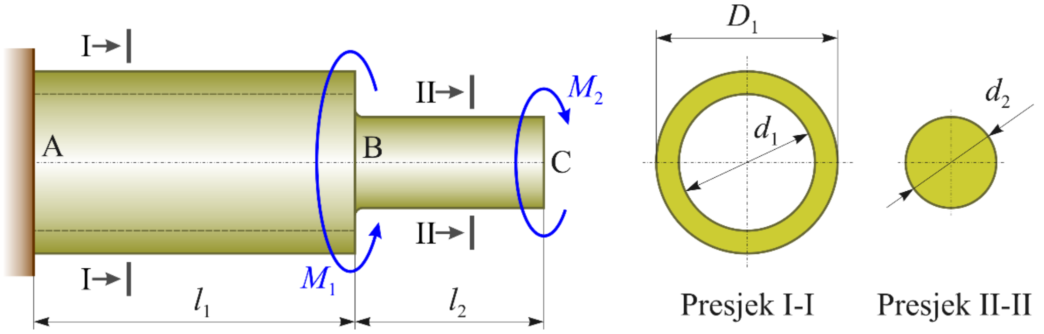
5.2. STATIČKI ODREĐENI ZADATCI

Kako je već prije spomenuto, kod statički određenih zadataka pri uvijanju uvjet ravnoteže postavljen bilo za cijeli štap bilo za pojedini njegov dio (metoda presjeka) dovoljan je za određivanje momenta uvijanja u poprečnom presjeku štapa, a onda i za određivanje raspodjele posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku štapa odnosno raspodjele kuta uvijanja po duljini štapa.

Primjer 5.1.

Štap okruglog presjeka ukliješten na lijevom kraju opterećen je momentima M_1 i M_2. Lijevi dio štapa ima poprečni presjek oblika kružnog vijenca, a desni punog kruga (slika 5.8.). Valja skicirati i kotirati dijagram momenta uvijanja M_t, relativnog kuta uvijanja ϑ te kuta uvijanja α po duljini štapa. Potrebno je skicirati raspodjelu posmičnog naprezanja po poprečnom presjeku za oba segmenta štapa.

Zadano je: $l_1 = 0{,}8\ \text{m}$, $l_2 = 0{,}6\ \text{m}$, $M_1 = 30\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $M_2 = 16\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $D_1 = 120\ \text{mm}$, $d_1 = 102\ \text{mm}$, $d_2 = 100\ \text{mm}$, $G = 80\ \text{GPa}$.



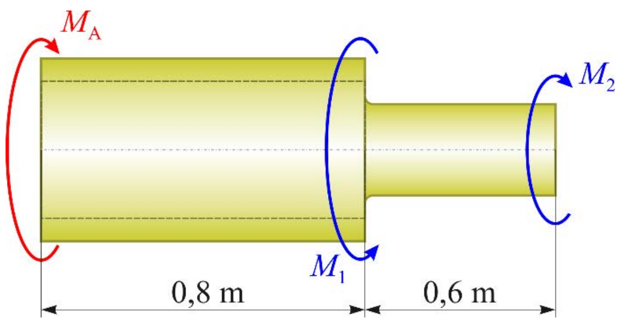
Slika 5.8. *Primjer 5.1.*

***Rješenje*:**

Štap se oslobađa od veze na mjestu ukliještenja u A te se djelovanje ukliještenja nadomješta samo reakcijskim momentom M_A (slika 5.9.).

Reakcijski moment M_A dobije se iz uvjeta ravnoteže tako oslobođenog štapa:

$$\sum M_x = 0: \quad -M_A + M_1 - M_2 = 0, \quad M_A = M_1 - M_2 = 30 - 16 = 14\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

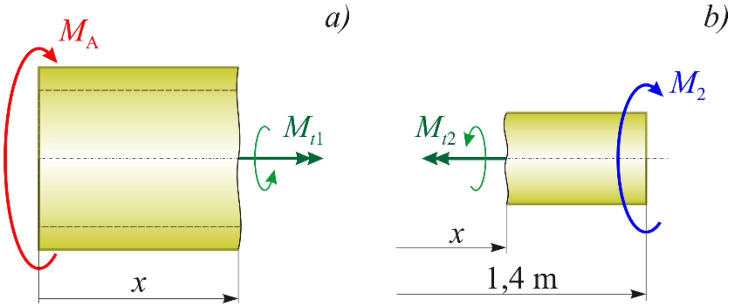


Slika 5.9. *Primjer 5.1.: Štap oslobođen od veze s podlogom*

Momenti uvijanja u svakom segmentu dobiveni su metodom presjeka. Za prvi segment moment uvijanja dobiven je iz uvjeta ravnoteže postavljenoga za lijevi dio štapa (slika 5.10.a), a za desni dio iz uvjeta ravnoteže postavljenoga za desni dio štapa (slika 5.10.b):

$$\sum M_x = 0: \quad -M_\mathrm{A} + M_{t1} = 0, \qquad M_{t1} = M_\mathrm{A} = 14\ \mathrm{kN \cdot m},$$

$$\sum M_x = 0: \quad -M_2 - M_{t2} = 0, \qquad M_{t2} = -M_2 = -16\ \mathrm{kN \cdot m}.$$



Slika 5.10. Primjer 5.1.: *a) dio štapa lijevo od presjeka, b) dio štapa desno od presjeka*

Polarni momenti tromosti prvog i drugog segmenta izračunani prema (5.1) i (5.2) glase:

$$I_{p1} = \frac{120^4 \cdot \pi}{32} - \frac{102^4 \cdot \pi}{32} = 9,731 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4,$$

$$I_{p2} = \frac{100^4 \cdot \pi}{32} = 9,817 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4.$$

Relativni kut uvijanja računa se prema (5.7) i za svaki segment iznosi:

$$\vartheta_1 = \frac{M_{t1}}{G \cdot I_{p1}} = \frac{14 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3 \cdot 9,731 \cdot 10^6} = 1,798 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{mm}},$$

$$\vartheta_2 = \frac{M_{t2}}{G \cdot I_{p2}} = \frac{-16 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3 \cdot 9,817 \cdot 10^6} = -2,037 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{mm}}.$$

Funkcija kuta uvijanja je linearna i dobije se prema (5.4):

$$\alpha_1 = \int \vartheta_1 \mathrm{d}x = \int 1,798 \cdot 10^{-5} \mathrm{d}x = 1,798 \cdot 10^{-5} \cdot x + C.$$

Za $x = 0$ je $\alpha_\mathrm{A} = 0$, pa je konstanta integracije $C = 0$.

Funkcija kuta uvijanja za prvo područje glasi:

$$\alpha = 1,798 \cdot 10^{-5} \cdot x,$$

a na kraju prvog područja za $x = l_1 = 800\ \mathrm{mm}$ kut uvijanja presjeka B jest:

$$\alpha_\mathrm{B} = 1,798 \cdot 10^{-5} \cdot 800 = 14,38 \cdot 10^{-3}.$$

Kut uvijanja za drugo područje jest:

$$\alpha_2 = \int \vartheta_2 \mathrm{d}x = \int -2,037 \cdot 10^{-5} \mathrm{d}x = -2,037 \cdot 10^{-5} \cdot x + C.$$

Za $x = 800$ mm je $\alpha_B = 14,38 \cdot 10^{-3}$, pa je konstanta integracije $C = 30,676 \cdot 10^{-3}$.

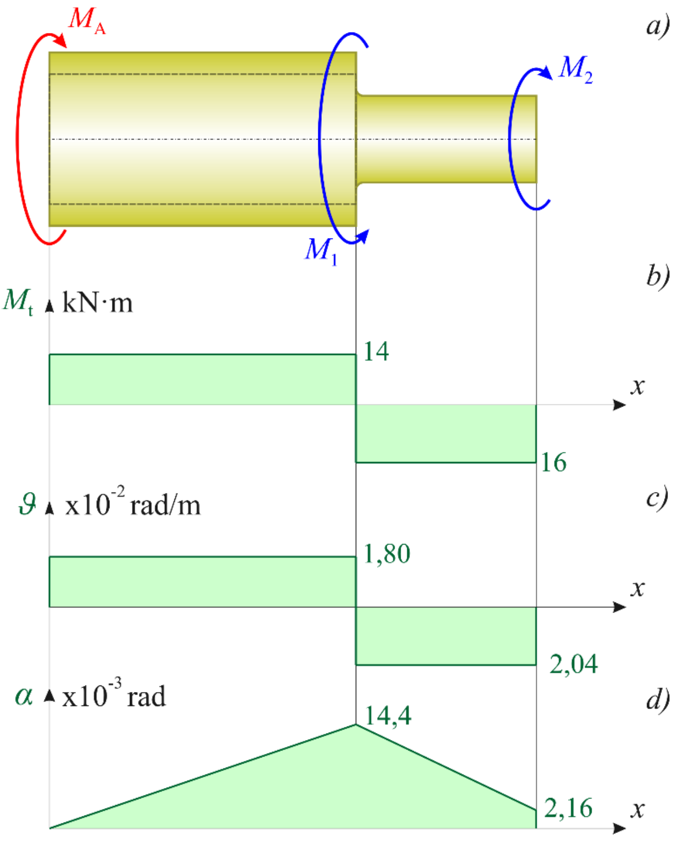
Funkcija pomaka za drugo područje jest:

$$\alpha_2 = -2,037 \cdot 10^{-5} \cdot x + 3067,6 \cdot 10^{-5},$$

a na kraju drugog područja za $x = l_1 + l_2 = 1400$ mm kut uvijanja presjeka C iznosi:

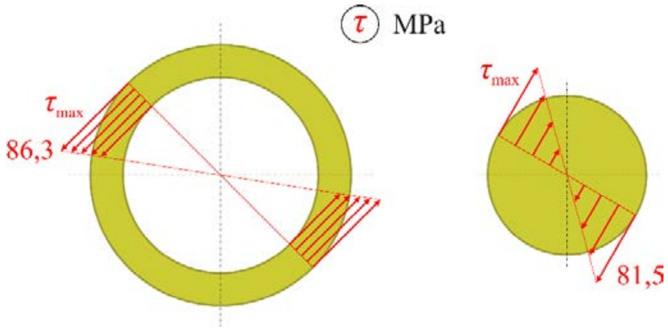
$$\alpha_C = -2,037 \cdot 10^{-5} \cdot 1400 + 3067,6 \cdot 10^{-5} = 2,158 \cdot 10^{-3}.$$

Traženi dijagrami prikazani su na slici 5.11.



Slika 5.11. *Primjer 5.1.: a) štap oslobođen od veze s podlogom, b) dijagram momenta uvijanja, c) dijagram relativnog kuta uvijanja, d) dijagram kuta uvijanja*

Raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku jednog i drugog segmenta s najvećim posmičnim naprezanjem dobivenim prema (5.9) na vanjskom rubu prikazana je na slici 5.12.

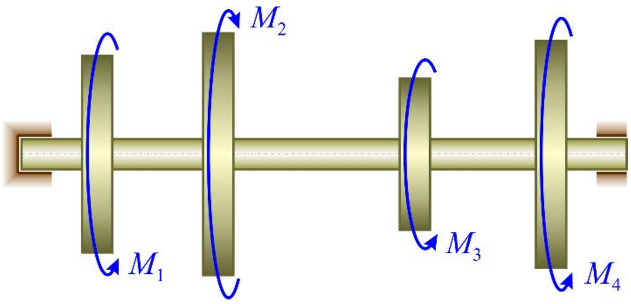


Slika 5.12. *Primjer 5.1.: Raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku obaju segmenata*

Primjer 5.2.

Vratilo kružnoga poprečnog presjeka opterećeno je četirima koncentriranim momentima prema slici 5.13. Potrebno je dimenzionirati vratilo prema kriteriju čvrstoće i prema kriteriju krutosti (dobivenu vrijednost promjera zaokružiti na cijeli broj u milimetrima). Za tako dimenzionirano vratilo izračunati najveće posmično naprezanje.

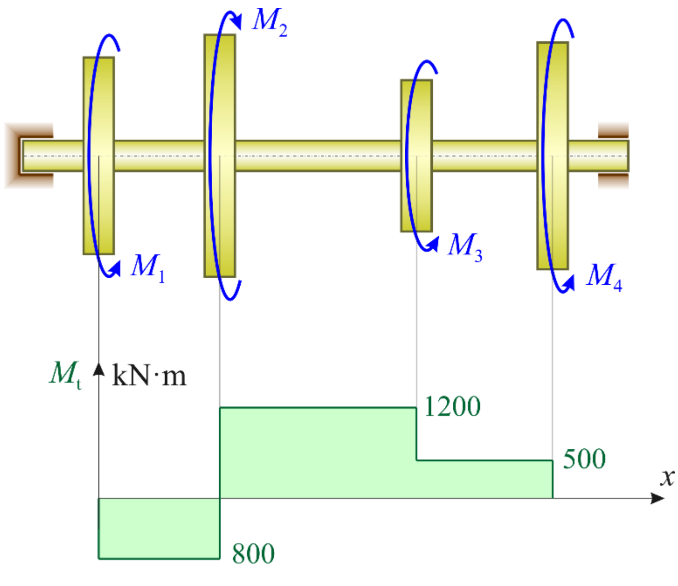
Zadano je: $M_1 = 800\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_2 = 2000\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_3 = 700\ \mathrm{N \cdot m}$, $M_4 = 500\ \mathrm{N \cdot m}$, $\tau_\mathrm{d} = 90\ \mathrm{MPa}$, $G = 80\ \mathrm{GPa}$, $\vartheta_\mathrm{d} = 2\ ^\circ/\mathrm{m}$.



Slika 5.13. *Primjer 5.2.*

***Rješenje*:**

Metodom presjeka mogu se odrediti momenti uvijanja u svakom dijelu vratila, tako da je dijagram momenta uvijanja prikazan na slici 5.14.



Slika 5.14. *Primjer 5.2.: Dijagram momenta uvijanja*

Iz dijagrama momenta uvijanja proizlazi da je najveći moment uvijanja $M_{t,\max} = 1200\ \mathrm{N \cdot m}$.

Prema kriteriju čvrstoće (5.11) promjer vratila dobije se prema izrazu:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{t,\max}}{\pi \cdot \tau_\mathrm{d}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1200 \cdot 10^3}{\pi \cdot 90}} ,$$

odakle slijedi:

$$d \geq 40{,}8 \text{ mm}.$$

Dopušteni relativni kut uvijanja iznosi:

$$\vartheta_\mathrm{d} = 2\ ^\circ/\mathrm{m} = 2\cdot\pi/180 = 0{,}0349 \text{ rad/m} = 0{,}0349\cdot 10^{-3} \text{ rad/mm},$$

pa je prema kriteriju krutosti (5.14) potreban promjer vratila:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32\cdot M_{t,\max}}{G\cdot\pi\cdot\vartheta_d}} = \sqrt[4]{\frac{32\cdot 1200\cdot 10^3}{80\cdot 10^3\cdot\pi\cdot 0{,}0349\cdot 10^{-3}}},$$

$$d \geq 45{,}7 \text{ mm}.$$

Oba kriterija, kriterij čvrstoće i kriterij krutosti, bit će zadovoljeni odabirom promjera od $d = 46$ mm. Za ovaj je promjer polarni moment otpora:

$$W_p = \frac{\pi\cdot d^3}{16} = \frac{\pi\cdot 46^3}{16} = 19112 \text{ mm}^3,$$

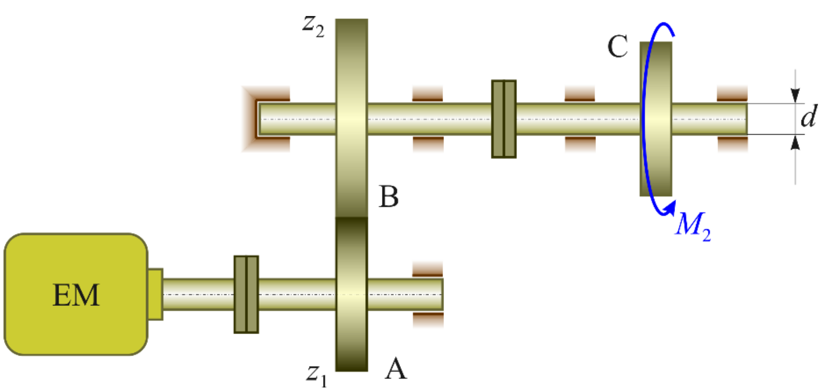
tako da najveće posmično naprezanje iznosi:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t,\max}}{W_p} = \frac{1200\cdot 10^3}{19112} = 62{,}8 \text{ MPa}.$$

Primjer 5.3.

Elektromotor snage P_EM daje vratilu na kojem je zupčanik A broj okretaja u minuti n. Broj zubova zupčanika A je z_1 i on je u zahvatu sa zupčanikom B kojemu je broj zubova z_2. Vratilo zupčanika B spojkom je spojeno s vratilom zupčanika C na koje djeluje moment M_2 (slika 5.15.). Potrebno je odrediti moment M_2 te dimenzionirati vratilo zupčanika C (promjer zaokružiti na cijeli broj u milimetrima).

Zadano je: $P_\mathrm{EM} = 20$ kW, $n = 600$ okr/min, $z_1 = 24$, $z_2 = 72$, $\tau_\mathrm{d} = 100$ MPa.



Slika 5.15. *Primjer 5.3.*

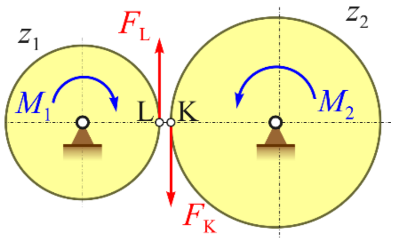
***Rješenje*:**

Moment na zupčaniku A može se dobiti kako slijedi:

$$P_{EM} = M_A \cdot \omega_A\,, \qquad \omega_A = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 600}{30} = 62{,}832\ \mathrm{s}^{-1}\,,$$

$$M_A = \frac{P_{EM}}{\omega_A} = \frac{20 \cdot 10^3}{62{,}832} = 318{,}309\ \mathrm{N \cdot m}\,.$$

Moment na zupčaniku B, koji je jednak momentu M_2, može se dobiti iz sljedećeg razmatranja (slika 5.16).



Slika 5.16. *Primjer 5.3.: Veza između momenata na zupčanicima*

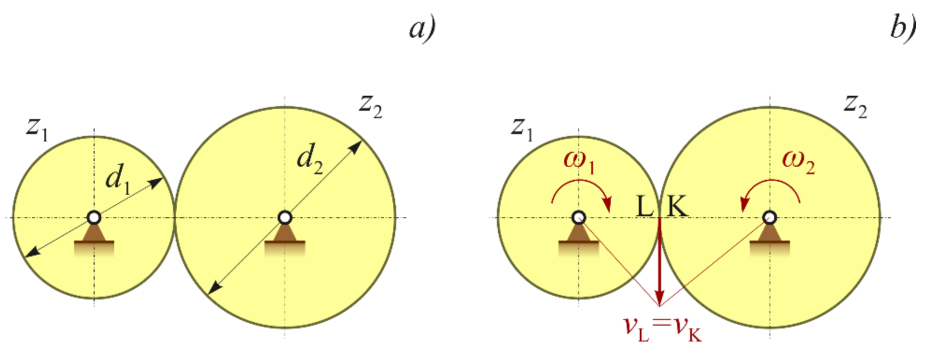
Sila F_L na zubu zupčanika A jednaka je sili F_K na zubu zupčanika B. Kako su te sile:

$$F_L = \frac{M_1}{d_1/2} = \frac{2M_1}{d_1}\,, \qquad F_K = \frac{M_2}{d_2/2} = \frac{2M_2}{d_2}\,,$$

vrijedi jednakost $M_1/d_1 = M_2/d_2$, odnosno

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}\,.$$

Dakle, momenti na zupčanicima u zahvatu upravo su proporcionalni njihovim promjerima odnosno brojevima zubova.



Slika 5.17. *Primjer 5.3.: a) par zupčanika u zahvatu, b) veza između kutnih brzina zupčanika*

Iz jednakosti brzina točaka u dodiru dvaju zupčanika (slika 5.17.) slijedi:

$$v_L = \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2}\,, \qquad v_K = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{2}\,, \qquad \omega_1 \cdot \frac{d_1}{2} = \omega_2 \cdot \frac{d_2}{2}\,,$$

odnosno

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}\,.$$

Kutne brzine (brojevi okretaja) dvaju zupčanika u zahvatu obrnuto su proporcionalne njihovim promjerima odnosno brojevima zubova.

Moment M_2 sada je

$$M_2 = M_\mathrm{B} = \frac{z_2}{z_1} \cdot M_A = \frac{72}{24} \cdot 318,309 = 954,927\ \mathrm{N \cdot m}.$$

Promjer vratila zupčanika C izračunava se prema kriteriju čvrstoće (5.11):

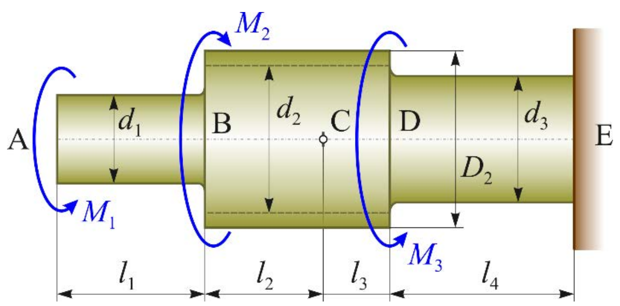
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_2}{\pi \cdot \tau_\mathrm{d}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 954,927 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100}} = 36,5\ \mathrm{mm},$$

$$d = 37\ \mathrm{mm}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

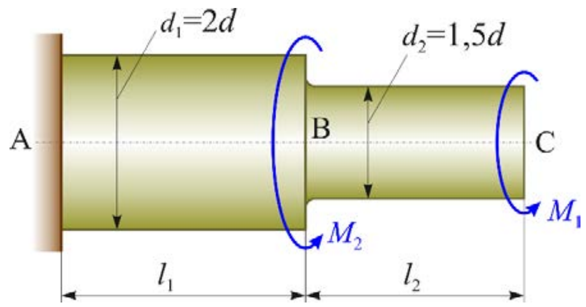
Zadatak 5.1. Štap okrugloga poprečnog presjeka opterećen je trima koncentriranim momentima (slika Z.5.1.). Valja odrediti najveće posmično naprezanje u svakom segmentu te kut uvijanja presjeka C (slika Z.5.1.).

Zadano je: $l_1 = 0,4$ m, $l_2 = 0,3$ m, $l_3 = 0,2$ m, $l_4 = 0,8$ m, $d_1 = 50$ mm, $D_2 = 100$ mm, $d_2 = 80$ mm, $d_3 = 70$ mm, $M_1 = 6\ \mathrm{kN \cdot m}$, $M_2 = 18\ \mathrm{kN \cdot m}$, $M_3 = 20\ \mathrm{kN \cdot m}$, $G = 80$ GPa.



Slika Z.5.1. *Zadatak 5.1.*

Zadatak 5.2. Štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata opterećen je dvama koncentriranim momentima prema slici Z.5.2.

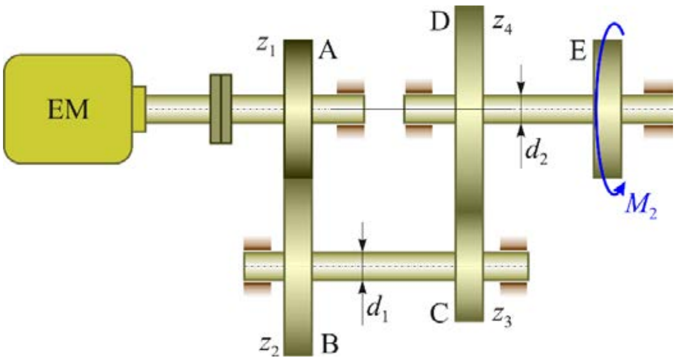


Slika Z.5.2. *Zadatak 5.2.*

Potrebno je odrediti dopušteno opterećenje štapa ($M = ?$). Traženu vrijednost momenta izraziti kao cijeli broj u $\mathrm{N \cdot m}$. Za tako definirane vrijednosti momenata izračunati najveće posmično naprezanje u svakom segmentu te kutove uvijanja presjeka B i C.

Zadano je: $M_1 = 3M$, $M_2 = 5M$, $l_1 = 0,6\ \mathrm{m}$, $l_2 = 0,4\ \mathrm{m}$, $d = 40\ \mathrm{mm}$, $\tau_\mathrm{d} = 90\ \mathrm{MPa}$, $\vartheta_\mathrm{d} = 0,8\ ^\circ/\mathrm{m}$, $G = 80\ \mathrm{GPa}$.

Zadatak 5.3. Elektromotor snage P_EM daje vratilu na kojem je zupčanik A broj okretaja u minuti n (slika Z.5.3.). Broj zubova zupčanika A je z_1 i on je u zahvatu sa zupčanikom B kojemu je broj zubova z_2.



Slika Z.5.3. *Zadatak 5.3.*

Na vratilu 1 nalazi se i zupčanik C s brojem zubova z_3. On je u zahvatu sa zupčanikom D kojemu je broj zubova z_4. Na vratilu 2 nalazi se zupčanik E na koji djeluje moment M_2.

Potrebno je odrediti moment M_2 te dimenzionirati vratila 1 i 2 (promjere zaokružiti na cijeli broj u milimetrima).

Zadano je: $P_\mathrm{EM} = 12\ \mathrm{kW}$, $n = 500\ \mathrm{okr/min}$, $z_1 = 24$, $z_2 = 48$, $z_3 = 36$, $z_4 = 72$, $\tau_\mathrm{d} = 80\ \mathrm{MPa}$.

5.3. STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI

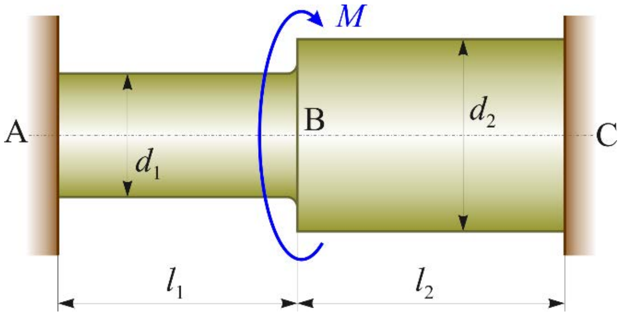
Kod statički neodređenih zadataka pored uvjeta ravnoteže za rješavanje zadataka potrebni su i dodatni uvjeti koji se dobivaju iz plana pomaka. Koliko je puta zadatak statički neodređen, toliko je potrebno dodatnih uvjeta. Ovdje će se razmatrati zadatci koji su jedanput statički neodređeni, tj. oni za koje je pored uvjeta ravnoteže potreban jedan dodatni uvjet dobiven iz plana pomaka.

Primjer 5.4.

Štap okruglog presjeka sastavljen od dvaju segmenata vezan je za podlogu na svojim krajevima te opterećen koncentriranim momentom iznosa M prema slici 5.18.

Valja odrediti reakcijske momente u A i C te najveća posmična naprezanja u svakom segmentu. Potrebno je izračunati i kut uvijanja presjeka B.

Zadano je: $l_1 = l$, $l_2 = 1,5l$, $l = 0,8\ \mathrm{m}$, $d_1 = d$, $d_2 = 1,4d$, $d = 80\ \mathrm{mm}$, $M = 25\ \mathrm{kN \cdot m}$, $G = 26\ \mathrm{GPa}$.

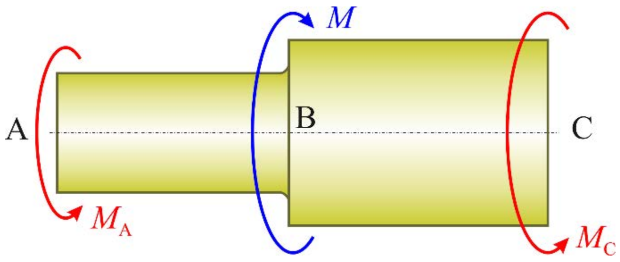


Slika 5.18. *Primjer 5.4.*

***Rješenje*:**

Uvjet ravnoteže postavljen za štap AC nakon oslobađanja od veza glasi (slika 5.19.):

$$\sum M_x = 0: \qquad M_\mathrm{A} - M + M_\mathrm{C} = 0 \,.$$

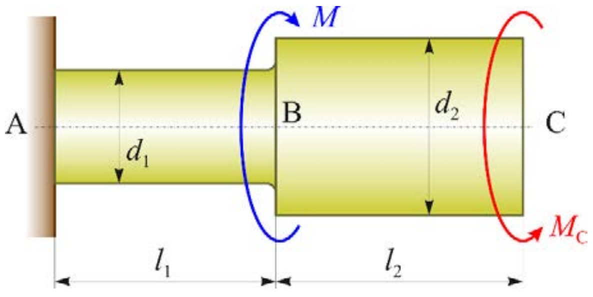


Slika 5.19. *Primjer 5.4.: Štap oslobođen od veza s podlogama*

Budući da je zadatak jedanput statički neodređen, potrebna je i dodatna jednadžba dobivena iz plana pomaka prema kojoj kut uvijanja presjeka C mora biti jednak nuli.

Da bi se odredio kut uvijanja, potrebno je štap osloboditi od veze s podlogom u C te vezu zamijeniti reakcijskim momentom u C (slika 5.20.).

Može se primijeniti metoda superpozicije, tj. vrijednost reakcijskog momenta treba biti takva da izazove kut uvijanja isti po iznosu, a suprotnog smjera od onog koji bi izazvao zadani moment.



Slika 5.20. *Primjer 5.4.: Štap oslobođen od veza s podlogom u C*

Dopunska jednadžba glasi:

$$\alpha_\mathrm{C} = 0: \qquad \frac{(M_\mathrm{C} - M)\cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_\mathrm{C} \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}} = 0 \,.$$

Dalje je:

$$M_{\mathrm{C}} \cdot \left(1+\frac{I_{p1} \cdot l_2}{I_{p2} \cdot l_1}\right)=M\,, \quad M_{\mathrm{C}}=\frac{M}{1+\dfrac{d_1^4 \cdot l_2}{d_2^4 \cdot l_1}}=\frac{M}{1+\dfrac{d^4 \cdot 1{,}5l}{1{,}4^4 \cdot d^4 \cdot l}}$$

$$M_{\mathrm{C}}=0{,}7192M=0{,}7192 \cdot 25=17{,}98\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}\,,$$

a iz uvjeta ravnoteže:

$$M_{\mathrm{A}}=M-M_{\mathrm{C}}=25-17{,}98=7{,}02\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}\,.$$

Sada su momenti uvijanja u svakom segmentu:

$$M_{t1}=-M_{\mathrm{A}}=-7{,}02\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}\,, \quad M_{t2}=M_{\mathrm{B}}=17{,}98\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}\,.$$

Polarni momenti tromosti iznose:

$$W_{p1}=\frac{\pi \cdot d_1^3}{16}=\frac{\pi \cdot 80^3}{16}=100531\ \mathrm{mm}^3\,, \quad W_{p2}=\frac{\pi \cdot d_2^3}{16}=\frac{\pi \cdot 112^3}{16}=275857\ \mathrm{mm}^3\,,$$

pa su najveća posmična naprezanja:

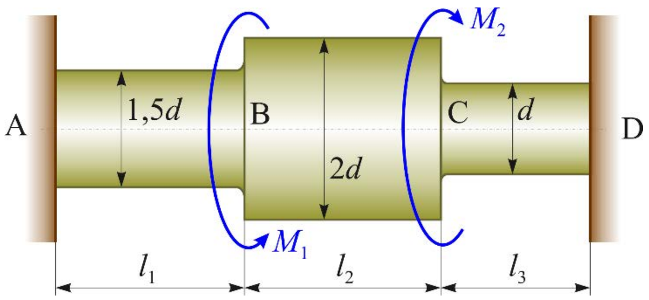
$$\tau_{\max,1}=\frac{|M_{t1}|}{W_{p1}}=\frac{7{,}02 \cdot 10^6}{100531}=69{,}8\ \mathrm{MPa}\,, \quad \tau_{\max,2}=\frac{M_{t2}}{W_{p2}}=\frac{17{,}98 \cdot 10^6}{275857}=65{,}2\ \mathrm{MPa}\,.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 5.4. Štap okruglog presjeka sastavljen od triju segmenata vezan je za podlogu na svojim krajevima te opterećen dvama koncentriranim momentima prema slici Z.5.4.

Valja odrediti reakcijske momente u A i D te najveća posmična naprezanja u svakom segmentu štapa. Potrebno je izračunati i kutove uvijanja presjeka B i C.

Zadano je: $l_1=0{,}9\ \mathrm{m}$, $l_2=1{,}1\ \mathrm{m}$, $l_3=0{,}6\ \mathrm{m}$, $d=60\ \mathrm{mm}$, $M_1=15\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$, $M_2=25\ \mathrm{kN} \cdot \mathrm{m}$, $G=26\ \mathrm{GPa}$.



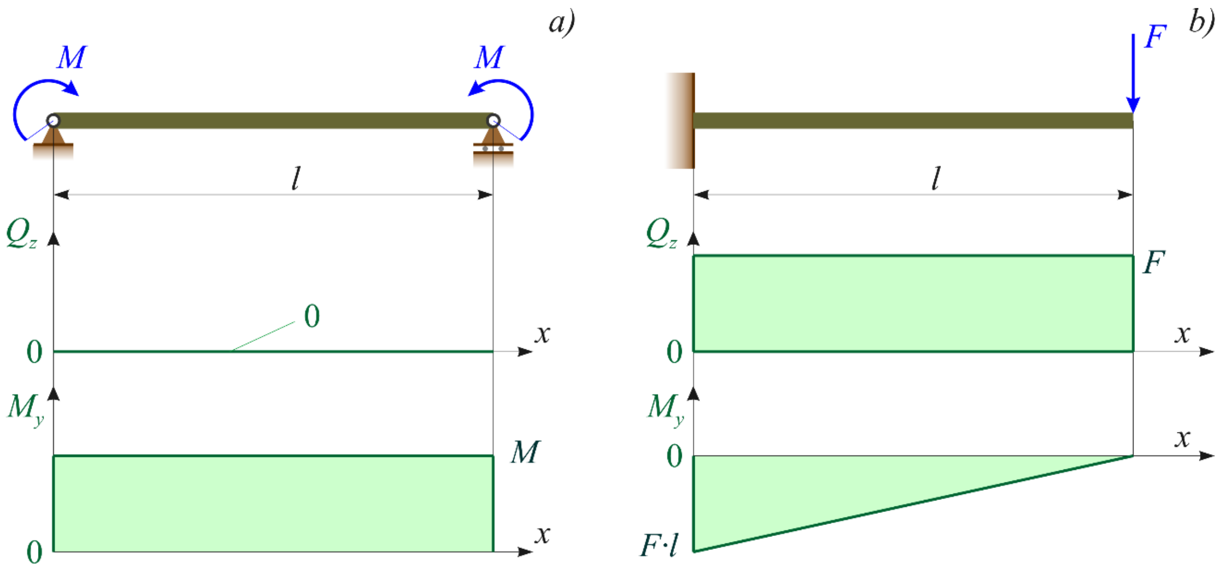
Slika Z.5.4. *Zadatak 5.4.*

6. SAVIJANJE

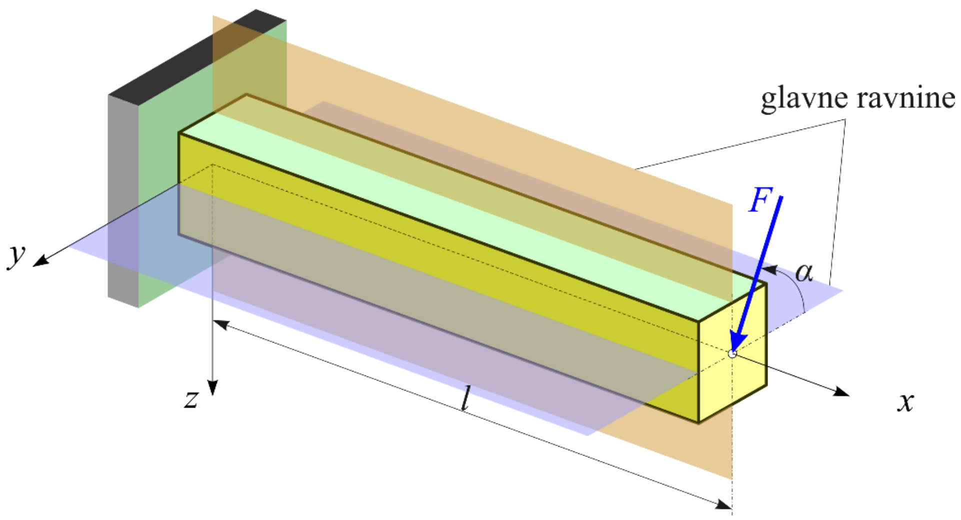
Za razliku od aksijalnog opterećenja i uvijanja, gdje je uzdužna os štapa pri deformiranju ostala nepromijenjena, kod savijanja uzdužna os postaje zakrivljena linija i naziva se *elastična* ili *progibna* linija. U tehničkoj praksi štap opterećen na savijanje naziva se *nosač* ili *greda*.

Pri tome se razlikuju sljedeći oblici savijanja štapova:

a. *Čisto savijanje* je oblik savijanja kada se u nekom poprečnom presjeku štapa vanjske sile reduciraju samo na moment savijanja (slika 6.1.a).
b. Ako se u poprečnom presjeku štapa javljaju i poprečna sila i moment savijanja (slika 6.1.b), govori se o *savijanju silama* ili *poprečnom savijanju*.
c. *Koso savijanje* javlja se tada kada vanjsko opterećenje djeluje izvan glavnih ravnina (slika 6.2.), odnosno kada moment savijanja ima komponente u odnosu na dvije glavne osi tromosti (y i z).



Slika 6.1.: *a) čisto savijanje, b) savijanje silama ili poprečno savijanje*

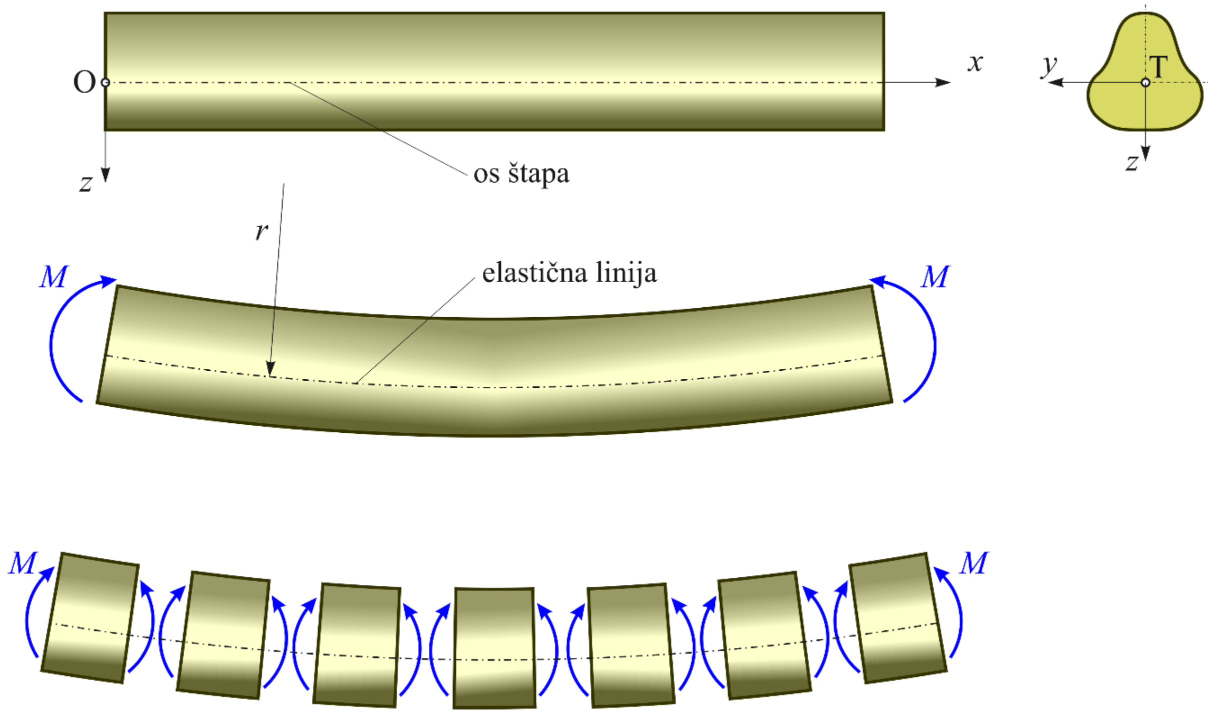


Slika 6.2. *Koso savijanje*

6.1. NAPREZANJA I DEFORMACIJE PRI ČISTOM SAVIJANJU

Savijanje se događa u ravnini koja sadrži uzdužnu os nosača x i os simetrije. Pri tome se uzdužna os deformira i poprima oblik zakrivljene crte koja se naziva elastična linija (slika 6.3.).

Pri čistom savijanju elastična je linija dio kružnice. Neka je u mislima štap presječen u niz manjih dijelova. Svaki je dio geometrijski identičan, jednako opterećen istim elastičnim svojstvima, pa će i zakrivljenost svakog dijela biti jednaka. Dakle, elastična linija je dio krivulje s konstantnom zakrivljenosti, a to je kružnica.



Slika 6.3. *Elastična linija pri čistom savijanju kao dio kružnice*

Pri čistom savijanju uvode se sljedeće pretpostavke o deformiranju štapa, odnosno o rasporedu naprezanja:

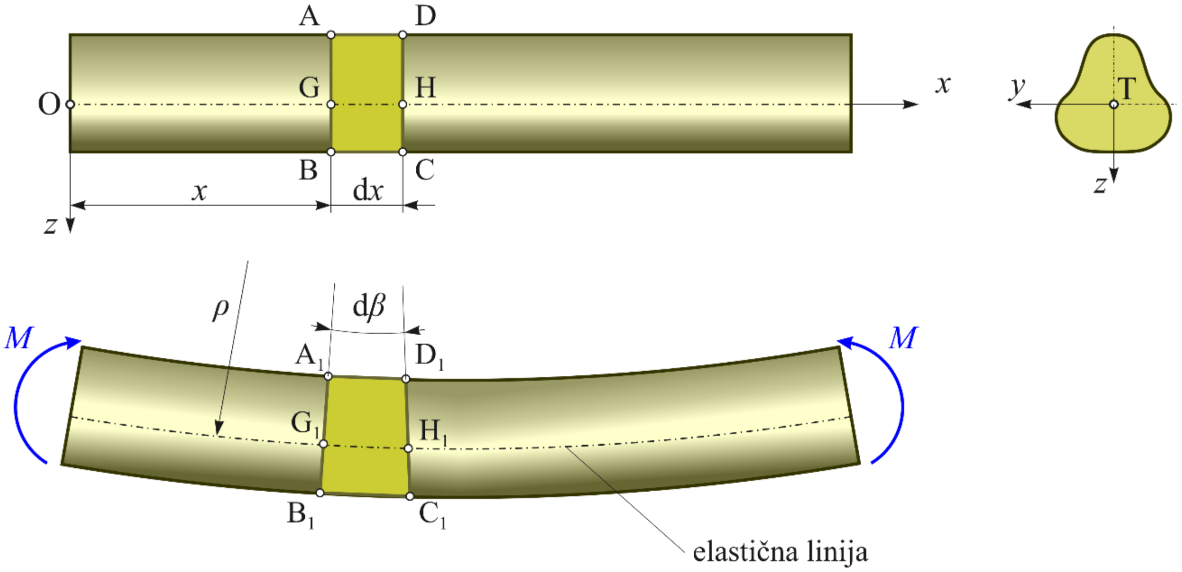
- Poprečni presjeci nakon deformiranja ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju.
- Javlja se samo normalno naprezanje σ_x.

Izvedeni izrazi za naprezanja, deformacije i pomake vrijede uz sljedeća ograničenja:

- Visina poprečnog presjeka h malena je u usporedbi s rasponom l. Što je veći omjer l/h, greška u dobivenim rezultatima bit će manja. Tako je npr. za omjer $l/h = 5$ greška u granicama oko 2%.
- Najveći kut zakreta tangente na elastičnu liniju (nagib) malen je i obično u granicama $0,05 \leq \beta_{\max} \leq 0,1$.
- Ponekad se umjesto malog nagiba tangente zahtijeva da je omjer najvećeg progiba i raspona $w_{\max}/l$ malen. U tom slučaju treba biti $w_{\max}/l \leq (0,01 - 0,02)$.
- Razmatraju se naprezanja u presjecima koji su dovoljno udaljeni od mjesta gdje djeluje koncentrirano opterećenje.

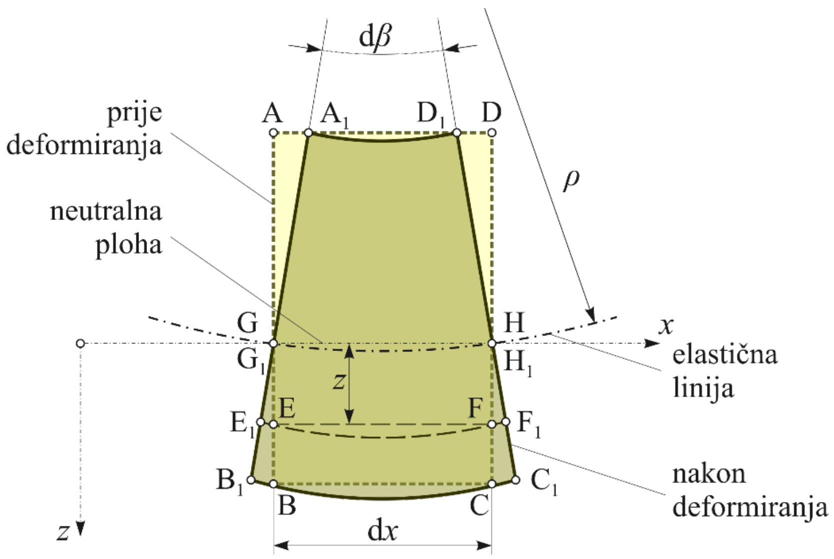
- Pod dovoljnom udaljenosti razumijeva se visina poprečnog presjeka h.

U svrhu određivanja izraza za normalno naprezanje provodi se geometrijska analiza. Neka je zadan prizmatičan štap s označenim pravokutnikom ABCD na njegovoj površini između dvaju bliskih presjeka (slika 6.4.).



Slika 6.4. *Geometrijska analiza deformiranja štapa pri čistom savijanju*

Nakon opterećenja linije AD i BC prelaze u dijelove kružnice, a linije AB i CD naginju se i ostaju okomite na te kružnice. Pravokutni elementi na površini štapa, kao i označeni element ABCD, deformiraju se, ali ostaju ortogonalni, tj. stranice deformiranog elementa sijeku se pod pravim kutom. Pri tome se uzdužna vlakna na donjoj strani produljuju, a na gornjoj strani štapa skraćuju. Postoje vlakna negdje u sredini grede koja ne mijenjaju duljinu i koja tvore neutralnu površinu štapa. Neka je ishodište koordinatnog sustava na neutralnoj površini. Na slici 6.5. prikazan je uvećano crtkanom linijom pravokutni element štapa ABCD prije djelovanja opterećenja te punom linijom taj element nakon deformiranja.



Slika 6.5. *Pravokutni element štapa prije deformiranja i nakon njega*

Deformacija vlakna EF na udaljenosti z od neutralne plohe (slika 6.5.) iznosi:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{\mathrm{E_1F_1}} - \overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{EF}}},$$

gdje je $\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{GH}} = \mathrm{d}x = \rho \cdot \mathrm{d}\beta$ duljina vlakna prije deformiranja, a $\overline{\mathrm{E_1F_1}} = (\rho + z) \cdot \mathrm{d}\beta$ duljina vlakna nakon deformiranja, pa je

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho + \mathrm{z}) \cdot \mathrm{d}\beta - \rho \cdot \mathrm{d}\beta}{\rho \cdot \mathrm{d}\beta},$$

odnosno

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}. \tag{6.1}$$

Izraz (6.1.) pokazuje da se deformacija ε_x linearno mijenja po visini poprečnog presjeka nosača. U neutralnoj površini jednaka je nuli; s jedne strane neutralne površine je pozitivna, a s druge strane negativna. Za izračunavanje deformacije potrebno je doći do polumjera zakrivljenosti ρ elastične linije i položaja neutralne površine.

Primjenom Hookeova zakona dobije se:

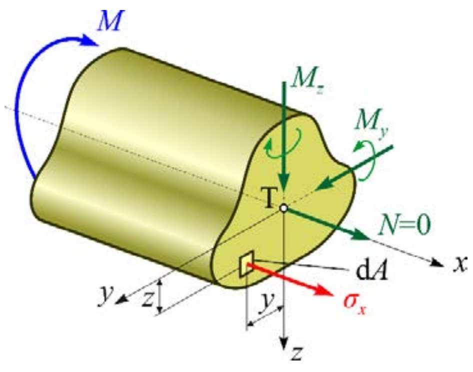
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{E}{\rho} \cdot \mathrm{z}. \tag{6.2}$$

Položaj neutralne površine i polumjer zakrivljenosti ρ mogu se dobiti iz uvjeta ravnoteže elementa štapa prema slici 6.6. koji glase:

$$N = \int_A \sigma_x \cdot \mathrm{d}A = 0, \tag{6.3}$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot \mathrm{d}A, \tag{6.4}$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x \cdot y \cdot \mathrm{d}A = 0. \tag{6.5}$$



Slika 6.6. *Ravnoteža elementa štapa opterećenoga na čisto savijanje*

Uvrštavanjem izraza (6.2) u (6.3) dobije se:

$$\int_A \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot \mathrm{d}A = 0.$$

U gornjem izrazu modul elastičnosti E i polumjer zakrivljenosti ρ su konstante za dani presjek, pa se mogu izvući ispred znaka integrala, tj.:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \int_A z \cdot \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} \cdot S_y = 0 . \tag{6.6}$$

Iz izraza je očito da statički moment presjeka S_y mora biti jednak nuli, što je ispunjeno ako os y prolazi težištem poprečnog presjeka.

Uvrštavanjem izraza (6.2) u (6.4) slijedi:

$$M_y = \int_A \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot z \cdot \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A z^2 \cdot \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho} \cdot I_y ,$$

odnosno

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{M_y}{E \cdot I_y} , \tag{6.7}$$

gdje je κ zakrivljenost elastične linije, a $E \cdot I_y$ savojna (fleksijska) krutost.

Ako se izraz (6.2) uvrsti u (6.5), dobije se:

$$M_z = -\int_A \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot y \cdot \mathrm{d}A = -\frac{E}{\rho} \cdot \int_A \frac{E}{\rho} \cdot z \cdot y \cdot \mathrm{d}A = -\frac{E}{\rho} \cdot I_{yz} = 0 .$$

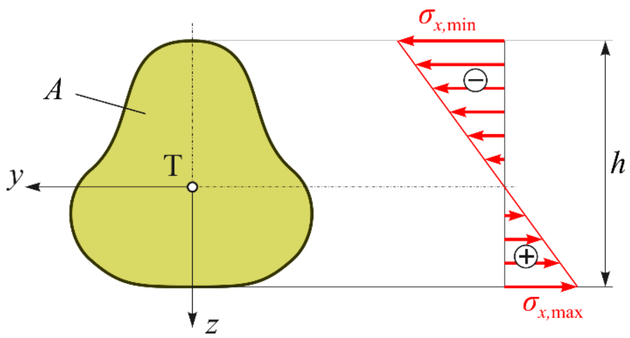
Kako je iz gornjeg izraza $I_{yz} = 0$, slijedi da su osi y i z glavne osi tromosti poprečnog presjeka.

Uz pomoć izraza (6.2) i (6.7) može se dobiti:

$$\frac{\sigma_x}{E \cdot z} = \frac{M_y}{E \cdot I_y} ,$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z . \tag{6.8}$$



Slika 6.7. *Raspodjela normalnog naprezanja po visini presjeka pri čistom savijanju*

Izraz (6.8) pokazuje da je normalno naprezanje linearno raspodijeljeno po visini poprečnog presjeka i u neutralnoj površini jednako je nuli (slika 6.7.).

Pri pozitivnom momentu savijanja u donjim vlaknima normalno će naprezanje biti vlačno, a u gornjim vlaknima tlačno.

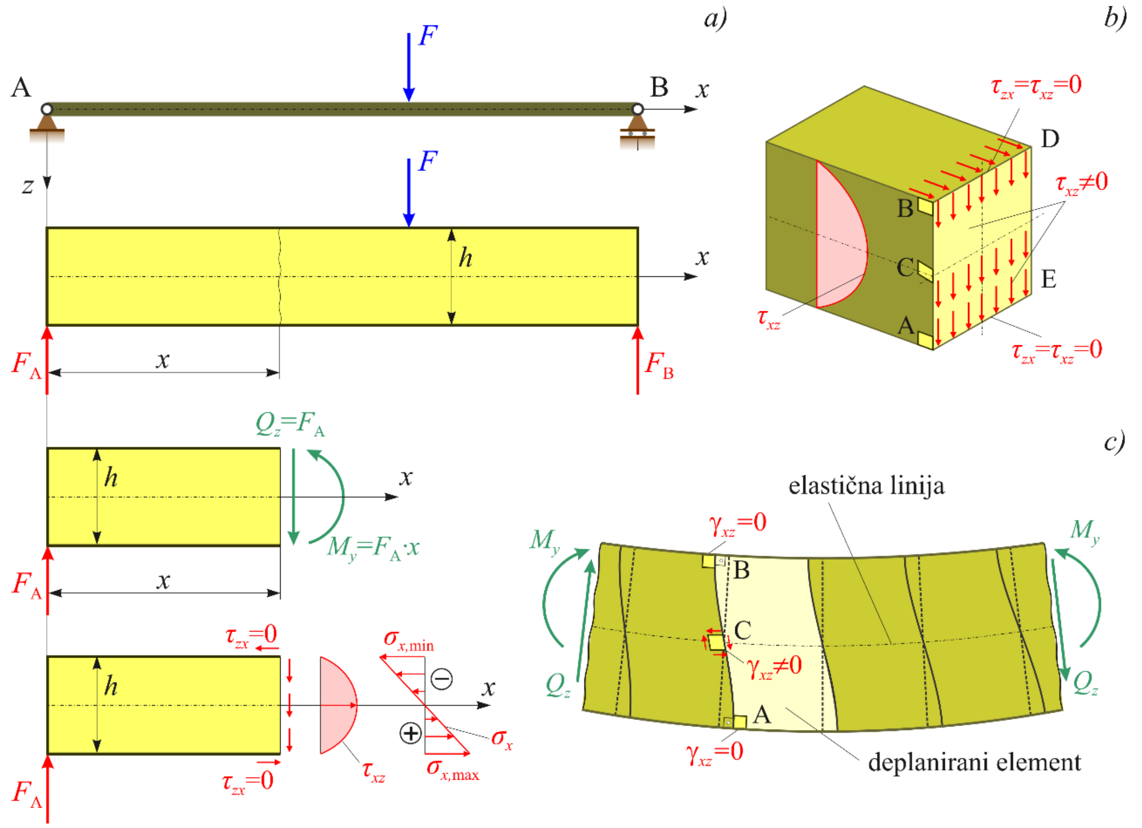
Za određivanje normalnog naprezanja σ_x u svakoj točki presjeka prethodno treba odrediti moment savijanja M_y, položaj težišta poprečnog presjeka i aksijalni moment tromosti I_y za težišnu os y.

6.2. NORMALNA I POSMIČNA NAPREZANJA PRI SAVIJANJU SILAMA

Pri savijanju silama pored momenta savijanja M_y u poprečnom presjeku nosača javlja se i poprečna sila Q_z (slika 6.8.a) zbog čega će se pored normalnih naprezanja javljati i posmična naprezanja. Pri tome je:

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot \mathrm{d}A \quad \text{i} \quad Q_z = \int_A \tau_{xz} \cdot \mathrm{d}A \,.$$

U oznaci za posmično naprezanje τ_{xz} prvi indeks označava pravac normale na poprečni presjek, a drugi smjer posmičnog naprezanja.



Slika 6.8.: *a) linijski nosač opterećen savijanjem silama, b) raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku nosača, c) deplanacija poprečnog presjeka*

Raspodjela posmičnih naprezanja po poprečnom presjeku prikazana je na slici 6.8.b. Na gornjoj i donjoj površini nosača posmična naprezanja jednaka su nuli jer te površine nisu opterećene. Kako su posmična naprezanja u parovima jednaka, to je na gornjem i donjem rubu $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$

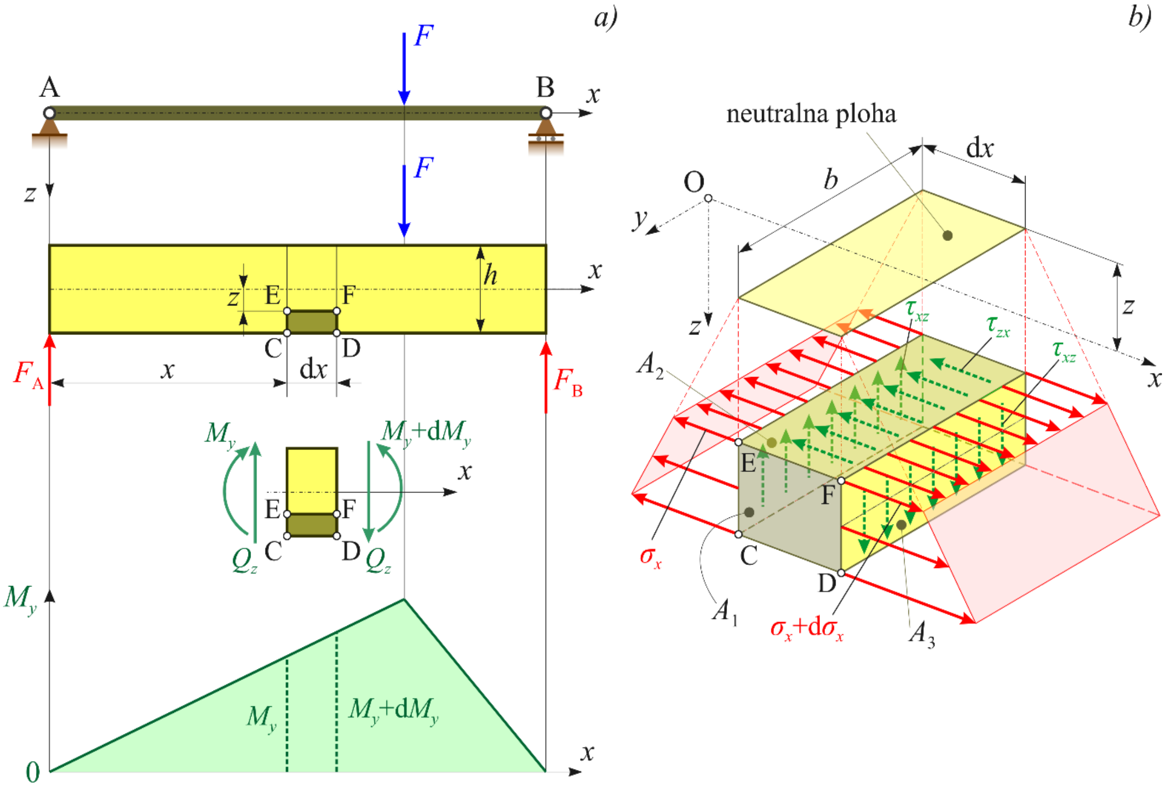
pa je uz te rubove i kutna deformacija $\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 0$. Stoga će elementi A i B poprečnog presjeka ostati nakon deformiranja pravokutni.

Unutar poprečnog presjeka zbog postojanja posmičnih naprezanja javljaju se kutne deformacije, pa će element C poprečnog presjeka iz pravokutnog oblika prije djelovanja opterećenja nakon djelovanja opterećenja prijeći u oblik romba, kako je pokazano na slici 6.8.c.

Pri većim omjerima l/h, što je najčešći slučaj u praktičnim problemima, pomaci zbog deplanacije zanemarivo su maleni u usporedbi s pomacima koji nastaju zbog rotacije poprečnog presjeka koja bi nastala pri čistom savijanju. Iz tog razloga može se zadržati pretpostavka da poprečni presjeci ostaju ravni nakon deformiranja štapa i okomiti na elastičnu liniju, pa izrazi (6.7) i (6.8) približno vrijede i za savijanje silama. Što je omjer l/h veći, to je pogreška manja.

Ako je poprečna sila Q_z konstantna, svaki poprečni presjek deplanira se na isti način (slika 6.8.c), tako da ta deplanacija ne utječe na deformaciju ε_x, a time ni na normalna naprezanja σ_x. U tom slučaju izrazi (6.7) i (6.8) su egzaktni.

Izraz za posmična naprezanja može se dobiti razmatranjem nosača na slici 6.9.a.



Slika 6.9.: *a) razmatrani nosač s momentnim dijagramom i njegov dio između dvaju bliskih presjeka u području konstantne poprečne sile , b) raspodjela normalnih i posmičnih naprezanja na odsječenom segmentu nosača*

Na dio nosača koji je isječen između dvaju bliskih presjeka u području konstantne poprečne sile djeluju s lijeve strane poprečna sila Q_z i moment savijanja M_y, a s desne strane poprečna sila Q_z i moment savijanja $M_y + \mathrm{d}M_y$. Budući da normalna naprezanja σ_x ovise o momentu savijanja, ona će na lijevom i desnom presjeku biti različita.

Na slici 6.9.b dan je aksonometrijski i uvećano isječeni segment nosača s prikazom naprezanja. Uvjet ravnoteže za taj element glasi:

$$\sum F_x = -\int_{A_1} \sigma_x \cdot \mathrm{d}A_1 - \int_{A_2} \tau_{zx} \cdot \mathrm{d}A_2 + \int_{A_3} \left(\sigma_x + \mathrm{d}\sigma_x\right) \cdot \mathrm{d}A_3 = 0 .$$

Dužina $\mathrm{d}x$ je infinitezimalno mala veličina, pa se može smatrati da je posmično naprezanje τ_{zx} po presjeku A_2 konstantno. Ujedno je $A_1 = A_3$ i $A_2 = b \cdot \mathrm{d}x$, pa se uz pomoć izraza (6.8) gornja jednadžba može pisati kao

$$-\int_{A_1} \frac{M_y}{I_y} \cdot z \cdot \mathrm{d}A_1 - \tau_{zx} \cdot b \cdot \mathrm{d}x + \int_{A_1} \frac{M_y + \mathrm{d}M_y}{I_y} \cdot z \cdot \mathrm{d}A_1 = 0 ,$$

odnosno nakon sređivanja kao

$$\tau_{zx} \cdot b \cdot \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}M_y}{I_y} \cdot \int_{A_1} z \cdot \mathrm{d}A_1 .$$

Integral u gornjoj jednadžbi predstavlja statički moment S_y^* dijela presjeka A_1, odnosno A_3 u odnosu na neutralnu os y, pa je

$$\tau_{zx} = \frac{\mathrm{d}M_y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{S_y^*}{b \cdot I_y} .$$

Kako je $\mathrm{d}M_y / \mathrm{d}x = Q_z$, gornji izraz može se napisati kao

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y^*}{b \cdot I_y} . \tag{6.9}$$

Za pravokutni poprečni presjek slika (6.10.) jest:

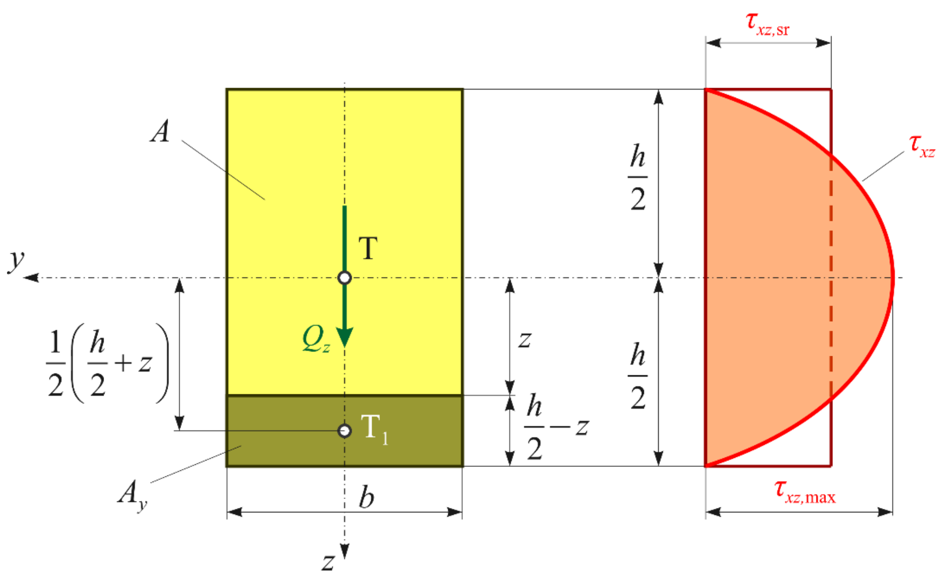
$$A_1 = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right), \qquad z_{\mathrm{T1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + z \right).$$

Statički moment S_y^* dijela presjeka iznosi:

$$S_y^* = A_1 \cdot z_{\mathrm{T1}} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + z \right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right),$$

što znači da je raspodjela statičkog momenta S_y^* dijela presjeka po visini pravokutnog presjeka parabolična s nulom na gornjem i donjem rubu i najvećom vrijednosti u težištu poprečnog presjeka. U izrazu (6.9) su poprečna sila Q_z, aksijalni moment tromosti u odnosu na težišnu os I_y i širina b konstantne veličine za razmatrani poprečni presjek.

Stoga se može zaključiti da će raspodjela posmičnih naprezanja po visini pravokutnog presjeka također biti parabolična, kako je pokazano na slici 6.10.



Slika 6.10. *Raspodjela posmičnih naprezanja po visini pravokutnoga poprečnog presjeka*

Najveća vrijednost posmičnog naprezanja je u težištu i iznosi:

$$\tau_{xz,\max}=\frac{Q_z}{b\cdot\frac{b\cdot h^3}{12}}\cdot\frac{b\cdot h^2}{8}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q_z}{b\cdot h}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q_z}{A}=1{,}5\cdot\tau_{xz,\mathrm{sr}},$$

što znači da je najveće posmično naprezanje 50 % veće od prosječnoga.

6.3. DIMENZIONIRANJE ŠTAPOVA OPTEREĆENIH NA SAVIJANJE

Pri savijanju silama javljaju se u poprečnom presjeku nosača normalna i posmična naprezanja. Za uobičajene raspone i oblike poprečnog presjeka normalna naprezanja mnogo su veća od posmičnih. Osim toga, na mjestima gdje su normalna naprezanja najveća, tj. u krajnjim vlaknima poprečnog presjeka, posmična naprezanja jednaka su nuli.

Zbog toga se dimenzioniranje štapova opterećenih kako na čisto savijanje, tako i na savijanje silama radi prema kriteriju da najveće normalno naprezanje dobiveno prema izrazu:

$$\sigma_{\max}=\frac{\left|M_{y,\max}\right|}{W_y} \tag{6.10}$$

treba biti manje ili jednako od dopuštenoga normalnog naprezanja:

$$\sigma_{\max}=\frac{\left|M_{y,\max}\right|}{W_y}\le\sigma_{\mathrm{d}}. \tag{6.11}$$

Aksijalni moment otpora poprečnog presjeka mora zadovoljavati uvjet:

$$W_y\ge\frac{\left|M_{y,\max}\right|}{\sigma_{\mathrm{d}}}. \tag{6.12}$$

Izraz (6.12) vrijedi za nosače izrađene od materijala koji imaju jednaku čvrstoću na rastezanje i sabijanje, kakav je npr. konstrukcijski čelik koji se kao materijal najčešće upotrebljava.

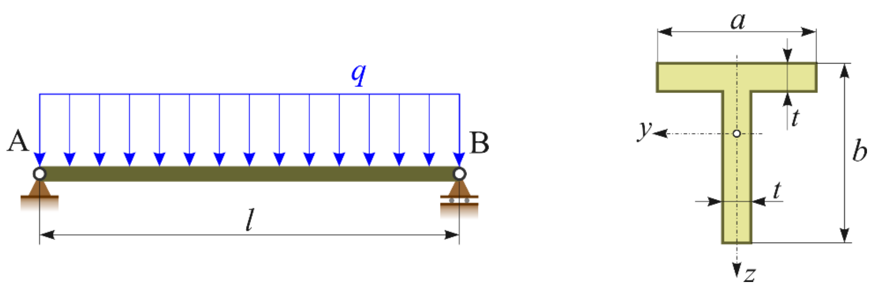
6.4. STATIČKI ODREĐENI ZADATCI

Kao i za slučaj aksijalnog opterećenja štapa ili uvijanja i ovdje su kod statički određenih zadataka dovoljni uvjeti ravnoteže da bi se odredile tražene veličine.

Primjer 6.1.

Jednostavni nosač zadanoga poprečnog presjeka opterećen je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem q (slika 6.11). Valja izračunati najveće normalno naprezanje. U presjeku na udaljenosti $x = 0,75\ \text{m}$ potrebno je skicirati i kotirati raspodjelu normalnog i posmičnog naprezanja po visini poprečnog presjeka.

Zadano je: $l = 3\ \text{m}$, $q = 24\ \text{kN/m}$, $a = 4t$, $b = 8t$, $t = 2\ \text{cm}$.



Slika 6.11. *Primjer 6.1.*

***Rješenje*:**

Izračunavanje najvećeg normalnog naprezanja radi se prema izrazu (6.10):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y},$$

a raspodjela normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka prema izrazima (6.8) i (6.9):

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \qquad \tau = \frac{Q_z \cdot S_y^*}{b \cdot I_y}.$$

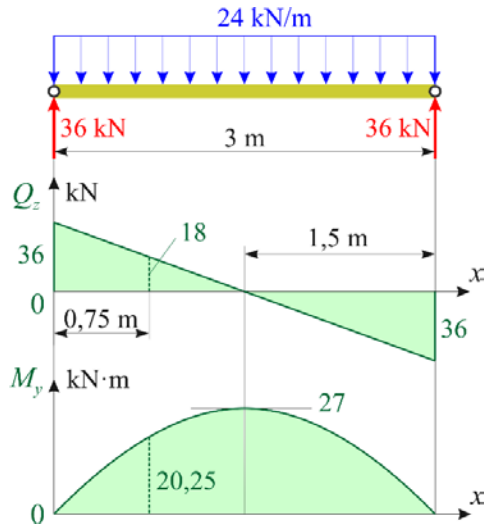
Dakle, prije izračunavanja naprezanja potrebno je odrediti u traženom presjeku poprečnu silu i moment savijanja.

Način određivanja reakcija u osloncima i dijagrama unutarnjih sila detaljno je objašnjen u 7. poglavlju skripata *Tehnička mehanika I*.

Na slici 6.12. prikazani su dijagrami poprečnih sila i momenta savijanja te reakcije oslonaca A i B.

Iz dijagrama se iščitavaju najveća vrijednost momenta savijanja te poprečna sila i moment savijanja u presjeku na udaljenosti $x = 0,75\ \text{m}$ od oslonca A:

$$M_{y,\max} = 27\ \text{kN}\cdot\text{m}\,; \qquad Q_z = 18\ \text{kN}\,, \qquad M_y = 20{,}25\ \text{kN}\cdot\text{m}\,.$$



Slika 6.12. *Primjer 6.1.: Reakcije u osloncima i dijagrami unutarnjih sila*

Položaj težišta zadanoga poprečnog presjeka (slika 6.13.a) izračunan je prema postupku opisanom u 4. poglavlju ovih skripata i prikazan na slici 6.13.b.

Aksijalni moment tromosti zadanog presjeka u odnosu na težišnu os y jest:

$$I_y = \frac{80\cdot 20^3}{12} + 1600\cdot 50{,}91^2 + \frac{20\cdot 140^3}{12} + 2800\cdot 29{,}09^2 = 11143030\ \text{mm}^4\,,$$

a njegov aksijalni moment otpora:

$$W_y = \frac{11143030}{99{,}09} = 112454\ \text{mm}^3\,.$$

Najveće normalno naprezanje sada jest:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{27\cdot 10^6}{0{,}112\cdot 10^6} = 241{,}0\ \text{MPa}\,.$$

Normalna naprezanja u točkama M i N u poprečnom presjeku na udaljenosti $x = 0{,}75$ m iznose:

$$\sigma_{\text{M}} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z_{\text{M}} = \frac{20{,}25\cdot 10^6}{11{,}143\cdot 10^6}\cdot\left(-60{,}91\right) = -110{,}7\ \text{MPa}\,,$$

$$\sigma_{\text{N}} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z_{\text{N}} = \frac{20{,}25\cdot 10^6}{11{,}143\cdot 10^6}\cdot 99{,}09 = 180{,}1\ \text{MPa}\,.$$

Statički moment površine S_y^* dijela poprečnog presjeka u točkama M, K, L, T i N jest:

$$S_{y,\text{M}}^* = S_{y,\text{N}}^* = 0\ \text{mm}^3\,,$$

$$S_{y,\text{L}}^* = S_{y,\text{K}}^* = 80\cdot 20\cdot 50{,}91 = 81456\ \text{mm}^3\,,$$

$$S^*_{y,\mathrm{T}} = 20 \cdot 99,09 \cdot 99,09/2 = 98188\ \mathrm{mm}^3,$$

a posmična naprezanja u istim su točkama:

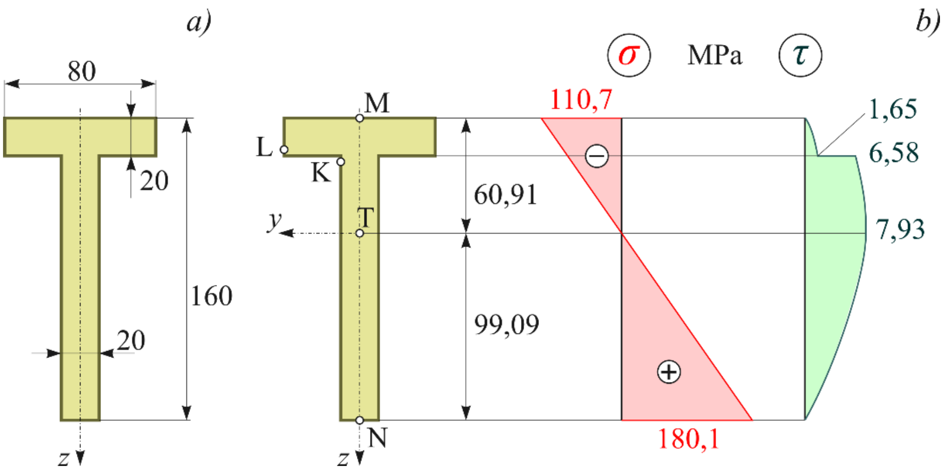
$$\tau_\mathrm{M} = \tau_\mathrm{N} = 0\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_\mathrm{L} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{L}}}{b \cdot I_y} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 81456}{80 \cdot 11{,}143 \cdot 10^6} = 1,65\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_\mathrm{K} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{K}}}{b \cdot I_y} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 81456}{20 \cdot 11{,}143 \cdot 10^6} = 6,58\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_\mathrm{T} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{K}}}{b \cdot I_y} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 98188}{20 \cdot 11{,}143 \cdot 10^6} = 7,93\ \mathrm{MPa}.$$

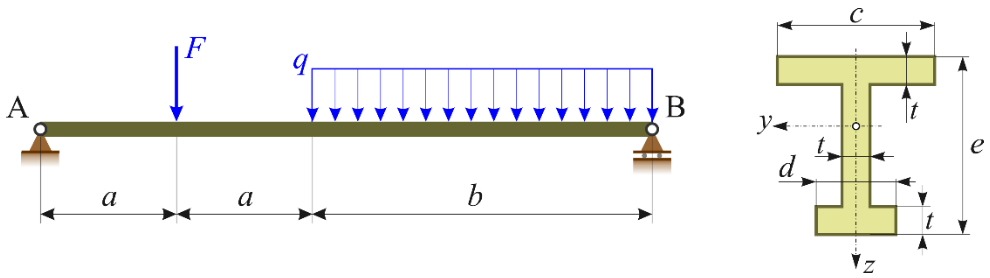
Raspodjela naprezanja po visini poprečnog presjeka dana je na slici 6.13.b.



Slika 6.13. *Primjer 6.1.: a) zadani poprečni presjek, b) položaj težišta i raspodjele normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka*

Primjer 6.2.

Jednostavni linijski nosač opterećen je koncentriranom silom iznosa F te jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika 6.14.). Potrebno je dimenzionirati poprečni presjek nosača (dobivenu vrijednost za t zaokružiti na cijeli broj u milimetrima).



Slika 6.14. *Primjer 6.2.*

Za tako dimenzioniran poprečni presjek prikazati raspodjelu normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka na udaljenosti $x = 2a$ od oslonca A.

Zadano je: $a = 1{,}2\ \text{m}$, $b = 3\ \text{m}$, $c = 6t$, $d = 4t$, $e = 10t$, $F = 10\ \text{kN}$, $q = 12\ \text{kN/m}$, $\sigma_\text{d} = 200\ \text{MPa}$.

***Rješenje*:**

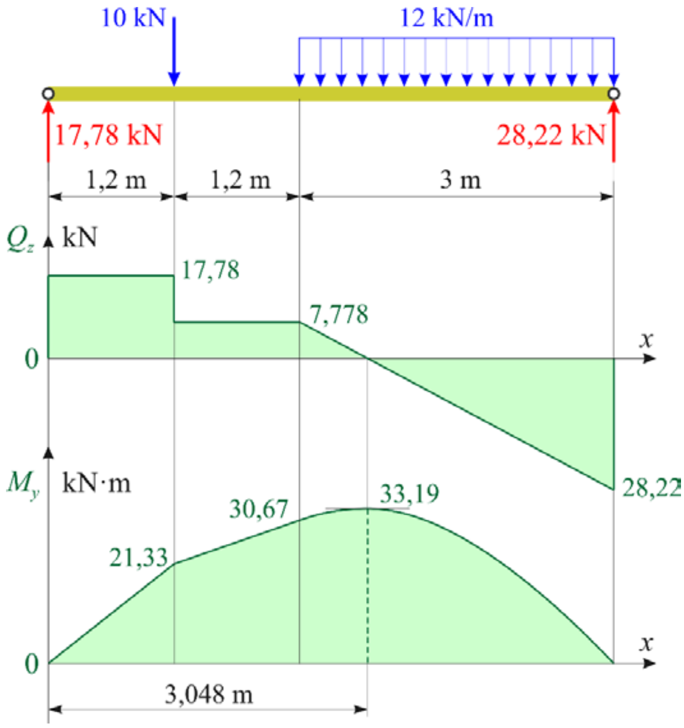
Na prije opisani način određene su reakcije u osloncima i dijagrami unutarnjih sila (slika 6.15.). Također su izračunane vrijednosti poprečne sile i momenta savijanja u presjeku $x = 2a$.

Prema prikazanom dijagramu najveća vrijednost momenta savijanja jest:

$$M_{y,\max} = 33{,}19\ \text{kN}\cdot\text{m},$$

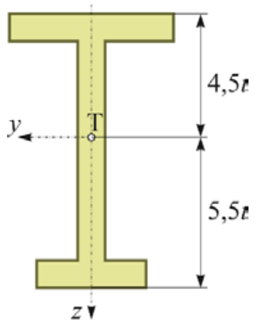
a unutarnje sile u presjeku $x = 2\cdot a = 2{,}4\ \text{m}$ iznose:

$$Q_z = 7{,}778\ \text{kN},\quad M_y = 30{,}67\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$



Slika 6.15. *Primjer 6.2.: Reakcije oslonaca i dijagrami unutarnjih sila*

Težište leži na simetrali poprečnog presjeka, a njegov položaj dan je na slici 6.16.



Slika 6.16. *Primjer 6.2.: Položaj težišta poprečnog presjeka*

Aksijalni moment tromosti, kao i aksijalni moment otpora u odnosu na težišnu os y određeni su postupkom detaljno opisanim u poglavlju 4 i iznose:

$$I_y = 241,5t^4,$$

$$W_y = I_y / z_{\max} = 241,5t^4 / 5,5t = 43,909t^3.$$

Poprečni presjek dimenzioniran je prema uvjetu čvrstoće:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{y,\max}}{W_y} = \frac{M_{y,\max}}{43,909 \cdot t^3} \leq \sigma_{\mathrm{d}},$$

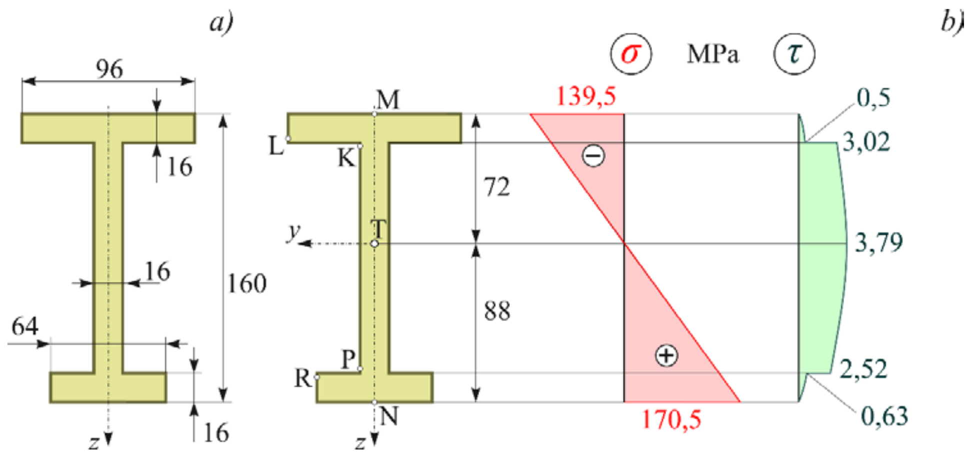
odakle je

$$t \geq \sqrt[3]{\frac{M_{y,\max}}{43,909 \cdot \sigma_{\mathrm{d}}}} = \sqrt[3]{\frac{33,19 \cdot 10^6}{43,909 \cdot 200}} = 15,6\ \mathrm{mm},$$

$$t = 16\ \mathrm{mm}.$$

Dimenzionirani poprečni presjek prikazan je na slici 6.17.a. Aksijalni moment tromosti u odnosu na težišnu os y jest:

$$I_y = 241,5 \cdot t^4 = 241,5 \cdot 16^4 = 15,827 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4.$$



Slika 6.17. Primjer 6.2.: *a) dimenzionirani poprečni presjek, b) karakteristične točke presjeka te raspodjela normalnih i posmičnih naprezanja po visini presjeka*

Vrijednosti normalnih naprezanja u točkama M i N u poprečnom presjeku na udaljenosti $x = 2,4\ \mathrm{m}$ iznose:

$$\sigma_{\mathrm{M}} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\mathrm{M}} = \frac{30,67 \cdot 10^6}{15,827 \cdot 10^6} \cdot (-72) = -139,5\ \mathrm{MPa},$$

$$\sigma_{\mathrm{N}} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\mathrm{N}} = \frac{30,67 \cdot 10^6}{15,827 \cdot 10^6} \cdot 88 = 170,5\ \mathrm{MPa}.$$

Statički moment površine S_y^* dijela poprečnog presjeka u točkama M, L, K, T, P, R i N jest:

$$S_{y,\mathrm{M}}^* = S_{y,\mathrm{N}}^* = 0\ \mathrm{mm}^3,$$

$$S_{y,\mathrm{L}}^{*}=S_{y,\mathrm{K}}^{*}=96\cdot16\cdot(72-8)=98304\ \mathrm{mm}^{3},$$

$$S_{y,\mathrm{T}}^{*}=96\cdot16\cdot(72-8)+16\cdot56\cdot56/2=123392\ \mathrm{mm}^{3},$$

$$S_{y,\mathrm{P}}^{*}=S_{y,\mathrm{R}}^{*}=64\cdot16\cdot(88-8)=81920\ \mathrm{mm}^{3},$$

a posmična naprezanja u istim su točkama:

$$\tau_{\mathrm{M}}=\tau_{\mathrm{N}}=0\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_{\mathrm{L}}=\frac{Q_z\cdot S_{y,\mathrm{L}}^{*}}{b\cdot I_y}=\frac{7,778\cdot10^{3}\cdot98304}{96\cdot15,827\cdot10^{6}}=0,5\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_{\mathrm{K}}=\frac{Q_z\cdot S_{y,\mathrm{K}}^{*}}{b\cdot I_y}=\frac{7,778\cdot10^{3}\cdot98304}{16\cdot15,827\cdot10^{6}}=3,02\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_{\mathrm{T}}=\frac{Q_z\cdot S_{y,\mathrm{T}}^{*}}{b\cdot I_y}=\frac{7,778\cdot10^{3}\cdot123392}{16\cdot15,827\cdot10^{6}}=3,79\ \mathrm{MPa},$$

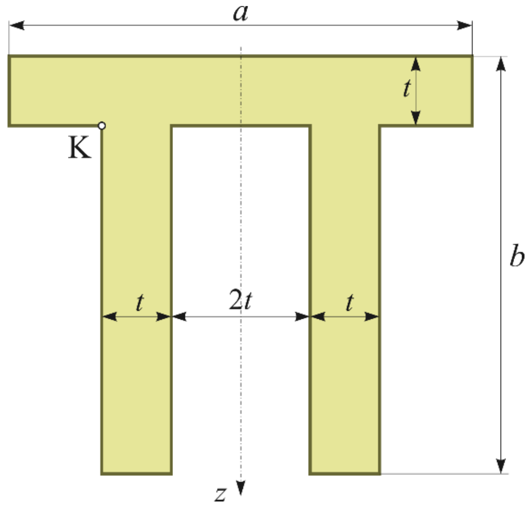
$$\tau_{\mathrm{P}}=\frac{Q_z\cdot S_{y,\mathrm{P}}^{*}}{b\cdot I_y}=\frac{7,778\cdot10^{3}\cdot81920}{16\cdot15,827\cdot10^{6}}=2,52\ \mathrm{MPa},$$

$$\tau_{\mathrm{R}}=\frac{Q_z\cdot S_{y,\mathrm{R}}^{*}}{b\cdot I_y}=\frac{7,778\cdot10^{3}\cdot81920}{64\cdot15,827\cdot10^{6}}=0,63\ \mathrm{MPa}.$$

Raspodjela normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka dana je na slici 6.17.b.

Primjer 6.3.

Zadan je poprečni presjek nekog linijskog nosača (slika 6.18.).



Slika 6.18. *Primjer 6.3.*

Ako je u točki K poprečnog presjeka vlačno normalno naprezanje iznosa σ_K, izračunati moment savijanja u presjeku nosača. Skicirati raspodjelu normalnog naprezanja po visini poprečnog presjeka.

Zadano je: $a = 80\ \mathrm{mm}$, $b = 60\ \mathrm{mm}$, $t = 12\ \mathrm{mm}$, $\sigma_\mathrm{K} = 60\ \mathrm{MPa}$.

***Rješenje*:**

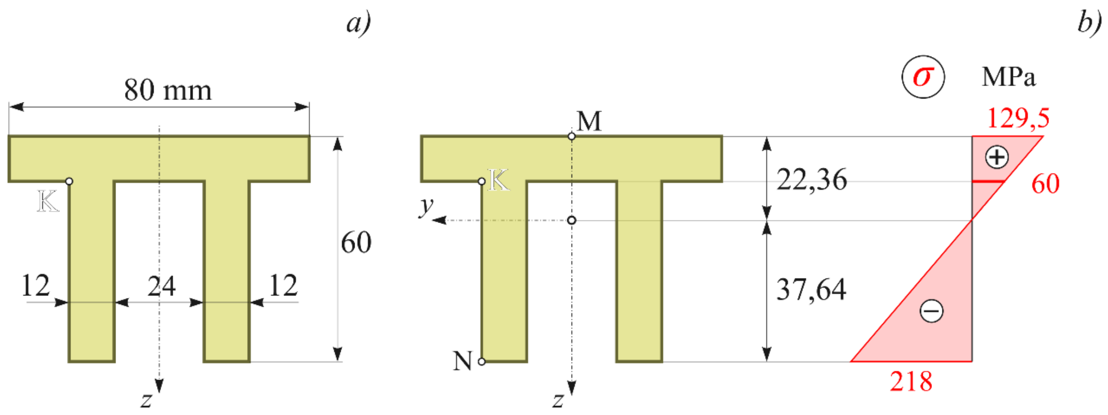
Položaj težišta zadanoga poprečnog presjeka (slika 6.19.a) dan je na slici 6.19.b. Aksijalni moment tromosti s obzirom na težišnu os y iznosi $I_y = 703977\ \mathrm{mm}^4$.

Iz izraza za normalno naprezanje za točku K poprečnog presjeka:

$$\sigma_\mathrm{K} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_\mathrm{K},$$

dobije se:

$$M_y = \frac{\sigma_\mathrm{K} \cdot I_y}{z_\mathrm{K}} = \frac{60 \cdot 703977}{-10{,}36} = -4{,}077 \cdot 10^6\ \mathrm{N \cdot mm} = -4{,}077\ \mathrm{kN \cdot m}.$$



Slika 6.19. Primjer 6.3.: *a) zadani poprečni presjek, b) položaj težišta i raspodjela normalnih naprezanja po visini poprečnog presjeka*

Normalna naprezanja u točkama M i N poprečnog presjeka jesu:

$$\sigma_\mathrm{M} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_\mathrm{M} = \frac{-4{,}077 \cdot 10^6}{0{,}704 \cdot 10^6} \cdot (-22{,}36) = 129{,}5\ \mathrm{MPa},$$

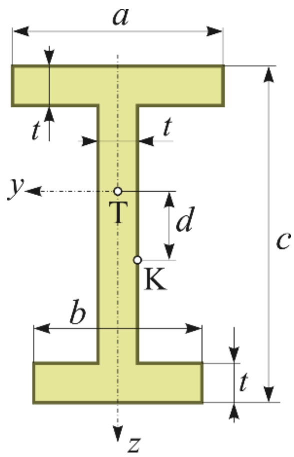
$$\sigma_\mathrm{N} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_\mathrm{N} = \frac{-4{,}077 \cdot 10^6}{0{,}704 \cdot 10^6} \cdot 37{,}64 = -218{,}0\ \mathrm{MPa}.$$

Raspodjela normalnih naprezanja po visini poprečnog presjeka dana je na slici 6.19.b.

Primjer 6.4.

Zadan je poprečni presjek nekog linijskog nosača (slika 6.20.). Ako je u točki K poprečnog presjeka posmično naprezanje τ_K, izračunati poprečnu silu u presjeku nosača. Skicirati raspodjelu posmičnog naprezanja po visini poprečnog presjeka.

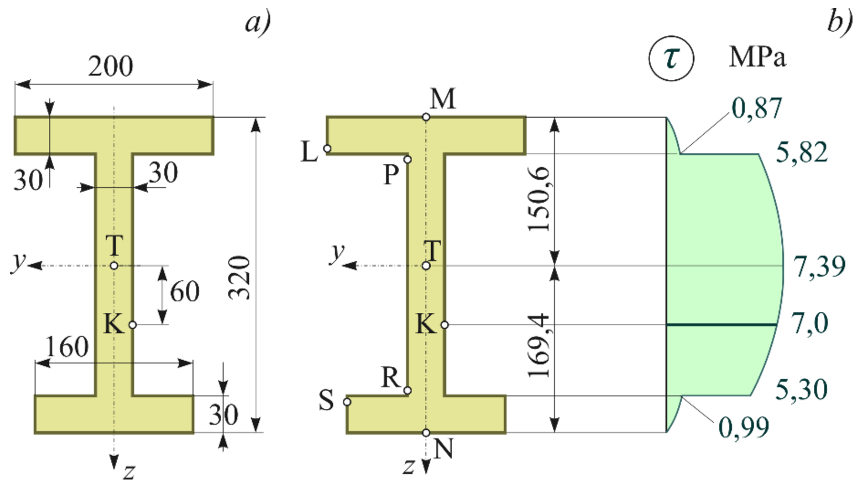
Zadano je: $a = 200$ mm, $b = 160$ mm, $c = 320$ mm, $d = 60$ mm, $t = 30$ mm, $\tau_K = 7$ MPa.



Slika 6.20. *Primjer 6.4.*

***Rješenje*:**

Zadani presjek prikazan je na slici 6.21.a, a položaj njegova težišta na slici 6.21.b.



Slika 6.21. *Primjer 6.4.: a) zadani poprečni presjek, b) položaj težišta i raspodjela posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka*

Aksijalni moment tromosti s obzirom na težišnu os y iznosi:

$$I_y = 270{,}1923 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 .$$

Statički moment površine S_y^* dijela poprečnog presjeka u točki K jest:

$$S_{y,\mathrm{K}}^* = 160 \cdot 30 \cdot 154{,}4 + 30 \cdot 79{,}4 \cdot (60 + 79{,}4/2) = 978605 \text{ mm}^3 .$$

Iz izraza za posmično naprezanje za točku K poprečnog presjeka:

$$\tau_\mathrm{K} = \frac{Q_z \cdot S_{y,\mathrm{K}}^*}{b \cdot I_y} ,$$

dobije se:

$$Q_z = \frac{\tau_{\mathrm{K}} \cdot b \cdot I_y}{S^*_{y,\mathrm{K}}} = \frac{7 \cdot 30 \cdot 270{,}1923 \cdot 10^6}{978605} = 57981\ \mathrm{N} = 57{,}981\ \mathrm{kN}\,.$$

Statički moment površine S^*_y dijela poprečnog presjeka u točkama M, L, P, T, R, S i N jest:

$$S^*_{y,\mathrm{M}} = S^*_{y,\mathrm{N}} = 0\ \mathrm{mm}^3\,,$$

$$S^*_{y,\mathrm{L}} = S^*_{y,\mathrm{P}} = 200 \cdot 30 \cdot (150{,}6 - 15) = 813600\ \mathrm{mm}^3\,,$$

$$S^*_{y,\mathrm{T}} = 200 \cdot 30 \cdot (150{,}6 - 15) + 30 \cdot 120{,}6 \cdot 120{,}6/2 = 1031765\ \mathrm{mm}^3\,,$$

$$S^*_{y,\mathrm{R}} = S^*_{y,\mathrm{S}} = 160 \cdot 30 \cdot (169{,}4 - 15) = 741120\ \mathrm{mm}^3\,,$$

a posmična naprezanja u istim su točkama:

$$\tau_{\mathrm{M}} = \tau_{\mathrm{N}} = 0\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$\tau_{\mathrm{L}} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{L}}}{b \cdot I_y} = \frac{57{,}981 \cdot 10^3 \cdot 813600}{200 \cdot 270{,}1923 \cdot 10^6} = 0{,}87\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$\tau_{\mathrm{P}} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{P}}}{b \cdot I_y} = \frac{57{,}981 \cdot 10^3 \cdot 813600}{30 \cdot 270{,}1923 \cdot 10^6} = 5{,}82\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$\tau_{\mathrm{T}} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{T}}}{b \cdot I_y} = \frac{57{,}981 \cdot 10^3 \cdot 1031765}{30 \cdot 270{,}1923 \cdot 10^6} = 7{,}39\ \mathrm{MPa}\,,$$

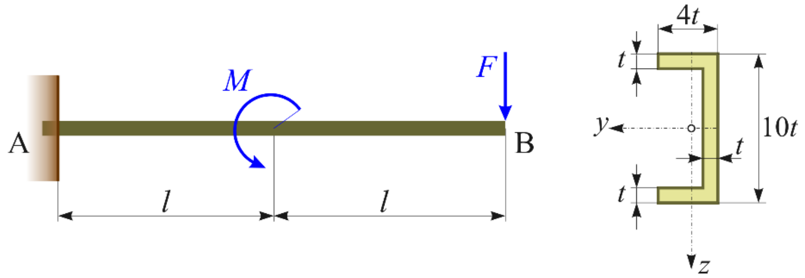
$$\tau_{\mathrm{R}} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{R}}}{b \cdot I_y} = \frac{57{,}981 \cdot 10^3 \cdot 741120}{30 \cdot 270{,}1923 \cdot 10^6} = 5{,}30\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$\tau_{\mathrm{S}} = \frac{Q_z \cdot S^*_{y,\mathrm{S}}}{b \cdot I_y} = \frac{57{,}981 \cdot 10^3 \cdot 741120}{160 \cdot 270{,}1923 \cdot 10^6} = 0{,}99\ \mathrm{MPa}\,.$$

Raspodjela posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka dana je na slici 6.21.b.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 6.1. Konzolni nosač zadanoga poprečnog presjeka opterećen je koncentriranim momentom iznosa M i koncentriranom silom iznosa F (slika Z.6.1.).



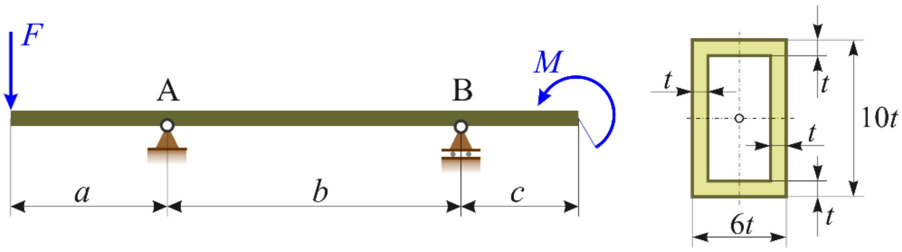
Slika Z.6.1. *Zadatak 6.1.*

Valja izračunati najveće normalno naprezanje. U presjeku na udaljenosti $x = 1,2l$ potrebno je skicirati i kotirati raspodjelu normalnog i posmičnog naprezanja po visini poprečnog presjeka.

Zadano je: $l = 1\,\mathrm{m}$, $M = 3\,\mathrm{kN \cdot m}$, $F = 2\,\mathrm{kN}$, $t = 8\,\mathrm{mm}$.

Zadatak 6.2. Linijski nosač s prepustima opterećen je na svojim krajevima koncentriranom silom F i koncentriranim momentom iznosa M (slika Z.6.2.). Potrebno je dimenzionirati poprečni presjek nosača (dobivenu vrijednost za t zaokružiti na cijeli broj u milimetrima). Za tako dimenzioniran poprečni presjek prikazati raspodjelu normalnih i posmičnih naprezanja po visini poprečnog presjeka na udaljenosti $x = 2 \cdot a$.

Zadano je: $a = 0,8\,\mathrm{m}$, $b = 1,5\,\mathrm{m}$, $c = 0,6\,\mathrm{m}$, $F = 8\,\mathrm{kN}$, $M = 12\,\mathrm{kN \cdot m}$, $\sigma_\mathrm{d} = 200\,\mathrm{MPa}$.



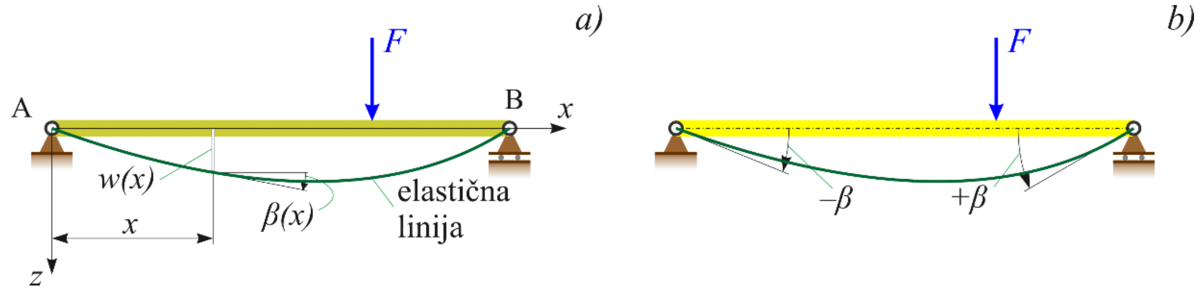
Slika Z.6.2. *Zadatak 6.2.*

6.5. DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA ELASTIČNE LINIJE

Već je spomenuto da pri savijanju nosača njegova uzdužna os postaje zakrivljena i naziva se *elastična linija*. *Progib* neke točke uzdužne osi nosača njen je pomak u smjeru osi z i označava se s w. Elastična linija ponekad se naziva *progibna linija* i funkcija je koordinate x, tj. $w = w(x)$ (slika 6.22.a).

Kut što ga tangenta na elastičnu liniju u nekoj točki zatvara s uzdužnom osi x zove se *kut zakreta elastične linije* ili *nagib* i označava se oznakom β. Nagib je također funkcija koordinate x, tj. $\beta = \beta(x)$.

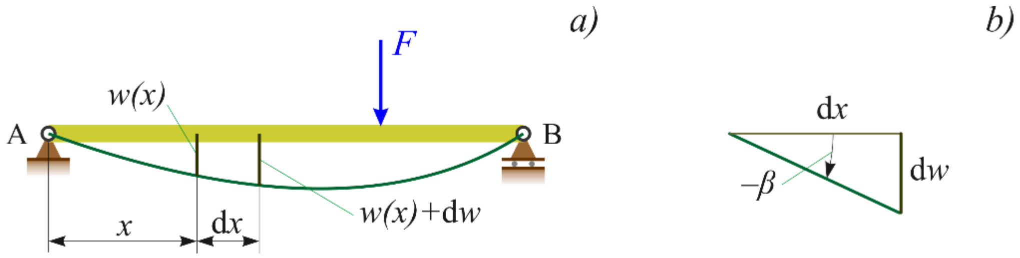
Pri tome je kut zakreta pozitivan ako se tangenta pri deformiranju zakreće u suprotnom smjeru od smjera kazaljke na satu, a negativan ako je zakret tangente u smjeru kazaljke na satu (slika 6.22.b).



Slika 6.22.: *a) progib i kut zakreta (nagib) elastične linije, b) pozitivan i negativan nagib*

Uz pomoć slike 6.23. može se dati veza kuta zakreta i progiba.

Neka su progibi dva bliska presjeka nosača na udaljenostima x i $x+\mathrm{d}x$ od lijevog kraja nosača označeni s $w(x)$ i $w(x)+\mathrm{d}w$ (slika 6.23.a).



Slika 6.23.: *a) progibi dvaju bliskih presjeka, b) veza između nagiba i progiba*

Prema slici 6.23.b jest:

$$\tan(-\beta)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

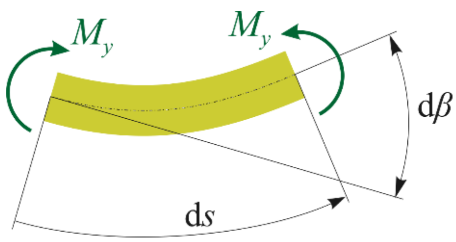
a kako za male kutove vrijedi $\tan(-\beta)=-\beta$, gornja jednakost može se pisati kao

$$\beta=-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}. \tag{6.13}$$

Prema izrazu (6.7) zakrivljenost elastične linije jest:

$$\kappa=\frac{1}{\rho}=\frac{M_y}{E\cdot I_y}. \tag{6.14}$$

Zakrivljenost se može izraziti i na sljedeći način (slika 6.24.):



Slika 6.24. *Zakrivljenost elastične linije*

$$\kappa=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\approx\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)=-\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}. \tag{6.15}$$

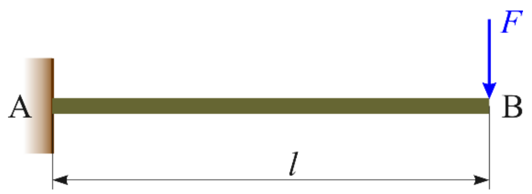
Usporedbom izraza (6.14) i (6.15) dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{M_y}{E\cdot I_y}. \tag{6.16}$$

Izraz (6.16) predstavlja diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Integriranjem te jednadžbe mogu se dobiti progibna funkcija $w=w(x)$ i funkcija nagiba $\beta=\beta(x)$, te na taj način progib i nagib u bilo kojoj točki nosača.

Primjer 6.5.

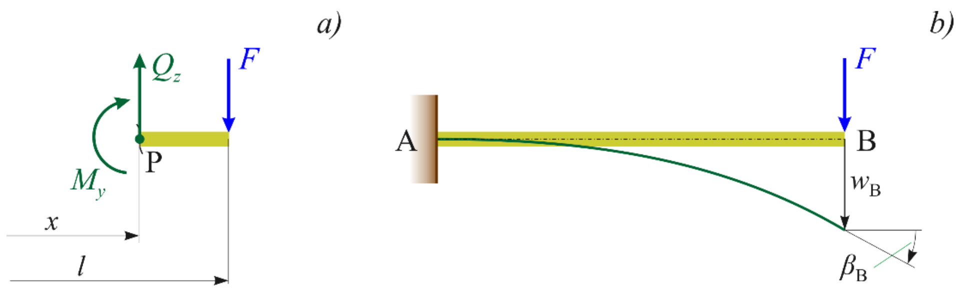
Zadan je konzolni nosač opterećen koncentriranom silom iznosa F na slobodnom kraju prema slici 6.25. Valja odrediti integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije progibnu funkciju $w = w(x)$, funkciju zakreta elastične linije $\beta = \beta(x)$ te opće izraze za najveći progib i najveći nagib. Izračunati najveći progib i nagib za slučaj kada je: $F = 5\ \mathrm{kN}$, $l = 2\ \mathrm{m}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$, $I_y = 2{,}1333 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$.



Slika 6.25. *Primjer 6.5.*

***Rješenje*:**

Prije rješavanja diferencijalne jednadžbe elastične linije potrebno je odrediti funkciju momenta savijanja $M_y = M_y(x)$.



Slika 6.26. *Primjer 6.5.: a) ravnoteža odsječenog dijela nosača, b) najveći nagib i progib*

Iz uvjeta ravnoteže odsječenog dijela štapa desno od presjeka (slika 6.26.a):

$$\sum M_{\mathrm{P}} = 0: \qquad -M_y - F \cdot (l - x) = 0$$

dobije se:

$$M_y = -F \cdot (l - x).$$

Uvrštavanjem izraza za moment savijanja u (6.16) dobije se diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{F}{E \cdot I_y}(l - x).$$

Postupkom integriranja dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{F}{E \cdot I_y}\left(l \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_1\right),$$

$$w = \frac{F}{E \cdot I_y}\left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2\right),$$

pri čemu se konstante integracije C_1 i C_2 mogu dobiti iz rubnih uvjeta kako slijedi:

$$w(0) = w_{\mathrm{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\beta(0) = \beta_{\mathrm{A}} = (-\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_{\mathrm{A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 .$$

Vraćanjem konstanta integracije u izraze za w i $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ dobiju se funkcije nagiba i progiba:

$$\beta(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{F}{E \cdot I_y}\left(l \cdot x - \frac{x^2}{2}\right), \tag{6.17}$$

$$w(x) = \frac{F}{E \cdot I_y}\left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right). \tag{6.18}$$

Najveći progib $w_{\max}$ i najveći nagib $\beta_{\max}$ na slobodnom su kraju konzole (slika 6.26.b), a opći izrazi za najveći progib i nagib jesu:

$$\beta_{\max} = \beta_{\mathrm{B}} = \beta(l) = -\frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_y}, \tag{6.19}$$

$$w_{\max} = w_{\mathrm{B}} = w(l) = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y}. \tag{6.20}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u (6.19) i (6.20) dobije se:

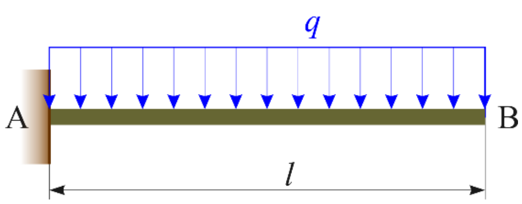
$$\beta_{\max} = -\frac{5 \cdot 10^3 \cdot \left(2 \cdot 10^3\right)^2}{2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2{,}1333 \cdot 10^6} = -0{,}02232 \text{ rad}, \quad \beta_{\max} = -1{,}27^\circ$$

$$w_{\max} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot \left(2 \cdot 10^3\right)^3}{3 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2{,}1333 \cdot 10^6} = 29{,}76 \text{ mm}.$$

Primjer 6.6.

Za konzolu opterećenu jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika 6.27.) potrebno je odrediti integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije progibnu funkciju $w = w(x)$, funkciju zakreta elastične linije $\beta = \beta(x)$ te opće izraze za najveći progib i najveći nagib. Za zadane podatke izračunati najveći progib i nagib.

Zadano je: $q = 4$ kN/m, $l = 3$ m, $E = 200$ GPa, $I_y = 7{,}96 \cdot 10^6$ mm^4.

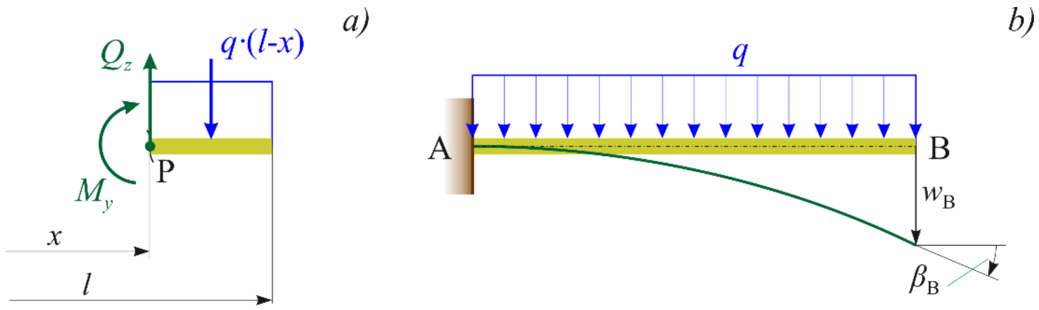


Slika 6.27. *Primjer 6.6.*

***Rješenje*:**

Funkcija momenta savijanja $M_y = M_y(x)$ dobivena iz uvjeta ravnoteže odsječenog dijela štapa desno od presjeka (slika 6.28.a) glasi:

$$\sum M_P = 0: \qquad -M_y - q\cdot(l-x)^2/2 = 0, \quad \text{pa je} \quad M_y = -q\cdot(l-x)^2/2.$$



Slika 6.28. Primjer 6.6.: *a) ravnoteža odsječenog dijela nosača, b) najveći nagib i progib*

Uvrštavanjem izraza za moment savijanja u (6.16) dobije se diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q}{2\cdot E\cdot I_y}\left(l^2 - 2\cdot l\cdot x + x^2\right).$$

Postupkom integriranja dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{q}{2\cdot E\cdot I_y}\left(l^2\cdot x - l\cdot x^2 + \frac{x^3}{3} + C_1\right),$$

$$w = \frac{q}{2\cdot E\cdot I_y}\left(l^2\cdot\frac{x^2}{2} - l\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + C_1\cdot x + C_2\right).$$

Kao u prethodnom zadatku, konstante integracije C_1 i C_2 dobivene su iz rubnih uvjeta:

$$w(0) = w_A = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\beta(0) = \beta_A = (-\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_A = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Vraćanjem konstanta integracije u izraze za w i $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ dobiju se funkcije nagiba i progiba:

$$\beta(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{q}{2\cdot E\cdot I_y}\left(l^2\cdot x - l\cdot x^2 + \frac{x^3}{3}\right), \tag{6.21}$$

$$w(x) = \frac{q}{2\cdot E\cdot I_y}\left(l^2\cdot\frac{x^2}{2} - l\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right). \tag{6.22}$$

Na slobodnom kraju konzole (slika 6.28.b) progib i nagib poprimaju maksimalne vrijednosti, a opći izrazi za najveći progib i nagib jesu:

$$\beta_{\max} = \beta_B = \beta(l) = -\frac{q\cdot l^3}{6\cdot E\cdot I_y}, \tag{6.23}$$

$$w_{\max} = w_{\mathrm{B}} = w(l) = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_y}. \tag{6.24}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u (6.21) i (6.22) dobije se:

$$\beta_{\max} = -\frac{4 \cdot \left(3 \cdot 10^3\right)^3}{6 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 7{,}96 \cdot 10^6} = -0{,}01131\ \mathrm{rad} \quad \left(-0{,}65^\circ\right),$$

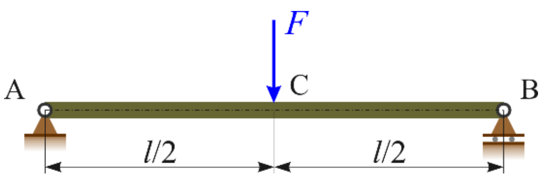
$$w_{\max} = \frac{4 \cdot \left(3 \cdot 10^3\right)^4}{8 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 7{,}96 \cdot 10^6} = 25{,}44\ \mathrm{mm}.$$

Primjer 6.7.

Jednostavni nosač opterećen je koncentriranom silom iznosa F na sredini raspona (slika 6.29.).

Valja odrediti integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije progibnu funkciju $w = w(x)$, funkciju zakreta elastične linije $\beta = \beta(x)$ te opće izraze za najveći progib i najveći nagib.

Izračunati najveći progib i nagib kada je: $F = 10\ \mathrm{kN}$, $l = 2{,}4\ \mathrm{m}$, $E = 200\ \mathrm{GPa}$, $I_y = 1{,}7067 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$.



Slika 6.29. *Primjer 6.7.*

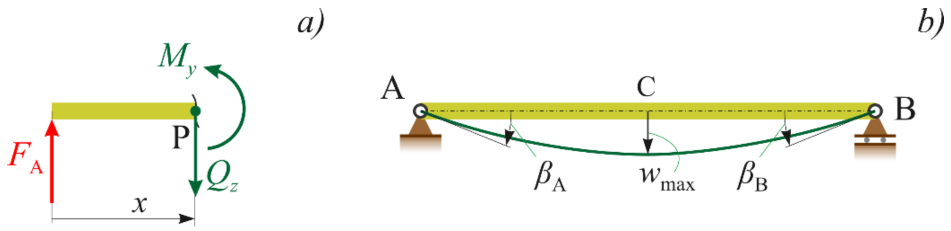
***Rješenje*:**

Iako postoje dva područja za određivanje unutarnjih sila, zbog simetrije dovoljno je promatrati samo prvo.

Funkcija momenta savijanja $M_y = M_y(x)$ za prvo područje dobivena iz uvjeta ravnoteže odsječenog dijela štapa lijevo od presjeka (slika 6.30.a) glasi:

$$0 \le x \le l/2 \qquad \sum M_{\mathrm{P}} = 0: \qquad M_y - F_{\mathrm{A}} \cdot x = 0,$$

$$M_y = F/2 \cdot x.$$



Slika 6.30. *Primjer 6.7.: a) ravnoteža odsječenog dijela nosača, b) najveći nagib i progib*

Uvrštavanjem izraza za moment savijanja u (6.16) dobije se diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_y} \cdot x \, .$$

Postupkom integriranja dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right),$$

$$w = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(\frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2\right).$$

Konstante integracije C_1 i C_2 mogu se dobiti iz sljedećih rubnih uvjeta:

$$w(0) = w_\mathrm{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\beta(l/2) = \beta_\mathrm{C} = (-\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_\mathrm{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -l^2/8 \, .$$

Vraćanjem konstanta integracije u izraze za w i $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ dobiju se funkcije nagiba i progiba:

$$\beta(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{F}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{8}\right), \tag{6.25}$$

$$w(x) = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{8} \cdot x\right). \tag{6.26}$$

Na početku i na kraju nosača nagib ima najveću vrijednost, dok je najveći progib na sredini raspona nosača, u točki C (slika 6.30.b), a opći izrazi za najveći progib i nagib jesu:

$$\beta_\mathrm{max} = \beta_\mathrm{A} = \beta(l) = -\frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I_y},$$

$$\beta_\mathrm{max} = \beta_\mathrm{B} = \beta(l) = \frac{F \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I_y} \tag{6.27}$$

$$w_\mathrm{max} = w_\mathrm{C} = w(l/2) = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_y}. \tag{6.28}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u (6.27) i (6.28) dobije se:

$$\beta_\mathrm{max} = \beta_\mathrm{A} = -\frac{10 \cdot 10^3 \cdot \left(2{,}4 \cdot 10^3\right)^2}{16 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 1{,}7067 \cdot 10^6} = -0{,}01055 \text{ rad},$$

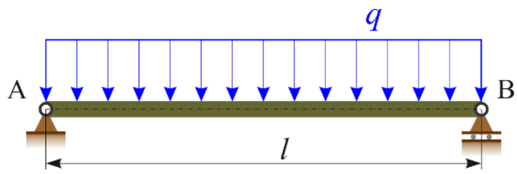
$$\beta_\mathrm{B} = -\beta_\mathrm{A} = 0{,}01055 \text{ rad},$$

$$w_\mathrm{max} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot \left(2{,}4 \cdot 10^3\right)^3}{48 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 1{,}7067 \cdot 10^6} = 8{,}44 \text{ mm}.$$

Primjer 6.8.

Za jednostavni nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika 6.31.) potrebno je odrediti integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije progibnu funkciju $w = w(x)$, funkciju zakreta elastične linije $\beta = \beta(x)$ te opće izraze za najveći progib i najveći nagib.

Za sljedeće podatke izračunati najveći progib i nagib: $q = 12$ kN/m, $l = 1{,}8$ m, $E = 210$ GPa, $I_y = 2{,}0106 \cdot 10^6$ mm^4.



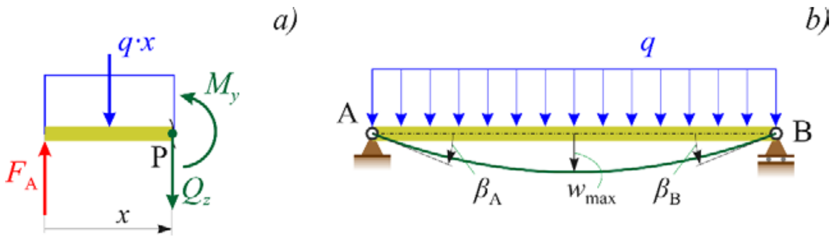
Slika 6.31. *Primjer 6.8.*

***Rješenje*:**

Funkcija momenta savijanja $M_y = M_y(x)$ dobivena iz uvjeta ravnoteže odsječenog dijela štapa desno od presjeka (slika 6.32.a) glasi:

$$\sum M_P = 0: \qquad M_y - q \cdot l/2 \cdot x + q \cdot x^2/2 = 0,$$

$$M_y = q \cdot l/2 \cdot x - q \cdot x^2/2.$$



Slika 6.32. *Primjer 6.8.: a) ravnoteža odsječenog dijela nosača, b) najveći nagib i progib*

Uvrštavanjem izraza za moment savijanja u (6.16) dobije se diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(l \cdot x - x^2\right).$$

Postupkom integriranja dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1\right),$$

$$w = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(l \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 \cdot x + C_2\right).$$

Konstante integracije C_1 i C_2 dobivene su iz rubnih uvjeta:

$$w(0) = w_A = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\beta(l/2) = \beta_C = (-\mathrm{d}w/\mathrm{d}x)_C = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -l^3/12 .$$

Vraćanjem konstanta integracije u izraze za w i $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ dobiju se funkcije nagiba i progiba:

$$\beta(x) = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(l \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12}\right), \tag{6.29}$$

$$w(x) = -\frac{q}{2 \cdot E \cdot I_y}\left(l \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3}{12} \cdot x\right). \tag{6.30}$$

Nagib ima najveću vrijednost iznad oslonaca, dok je progib najveći na sredini raspona (slika 6.32.b), a opći izrazi za najveći progib i nagib jesu:

$$\beta_{\max} = \beta_A = \beta(0) = -\frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I_y}, \tag{6.31}$$

$$w_{\max} = w_C = w(l/2) = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I_y}. \tag{6.32}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u (6.31) i (6.32) dobije se:

$$\beta_{\max} = \beta_A = -\frac{12 \cdot \left(1{,}8 \cdot 10^3\right)^3}{24 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0106 \cdot 10^6} = -0{,}006906 \text{ rad},$$

$$\beta_B = -\beta_A = 0{,}006906 \text{ rad}$$

$$w_{\max} = \frac{5 \cdot 12 \cdot \left(1{,}8 \cdot 10^3\right)^4}{384 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0106 \cdot 10^6} = 3{,}88 \text{ mm}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

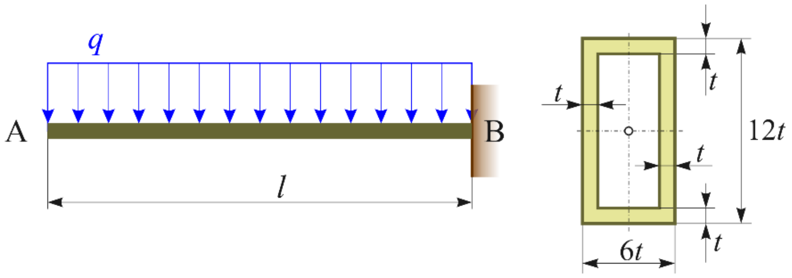
Zadatak 6.3. Konzolni nosač zadanog oblika poprečnog presjeka opterećen je koncentriranim momentom iznosa M (slika Z.6.3.).

Dimenzionirati nosač te promjer izraziti kao cjelobrojnu vrijednost u milimetrima. Za tako dimenzioniran poprečni presjek valja izračunati najveći progib i nagib.

Zadano je: $l = 1\,\mathrm{m}$, $M = 3\,\mathrm{kN \cdot m}$, $\sigma_d = 180\,\mathrm{MPa}$, $E = 200\,\mathrm{GPa}$.

Slika Z.6.3. *Zadatak 6.3.*

Zadatak 6.4. Konzola zadanog oblika poprečnog presjeka opterećena je jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika Z.6.4.).



Slika Z.6.4. *Zadatak 6.4.*

Potrebno je dimenzionirati poprečni presjek konzole (dobivenu vrijednost za t zaokružiti na cijeli broj u milimetrima). Za tako dimenzioniran poprečni presjek izračunati najveći nagib i progib. Zadano je: $l = 1{,}6\ \mathrm{m}$, $q = 8\ \mathrm{kN/m}$, $\sigma_\mathrm{d} = 200\ \mathrm{MPa}$, $E = 200\ \mathrm{GPa}$.

6.6. KOSO SAVIJANJE

U slučaju da vanjsko opterećenje ne djeluje niti u jednoj od glavnih ravnina, radi se o kosom savijanju. Koso savijanje predstavlja zapravo istovremeno savijanje u dvjema međusobno okomitim ravninama koje zovemo glavnim ravninama. Jednu glavnu ravninu čine os x i glavna os y_0, a drugu os x i glavna os z_0. Ako se radi o poprečnom presjeku s jednom ili dvjema osima simetrije, težišne osi y i z ujedno su i glavne osi y_0 i z_0. Postupak određivanja glavnih osi za nesimetrični poprečni presjek opisan je u poglavlju 4. Moment savijanja koji se javlja u poprečnom presjeku treba razložiti na komponente oko glavnih osi, pa se normalno naprezanje računa prema izrazu:

$$\sigma = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0 - \frac{M_{z0}}{I_{z0}} \cdot y_0 . \tag{6.33}$$

U izrazu (6.33) M_{y0} i M_{z0} su komponente momenta savijanja s obzirom na glavne osi y_0 odnosno z_0; I_{y0} i I_{z0} su glavni aksijalni momenti tromosti poprečnog presjeka za glavne težišne osi; y_0 i z_0 su glavne koordinate točaka poprečnog presjeka koje se mogu izračunati uz pomoć izraza za transformaciju koordinata:

$$y_0 = y \cdot \cos\varphi_0 + z \cdot \sin\varphi_0 , \tag{6.34}$$

$$z_0 = -y \cdot \sin\varphi_0 + z \cdot \cos\varphi_0 . \tag{6.35}$$

Postoje točke na poprečnom presjeku za koje će ukupno naprezanje računano prema (6.33) biti jednako nuli. Te točke leže na neutralnoj osi. Jednadžba neutralne osi u koordinatnom sustavu koji čine glavne osi y_0 i z_0 dobije se prema izrazu:

$$\sigma = \frac{M_{y0}}{I_{y0}} \cdot z_0 - \frac{M_{z0}}{I_{z0}} \cdot y_0 = 0$$

$$z_0 = \frac{I_{y0} \cdot M_{z0}}{I_{z0} \cdot M_{y0}} \cdot y_0 = \tan\psi \cdot y_0 , \tag{6.36}$$

gdje je ψ kut koji neutralna os čini s osi y_0 dobiven prema izrazu:

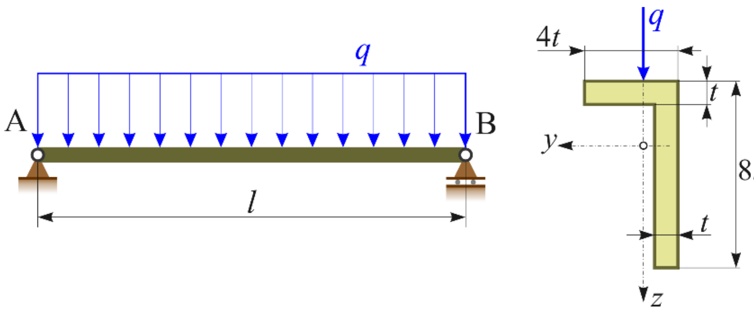
$$\tan\psi = \frac{I_{y0} \cdot M_{z0}}{I_{z0} \cdot M_{y0}} . \tag{6.37}$$

S jedne strane neutralne osi naprezanja su pozitivna, a s druge strane negativna.

Primjer 6.9.

Za jednostavni nosač zadanoga poprečnog presjeka opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika 6.33.) potrebno je odrediti položaj neutralne osi te najveće vlačno i najveće tlačno naprezanje.

Zadano je: $l = 4$ m, $q = 1$ kN/m, $t = 10$ mm.

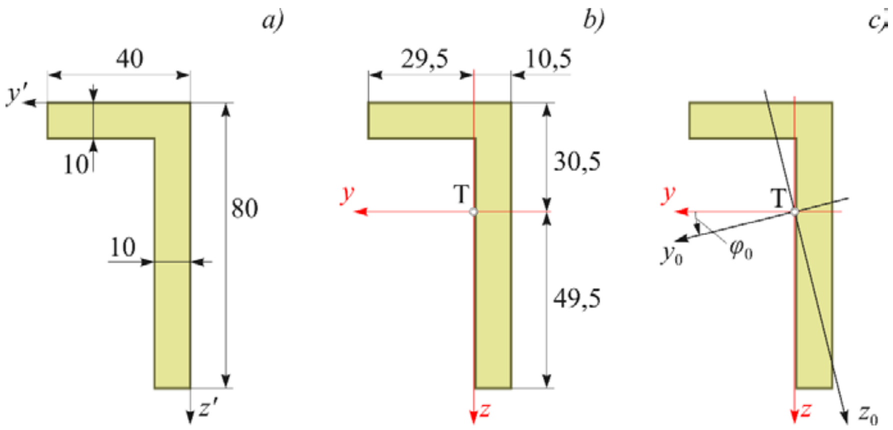


Slika 6.33. *Primjer 6.9.*

***Rješenje*:**

U poglavlju 4 (vidi primjer 4.5.) detaljno je opisan postupak određivanja geometrijskih karakteristika nesimetričnoga poprečnog presjeka.

Za zadani poprečni presjek (slika 6.34.a) položaj težišta prikazan je na slici 6.34.b, dok slika 6.34.c prikazuje kut φ_0 koji glavne osi y_0 i z_0 zatvaraju s osima y i z.



Slika 6.34. *Primjer 6.9.: a) zadani presjek, b) položaj težišta, c) glavne osi*

Kut φ_0 iznosi $\varphi_0 = 13{,}89^\circ$, dok su glavni aksijalni momenti tromosti zadanog presjeka:

$$I_{y0} = 734198 \text{ mm}^4 \quad \text{i} \quad I_{z0} = 78681 \text{ mm}^4 .$$

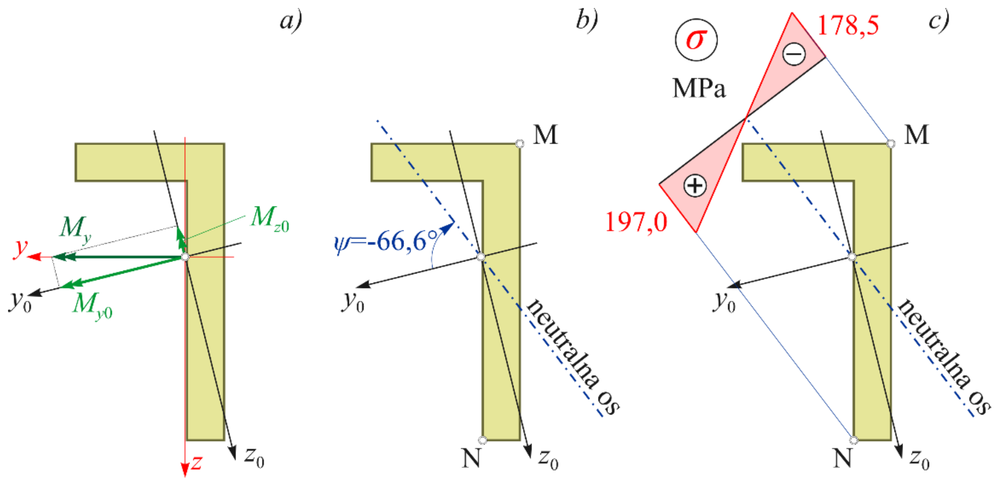
Najveći moment savijanja s obzirom na os y jest na sredini raspona i iznosi:

$$M_y = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1 \cdot 4^2}{8} = 2 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$

Komponente tog momenta na glavne osi jesu (slika 6.35.a):

$$M_{y0} = M_y \cdot \cos\varphi_0 = 2 \cdot \cos 13{,}89^\circ = 1{,}942 \text{ kN} \cdot \text{m} ,$$

$$M_{z0} = -M_y \cdot \sin\varphi_0 = -2 \cdot \sin 13{,}89^\circ = -0{,}480 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$



Slika 6.35. *Primjer 6.9.: a) komponente momenta, b) položaj neutralne osi, c) raspodjela naprezanja*

Položaj neutralne osi (slika 6.35.b) određen je kutom ψ koji je dobiven prema (6.37):

$$\tan\psi = \frac{734198 \cdot (-0{,}480)}{78681 \cdot 1{,}942} = -2{,}30640 , \quad \psi = -66{,}6^\circ .$$

Točke koje su najudaljenije od neutralne osi jesu M i N. Glavne koordinate tih točaka računaju se prema (6.34) i (6.35) i glase:

$$y_{\mathrm{M}0} = (-10{,}5) \cdot \cos 13{,}89^\circ + (-30{,}5) \cdot \sin 13{,}89^\circ = -17{,}51 \text{ mm} ,$$

$$z_{\mathrm{M}0} = -(-10{,}5) \cdot \sin 13{,}89^\circ + (-30{,}5) \cdot \cos 13{,}89^\circ = -27{,}09 \text{ mm} ,$$

$$y_{\mathrm{N}0} = (-0{,}5) \cdot \cos 13{,}89^\circ + 49{,}5 \cdot \sin 13{,}89^\circ = 11{,}40 \text{ mm} ,$$

$$z_{\mathrm{N}0} = -(-0{,}5) \cdot \sin 13{,}89^\circ + 49{,}5 \cdot \cos 13{,}89^\circ = 48{,}17 \text{ mm} .$$

Normalna naprezanja u ovim točkama računaju se prema (6.33). Najveće tlačno normalno naprezanje u točki M jest:

$$\sigma_{\mathrm{M}} = \frac{1{,}942 \cdot 10^6}{734198} \cdot (-27{,}09) - \frac{(-0{,}480) \cdot 10^6}{78681} \cdot (-17{,}51) = -178{,}5 \text{ MPa} ,$$

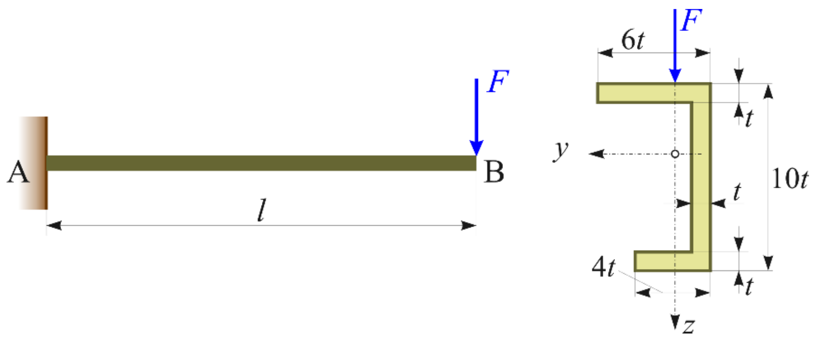
dok je u točki N najveće vlačno normalno naprezanje iznosa:

$$\sigma_\mathrm{N} = \frac{1{,}942 \cdot 10^6}{734198} \cdot 48{,}17 - \frac{(-0{,}480) \cdot 10^6}{78681} \cdot 11{,}40 = 197{,}0\ \mathrm{MPa}\,.$$

Raspodjela normalnih naprezanja po presjeku prikazana je na slici 6.35.c.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 6.5. Konzolni nosač zadanoga poprečnog presjeka opterećen je koncentriranom silom iznosa F (slika Z.6.5.). Valja izračunati položaj neutralne osi te najveće vlačno i najveće tlačno naprezanje ako je zadano: $l = 1{,}5\ \mathrm{m}$, $F = 12\ \mathrm{kN}$, $t = 2\ \mathrm{cm}$.



Slika Z.6.5. *Zadatak 6.5.*

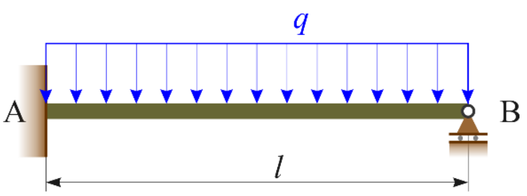
6.7. STATIČKI NEODREĐENI ZADATCI PRI SAVIJANJU

Kao i za slučaj aksijalnog opterećenja štapa ili uvijanja i ovdje kod statički neodređenih zadataka pristupa se na isti način, tj. pored uvjeta ravnoteže treba postaviti onoliko dodatnih jednadžbi koliko je puta zadatak statički neodređen. Zadani problem svodi se na osnovni statički određeni problem ukidanjem prekobrojnih veza i dodavanjem na tom mjestu nepoznatih reakcija. Nepoznate reakcije određuju se iz uvjeta da je na mjestu uklanjanja oslonaca pomak jednak nuli.

Postupak rješavanja pokazan je na primjerima koji slijede.

Primjer 6.10.

Za statički neodređeni nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika 6.36.) valja odrediti reakcije veza ako je zadano: $l = 2\ \mathrm{m}$, $q = 16\ \mathrm{kN/m}$.

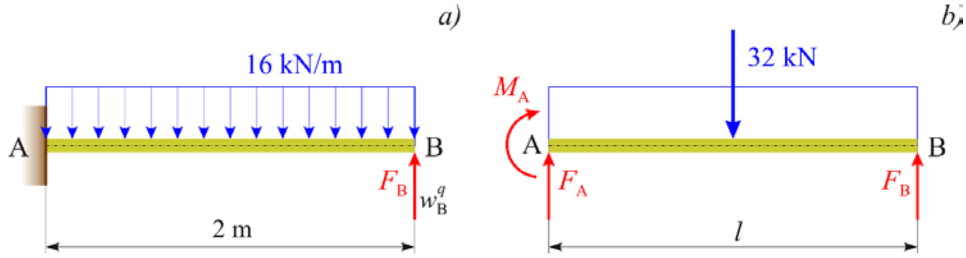


Slika 6.36. *Primjer 6.10.*

***Rješenje*:**

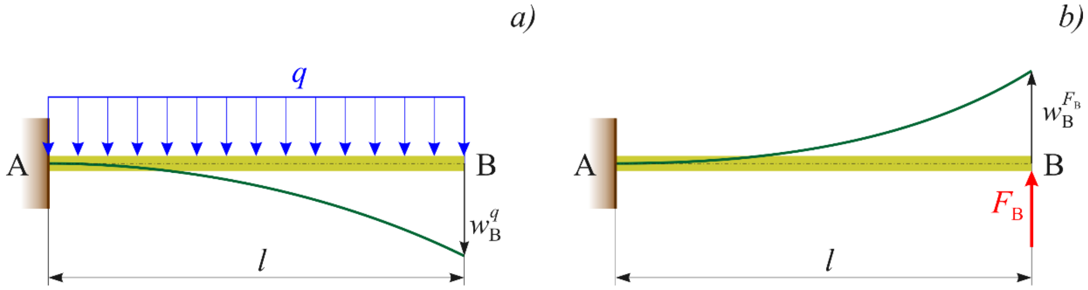
Zadatak je statički neodređen, pa se uklanjanjem oslonca B i postavljanjem sile F_B na tom mjestu dobije osnovni statički određeni problem (slika 6.37.a).

Dodatni uvjet koji uz uvjete ravnoteže omogućuje rješavanje zadatka glasi da progib točke B mora biti jednak nuli $w_B = 0$.



Slika 6.37. *Primjer 6.10.: a) osnovni statički određeni problem, b) nosač oslobođen od veza*

Ukupni progib točke B može se izračunati metodom superpozicije kao zbroj progiba posebno od djelovanja kontinuiranog opterećenja i posebno od djelovanja reakcijske sile F_B (sl. 6.38.).



Slika 6.38. *Primjer 6.10.: a) progib od kontinuiranog opterećenja, b) progib od reakcijske sile*

Ovi progibi su prema (6.20) i (6.24):

$$w_B^{F_B} = -\frac{F_B \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y}, \qquad w_B^q = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_y}.$$

Budući da ukupni progib točke B mora biti jednak nuli, slijedi:

$$-\frac{F_B \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_y} + \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I_y} = 0,$$

odakle je

$$F_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l = \frac{3}{8} \cdot 16 \cdot 2 = 12 \text{ kN}.$$

Ostale reakcije dobiju se iz uvjeta ravnoteže nosača oslobođenog od veza (slika 6.37.b):

$$\sum F_z = 0: \quad -F_A + q \cdot l - F_B = 0,$$

$$\sum M_A = 0: \quad -M_A - q \cdot l \cdot l/2 + F_B \cdot l = 0,$$

odakle slijedi:

$$F_A = q \cdot l - F_B = 16 \cdot 2 - 12 = 20 \text{ kN}$$

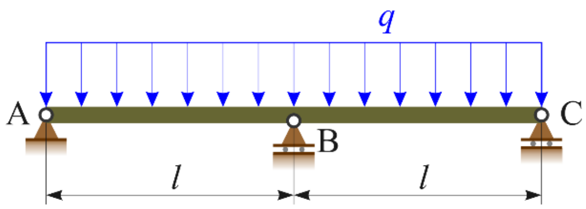
$$M_{\mathrm{A}} = -q \cdot l \cdot l/2 + F_{\mathrm{B}} \cdot l = -16 \cdot 2 \cdot 1 + 12 \cdot 2 = -8\ \mathrm{kN \cdot m}\,.$$

Nakon određivanja reakcija veza, unutarnje sile te posmična i normalna naprezanja određuju se na isti način kako je rađeno u prethodnim primjerima.

Primjer 6.11.

Za statički neodređeni nosač na tri oslonca opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika 6.39.) valja odrediti reakcije veza.

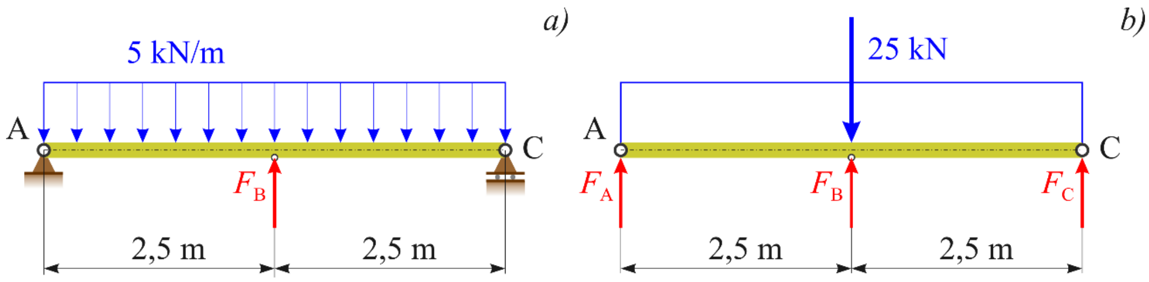
Zadano je: $l = 2{,}5\ \mathrm{m}$, $q = 5\ \mathrm{kN/m}$.



Slika 6.39. *Primjer 6.11.*

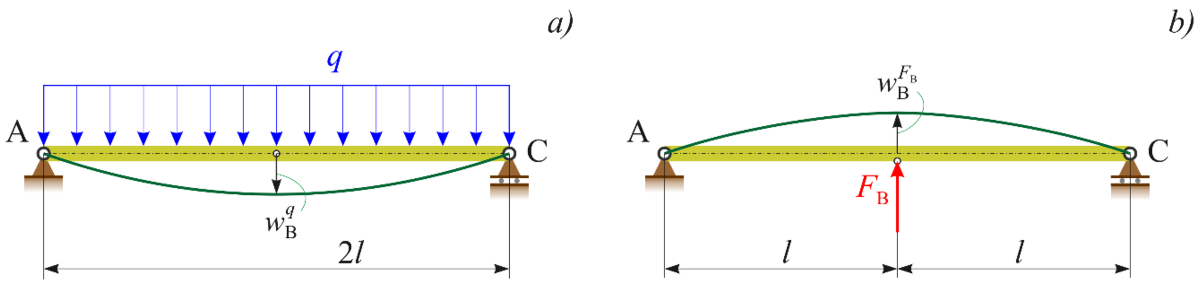
***Rješenje*:**

Zadatak je statički neodređen, pa se uklanjanjem oslonca B i postavljanjem sile F_{B} na tom mjestu dobije osnovni statički određeni problem (slika 6.40.a).



Slika 6.40. *Primjer 6.11.: a) osnovni statički određeni problem, b) nosač oslobođen od veza*

Dodatni uvjet koji uz uvjete ravnoteže omogućuje rješavanje zadatka glasi da progib točke B mora biti jednak nuli $w_{\mathrm{B}} = 0$.



Slika 6.41. *Primjer 6.11.: a) progib od kontinuiranog opterećenja, b) progib od reakcijske sile*

Ukupni progib točke B može se izračunati metodom superpozicije kao zbroj progiba posebno od djelovanja kontinuiranog opterećenja i posebno od djelovanja reakcijske sile F_{B} (slika 6.41.):

$$w_{\mathrm{B}} = w_{\mathrm{B}}^{q} + w_{\mathrm{B}}^{F_{\mathrm{B}}} = 0 .$$

Ovi progibi su prema (6.28) i (6.32):

$$w_{\mathrm{B}}^{F_{\mathrm{B}}} = -\frac{F_{\mathrm{B}} \cdot (2 \cdot l)^3}{48 \cdot E \cdot I_y} = -\frac{F_{\mathrm{B}} \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_y} ,$$

$$w_{\mathrm{B}}^{q} = \frac{5 \cdot q \cdot (2 \cdot l)^4}{384 \cdot E \cdot I_y} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_y} .$$

Kako je ukupni progib točke B jednak nuli, slijedi:

$$-\frac{F_{\mathrm{B}} \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I_y} + \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I_y} = 0 ,$$

odakle je

$$F_{\mathrm{B}} = \frac{5}{4} \cdot q \cdot l = \frac{5}{4} \cdot 5 \cdot 2,5 = 15,625 \text{ kN} .$$

Ostale reakcije dobiju se iz uvjeta ravnoteže nosača oslobođenog od veza (slika 6.40.b):

$$\sum M_{\mathrm{A}} = 0: \quad -q \cdot 2 \cdot l \cdot l + F_{\mathrm{B}} \cdot l + F_{\mathrm{C}} \cdot 2 \cdot l = 0 ,$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{\mathrm{A}} + q \cdot 2 \cdot l - F_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{C}} = 0 ,$$

iz kojih uvjeta slijedi:

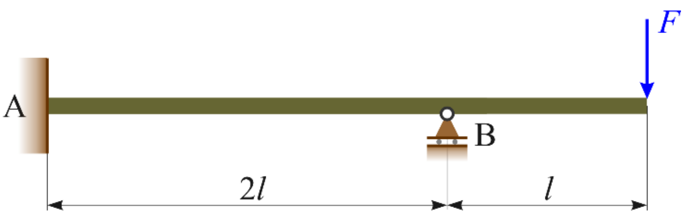
$$F_{\mathrm{C}} = q \cdot l - 0,5 \cdot F_{\mathrm{B}} = 5 \cdot 2,5 - 0,5 \cdot 15,625 = 4,6875 \text{ kN} ,$$

$$F_{\mathrm{A}} = 2 \cdot q \cdot l - F_{\mathrm{B}} - F_{\mathrm{C}} = 2 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15,625 - 4,6875 = 4,6875 \text{ kN} .$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 6.6. Za statički neodređeni nosač opterećen koncentriranom silom iznosa F (slika Z.6.6.) valja odrediti sve reakcije veza.

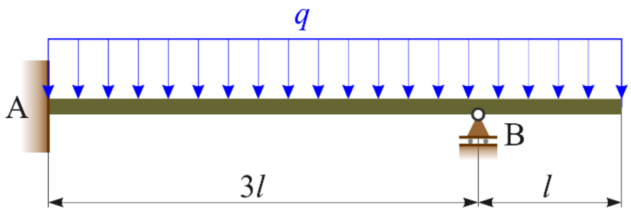
Zadano je: $l = 1,5 \text{ m}$, $F = 6 \text{ kN}$.



Slika Z.6.6. *Zadatak 6.6.*

Zadatak 6.7. Za statički neodređeni nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika Z.6.7.) valja odrediti sve reakcije veza.

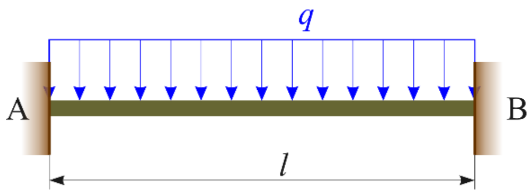
Zadano je: $l = 1,5 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kN/m}$.



Slika Z.6.7. *Zadatak 6.7.*

Zadatak 6.8. Za dva puta statički neodređeni nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q (slika Z.6.8.) valja odrediti sve reakcije veza. Koristiti se metodom superpozicije.

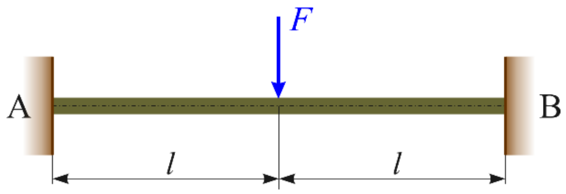
Zadano je: $l = 4\ \mathrm{m}$, $q = 8\ \mathrm{kN/m}$.



Slika Z.6.8. *Zadatak 6.8.*

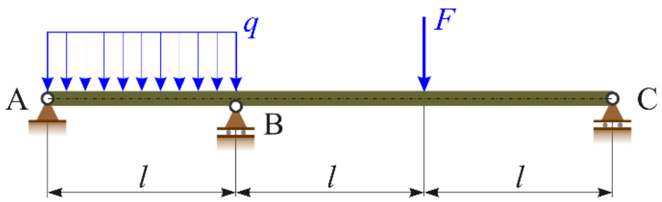
Zadatak 6.9. Za statički neodređeni nosač opterećen koncentriranom silom iznosa F (slika Z.6.9.) valja odrediti sve reakcije veza. Koristiti se metodom superpozicije.

Zadano je: $l = 3\ \mathrm{m}$, $F = 15\ \mathrm{kN}$.



Slika Z.6.9. *Zadatak 6.9.*

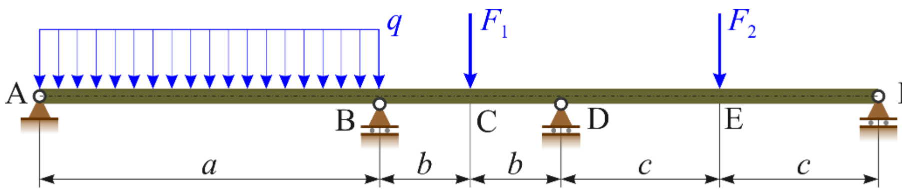
Zadatak 6.10. Za statički neodređeni nosač opterećen jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q i koncentriranom silom F (slika Z.6.10.) valja odrediti sve reakcije veza ako je zadano: $l = 1\ \mathrm{m}$, $q = 8\ \mathrm{kN/m}$, $F = 8\ \mathrm{kN}$. Koristiti se programskim paketom MDSolids.



Slika Z.6.10. *Zadatak 6.10.*

Zadatak 6.11. Za dva puta statički neodređeni nosač (slika Z.6.11.) valja odrediti sve reakcije veza te progibe i nagibe točaka C i E koristeći se programskim paketom MDSolids.

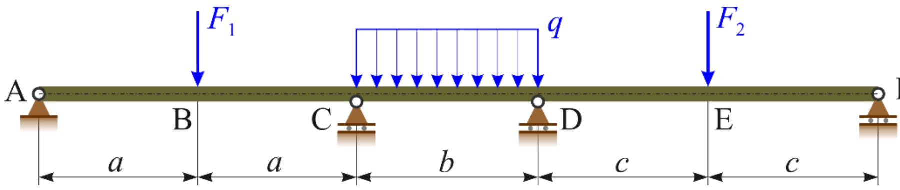
Zadano je: $a = 3\ \mathrm{m}$, $b = 0{,}8\ \mathrm{m}$, $c = 1{,}4\ \mathrm{m}$, $q = 15\ \mathrm{kN/m}$, $F_1 = 20\ \mathrm{kN}$, $F_2 = 12\ \mathrm{kN}$, $I_y = 1{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4$, $E = 210\ \mathrm{MPa}$.



Slika Z.6.11. *Zadatak 6.11.*

Zadatak 6.12. Upotrebom programskog paketa MDSolids odrediti sve reakcije veza te progibe i nagibe točaka B i E za dva puta statički neodređeni nosač prikazan na slici Z.6.12.

Zadano je: $a = 1,4\ \text{m}$, $b = 1,6\ \text{m}$, $c = 1,5\ \text{m}$, $F_1 = 25\ \text{kN}$, $q = 12\ \text{kN/m}$, $F_2 = 18\ \text{kN}$, $I_y = 1,6 \cdot 10^6\ \text{mm}^4$, $E = 200\ \text{MPa}$.



Slika Z.6.12. *Zadatak 6.12.*

7. TENZOR NAPREZANJA

U poglavlju 1 izrazom (1.2) definiran je vektor naprezanja, a izrazom (1.3) njegove normalna i posmična komponenta. Ovdje će se naprezanje promatrati kao *tenzorska veličina drugog reda*. Fizikalne veličine za čije je opisivanje dovoljan jedan podatak nazivaju se *skalari*. Takve veličine su npr. masa i temperatura.

Pored skalara u kolegijima *Tehnička mehanika I* i *II* spomenuti su i *vektori* koji su u ravnini jednoznačno određeni s dvama, a u prostoru s trima podatcima. Sila, brzina, ubrzanje vektorske su veličine.

Kao što će se u ovom i sljedećem poglavlju pokazati, postoje veličine koje su u ravnini definirane s četirima podatcima, a u prostoru s devet podataka. Među takve veličine koje nazivamo *tenzorima drugog reda* spadaju naprezanje, deformacija, moment tromosti mase i površine. Zapravo su skalari tenzori nultog, a vektori tenzori prvog reda, kao što se vidi u tablici 7.1. Da bi neka veličina bila tenzor nekog reda, nije dovoljno da ima odgovarajući broj komponenata, nego se te komponente pri rotaciji koordinatnog sustava moraju mijenjati po točno određenom zakonu.

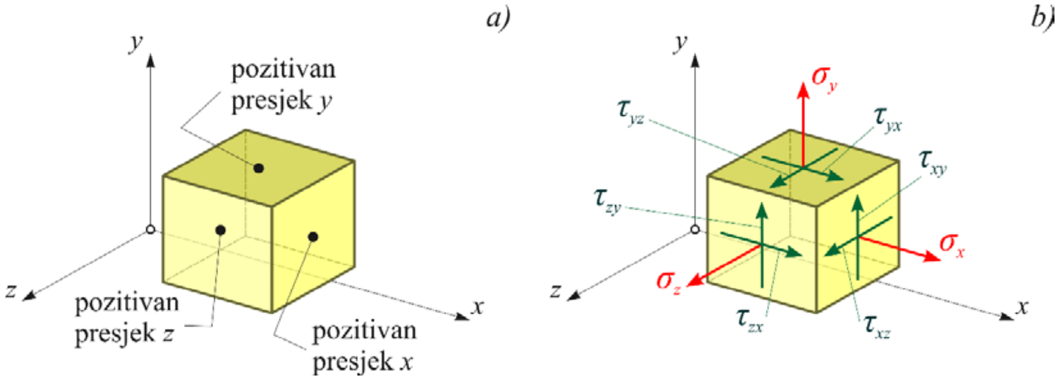
Tablica 7.1. *Tipovi tenzora*

Red tenzora	Posebni naziv	Potreban broj podataka *u ravnini*	 *u prostoru*	Primjer
nulti	skalar	$2^0 = 1$	$3^0 = 1$	temperatura, masa
prvi	vektor	$2^1 = 2$	$3^1 = 3$	sila, brzina, ubrzanje
drugi	tenzor	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	naprezanje, deformacija, moment tromosti površine

U nekoj točki presjeka opterećenog tijela može se odrediti beskonačno mnogo vektora naprezanja $\vec{p}$ što ovisi o orijentaciji presjeka. Pri tome je za određivanje vektora naprezanja u proizvoljnom presjeku dovoljno poznavati vektore naprezanja za tri presjeka. Obično se uzimaju tri međusobno okomita presjeka, a vektor naprezanja u svakom se od tih triju presjeka rastavlja u tri komponente što daje devet komponenata tenzora naprezanja.

Na slici 7.1.a prikazan je izdvojeni diferencijalno mali element oblika kocke iz nekog opterećenog tijela te koordinatni sustav s koordinatnim osima x, y i z. Za šest ploha kocke prvo se definira predznak presjeka. Presjek se smatra pozitivnim ako njegova vanjska normala ima smjer kao i pozitivan smjer odgovarajuće koordinatne osi.

Tako se vidljive strane kocke na slici 7.1.a smatraju pozitivnim presjecima, a one nevidljive negativnim presjecima. Svakom presjeku pripada vektor naprezanja $\vec{p}$ koji se rastavlja na jednu komponentu na pravcu normale na presjek i dvije komponente koje leže u samom presjeku. Komponente na pravcu normale zovu se normalnim komponentama naprezanja i označuju se grčkim slovom *sigma* te indeksom koji odgovara koordinatnoj osi, npr. σ_x, dok se komponente u ravnini presjeka zovu posmičnim (tangencijalnim) komponentama naprezanja i označuju se grčkim slovom *tau* (τ) s dva indeksa od kojih se prvi odnosi na normalu, a drugi na paralelnu os zadanoga koordinatnog sustava. Tako je npr. posmična komponenta τ_{xy} u presjeku kojemu je normala paralelna s osi x, a posmična komponenta ima smjer osi y. Na pozitivnim presjecima komponente naprezanja su pozitivne ako imaju smjerove pozitivnih koordinatnih osi (slika 7.1.b).



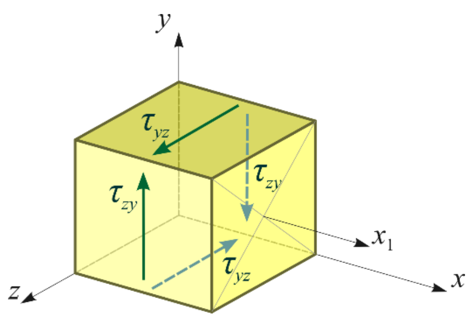
Slika 7.1.: *a) pozitivni presjeci, b) pozitivne komponente naprezanja na pozitivnim presjecima*

7.1. MATRICA TENZORA NAPREZANJA

Komponente tenzora naprezanja mogu se složiti u matricu tenzora naprezanja, gdje će u prvom retku biti komponente vektora naprezanja koji pripada presjeku s normalom paralelnom s osi x, u drugom retku komponente vektora naprezanja koji pripada presjeku s normalom paralelnom s osi y, a u trećem retku komponente vektora naprezanja koji pripada presjeku s normalom paralelnom s osi z, tj.:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

Može se pokazati da je matrica tenzora naprezanja simetrična matrica. Na slici 7.2. prikazan je diferencijalno mali element tijela na kojem su ucrtana samo ona naprezanja koja stvaraju moment oko osi x_1 koja prolazi središtem kocke i paralelna je osi x.



Slika 7.2. *Jednakost posmičnih naprezanja s istim indeksima*

Iz uvjeta ravnoteže postavljenoga za taj element dobije se:

$$\sum M_{x_1} = 0:\ \tau_{yz} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}y - \tau_{zy} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0\,, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}\,.$$

Na sličan način može se pokazati jednakost ostalih posmičnih naprezanja s istim indeksima, tako da vrijedi:

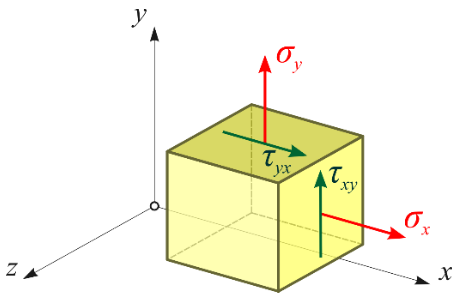
$$\tau_{yx} = \tau_{xy}\,, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}\,. \tag{7.2}$$

Može se zaključiti da su na dva međusobno okomita presjeka posmična naprezanja jednaka po iznosu i predznaku. Istovremeno su oba usmjerena k zajedničkom bridu elementa ili od brida.

Za slučaj ravninskog stanja naprezanja matrica tenzora naprezanja ima oblik:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

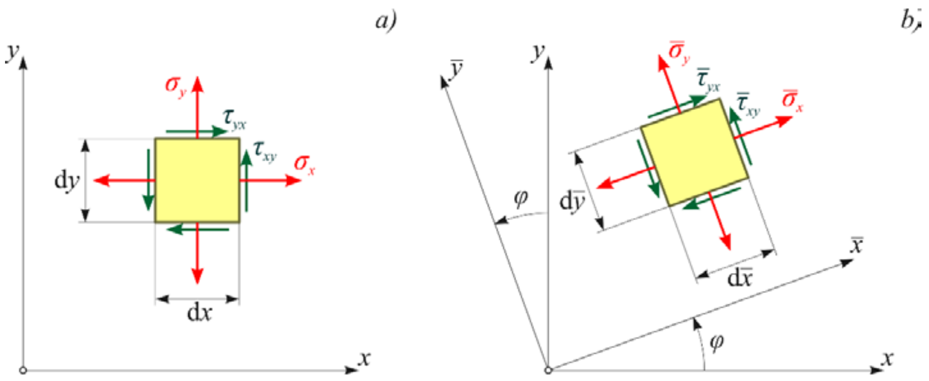
Pozitivne komponente tenzora naprezanja na pozitivnim presjecima prikazane su na slici 7.3.



Slika 7.3. *Komponente tenzora naprezanja za slučaj ravninskog stanja naprezanja*

7.2. IZRAZI ZA TRANSFORMACIJU KOMPONENATA TENZORA NAPREZANJA

Na slici 7.4.a prikazan je orijentirani element s pozitivnim komponentama naprezanja koje na njega djeluju, a koje se odnose na koordinatni sustav Oxy. Pri rotaciji koordinatnog sustava za pozitivni kut φ dobiva se novi koordinatni sustav $O\,\bar{x}\,\bar{y}$ za koji će komponente tenzora naprezanja imati nove vrijednosti. Orijentirani element s pozitivnim komponentama naprezanja za zarotirani koordinatni sustav prikazan je na slici 7.4.b.

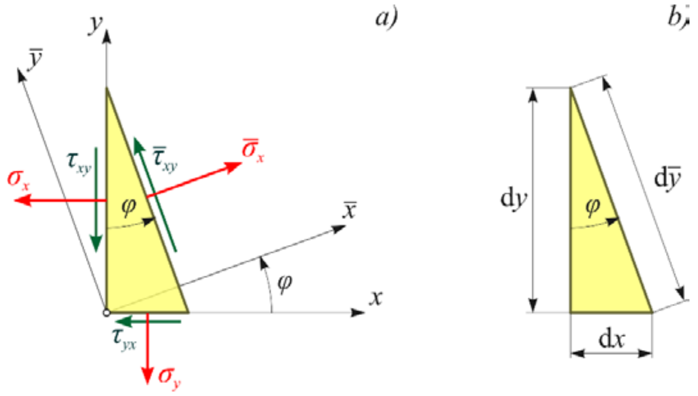


Slika 7.4.: *a) zadani orijentirani element s komponentama naprezanja, b) zarotirani orijentirani element s komponentama naprezanja*

Iz uvjeta ravnoteže trokutnog elementa na slici 7.5.a mogu se dobiti izrazi za transformaciju komponenata tenzora naprezanja.

Prema slici 7.5.b jest:

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{y}=\sin\varphi\,,\qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}\bar{y}=\cos\varphi\,. \tag{7.4}$$



Slika 7.5.: *a) trokutni element s pozitivnim komponentama naprezanja, b) geometrija trokutnog elementa*

Jednadžbe ravnoteže promatranoga trokutnog elementa za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$, $\sum \bar{F}_x=0$ odnosno $\sum \bar{F}_y=0$ glase:

$$\bar{\sigma}_x\cdot \mathrm{d}\bar{y}-\tau_{xy}\cdot \mathrm{d}y\cdot\sin\varphi-\sigma_x\cdot \mathrm{d}y\cdot\cos\varphi-\tau_{yx}\cdot \mathrm{d}x\cdot\cos\varphi-\sigma_y\cdot \mathrm{d}x\cdot\sin\varphi=0\,,$$

$$\bar{\tau}_{xy}\cdot \mathrm{d}\bar{y}-\tau_{xy}\cdot \mathrm{d}y\cdot\cos\varphi+\sigma_x\cdot \mathrm{d}y\cdot\sin\varphi+\tau_{yx}\cdot \mathrm{d}x\cdot\sin\varphi-\sigma_y\cdot \mathrm{d}x\cdot\cos\varphi=0\,.$$

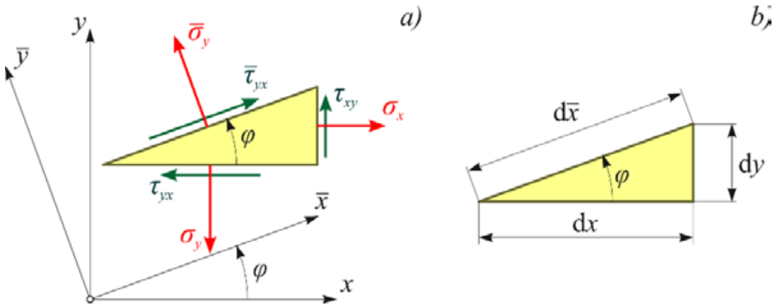
Ako se gornje jednadžbe podijele s $\mathrm{d}\bar{y}$ te u njih uvrste izrazi (7.4) nakon sređivanja, uz $\tau_{yx}=\tau_{xy}$, mogu se dobiti izrazi za transformaciju dviju komponenata naprezanja:

$$\bar{\sigma}_x=\sigma_x\cdot\cos^2\varphi+\sigma_y\cdot\sin^2\varphi+2\cdot\tau_{xy}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,, \tag{7.5}$$

$$\bar{\tau}_{xy}=-\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi+\tau_{xy}\cdot\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right). \tag{7.6}$$

Izrazi za preostale dvije komponente dobiju se na sličan način razmatranjem trokutnog elementa prema slici 7.6.a. Prema slici 7.6.b jest:

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}\bar{x}=\cos\varphi\,,\qquad \mathrm{d}y/\mathrm{d}\bar{x}=\sin\varphi\,. \tag{7.7}$$



Slika 7.6.: *a) trokutni element s pozitivnim komponentama naprezanja, b) geometrija trokutnog elementa*

Jednadžbe ravnoteže promatranoga trokutnog elementa za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ u ovom slučaju glase:

$$\bar{\tau}_{yx}\cdot \mathrm{d}\bar{x}+\tau_{xy}\cdot \mathrm{d}y\cdot\sin\varphi+\sigma_x\cdot \mathrm{d}y\cdot\cos\varphi-\tau_{yx}\cdot \mathrm{d}x\cdot\cos\varphi-\sigma_y\cdot \mathrm{d}x\cdot\sin\varphi=0\,,$$

$$\bar{\sigma}_y \cdot \mathrm{d}\bar{x} + \tau_{xy} \cdot \mathrm{d}y \cdot \cos\varphi - \sigma_x \cdot \mathrm{d}y \cdot \sin\varphi + \tau_{yx} \cdot \mathrm{d}x \cdot \sin\varphi - \sigma_y \cdot \mathrm{d}x \cdot \cos\varphi = 0 .$$

Ako se gornje jednadžbe podijele s $\mathrm{d}\bar{x}$ te u njih uvrste izrazi (7.7) nakon sređivanja, uz $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, mogu se dobiti izrazi za transformaciju ostalih dviju komponenata naprezanja:

$$\bar{\tau}_{yx} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \tau_{xy} \cdot \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right), \tag{7.8}$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_y \cdot \cos^2\varphi - 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi . \tag{7.9}$$

Uz trigonometrijske relacije:

$$2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \sin\left(2 \cdot \varphi\right),\ \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos\left(2 \cdot \varphi\right),$$

$$\cos^2\varphi = \left[1 + \cos\left(2 \cdot \varphi\right)\right] / 2,\ \sin^2\varphi = \left[1 - \cos\left(2 \cdot \varphi\right)\right] / 2,$$

mogu se izrazi (7.5), (7.6), (7.8) i (7.9) pisati u obliku:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \varphi\right) + \tau_{xy} \cdot \sin\left(2 \cdot \varphi\right), \tag{7.10}$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos\left(2 \cdot \varphi\right) - \tau_{xy} \cdot \sin\left(2 \cdot \varphi\right), \tag{7.11}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \varphi\right) + \tau_{xy} \cdot \cos\left(2 \cdot \varphi\right). \tag{7.12}$$

Lako je pokazati da među komponentama naprezanja vrijede izrazi:

$$\bar{\sigma}_x + \bar{\sigma}_y = \sigma_x + \sigma_y = \text{konst.}, \tag{7.13}$$

$$\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_y - \bar{\tau}_{xy}^2 = \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \text{konst.} \tag{7.14}$$

Gornji izrazi predstavljaju prvu $I_{1\sigma}$ i drugu $I_{2\sigma}$ invarijantu tenzora naprezanja jer se ne mijenjaju pri rotaciji koordinatnog sustava.

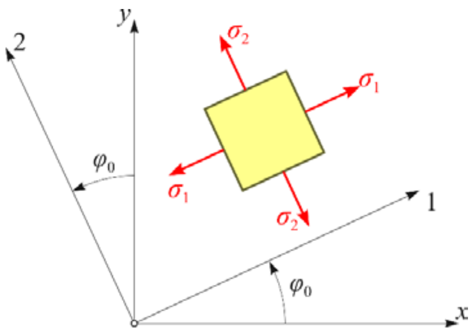
7.3. GLAVNA NAPREZANJA

Pri rotaciji koordinatnog sustava komponente tenzora naprezanja mijenjaju se kako je prethodno opisano. Postoje osi duž kojih će normalna naprezanja poprimati najveću $\sigma_{\max}$ i najmanju $\sigma_{\min}$ vrijednost i ta se naprezanja nazivaju *glavna naprezanja* (slika 7.7.). Dogovorno se naprezanje koje je algebarski veće označava sa σ_1, a ono manje sa σ_2, tj. $\sigma_1 > \sigma_2$. Uvjet za ekstremnu vrijednost normalnog naprezanja $\bar{\sigma}_x$ glasi:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}_x}{\mathrm{d}\varphi} = 0 .$$

Deriviranjem izraza (7.10) i izjednačavanjem s nulom te uz (7.12) dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}_x}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_x}{2} \cdot \left[-2 \cdot \sin\left(2 \cdot \varphi\right)\right] + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos\left(2 \cdot \varphi\right) = 2\bar{\tau}_{xy} = 0 .$$



Slika 7.7. *Glavna naprezanja*

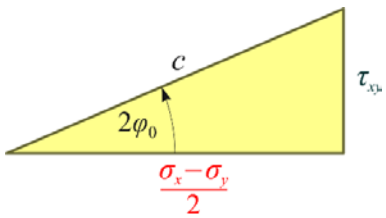
Iz gornjeg izraza može se zaključiti da su posmična naprezanja jednaka nuli u ravninama u kojima djeluju glavna naprezanja.

Kut φ_0 što ga pravci glavnih naprezanja (glavne osi) zatvaraju s osima x i y dobije se rješavanjem trigonometrijske jednadžbe:

$$\tan(2\cdot\varphi_0)=\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}. \tag{7.15}$$

Jednadžba (7.15) daje dvije vrijednosti kuta koje se mogu označiti kao φ_0' i φ_0'', a koje se razlikuju za $\pi/2$. Jedna vrijednost kuta daje položaj najvećeg naprezanja $\sigma_{\max}=\sigma_1$, a druga položaj minimalnog naprezanja $\sigma_{\min}=\sigma_2$. Uvrštavanjem vrijednosti kuta φ_0' u izraz (7.10) dobit će se jedno od glavnih naprezanja, pa se na taj način određuje je li pravac koji s osi x zatvara kut φ_0' glavna os 1 ili glavna os 2.

Glavna os 1 može se odrediti uvažavajući činjenicu da ta os s onom osi u smjeru koje djeluje algebarski veće normalno naprezanje zatvara kut manji od 45°.



Slika 7.8. *Trokutni element na koji djeluje glavno naprezanje*

Razmatranjem trokutnog elementa dobivenog prema (7.15) te prikazanoga na slici 7.8. mogu se napisati sljedeći izrazi:

$$c=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2},$$

$$\cos(2\cdot\varphi_0)=\frac{\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}}{c},\qquad \sin(2\cdot\varphi_0)=\frac{\tau_{xy}}{c},$$

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}=c\cdot\cos(2\cdot\varphi_0),\qquad \tau_{xy}=c\cdot\sin(2\cdot\varphi_0).$$

Uvrštavanjem gornjih izraza u (7.10) i (7.11) dobije se:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi_0) \pm \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi_0),$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm c \cdot \cos^2(2 \cdot \varphi_0) \pm c \cdot \sin^2(2 \cdot \varphi_0) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm c,$$

te konačno slijede izrazi za glavna naprezanja:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{7.16}$$

7.4. NAJVEĆE POSMIČNO NAPREZANJE

Najveće posmično naprezanje, kao i ravnine u kojima ono djeluje, može se odrediti analognim postupkom kao pri određivanju glavnih normalnih naprezanja. Uvjet da bi funkcija posmičnog naprezanja $\overline{\tau}_{xy}$ računanog prema (7.12) imala ekstremnu vrijednost glasi:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\tau}_{xy}}{\mathrm{d}\varphi} = 0.$$

Deriviranjem izraza (7.12) i izjednačavanjem s nulom dobije se:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\tau}_{xy}}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) \cdot 2 + \tau_{xy} \cdot \left[-\sin(2 \cdot \varphi)\right] \cdot 2 = 0,$$

odakle je uz (7.15):

$$\tan(2 \cdot \varphi) = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \Big/ \tau_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\tan(2 \cdot \varphi_0)}.$$

Dalje je $\tan 2\varphi \cdot \tan 2\varphi_0 + 1 = 0$, te se uz pomoć trigonometrijske relacije:

$$\tan(2 \cdot \varphi - 2 \cdot \varphi_0) = \left[\tan(2 \cdot \varphi) - \tan(2 \cdot \varphi_0)\right] \Big/ \left[1 + \tan(2 \cdot \varphi) \cdot \tan(2 \cdot \varphi_0)\right],$$

može dobiti:

$$\tan(2 \cdot \varphi - 2 \cdot \varphi_0) = \left[\tan(2 \cdot \varphi) - \tan(2 \cdot \varphi_0)\right] \Big/ 0 = \infty,$$

odnosno

$$2 \cdot \varphi - 2 \cdot \varphi_0 = \pi/2,$$

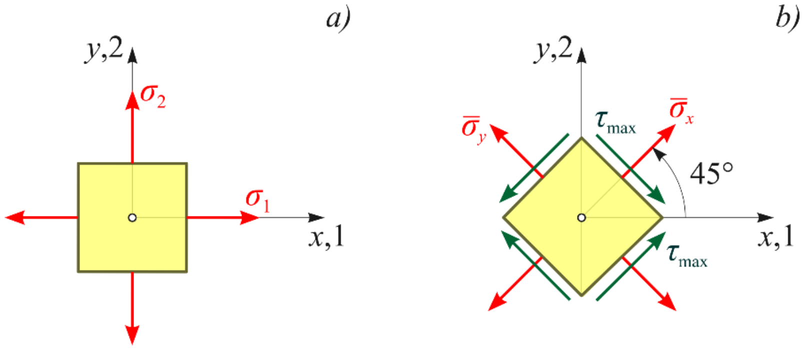
$$\varphi = \varphi_0 + \pi/4. \tag{7.17}$$

Izraz (7.17) pokazuje da normale na ravnine u kojima djeluje najveće posmično naprezanje zatvaraju s glavnim osima kut od 45°. Iznos najvećeg posmičnog naprezanja može se dobiti razmatranjem orijentiranog elementa kojemu su osi x i y ujedno i glavne osi (slika 7.9.a).

Prema (7.10) i (7.11) normalna naprezanja za osi pod kutom od 45° u odnosu na glavne osi iznose:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 90^\circ = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \tag{7.18}$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 90^\circ = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \tag{7.19}$$



Slika 7.9.: *a) orijentirani element s glavnim naprezanjima, b) orijentirani element s maksimalnim posmičnim naprezanjem i pripadnim normalnim naprezanjima*

Dakle, u ravninama u kojima se javlja najveće posmično naprezanje normalna naprezanja su jednaka.

Najveće posmično naprezanje je prema (7.12):

$$\tau_{\max} = \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 90^\circ = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Uz glavna naprezanja prema (7.16) dobije se:

$$|\tau_{\max}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right) \right]$$

odnosno

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}. \tag{7.20}$$

7.5. MOHROVA KRUŽNICA NAPREZANJA

Izrazi za transformaciju komponenata tenzora naprezanja mogu se prikazati grafički prema prijedlogu koji je dao K. Culmann 1866., a usavršio Otto Mohr 1895. godine. Odatle i naziv Mohrova kružnica naprezanja.

Ako se izrazi za transformaciju komponenata tenzora naprezanja (7.10) i (7.12) kvadriraju pa zatim zbroje, dobije se jednadžba:

$$\left(\bar{\sigma}_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\bar{\tau}_{xy} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \left(\tau_{xy} \right)^2, \tag{7.21}$$

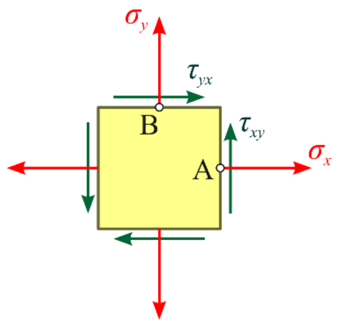
koja u koordinatnom sustavu $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\tau}_{xy}$ predstavlja jednadžbu kružnice kojoj su koordinate središta S određene izrazom:

$$\mathrm{S}\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2};0\right), \tag{7.22}$$

a polumjer izrazom:

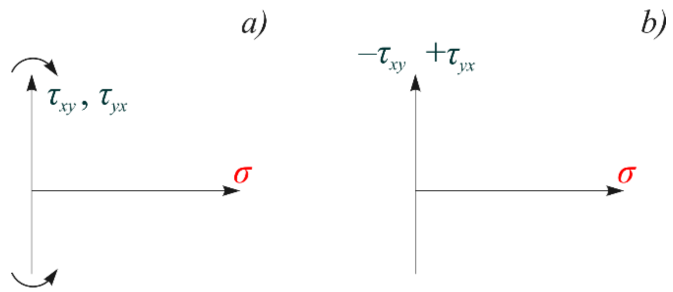
$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\left(\tau_{xy}\right)^2}\,. \tag{7.23}$$

Postupak crtanja Mohrove kružnice objasnit će se na primjeru. Neka je zadan orijentirani element prema slici 7.10.



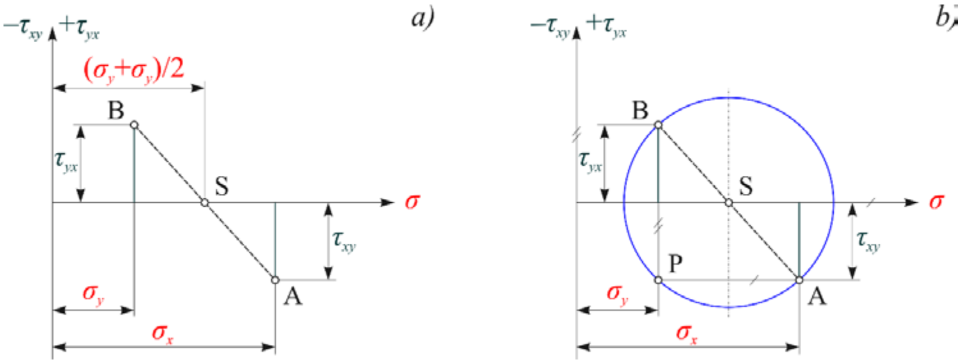
Slika 7.10. *Zadani orijentirani element*

Posmična naprezanja crtaju se s gornje strane ordinatne osi ako zakreću vanjsku normalu na presjek u smjeru kazaljke na satu (slika 7.11.a), u suprotnom se nanose s donje strane ordinatne osi, odakle se može zaključiti da se negativna posmična naprezanja τ_{xy}, kao i pozitivna posmična naprezanja τ_{yx}, nanose s gornje strane ordinatne osi (slika 7.11.b).



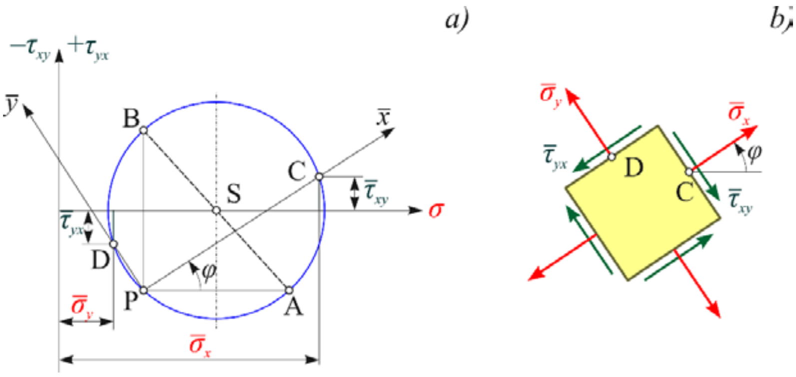
Slika 7.11. *Pravilo o nanošenju posmičnih naprezanja u Mohrovoj kružnici*

U koordinatnom sustavu kod kojeg se na osi apscisa nanose normalna naprezanja, a na osi ordinata posmična naprezanja, crtaju se u odgovarajućem mjerilu točke A i B s koordinatama $\mathrm{A}\left(\sigma_x,\tau_{xy}\right)$, $\mathrm{B}\left(\sigma_y,\tau_{yx}\right)$, kako je pokazano na slici 7.12.a. Točke A i B nalaze se na promjeru kružnice i njihovim spajanjem dobije se dužina $\overline{\mathrm{AB}}$. Ta dužina siječe os apscisa u točki S, koja predstavlja središte Mohrove kružnice naprezanja. Važno je odrediti i točku P, koja se naziva *pol Mohrove kružnice*. Ta točka nalazi se na kružnici, a dobivena je kao sjecište pravca povučenog kroz točku A i paralelnog s osi x te pravca povučenog kroz točku B i paralelnog s osi y (slika 7.12.b).



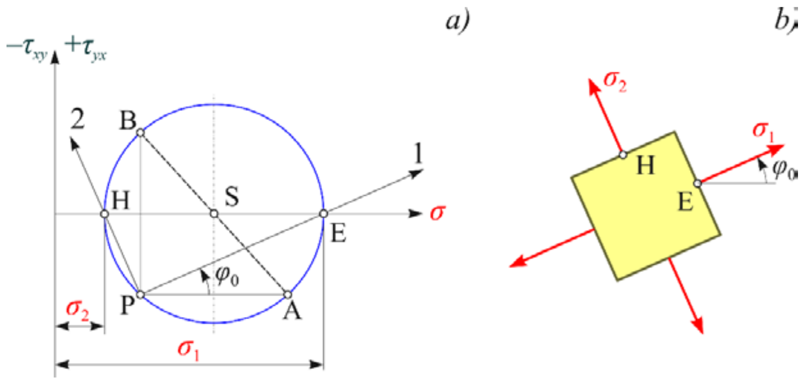
Slika 7.12.: *a) crtanje točaka A i B, b) crtanje Mohrove kružnice sa središtem u S i promjerom AB*

Da bi se grafičkim postupkom dobile komponente tenzora naprezanja za koordinatni sustav koji je zarotiran u odnosu na početni za proizvoljni kut φ, tj. komponente tenzora naprezanja $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$, potrebno je iz pola P pod kutom φ povući pravac $\bar{x}$ i na njega okomiti pravac $\bar{y}$. Pozitivan kut φ nanosi se u smjeru protivno smjeru kazaljke na satu.



Slika 7.13.: *a) dobivanje komponenata tenzora naprezanja za zarotirani koordinatni sustav, b) zarotirani orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora naprezanja*

Ova dva pravca sijeku Mohrovu kružnicu u točkama C i D s koordinatama $\mathrm{C}\left(\bar{\sigma}_x;\bar{\tau}_{xy}\right)$, $\mathrm{D}\left(\bar{\sigma}_y;\bar{\tau}_{yx}\right)$ (slika 7.13.a). Na slici 7.13.b prikazan je zarotirani orijentirani element s pripadajućim komponentama tenzora naprezanja.



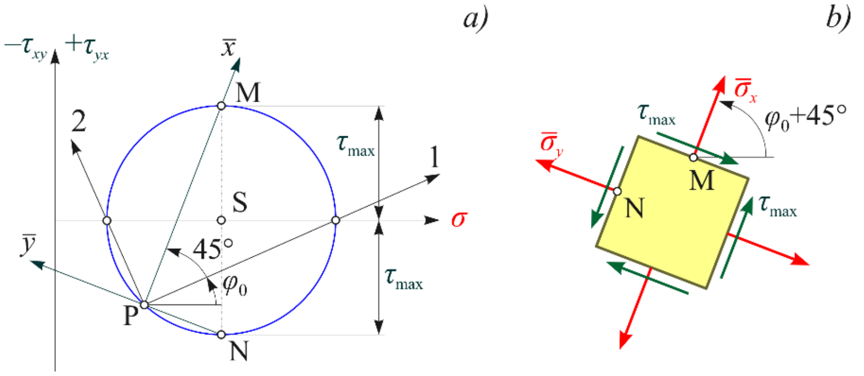
Slika 7.14.: *a) dobivanje glavnih naprezanja, b) orijentirani element s glavnim naprezanjima*

Mohrova kružnica siječe os apscisa u točkama E i H s koordinatama $\mathrm{E}\left(\sigma_1,0\right)$, $\mathrm{H}\left(\sigma_2,0\right)$ (slika 7.14.a). Na slici 7.14.b prikazan je orijentirani element s glavnim naprezanjima.

Točke M i N na Mohrovoj kružnici s koordinatama:

$$M\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2};-\tau_{\max}\right) \text{ i } N\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2};\tau_{\max}\right)$$

točke su s najvećim posmičnim naprezanjem (slika 7.15.a). Odgovarajući orijentirani element prikazan je na slici 7.15.b.

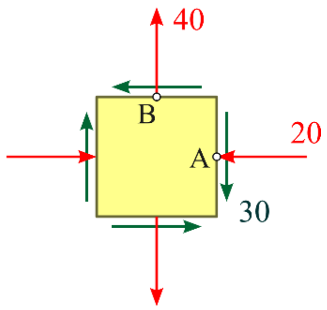


Slika 7.15.: *a) najveće posmično naprezanje, b) odgovarajući orijentirani element*

Primjer 7.1.

Orijentirani element s komponentama tenzora naprezanja prikazan je na slici 7.16.

Valja odrediti računskim i grafičkim postupkom: komponente tenzora naprezanja za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut $\varphi = 70°$; glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja; najveće posmično naprezanje s odgovarajućim komponentama normalnih naprezanja.



Slika 7.16. *Primjer 7.1.*

***Rješenje*:**

Računski postupak. Iz zadanoga orijentiranog elementa, vodeći računa o predznacima komponenata tenzora naprezanja na pozitivnim presjecima, mogu se zapisati vrijednosti komponenata tenzora naprezanja:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 40 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -30 \text{ MPa}.$$

Komponente tenzora naprezanja za zarotirane osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ uz zadani kut $\varphi = 70^\circ$ dobiju se prema izrazima (7.10), (7.11) i (7.12):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{-20+40}{2} + \frac{-20-40}{2} \cdot \cos 140^\circ + (-30) \cdot \sin 140^0 = 13,70 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{-20+40}{2} - \frac{-20-40}{2} \cdot \cos 140^\circ - (-30) \cdot \sin 140^\circ = 6,30 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\frac{-20-40}{2} \cdot \sin 140^\circ + (-30) \cdot \cos 140^\circ = 42,26 \text{ MPa}.$$

Pravci glavnih naprezanja, kao i sama glavna naprezanja, računaju se prema (7.15) i (7.16):

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{(-30)}{(-20-40)/2} = 1, \quad 2\varphi_0 = 45^\circ,$$

$$\varphi_0 = 22,5^\circ \text{ (os 2);}$$

$$\sigma_1 = \frac{-20+40}{2} + \sqrt{\left(\frac{-20-40}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 52,43 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{-20+40}{2} - \sqrt{\left(\frac{-20-40}{2}\right)^2 + (-30)^2} = -32,43 \text{ MPa}.$$

Iznos je najvećega tangencijalnog naprezanja prema (7.20):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{-20-40}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 42,43 \text{ MPa}.$$

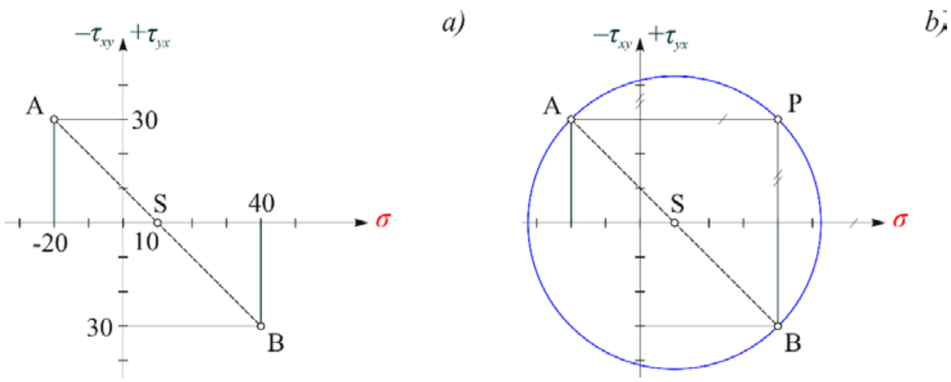
Ovo naprezanje pojavljuje se u ravninama čije normale s osima x i y zatvaraju kut:

$$\varphi = \varphi_0 + 45^\circ = 22,5^\circ + 45^\circ = 67,5^\circ,$$

a pripadna su normalna naprezanja prema (7.18) i (7.19):

$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20+40}{2} = 10 \text{ MPa}.$$

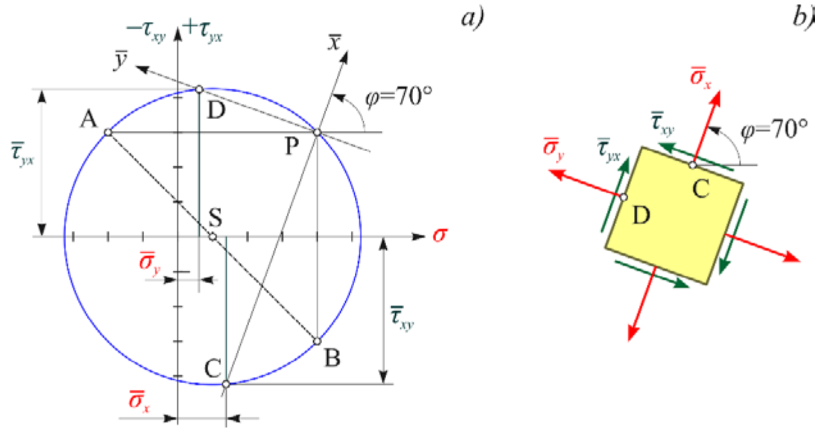
Grafički postupak – Mohrova kružnica naprezanja. U koordinatnom sustavu $\sigma - \tau$ crtaju se u odgovarajućem mjerilu točke A i B s koordinatama $A(-20;-30)$, $B(40;-30)$, kako je pokazano na slici 7.17.a, uz napomenu da se negativna posmična naprezanja τ_{xy} i pozitivna posmična naprezanja τ_{xy} nanose s gornje strane ordinatne osi.



Slika 7.17. *Primjer 7.1.: a) točke A i B zadanoga orijentiranog elementa, b) Mohrova kružnica zadanoga orijentiranog elementa*

Točke A i B nalaze se na promjeru kružnice i njihovim spajanjem dobije se dužina $\overline{AB}$. Ta dužina siječe os apscisa u točki S koja predstavlja središte Mohrove kružnice naprezanja. Pol P je točka na kružnici dobivena kao sjecište pravca povučenoga kroz točku A i paralelnoga s osi x te pravca povučenoga kroz točku B i paralelnoga s osi y (slika 7.17.b).

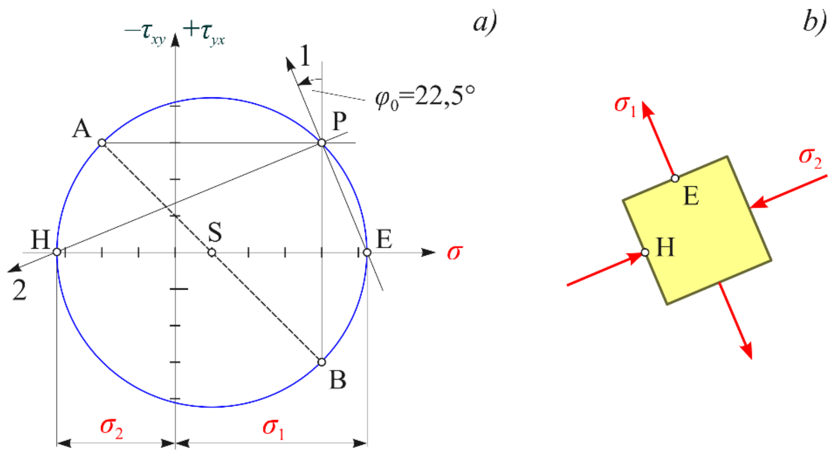
Komponente tenzora naprezanja za koordinatni sustav koji je zarotiran u odnosu na početni za zadani kut $\varphi = 70^\circ$, tj. komponente tenzora naprezanja $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$ dobiju se povlačenjem iz pola P pravca $\bar{x}$ pod kutom $\varphi = 70^\circ$ prema horizontali, u suprotnom smjeru od smjera kazaljke na satu, i na njega okomitog pravca $\bar{y}$, također iz pola P. Ta dva pravca sijeku Mohrovu kružnicu u točkama C i D čije koordinate predstavljaju tražene komponente naprezanja $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ i $\bar{\tau}_{xy}$, kako je pokazano na slici 7.18.a. Na slici 7.18.b dan je zarotirani element s pripadnim komponentama tenzora naprezanja.



Slika 7.18. *Primjer 7.1.: a) određivanje komponenata tenzora naprezanja za zarotirane osi, b) zarotirani orijentirani element s pripadnim komponentama tenzora naprezanja*

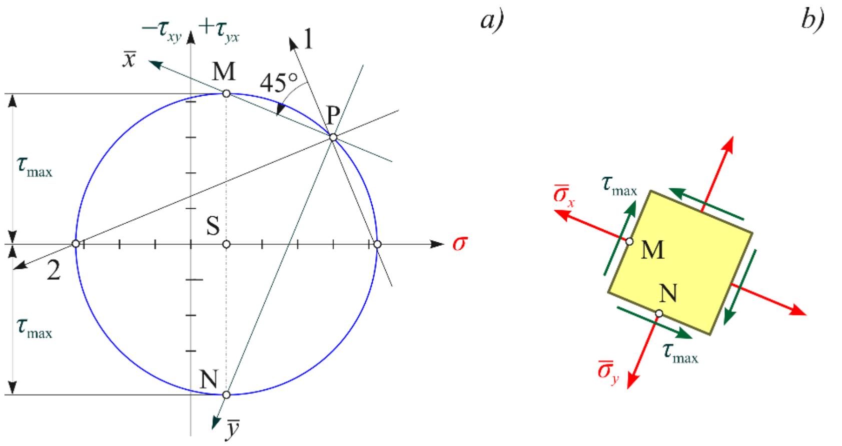
Točke E i H na Mohrovoj kružnici točke su s koordinatama $E(\sigma_1; 0)$, $H(\sigma_2; 0)$. Pravac kroz pol P i točku E predstavlja glavnu os 1, a pravac kroz pol P i točku H glavnu os 2.

Glavna os 1 zatvara s horizontalom kut φ_0, kako je pokazano na slici 7.19.a. Na slici 7.19.b prikazan je orijentirani element s glavnim naprezanjima.



Slika 7.19. *Primjer 7.1.: a) određivanje glavnih naprezanja, b) zarotirani orijentirani element*

Točke M i N na Mohrovoj kružnici točke su s najvećim posmičnim naprezanjem. Pravci povučeni iz pola P s glavnim osima 1 i 2 zatvaraju kut od 45° (slika 7.20.a). Orijentirani element s najvećim posmičnim naprezanjem i pripadnim komponentama normalnih naprezanja prikazan je na slici 7.20.b.

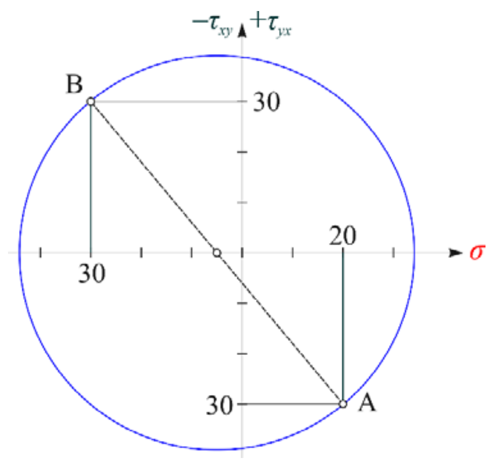


Slika 7.20. *Primjer 7.1.: a) određivanje največeg posmičnog naprezanja, b) zarotirani orijentirani element s najvećim posmičnim i pripadajućim normalnim naprezanjima*

Primjer 7.2.

Na slici 7.21. prikazana je Mohrova kružnica koja odgovara nekom orijentiranom elementu. Potrebno je iščitati komponente tenzora naprezanja koje odgovaraju zadanim osima x i y.

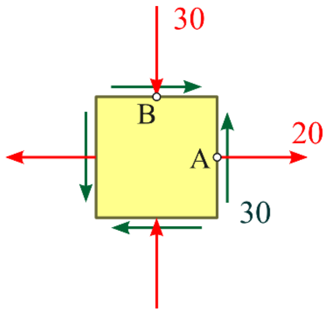
Računskim i grafičkim postupkom odrediti komponente tenzora naprezanja za zarotirane osi $\overline{x}$ i $\overline{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja te najveće posmično naprezanje s pripadnim normalnim naprezanjima ako je zadano: $\varphi = -40^\circ$.



Slika 7.21. *Primjer 7.2.*

***Rješenje*:**

<u>Računski postupak.</u> Iz zadane Mohrove kružnice iščitavaju se vrijednosti komponenata tenzora naprezanja koje odgovaraju osima x i y: $\sigma_x = 20\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_y = -30\ \mathrm{MPa}$ i $\tau_{xy} = 30\ \mathrm{MPa}$. Orijentirani element koji odgovara tim komponentama tenzora naprezanja dan je na slici 7.22.



Slika 7.22. *Primjer 7.2.: Orijentirani element koji odgovara zadanoj Mohrovoj kružnici*

Komponente tenzora naprezanja za zarotirane osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ dobivene su prema (7.10), (7.11) i (7.12):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{20+(-30)}{2} + \frac{20-(-30)}{2} \cdot \cos(-80)^\circ + 30 \cdot \sin(-80)^\circ = -30,20 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{20+(-30)}{2} - \frac{20-(-30)}{2} \cdot \cos(-80)^\circ - 30 \cdot \sin(-80)^\circ = 20,20 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\frac{20-(-30)}{2} \cdot \sin(-80)^\circ + 30 \cdot \cos(-80)^\circ = 29,83 \text{ MPa}.$$

Pravci glavnih naprezanja, kao i sama glavna naprezanja, računaju se prema (7.15) i (7.16):

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{30}{\left[20-(-30)\right]/2} = 1,2,$$

$$2\varphi_0 = 50,19^\circ, \quad \varphi_0 = 25,1^\circ \text{ (os 1);}$$

$$\sigma_1 = \frac{20+(-30)}{2} + \sqrt{\left(\frac{20-(-30)}{2}\right)^2 + 30^2} = 34,05 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{20+(-30)}{2} - \sqrt{\left(\frac{20-(-30)}{2}\right)^2 + 30^2} = -44,05 \text{ MPa}.$$

Iznos je najvećeg tangencijalnog naprezanja prema (7.20):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{20-(-30)}{2}\right)^2 + 30^2} = 39,05 \text{ MPa}.$$

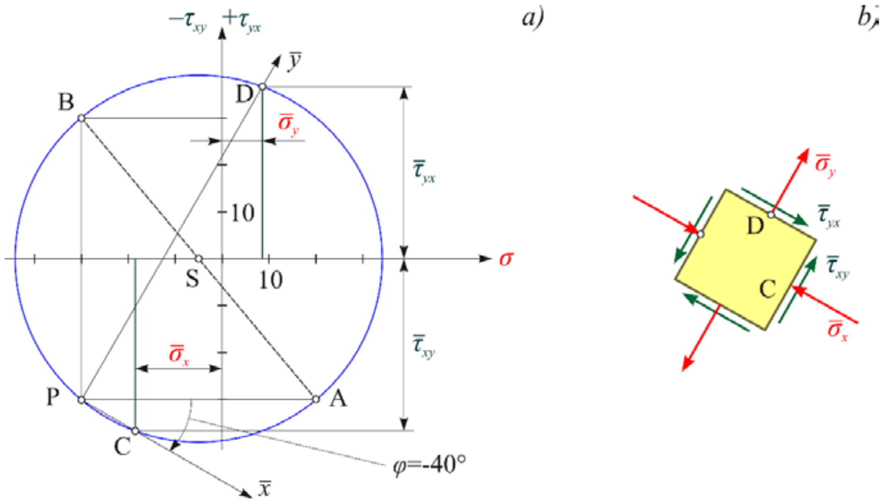
Ovo naprezanje pojavljuje se u ravninama čije normale s osima x i y zatvaraju kut:

$$\varphi = \varphi_0 + 45^\circ = 25,1^\circ + 45^\circ = 70,1^\circ,$$

a pripadna normalna naprezanja prema (7.18) i (7.19) jesu:

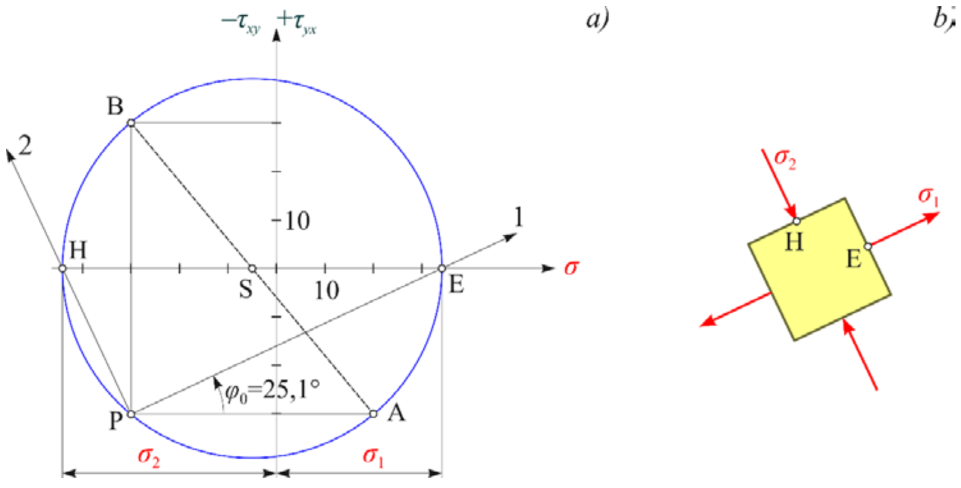
$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{20+(-30)}{2} = -5 \text{ MPa}.$$

Grafički postupak – Mohrova kružnica naprezanja. Na zadanoj Mohrovoj kružnici određen je pol P kao sjecište paralele s osi x kroz točku A i paralele s osi y kroz točku B. Iz pola su povučena dva pravca $\bar{x}$ i $\bar{y}$ pod kutom $\varphi = -40^\circ$ prema osima x i y. Ta dva pravca sijeku Mohrovu kružnicu u točkama C i D čije koordinate su tražene vrijednosti komponenata tenzora naprezanja za zarotirane osi (slika 7.23.a). Pripadajući orijentirani element s komponentama naprezanja dan je na slici 7.23.b.



Slika 7.23. *Primjer 7.2.: a) određivanje komponenata tenzora naprezanja za zarotirane osi, b) zarotirani orijentirani element s pripadnim komponentama tenzora naprezanja*

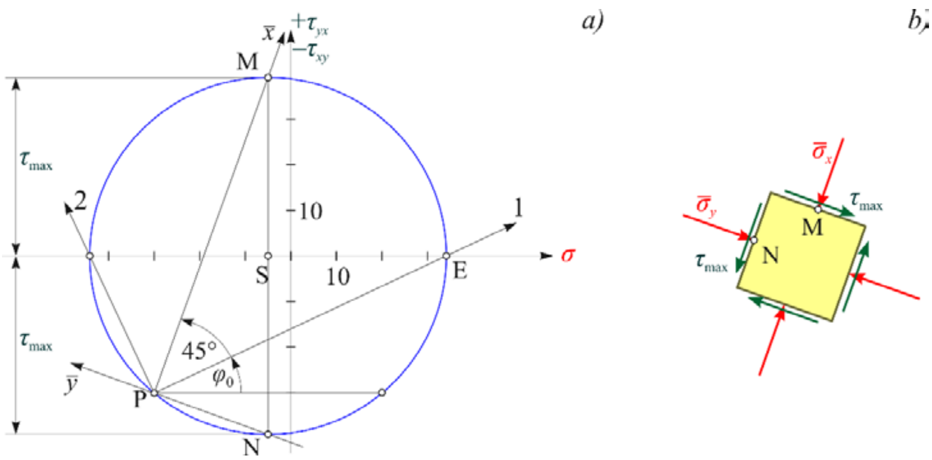
Točke E i H na Mohrovoj kružnici točke su s glavnim naprezanjima $\mathrm{E}(\sigma_1;0)$, $\mathrm{H}(\sigma_2;0)$. Pravac kroz pol P i točku E predstavlja glavnu os 1, a pravac kroz pol P i točku H glavnu os 2. Glavna os 1 zatvara s horizontalom kut φ_0, kako je pokazano na slici 7.24.a. Na slici 7.24.b prikazan je orijentirani element s glavnim naprezanjima.



Slika 7.24. *Primjer 7.2.: a) određivanje glavnih naprezanja, b) zarotirani orijentirani element s pripadnim glavnim naprezanjima*

Točke M i N na Mohrovoj kružnici točke su s najvećim posmičnim naprezanjem. Pravci povučeni iz pola P s glavnim osima 1 i 2 zatvaraju kut od 45° (slika 7.25.a).

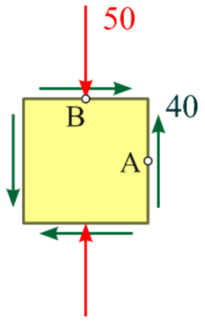
Odgovarajući orijentirani element prikazan je na slici 7.25.b.



Slika 7.25. *Primjer 7.2.: a) određivanje najvećeg posmičnog naprezanja, b) zarotirani orijentirani element s najvećim posmičnim i odgovarajućim normalnim naprezanjima*

Primjer 7.3.

Orijentirani element s komponentama tenzora naprezanja prikazan je na slici 7.26.



Slika 7.26. *Primjer 7.3.*

Valja odrediti računskim i grafičkim postupkom komponente tenzora naprezanja za osi koje s osima x i y zatvaraju kut φ. Zadano je: $\varphi = 45^\circ$.

***Rješenje*:**

Računski postupak. Prema zadanom orijentiranom elementu komponente tenzora naprezanja jesu:

$$\sigma_x = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -50 \text{ MPa} \quad \text{i} \quad \tau_{xy} = 40 \text{ MPa}.$$

Komponente tenzora naprezanja za zarotirane osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ uz zadani kut $\varphi = 45^\circ$ dobiju se prema izrazima (7.10), (7.11) i (7.12):

$$\bar{\sigma}_x = \frac{0+(-50)}{2} + \frac{0-(-50)}{2} \cdot \cos 90^\circ + 40 \cdot \sin 90^0 = 15 \text{ MPa},$$

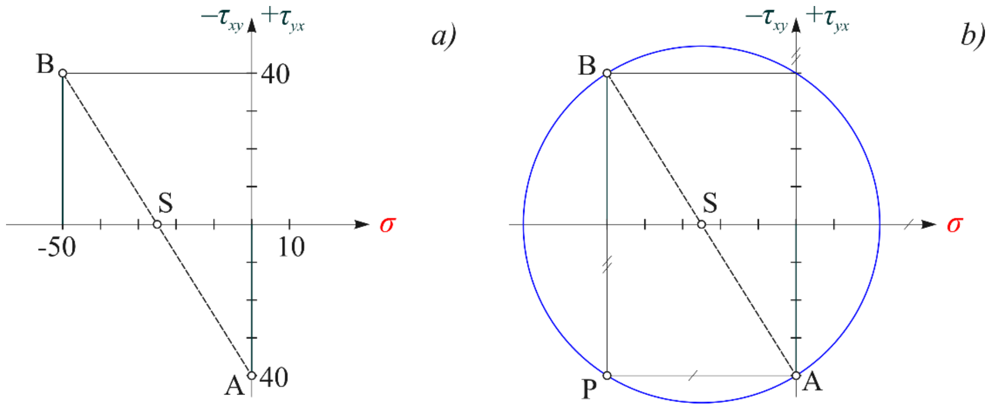
$$\bar{\sigma}_y = \frac{0+(-50)}{2} - \frac{0-(-50)}{2} \cdot \cos 90^\circ - 40 \cdot \sin 90^\circ = -65 \text{ MPa},$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = -\frac{0-(-50)}{2} \cdot \sin 90^\circ + 40 \cdot \cos 90^\circ = -25 \text{ MPa}.$$

Grafički postupak – Mohrova kružnica naprezanja. U koordinatnom sustavu $\sigma - \tau$ crtaju se u odgovarajućem mjerilu točke A i B s koordinatama $A(0;\,40)$, $B(-50;\,40)$, kako je pokazano na slici 7.27.a.

Točke A i B nalaze se na promjeru kružnice i njihovim spajanjem dobije se dužina $\overline{AB}$. Ta dužina siječe os apscisa u točki S koja predstavlja središte Mohrove kružnice naprezanja.

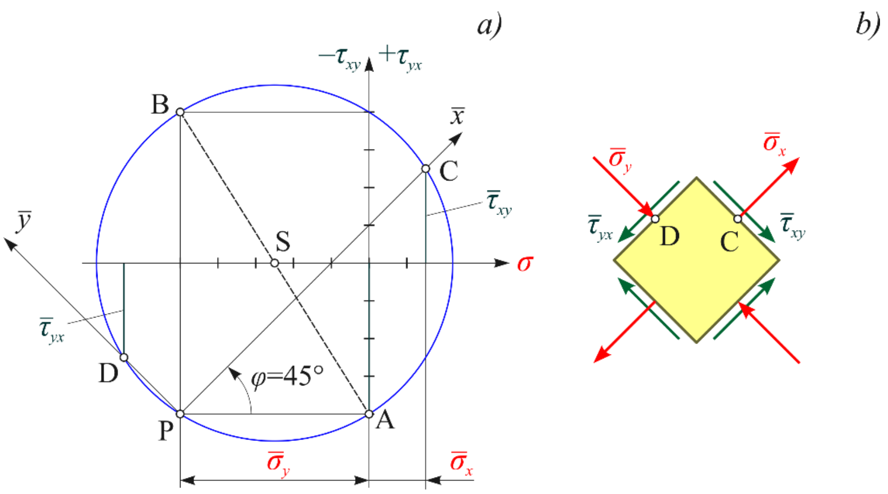
Pol P je točka na kružnici dobivena kao sjecište pravca povučenoga kroz točku A i paralelnoga s osi x te pravca povučenoga kroz točku B i paralelnoga s osi y (slika 7.27.b).



Slika 7.27. *Primjer 7.3.: a) točke A i B zadanoga orijentiranog elementa, b) Mohrova kružnica zadanoga orijentiranog elementa*

Komponente tenzora naprezanja za koordinatni sustav koji je zarotiran u odnosu na početni za zadani kut $\varphi = 45^{\circ}$, tj. komponente tenzora naprezanja $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$ i $\overline{\tau}_{xy}$ dobiju se povlačenjem iz pola P pravca $\overline{x}$ pod kutom $\varphi = 45^{\circ}$ prema horizontali, u suprotnom smjeru od smjera kazaljke na satu, i na njega okomitog pravca $\overline{y}$, također iz pola P. Ta dva pravca sijeku Mohrovu kružnicu u točkama C i D čije koordinate predstavljaju tražene komponente naprezanja $\overline{\sigma}_x$, $\overline{\sigma}_y$ i $\overline{\tau}_{xy}$, kako je pokazano na slici 7.28.a.

Na slici 7.28.b dan je zarotirani element s pripadnim komponentama tenzora naprezanja.

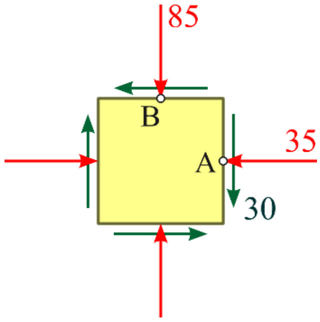


Slika 7.28. *Primjer 7.3.: a) određivanje komponenata tenzora naprezanja za zarotirane osi, b) zarotirani orijentirani element s pripadnim komponentama tenzora naprezanja*

Zadatak 7.1. Orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora naprezanja prikazan je na slici Z.7.1.

Valja odrediti računskim i grafičkim postupkom: komponente tenzora naprezanja za osi koje s osima x i y zatvaraju kut φ; glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja; najveće posmično naprezanje s odgovarajućim komponentama normalnih naprezanja.

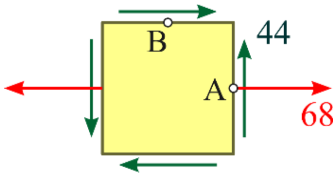
Zadano je: $\varphi = 35^\circ$.



Slika Z.7.1. *Zadatak 7.1.*

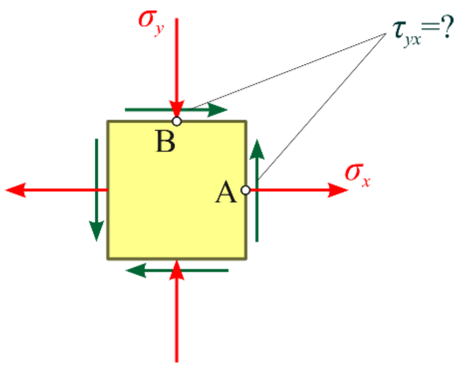
Zadatak 7.2. Orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora naprezanja prikazan je na slici Z.7.2.

Valja odrediti računskim i grafičkim postupkom: komponente tenzora naprezanja za osi koje s osima x i y zatvaraju kut φ; glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja; najveće posmično naprezanje s odgovarajućim komponentama normalnih naprezanja ako je zadano $\varphi = -25^\circ$.



Slika Z.7.2. *Zadatak 7.2.*

Zadatak 7.3. Orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora naprezanja prikazan je na slici Z.7.3.



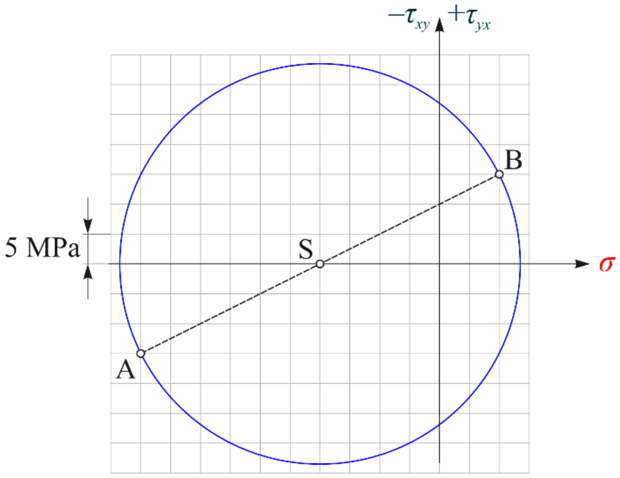
Slika Z.7.3. *Zadatak 7.3.*

Valja odrediti računskim postupkom: komponentu tenzora naprezanja τ_{xy} ako su poznate komponente σ_x i σ_y te komponenta $\bar{\sigma}_x$ za os $\bar{x}$ koja s osi x zatvara kut φ.

Zadano je: $\sigma_x = 50\ \text{MPa}$, $\sigma_y = -10\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_x = 9{,}019\ \text{MPa}$, $\varphi = 30°$.

Zadatak 7.4. Na slici Z.7.4. prikazana je Mohrova kružnica koja odgovara nekom orijentiranom elementu.

Potrebno je iščitati komponente tenzora naprezanja koje odgovaraju zadanim osima x i y; računskim postupkom odrediti komponente tenzora naprezanja za zarotirane osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut $\varphi = -45°$, glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja te najveće posmično naprezanje s pripadnim normalnim naprezanjima.



Slika Z.7.4. *Zadatak 7.4.*

8. TENZOR DEFORMACIJE

U prvom su poglavlju definirane duljinske deformacije ε_x i ε_y te kutna deformacija γ_{xy}, koja se još naziva inženjerska kutna deformacija. Deformacija u nekoj točki opterećenog tijela je, kao i naprezanje, *tenzorska veličina drugog reda*.

Sve što je u sedmom poglavlju navedeno za naprezanje kao tenzor drugog reda vrijedi i za deformaciju. Na sličan način određuju se komponente tenzora deformacije za zarotirane osi, glavne deformacije, a za grafičko određivanje bilo komponenata deformacija za zarotirane osi bilo glavnih deformacija rabi se Mohrova kružnica deformacije.

Stoga u ovom poglavlju navedeni izrazi nisu detaljno izvođeni, nego su napisani po analogiji s tenzorom naprezanja.

8.1. MATRICA TENZORA DEFORMACIJE

Komponente tenzora deformacije mogu se prikazati pomoću matrice tenzora deformacije, gdje su dijagonalni članovi duljinske deformacije, a ostali članovi tenzorske kutne deformacije koje su jednake polovici kutnih deformacija:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{8.1}$$

Matrica tenzora deformacije je simetrična matrica, tj. vrijedi:

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy}, \ \gamma_{zx} = \gamma_{xz}, \qquad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}. \tag{8.2}$$

Za slučaj ravninskog stanja deformacije matrica tenzora deformacije ima oblik:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

8.2. IZRAZI ZA TRANSFORMACIJU KOMPONENATA TENZORA DEFORMACIJE

Orijentirani element prikazivat će se kao što je pokazano na slici 8.1. na kojoj su dane pozitivne duljinske deformacije ε_x i ε_y (slika 8.1.a) te pozitivna kutna deformacija γ_{xy} (slika 8.1.b).

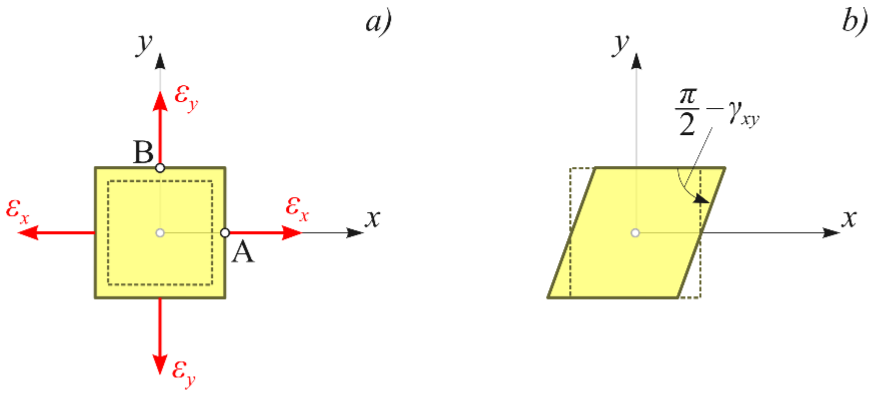
Pozitivne duljinske deformacije izazivaju povećanje duljina stranica orijentiranog elementa, dok je kutna deformacija pozitivna ako u prvom kvadrantu pravi kut orijentiranog elementa prelazi nakon opterećenja u šiljasti kut.

Pri rotaciji koordinatnog sustava za pozitivni kut φ dobiva se novi koordinatni sustav $O\,\overline{x}\,\overline{y}$ za koji će se komponente tenzora deformacije računati prema izrazima:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi), \tag{8.4}$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \varphi) - \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \varphi), \tag{8.5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \bar{\gamma}_{yx} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \cos(2 \cdot \varphi). \tag{8.6}$$



Slika 8.1.: *a) pozitivne duljinske deformacije, b) pozitivna kutna deformacija*

I ovdje vrijede izrazi:

$$\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{konst.}, \tag{8.7}$$

$$\bar{\varepsilon}_x \cdot \bar{\varepsilon}_y - \left(\frac{1}{2} \cdot \bar{\gamma}_{xy}\right)^2 = \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y - \left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy}\right)^2 = \text{konst.} \tag{8.8}$$

koji predstavljaju prvu $I_{1\varepsilon}$ i drugu $I_{2\varepsilon}$ invarijantu tenzora deformacije.

8.3. GLAVNE DEFORMACIJE

Pri rotiranju koordinatnog sustava postoje osi za koje će duljinske deformacije poprimati najveću i najmanju vrijednost. Te se osi nazivaju glavne osi. Kut φ_0 što ga pravci glavnih deformacija zatvaraju s osima x i y dobije se rješavanjem trigonometrijske jednadžbe:

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{\gamma_{xy}/2}{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)/2}. \tag{8.9}$$

Rješenje jednadžbe (8.9) dvije su vrijednosti kuta koje se mogu označiti kao φ_0' i φ_0'', a koje se razlikuju za $\pi/2$. Jedna vrijednost kuta daje pravac najveće deformacije $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$, a druga pravac najmanje deformacije $\varepsilon_{\min} = \varepsilon_2$.

Uvrštavanjem vrijednosti kuta φ_0' u izraz (8.4) dobit će se jedna od glavnih deformacija, pa se na taj način određuje je li pravac koji s osi x zatvara kut φ_0' glavna os 1 ili glavna os 2.

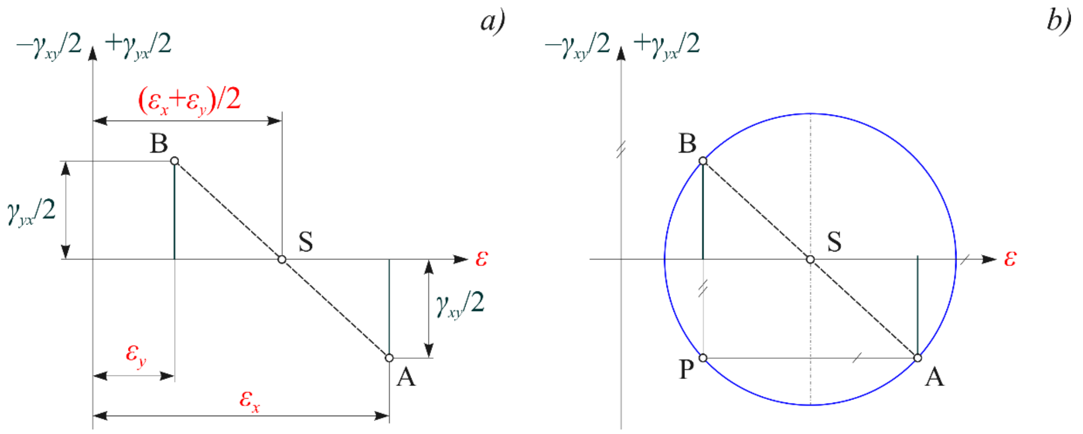
Glavne deformacije računaju se prema izrazu:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\right)^2}\,. \tag{8.10}$$

8.4. MOHROVA KRUŽNICA DEFORMACIJE

Vrijednosti linijskih i tenzorske kutne deformacije za zarotirani koordinatni sustav mogu se dobiti grafičkim postupkom crtanjem Mohrove kružnice deformacije. Postupak crtanja Mohrove kružnice deformacije istovjetan je crtanju Mohrove kružnice naprezanja i objasnit će se uz pomoć orijentiranog elementa na slici 8.1.

U koordinatnom sustavu, kod kojeg se na osi apscisa nanose duljinske deformacije, a na osi ordinata tenzorske kutne deformacije, crtaju se u odgovarajućem mjerilu točke A i B s koordinatama $\mathrm{A}\left(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2\right)$, $\mathrm{B}\left(\varepsilon_y, \gamma_{yx}/2\right)$, kako je pokazano na slici 8.2.a, uz napomenu da se negativna tenzorska kutna deformacija $\gamma_{xy}/2$ i pozitivna tenzorska kutna deformacija $\gamma_{yx}/2$ nanose s gornje strane ordinatne osi.

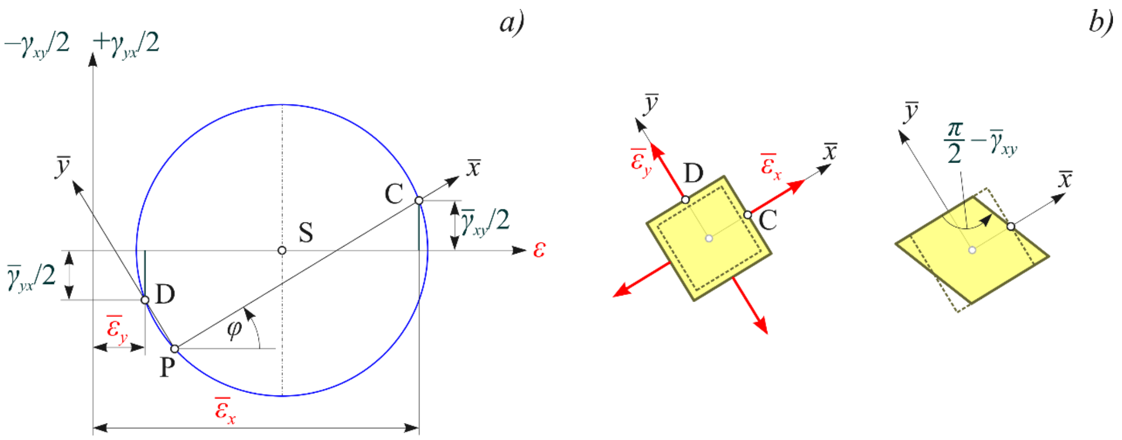


Slika 8.2.: *a) crtanje točaka A i B, b) crtanje Mohrove kružnice sa središtem u S i promjerom AB*

Točke A i B nalaze se na promjeru kružnice i njihovim spajanjem dobije se dužina $\overline{\mathrm{AB}}$. Ta dužina siječe os apscisa u točki S koja predstavlja središte Mohrove kružnice deformacije. Pol Mohrove kružnice je točka P, koja se nalazi na kružnici, a dobivena je kao sjecište pravca povučenoga kroz točku A i paralelnoga s osi x te pravca povučenoga kroz točku B i paralelnoga s osi y (slika 8.2.b).

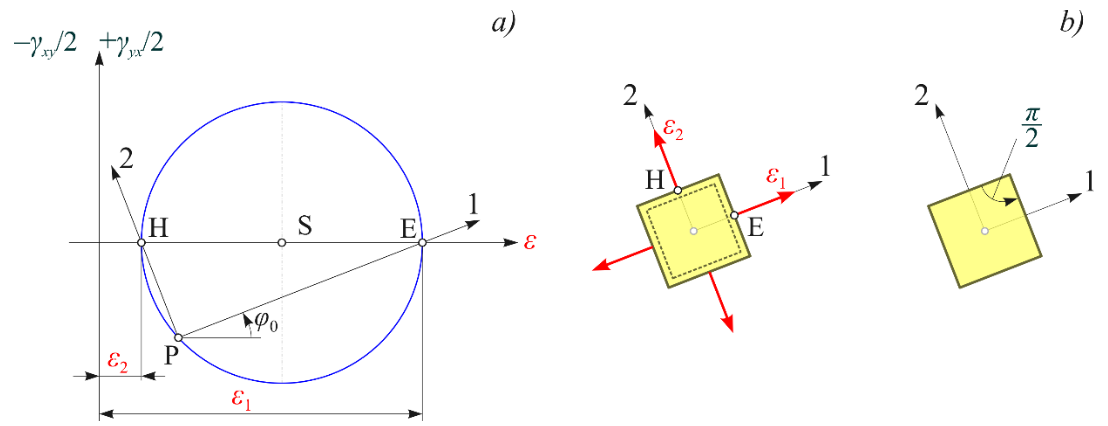
Da bi se grafičkim postupkom dobile komponente tenzora deformacije za koordinatni sustav koji je zarotiran u odnosu na početni za proizvoljni kut φ, tj. komponente tenzora deformacije $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ i $\bar{\gamma}_{xy}/2$, potrebno je iz pola P pod kutom φ povući pravac $\bar{x}$ i na njega okomit pravac $\bar{y}$. Pozitivan kut φ nanosi se u smjeru protivno smjeru kazaljke na satu.

Ta dva pravca sijeku Mohrovu kružnicu u točkama C i D s koordinatama $\mathrm{C}\left(\bar{\varepsilon}_x; \bar{\gamma}_{xy}/2\right)$, $\mathrm{D}\left(\bar{\varepsilon}_y; \bar{\gamma}_{yx}/2\right)$ (slika 8.3.a). Na slici 8.3.b prikazan je zarotirani orijentirani element s pripadajućim komponentama tenzora deformacije.



Slika 8.3.: *a) dobivanje komponenata tenzora naprezanja za zarotirani koordinatni sustav, b) zarotirani orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora naprezanja*

Mohrova kružnica siječe os apscisa u točkama E i H s koordinatama $\mathrm{E}(\varepsilon_1, 0)$, $\mathrm{H}(\varepsilon_2, 0)$ (slika 8.4.a). Orijentirani element s glavnim deformacijama prikazan je na slici 8.4.b.

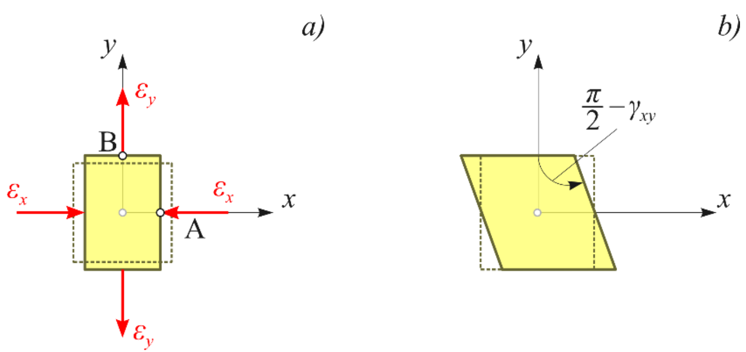


Slika 8.4.: *a) dobivanje glavnih deformacija, b) orijentirani element s glavnim deformacijama*

Primjer 8.1.

Orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora deformacije prikazan je na slici 8.5. Valja odrediti računskim i grafičkim postupkom komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\varepsilon_x = -2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = 3 \cdot 10^{-4}$, $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = -1,25 \cdot 10^{-4}$, $\varphi = 50^\circ$.



Slika 8.5. *Primjer 8.1.*

***Rješenje*:**

<u>Računski postupak</u>. Komponente tenzora deformacije za zarotirane osi $\overline{x}$ i $\overline{y}$ uz zadani kut $\varphi = 50^\circ$ dobiju se prema izrazima (8.4), (8.5) i (8.6):

$$\overline{\varepsilon}_x = \left[\frac{(-2)+3}{2} + \frac{(-2)-3}{2} \cdot \cos 100^\circ + (-1,25) \cdot \sin 100^\circ \right] \cdot 10^{-4} = -0,3 \cdot 10^{-4},$$

$$\overline{\varepsilon}_y = \left[\frac{(-2)+3}{2} - \frac{(-2)-3}{2} \cdot \cos 100^\circ - (-1,25) \cdot \sin 100^\circ \right] \cdot 10^{-4} = 1,3 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{1}{2}\overline{\gamma}_{xy} = \left[-\frac{(-2)-3}{2} \cdot \sin 100^\circ + (-1,25) \cdot \cos 100^\circ \right] \cdot 10^{-4} = 2,7 \cdot 10^{-4}.$$

Glavne deformacije računaju se prema (8.10):

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{(-2)+3}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-2)-3}{2} \right)^2 + (-1,25)^2} \right] \cdot 10^{-4} = 3,3 \cdot 10^{-4} \quad ,$$

$$\varepsilon_2 = \left[\frac{(-2)+3}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-2)-3}{2} \right)^2 + (-1,25)^2} \right] \cdot 10^{-4} = -2,3 \cdot 10^{-4} \quad ,$$

a pravci glavnih deformacija prema (8.9):

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{-1,25 \cdot 10^{-4}}{\left[(-2)-3\right] / 2 \cdot 10^{-4}} = 0,5,$$

$$2 \cdot \varphi_0 = 26,56^\circ,$$

$$\varphi_0 = 13,3^\circ.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $\varphi_0 = 13,3^\circ$ u (8.4) dobije se:

$$\overline{\varepsilon}_x = \left[\frac{(-2)+3}{2} + \frac{(-2)-3}{2} \cdot \cos 25,57^\circ + (-1,25) \cdot \sin 25,57^\circ \right] \cdot 10^{-4}$$

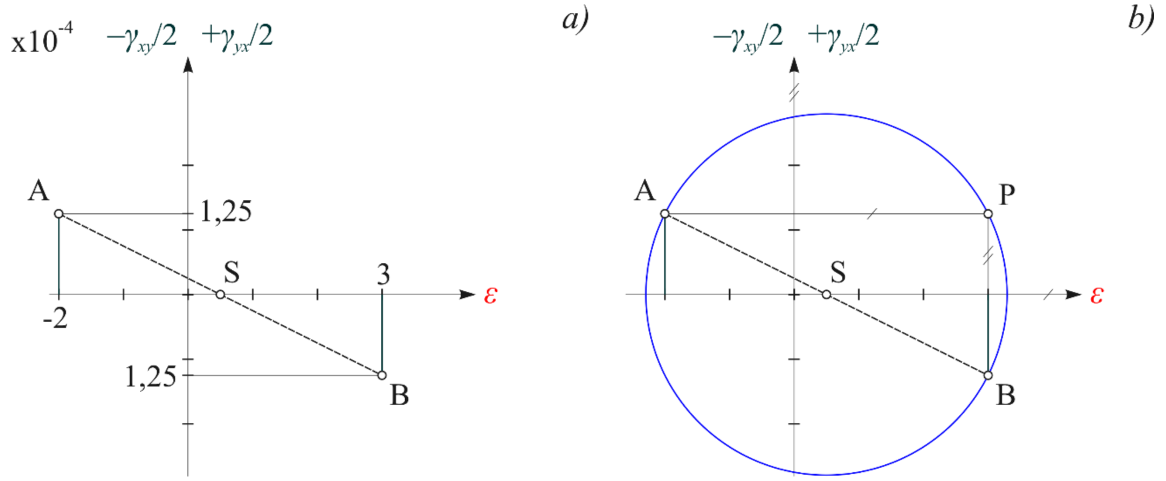
$$\overline{\varepsilon}_x = \overline{\varepsilon}_x \left(13,3^\circ \right) = -2,3 \cdot 10^{-4} = \varepsilon_2,$$

što znači da glavna os 2 s osi x zatvara kut od $\varphi_0 = 13,3^\circ$.

<u>Grafički postupak – Mohrova kružnica deformacije.</u> U koordinatnom sustavu $\varepsilon - \gamma/2$ crtaju se u odgovarajućem mjerilu točke A i B s koordinatama $\mathrm{A}\left(-1 \cdot 10^{-4}; -1,25 \cdot 10^{-4}\right)$, $\mathrm{B}\left(3 \cdot 10^{-4}; -1,25 \cdot 10^{-4}\right)$, kako je pokazano na slici 8.6.a, uz napomenu da se negativna tenzorska kutna deformacija $\gamma_{xy}/2$ i pozitivna tenzorska kutna deformacija $\gamma_{yx}/2$ nanose s gornje strane ordinatne osi.

Točke A i B nalaze se na promjeru kružnice i njihovim spajanjem dobije se dužina $\overline{AB}$. Ta dužina siječe os apscisa u točki S koja predstavlja središte Mohrove kružnice naprezanja.

Pol P je točka na kružnici dobivena kao sjecište pravca povučenoga kroz točku A i paralelnoga s osi x te pravca povučenoga kroz točku B i paralelnoga s osi y (slika 8.6.b).

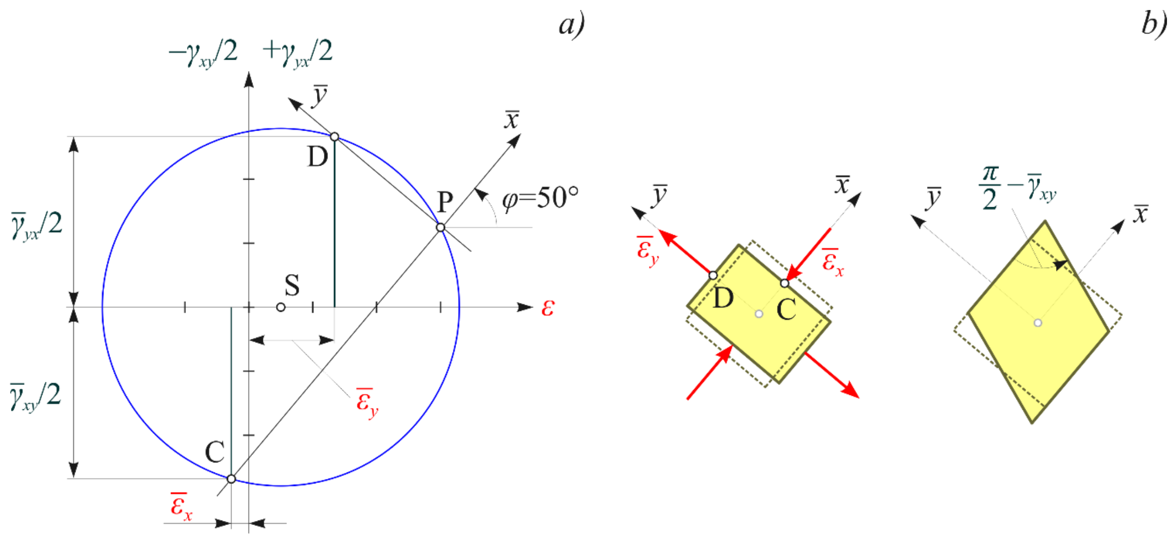


Slika 8.6. Primjer 8.1.: *a) točke A i B zadanoga orijentiranog elementa, b) Mohrova kružnica zadanoga orijentiranog elementa*

Komponente tenzora deformacije za zarotirani koordinatni sustav za zadani kut $\varphi = 50^\circ$ u odnosu na početni, tj. komponente tenzora deformacije $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ i $\bar{\gamma}_{xy}/2$, dobiju se povlačenjem iz pola P pravca $\bar{x}$ pod kutom $\varphi = 50^\circ$ prema horizontali, u suprotnom smjeru od smjera kazaljke na satu, i na njega okomitog pravca $\bar{y}$, također iz pola P.

Ta dva pravca sijeku Mohrovu kružnicu u točkama C i D čije koordinate predstavljaju tražene komponente tenzora deformacije $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$ i $\bar{\gamma}_{xy}/2$, kako je pokazano na slici 8.7.a.

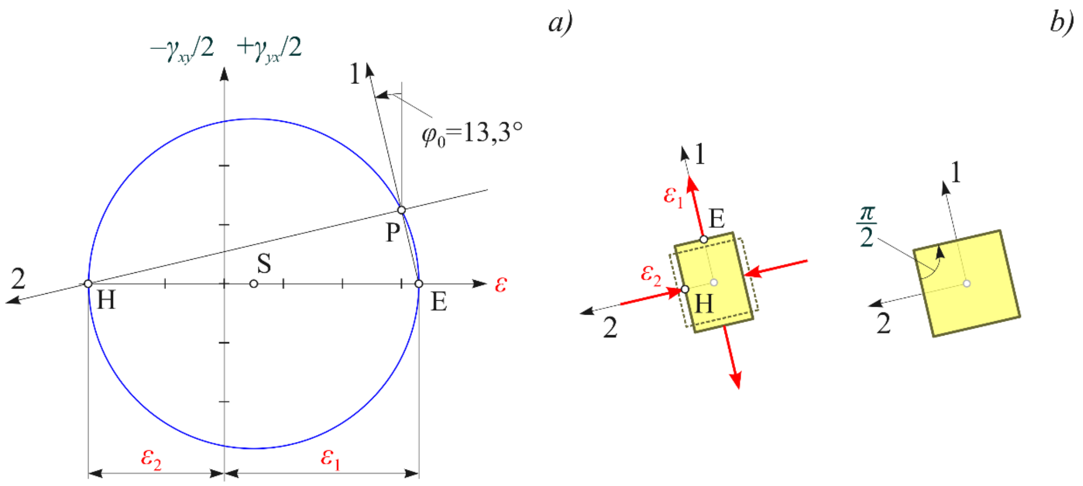
Pripadni orijentirani element dan je na slici 8.7.b.



Slika 8.7. Primjer 8.1.: *a) određivanje komponenata tenzora deformacije za zarotirane osi, b) zarotirani orijentirani element s pripadnim komponentama tenzora deformacije*

Točke E i H na Mohrovoj kružnici točke su s koordinatama $\mathrm{E}(\varepsilon_1;0)$, $\mathrm{H}(\varepsilon_2;0)$. Pravac kroz pol P i točku E predstavlja glavnu os 1, a pravac kroz pol P i točku H glavnu os 2.

Glavna os 2 zatvara s horizontalom kut φ_0, kako je pokazano na slici 8.8.a. Na slici 8.8.b prikazan je orijentirani element s glavnim deformacijama.

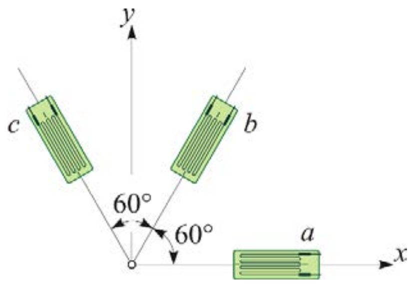


Slika 8.8. *Primjer 8.1.: a) određivanje glavnih deformacija, b) orijentirani element s pripadnim glavnim deformacijama*

Primjer 8.2.

Uz pomoć tenzometarskih traka (rozeta $0^\circ-60^\circ-120^\circ$) izmjerene su tri duljinske deformacije za ravninsko stanje deformacije u nekoj točki opterećenog tijela (slika 8.9.). Valja odrediti računskim postupkom komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\varepsilon_a=4\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_b=-3\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_c=2\cdot10^{-4}$, $\varphi=20^\circ$.



Slika 8.9. *Primjer 8.2.*

***Rješenje*:**

Prvo treba odrediti komponente tenzora deformacije za koordinatni sustav Oxy. Duljinska deformacija ε_x je zadana i iznosi $\varepsilon_x=\varepsilon_a=4\cdot10^{-4}$, dok linijsku deformaciju ε_y i tenzorsku kutnu deformaciju $\gamma_{xy}/2$ treba odrediti.

Uvrštavanjem kutova $\varphi=60^\circ$ i $\varphi=120^\circ$ u izraz (8.4) dobije se:

$$\varepsilon_b = \bar{\varepsilon}_x\left(60^\circ\right) = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin 120^\circ ,$$

$$\varepsilon_c = \bar{\varepsilon}_x\left(120^\circ\right) = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos 240^\circ + \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} \cdot \sin 240^\circ .$$

Oduzimanjem gornjih jednadžbi, uz $\cos 120^\circ = -1/2$, $\cos 240^\circ = -1/2$, $\sin 120^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 240^\circ = -\sqrt{3}/2$, može se dobiti:

$$\varepsilon_b - \varepsilon_c = \sqrt{3}/2\,\gamma_{xy}\text{, odakle je}$$

$$1/2\,\gamma_{xy} = \left(\varepsilon_b - \varepsilon_c\right)/\sqrt{3} . \tag{8.11}$$

Zbrajanjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c = \varepsilon_a + \varepsilon_y - \left(\varepsilon_a - \varepsilon_y\right)/2 ,$$

odakle je nakon sređivanja:

$$\varepsilon_y = \frac{2 \cdot \left(\varepsilon_b + \varepsilon_c\right) - \varepsilon_a}{3} . \tag{8.12}$$

Prema (8.11) i (8.12) jest:

$$1/2\,\gamma_{xy} = \left[\left(-3\right) - 2\right]/\sqrt{3} \cdot 10^{-4} = -2{,}89 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{2 \cdot \left[\left(-3\right) + 2\right] - 4}{3} \cdot 10^{-4} = -2 \cdot 10^{-4} .$$

Komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut $\varphi = 20^\circ$, dobivene prema (8.4), (8.5) i (8.6), iznose:

$$\bar{\varepsilon}_x = \left[\frac{4 + \left(-2\right)}{2} + \frac{4 - \left(-2\right)}{2} \cdot \cos 40^\circ + \left(-2{,}89\right) \cdot \sin 40^\circ\right] \cdot 10^{-4} = 1{,}4 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \left[\frac{4 + \left(-2\right)}{2} - \frac{4 - \left(-2\right)}{2} \cdot \cos 40^\circ - \left(-2{,}89\right) \cdot \sin 40^\circ\right] \cdot 10^{-4} = 0{,}56 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{\gamma}_{xy} = \left[-\frac{4 - \left(-2\right)}{2} \cdot \sin 40^\circ + \left(-2{,}89\right) \cdot \cos 40^\circ\right] \cdot 10^{-4} = -4{,}1 \cdot 10^{-4} .$$

Glavne deformacije, izračunane prema (8.10), jesu:

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{4 + \left(-2\right)}{2} + \sqrt{\left(\frac{4 - \left(-2\right)}{2}\right)^2 + \left(-2{,}89\right)^2}\right] \cdot 10^{-4} = 5{,}2 \cdot 10^{-4} ,$$

$$\varepsilon_2 = \left[\frac{4 + \left(-2\right)}{2} - \sqrt{\left(\frac{4 - \left(-2\right)}{2}\right)^2 + \left(-2{,}89\right)^2}\right] \cdot 10^{-4} = -3{,}2 \cdot 10^{-4} ,$$

a pravci su glavnih deformacija prema (8.9):

$$\tan(2\cdot\varphi_0)=\frac{-2,89\cdot 10^{-4}}{\left[4-(-2)\right]/2\cdot 10^{-4}}=-0,96333,$$

$$2\cdot\varphi_0=-43,93^\circ,$$

$$\varphi_0=-21,97^\circ.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $\varphi_0=-21,97^\circ$ u (8.4) dobije se:

$$\bar{\varepsilon}_x=\left[\frac{4+(-2)}{2}+\frac{4-(-2)}{2}\cdot\cos(-43,93°)+(-2,89)\cdot\sin(-43,93°)\right]\cdot 10^{-4},$$

$$\bar{\varepsilon}_x=\bar{\varepsilon}_x\left(-21,97^\circ\right)=5,2\cdot 10^{-4}=\varepsilon_1,$$

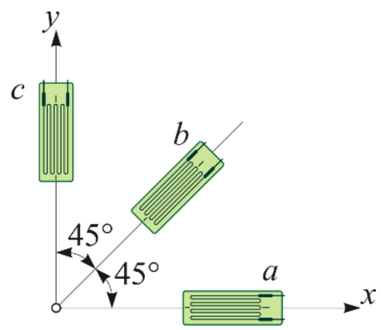
što znači da glavna os 1 s osi x zatvara kut od $\varphi_0=-21,97^\circ$.

Primjer 8.3.

Korištenjem tenzometarskih traka (rozeta $0^\circ-45^\circ-90^\circ$) izmjerene su tri duljinske deformacije za ravninsko stanje deformacije u nekoj točki opterećenog tijela (slika 8.10.).

Valja odrediti računskim postupkom komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\varepsilon_a=-1\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b=5\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c=-2\cdot 10^{-4}$, $\varphi=-20^\circ$.



Slika 8.10. *Primjer 8.3.*

***Rješenje*:**

Duljinske deformacije ε_x i ε_y, koje se odnose na koordinatni sustav Oxy, zadane su i iznose:

$$\varepsilon_x=\varepsilon_a=-1\cdot 10^{-4},\ \varepsilon_y=\varepsilon_c=-2\cdot 10^{-4},$$

dok tenzorsku kutnu deformaciju $\gamma_{xy}/2$ treba odrediti.

Uvrštavanjem kuta $\varphi=45^\circ$ u izraz (8.4) dobije se:

$$\varepsilon_b=\bar{\varepsilon}_x\left(45^\circ\right)=\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}+\frac{\varepsilon_a-\varepsilon_c}{2}\cdot\cos 90^\circ+\frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy}\cdot\sin 90^\circ=\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}+\frac{1}{2}\cdot\gamma_{xy},$$

odakle je

$$1/2\,\gamma_{xy}=\varepsilon_b-\frac{\varepsilon_a+\varepsilon_c}{2}=\left[5-\frac{(-1)+(-2)}{2}\right]\cdot 10^{-4}=6,5\cdot 10^{-4}.$$

Komponente tenzora deformacije za osi $\overline{x}$ i $\overline{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut $\varphi=-20^\circ$, dobivene prema (8.4), (8.5) i (8.6), iznose:

$$\overline{\varepsilon}_x=\left[\frac{(-1)+(-2)}{2}+\frac{(-1)-(-2)}{2}\cdot\cos\left(-40^\circ\right)+6,5\cdot\sin\left(-40^\circ\right)\right]\cdot 10^{-4},$$

$$\overline{\varepsilon}_x=-5,3\cdot 10^{-4}$$

$$\overline{\varepsilon}_y=\left[\frac{(-1)+(-2)}{2}-\frac{(-1)-(-2)}{2}\cdot\cos\left(-40^\circ\right)-6,5\cdot\sin\left(-40^\circ\right)\right]\cdot 10^{-4},$$

$$\overline{\varepsilon}_y=2,3\cdot 10^{-4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\gamma}_{xy}=\left[-\frac{(-1)-(-2)}{2}\cdot\sin\left(-40^\circ\right)+6,5\cdot\cos\left(-40^\circ\right)\right]\cdot 10^{-4}=5,3\cdot 10^{-4}.$$

Glavne deformacije, izračunane prema (8.10), jesu:

$$\varepsilon_1=\left[\frac{(-1)+(-2)}{2}+\sqrt{\left(\frac{(-1)-(-2)}{2}\right)^2+6,5^2}\right]\cdot 10^{-4}=5,0\cdot 10^{-4}\quad,$$

$$\varepsilon_2=\left[\frac{(-1)+(-2)}{2}-\sqrt{\left(\frac{(-1)-(-2)}{2}\right)^2+6,5^2}\right]\cdot 10^{-4}=-8,0\cdot 10^{-4}\quad,$$

a pravci su glavnih deformacija prema (8.9):

$$\tan\left(2\cdot\varphi_0\right)=\frac{6,5\cdot 10^{-4}}{\left[(-1)-(-2)\right]/2\cdot 10^{-4}}=13,$$

$$2\cdot\varphi_0=85,6^\circ,$$

$$\varphi_0=42,8^\circ.$$

Uvrštavanjem vrijednosti $\varphi_0=42,8^\circ$ u (8.4) dobije se:

$$\overline{\varepsilon}_x=\left[\frac{(-1)+(-2)}{2}+\frac{(-1)-(-2)}{2}\cdot\cos 85,6^\circ+6,5\cdot\sin 85,6^\circ\right]\cdot 10^{-4},$$

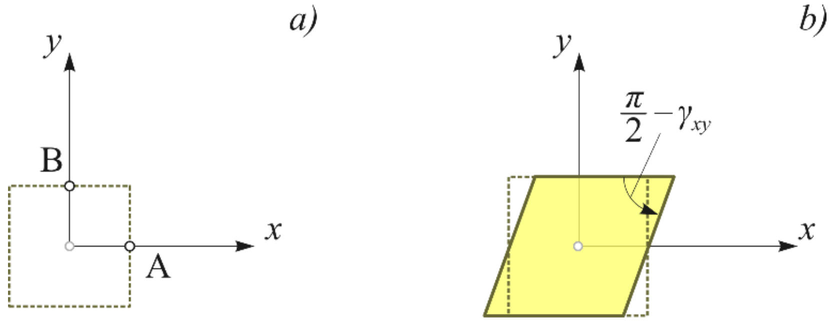
$$\overline{\varepsilon}_x=\overline{\varepsilon}_x\left(42,8^\circ\right)=5,0\cdot 10^{-4}=\varepsilon_1,$$

što znači da glavna os 1 s osi x zatvara kut od $\varphi_0=42,8^\circ$.

Zadatak 8.1. Orijentirani element s odgovarajućim komponentama tenzora deformacije prikazan je na slici Z.8.1.

Valja odrediti računskim i grafičkim postupkom komponente tenzora deformacije za osi koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne duljinske deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = 0$, $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = 2 \cdot 10^{-4}$, $\varphi = 70^\circ$.

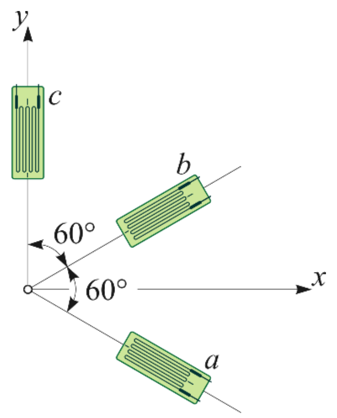


Slika Z.8.1. *Zadatak 8.1.*

Zadatak 8.2. Uz pomoć tenzometarskih traka (rozeta $0^\circ - 60^\circ - 120^\circ$) izmjerene su tri duljinske deformacije za ravninsko stanje deformacije u nekoj točki opterećenog tijela (slika Z.8.2.).

Valja odrediti računskim postupkom komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\varepsilon_a = -3 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 1 \cdot 10^{-4}$, $\varphi = 20^\circ$.

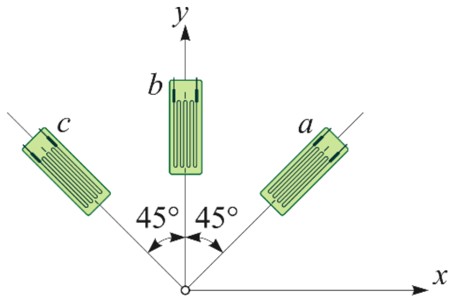


Slika Z.8.2. *Zadatak 8.2.*

Zadatak 8.3. Korištenjem tenzometarskih traka (rozeta $0^\circ - 45^\circ - 90^\circ$) izmjerene su tri duljinske deformacije za ravninsko stanje deformacije u nekoj točki opterećenog tijela (slika Z.8.3.).

Valja odrediti računskim postupkom komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\varepsilon_a = 2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = -3 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 4 \cdot 10^{-4}$, $\varphi = -35^\circ$.



Slika Z.8.3. *Zadatak 8.3.*

9. MEĐUSOBNA OVISNOST NAPREZANJA I DEFORMACIJA

U prethodnim poglavljima dane su matrica tenzora deformacije i matrica tenzora naprezanja prema izrazima (7.1) i (8.1):

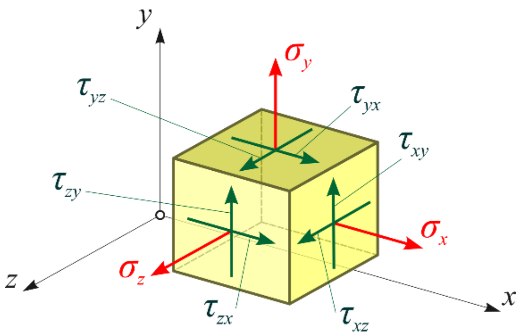
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Između komponenata tenzora naprezanja i komponenata tenzora deformacije može se uspostaviti ovisnost, slično kako je to u prvom poglavlju, izrazima (1.6) i (1.9), opisano za slučaj jednoosnog stanja naprezanja:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x , \qquad \tau = G \cdot \gamma .$$

Veća naprezanja izazivat će i veće deformacije, a na veličinu deformacija utjecat će i materijal od kojeg je deformabilno tijelo izrađeno. Utjecaj materijala iskazan je konstantama elastičnosti E, ν i G koje su, kako je već spomenuto u prvom poglavlju, nazvane Youngeov modul elastičnosti, Poissonov koeficijent i modul smicanja.

Veza između komponenata tenzora deformacije i komponenata tenzora naprezanja može se dobiti razmatranjem diferencijalno malog elementa oblika kocke, izrezanoga iz opterećenog tijela, a na koji djeluje svih devet komponenata tenzora naprezanja (slika 9.1.).



Slika 9.1. *Elementarni dio opterećenog deformabilnog tijela sa svim komponentama tenzora naprezanja*

Primijenit će se metoda superpozicije, tj. promatrat će se nastale deformacije djelovanjem svake komponente tenzora naprezanja posebno, kako je to prikazano na slikama 9.2. i 9.3.

Ako na elementarni dio djeluje samo komponenta normalnog naprezanja σ_x (slika 9.2.a), uzimajući u obzir (1.6) i (1.8), nastaju samo duljinske deformacije kako slijedi:

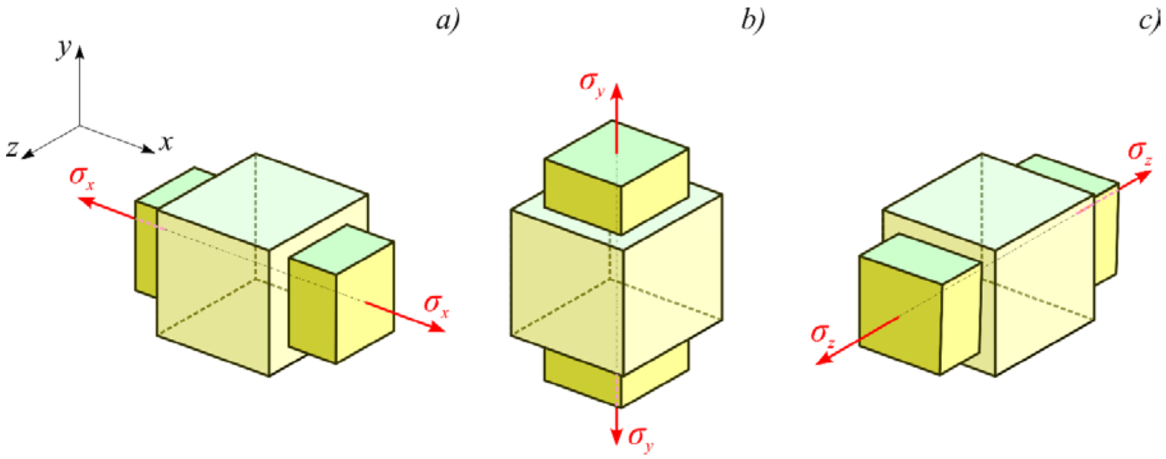
$$\varepsilon'_x = \sigma_x / E , \qquad \varepsilon'_y = -\nu \cdot \sigma_x / E , \qquad \varepsilon'_z = -\nu \cdot \sigma_x / E .$$

Djelovanjem komponente normalnog naprezanja σ_y (slika 9.2.b) nastaju duljinske deformacije:

$$\varepsilon_x'' = -\nu \cdot \sigma_y / E\,, \qquad \varepsilon_y'' = \sigma_y / E\,, \qquad \varepsilon_z'' = -\nu \cdot \sigma_y / E\,,$$

a djelovanjem komponente normalnog naprezanja σ_z (slika 9.2.c) duljinske deformacije:

$$\varepsilon_x''' = -\nu \cdot \sigma_z / E\,, \qquad \varepsilon_y''' = -\nu \cdot \sigma_z / E\,, \qquad \varepsilon_z''' = \sigma_z / E\,.$$



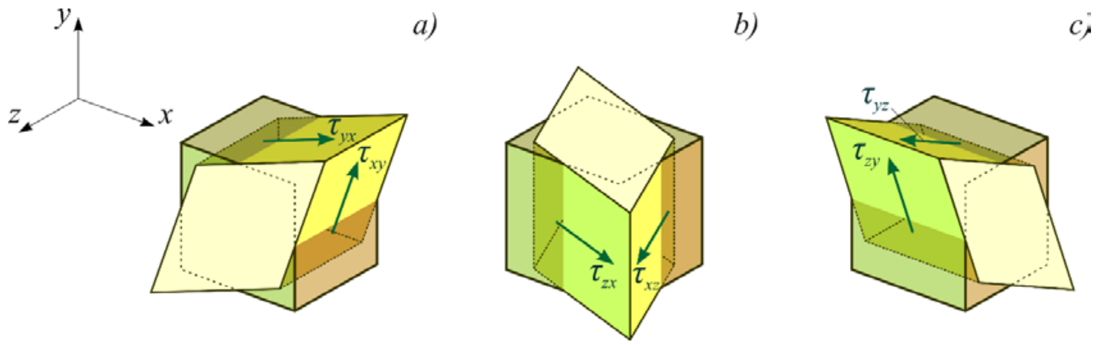
Slika 9.2. *Opterećenje elementarnog dijela deformabilnog tijela normalnom komponentom naprezanja u smjeru: a) osi x, b) osi y, c) osi z*

Pri djelovanju na elementarni dio deformabilnog tijela posmične komponente tenzora naprezanja τ_{xy} (slika 9.3.a) nastaju kutne deformacije prema (1.9):

$$\gamma_{xy}' = \tau_{xy} / G\,, \qquad \gamma_{xz}' = 0\,, \qquad \gamma_{yz}' = 0\,;$$

djelovanjem posmične komponente tenzora naprezanja τ_{xz} (slika 9.3.b) javljaju se kutne deformacije:

$$\gamma_{xy}'' = 0\,, \qquad \gamma_{xz}'' = \tau_{xz} / G\,, \qquad \gamma_{yz}'' = 0\,;$$



Slika 9.3. *Opterećenje elementarnog dijela deformabilnog tijela posmičnom komponentom naprezanja: a) u ravnini Oxy, b) u ravnini Oxz, c) u ravnini Oyz*

zbog djelovanja posmične komponente tenzora naprezanja τ_{yz} (slika 9.3.c) javljaju se kutne deformacije:

$$\gamma_{xy}''' = 0\,, \qquad \gamma_{xz}''' = 0\,, \qquad \gamma_{yz}''' = \tau_{yz} / G\,.$$

Pri istovremenom djelovanju svih komponenata tenzora naprezanja nastale komponente tenzora deformacije jesu:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y, \quad \varepsilon_z = \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z,$$

$$\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} + \gamma'''_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \gamma'_{xz} + \gamma''_{xz} + \gamma'''_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \gamma'_{yz} + \gamma''_{yz} + \gamma'''_{yz},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)}{E}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},. \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{E}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Izrazi (9.1), u kojima su komponente tenzora deformacije izražene preko komponenata tenzora naprezanja, predstavljaju Hookeov zakon za prostorno (troosno) stanje naprezanja.

Isti zakon može se prikazati u obliku u kojem su komponente tenzora naprezanja dane preko komponenata tenzora deformacije:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta\right), \quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta\right), \quad \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\cdot\nu} \cdot \Theta\right), \quad \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}. \end{aligned} \tag{9.2}$$

U izrazima (9.2) Θ obujamna deformacija definirana je izrazom:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{9.3}$$

9.1. MEĐUSOBNA OVISNOST KONSTANTA ELASTIČNOSTI

U prvom poglavlju naveden je izraz (1.10) koji povezuje konstante elastičnosti materijala E, ν i G, a koji glasi:

$$G = \frac{E}{2\cdot\left(1+\nu\right)}.$$

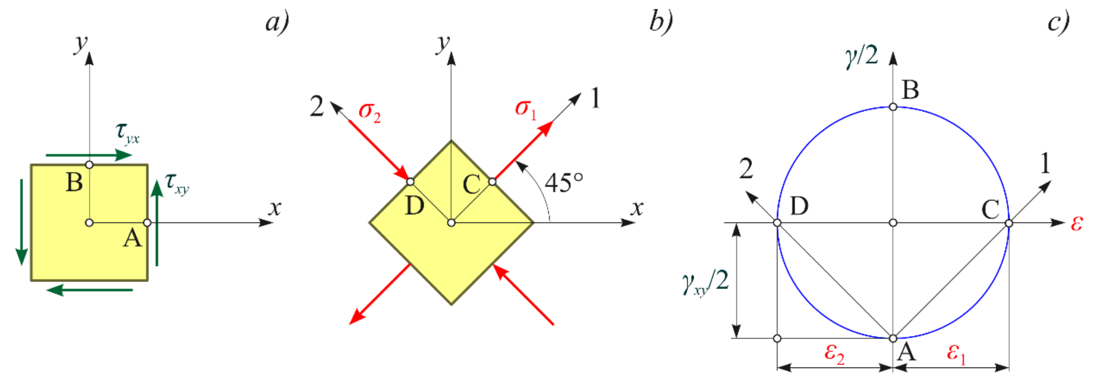
Ovdje će se dokazati valjanost tog izraza. Na slici 9.4.a prikazan je orijentirani element na koji djeluju samo posmična naprezanja. Za element na slici 9.4.a vrijedi:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0.$$

Glavne deformacije su prema (8.10) uz (9.1), što je prikazano na slici 9.4.c:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2\cdot G}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} = -\frac{\tau_{xy}}{2\cdot G}. \tag{9.4}$$

Za zadani element vrijedi $\sigma_1 = \tau_{xy}$ i $\sigma_2 = -\tau_{xy}$ (slika 9.4.b).



Slika 9.4. *Elementi s ekvivalentnim naprezanjem: a) čisto smicanje, b) element s istovremenim sabijanjem i rastezanjem u okomitim presjecima, c) Mohrova kružnica za oba elementa*

Prema jednadžbama Hookeova zakona za dvoosno stanje naprezanja (9.1) vrijedi:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2}{E}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1}{E},$$

što nakon sređivanja daje:

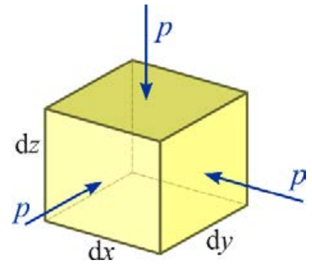
$$\varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy}\ , \qquad \varepsilon_2 = -\frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy}\,. \tag{9.5}$$

Usporedbom izraza (9.4) s izrazom (9.5) može se dobiti:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)},$$

što je u prvom poglavlju označeno kao izraz (1.10).

Na slici 9.5. prikazan je element podvrgnut hidrostatičkom pritisku p sa svih strana.



Slika 9.5. *Element podvrgnut hidrostatičkom tlaku*

Pri takvu opterećenju dolazi do promjene obujma, a obujamna deformacija proporcionalna je tlaku i iznosi:

$$\Theta = -\frac{p}{K}, \tag{9.6}$$

gdje je K obujamni modul elastičnosti. Za promatrani je element:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p\,,$$

te se uvrštavanjem u prvi izraz (9.1) dobije:

$$\varepsilon_x = \frac{-p - \nu \cdot (-p - p)}{E} = \frac{-p}{E} \cdot (1 - 2 \cdot \nu) = \varepsilon_y = \varepsilon_z\,.$$

Uvrštavanjem ovih vrijednosti u (9.3) obujamna deformacija može se izraziti kao

$$\Theta = -p\frac{3\cdot(1-2\cdot\nu)}{E},$$

te uspoređivanjem dobivenog izraza s izrazom (9.6) slijedi izraz za obujamni modul elastičnosti:

$$K = \frac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}. \tag{9.7}$$

Za vrijednost $\nu = 0,5$ obujamni modul elastičnosti postaje beskonačno velik. To bi značilo da za materijale s $\nu = 0,5$ ne dolazi do promjene obujma bez obzira na veličinu naprezanja, što se protivi realnom razmišljanju. S druge strane, kada bi bilo $\nu > 0,5$, K bi postao negativan, te bi pri tlačnom naprezanju obujam rastao, što je također protivno logičnom razmišljanju i fizikalno neprihvatljivo. Iz navedenog razmatranja može se zaključiti da mora biti $\nu < 0,5$, što potvrđuju i brojna mjerenja.

9.2. HOOKEOV ZAKON ZA RAVNINSKO STANJE NAPREZANJA

Ravninsko stanje naprezanja javlja se tada kada su neke komponente tenzora naprezanja jednake nuli, npr. $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti u (9.1) dobije se Hookeov zakon za ravninsko stanje naprezanja:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\cdot\sigma_y}{E},\quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\cdot\sigma_x}{E},\quad \varepsilon_z = \frac{-\nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)}{E},\quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \tag{9.8}$$

Izraz (9.2) nakon sređivanja u tom slučaju postaje:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_x + \nu\cdot\varepsilon_y\right),\quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_y + \nu\cdot\varepsilon_x\right),\quad \tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}. \tag{9.9}$$

Primjer 9.1.

Ravninsko stanje naprezanja zadano je komponentama tenzora naprezanja: $\sigma_x = -25\ \text{MPa}$, $\sigma_y = 55\ \text{MPa}$, $\tau_{xy} = -35\ \text{MPa}$. Valja odrediti deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut $\varphi = 40^\circ$, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija. Zadano je: $E = 210\ \text{GPa}$, $\nu = 0,3$.

***Rješenje*:**

Komponente tenzora naprezanja za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ dobivene prema izrazima (7.10), (7.11) i (7.12) glase:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{(-25)+55}{2} + \frac{(-25)-55}{2}\cdot\cos 80^\circ + (-35)\cdot\sin 80^\circ = -26,41\ \text{MPa},$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{(-25)+55}{2} - \frac{(-25)-55}{2}\cdot\cos 80^\circ - (-35)\cdot\sin 80^\circ = 56,41\ \text{MPa},$$

$$\overline{\tau}_{xy}=-\frac{(-25)-55}{2}\cdot\sin 80^\circ+(-35)\cdot\cos 80^\circ=33,31\text{ MPa}.$$

Glavna su naprezanja prema (7.16):

$$\sigma_1=\frac{(-25)+55}{2}+\sqrt{\left[\frac{(-25)-55}{2}\right]^2+(-35)^2}=68,15\text{ MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{(-25)+55}{2}-\sqrt{\left[\frac{(-25)-55}{2}\right]^2+(-35)^2}=-38,15\text{ MPa},$$

a pravci glavnih naprezanja prema (7.15):

$$\tan(2\cdot\varphi_0)=\frac{(-35)}{\left[(-25)-55\right]/2}=0,875,$$

$$2\cdot\varphi_0=41,19^\circ,\quad \varphi_0=20,6^\circ\quad\text{(glavna os 2).}$$

Prema izrazima (8.3) mogu se dobiti linijske komponente tenzora deformacije za osi $\overline{x}$ i $\overline{y}$:

$$\overline{\varepsilon}_x=\frac{\overline{\sigma}_x-\nu\cdot\overline{\sigma}_y}{E}=\frac{-26,41-0,3\cdot 56,41}{210\cdot 10^3}=-2,06\cdot 10^{-4},$$

$$\overline{\varepsilon}_y=\frac{\overline{\sigma}_y-\nu\cdot\overline{\sigma}_x}{E}=\frac{56,41-0,3\cdot(-26,41)}{210\cdot 10^3}=3,06\cdot 10^{-4},$$

te uz

$$G=E/\left[2\cdot(1+\nu)\right]=210/\left[2\cdot(1+0,3)\right]=80,77\text{ GPa},$$

tehnička kutna deformacija i njena tenzorska komponenta iznose:

$$\overline{\gamma}_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{33,31}{80,77\cdot 10^3}=4,12\cdot 10^{-4},\qquad \frac{1}{2}\overline{\gamma}_{xy}=2,06\cdot 10^{-4}.$$

Glavne deformacije jesu:

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1-\nu\cdot\sigma_2}{E}=\frac{68,15-0,3\cdot(-38,15)}{210\cdot 10^3}=3,79\cdot 10^{-4},$$

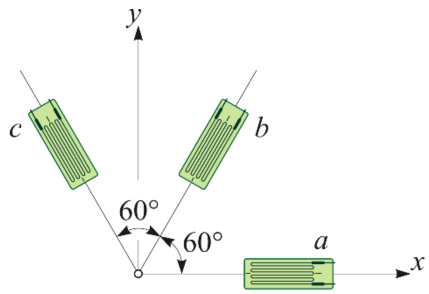
$$\varepsilon_2=\frac{\sigma_2-\nu\cdot\sigma_1}{E}=\frac{-38,15-0,3\cdot 68,15}{210\cdot 10^3}=-2,79\cdot 10^{-4},$$

a za izotropne materijale pravci glavnih deformacija poklapaju se s pravcima glavnih naprezanja.

Primjer 9.2.

Ravninsko stanje naprezanja zadano je linijskim deformacijama dobivenima uz pomoć mjernih tenzometara (slika 9.5.).

Valja odrediti naprezanja za osi x i y, glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja. Zadano je: $\varepsilon_a=6\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b=-4\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c=5\cdot 10^{-4}$, $E=210\text{ GPa}$, $\nu=0,3$.



Slika 9.6. *Primjer 9.2.*

***Rješenje*:**

Kako je objašnjeno u osmom poglavlju, linijska deformacija ε_x je zadana i iznosi $\varepsilon_x = \varepsilon_a = -6 \cdot 10^{-4}$, dok linijsku deformaciju ε_y i tenzorsku kutnu deformaciju $\gamma_{xy}/2$ treba odrediti prema izrazima (8.12) i (8.11):

$$\varepsilon_y = \frac{2 \cdot (\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3} = \frac{2 \cdot [(-4) + 5] - (-6)}{3} \cdot 10^{-4} = 2,67 \cdot 10^{-4},$$

$$1/2\, \gamma_{xy} = (\varepsilon_b - \varepsilon_c) / \sqrt{3} = [(-4) - 5] / \sqrt{3} \cdot 10^{-4} = -5,20 \cdot 10^{-4}.$$

Glavne deformacije računaju se prema (8.10):

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{(-6) + 2,67}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-6) - 2,67}{2} \right)^2 + (-5,2)^2} \right] \cdot 10^{-4} = 5,1 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \left[\frac{(-6) + 2,67}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-6) - 2,67}{2} \right)^2 + (-5,2)^2} \right] \cdot 10^{-4} = -8,4 \cdot 10^{-4},$$

a pravci glavnih deformacija prema (8.9):

$$\tan(2 \cdot \varphi_0) = \frac{-5,20 \cdot 10^{-4}}{[(-6) - 2,67] / 2 \cdot 10^{-4}} = 1,19954,$$

$$2 \cdot \varphi_0 = 50,18^\circ, \quad \varphi_0 = 25,09^\circ \quad \text{(glavna os 2)}.$$

Komponente tenzora naprezanja za osi x i y dobiju se prema (9.9) uz

$$G = E / [2 \cdot (1 + \nu)] = 210 / [2 \cdot (1 + 0,3)] = 80,77 \text{ GPa},$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) = \frac{210 \cdot 10^3}{1 - 0,3^2} \cdot [(-6) + 0,3 \cdot 2,67] \cdot 10^{-4} = -120,0 \text{ MPa},$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) = \frac{210 \cdot 10^3}{1 - 0,3^2} \cdot [2,67 + 0,3 \cdot (-6)] \cdot 10^{-4} = 20,1 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 80,77 \cdot 10^3 \cdot (-10,4) \cdot 10^{-4} = -84,0 \text{ MPa}.$$

Glavna naprezanja jesu:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_1 + \nu\cdot\varepsilon_2\right) = \frac{210\cdot 10^3}{1-0,3^2}\cdot\left[5,1+0,3\cdot\left(-8,4\right)\right]\cdot 10^{-4} = 59,5\ \text{MPa}\,,$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_2 + \nu\cdot\varepsilon_1\right) = \frac{210\cdot 10^3}{1-0,3^2}\cdot\left[\left(-8,4\right)+0,3\cdot 5,1\right]\cdot 10^{-4} = -158,5\ \text{MPa}\,.$$

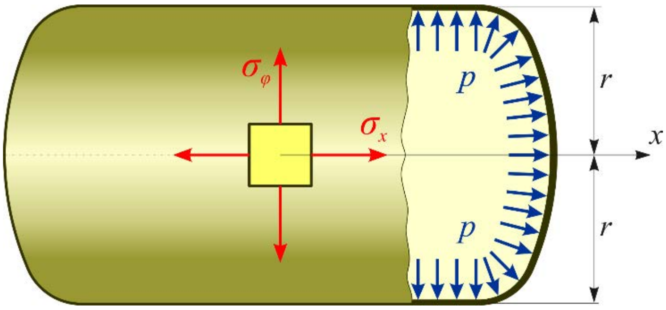
Pravci glavnih naprezanja poklapaju se s pravcima glavnih deformacija.

Primjer 9.3.

U zatvorenoj cilindričnoj posudi polumjera r i debljine stijenke t vlada pretlak p.

Valja odrediti normalna naprezanja u uzdužnom i cirkularnom smjeru σ_x i σ_φ te povećanje polumjera Δr (slika 9.6.).

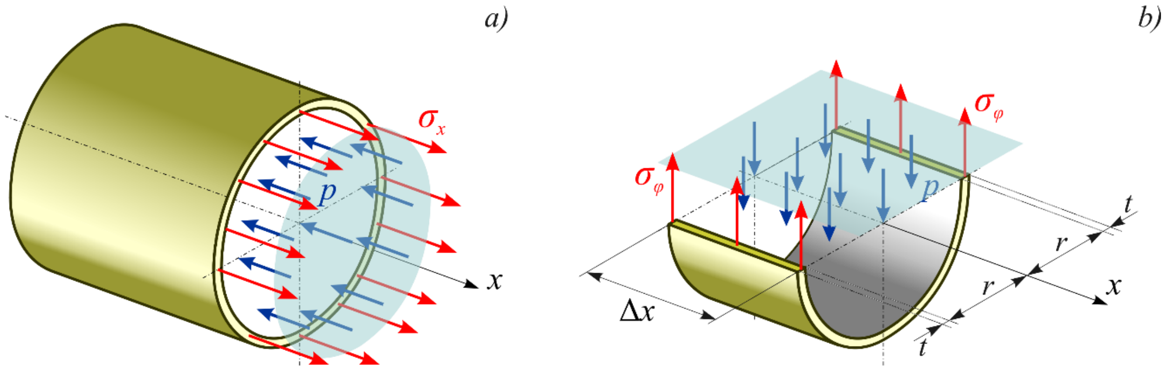
Zadano je: $r = 400$ mm, $t = 12$ mm, $p = 5$ MPa, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$.



Slika 9.6. *Primjer 9.3.*

***Rješenje*:**

U svrhu određivanja normalnog naprezanja σ_x napravljen je presjek cilindrične posude poprečnom ravninom (slika 9.7.a).



Slika 9.7. *Primjer 9.3.: a) odsječeni dio posude lijevo od presjeka, b) dio posude isječen pomoću dviju poprečnih ravnina i jedne horizontalne ravnine kroz os posude*

Uvjet ravnoteže glasi:

$$\sum F_x = 0: \quad 2\cdot r\cdot\pi\cdot t\cdot\sigma_x - p\cdot r^2\cdot\pi = 0\,,$$

odakle se dobije izraz za normalno naprezanje u uzdužnom smjeru σ_x:

$$\sigma_x = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t}. \qquad (9.10)$$

Uvjet ravnoteže za dio posude prikazan na slici 9.7.b glasi:

$$\sum F_y = 0: \quad 2 \cdot \Delta x \cdot t \cdot \sigma_\varphi - p \cdot 2 \cdot r \cdot \Delta x = 0,$$

odakle slijedi izraz za normalno naprezanje u cirkularnom smjeru σ_φ:

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{t}. \qquad (9.11)$$

Normalno naprezanje u cirkularnom smjeru dva puta je veće od normalnog naprezanja u uzdužnom smjeru, tj. $\sigma_\varphi = 2 \cdot \sigma_x$.

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti u izraze (9.10) i (9.11) dobiju se tražena naprezanja:

$$\sigma_x = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t} = \frac{5 \cdot 400}{2 \cdot 12} = 83,33 \text{ MPa},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{t} = \frac{5 \cdot 400}{12} = 166,66 \text{ MPa}.$$

Duljinska deformacija u cirkularnom smjeru ε_φ iznosi:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi - 2 \cdot r \cdot \pi}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{\Delta r}{r},$$

gdje je $2 \cdot (r + \Delta r) \cdot \pi$ opseg posude nakon deformiranja, a $2 \cdot r \cdot \pi$ opseg posude prije deformiranja. U plaštu posude vlada približno ravninsko stanje naprezanja jer je naprezanje σ_z zanemarivo maleno u odnosu na σ_x i σ_φ. Na vanjskoj strani plašta je $\sigma_z = 0$, a na unutarnjoj $\sigma_z = -p$.

Hookeov zakon u tom je slučaju izražen jednadžbom:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi - \nu \cdot \sigma_x}{E},$$

odnosno uz (9.10) i (9.11) izrazom:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{p \cdot r \cdot (2 - \nu)}{2 \cdot t \cdot E} = \frac{\Delta r}{r},$$

pa je

$$\Delta r = \frac{p \cdot r^2 \cdot (2 - \nu)}{2 \cdot t \cdot E}. \qquad (9.12)$$

Za zadane vrijednosti jest:

$$\Delta r = \frac{5 \cdot 400^2 \cdot (2 - 0,3)}{2 \cdot 12 \cdot 210 \cdot 10^3} = 0,27 \text{ mm}.$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 9.1.

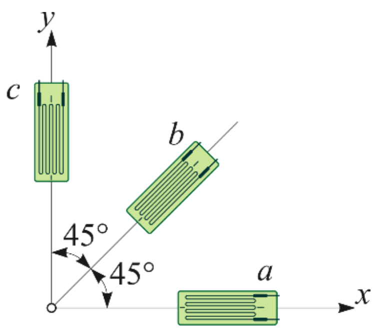
Za ravninsko stanje naprezanja zadano komponentama tenzora naprezanja σ_x, σ_y i τ_{xy} valja odrediti deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\sigma_x = 60\ \text{MPa}$, $\sigma_y = 0\ \text{MPa}$, $\tau_{xy} = 40\ \text{MPa}$, $\varphi = -20^\circ$, $E = 200\ \text{GPa}$, $\nu = 0,3$.

Zadatak 9.2.

Ravninsko stanje naprezanja zadano je linijskim deformacijama ε_a, ε_b i ε_c dobivenima uz pomoć mjernih tenzometara (slika Z.9.2.).

Valja odrediti naprezanja za osi x i y, glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja. Zadano je: $\varepsilon_a = 7 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = -4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 3 \cdot 10^{-4}$, $E = 210\ \text{GPa}$, $\nu = 0,3$.



Slika Z.9.2. *Zadatak 9.2.*

9.3. HOOKEOV ZAKON ZA RAVNINSKO STANJE DEFORMACIJE

Ako su sve komponente deformacije koje pripadaju jednoj ravnini, npr. ravnini *Oxy*, različite od nule, a ostale jednake nuli, tj. ako su $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, radi se o ravninskom stanju deformacije. Izrazi (8.1) prelaze u izraze:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)}{E}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \tag{9.13}$$

dok je $\sigma_z = \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)$. Uvrštavanjem ove vrijednosti za σ_z u (9.13) te nakon sređivanja mogu su dobiti izrazi:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \sigma_x\right). \\ &\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \tag{9.14}$$

Ako se uvedu oznake

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad G^* = G \tag{9.15}$$

i uvrste u (9.14), nakon sređivanja dobivaju se izrazi analogni izrazima (9.8):

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu^* \cdot \sigma_y}{E^*}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu^* \cdot \sigma_x}{E^*}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G^*}, \tag{9.16}$$

koji predstavljaju Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacije. Hookeov zakon za ravninsko stanje deformacije, analogno izrazima (9.9), može se dati i izrazima u kojima su komponente tenzora naprezanja izražene preko komponenata tenzora deformacije:

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \frac{E^*}{1-\left(\nu^*\right)^2} \cdot \left(\varepsilon_x + \nu^* \cdot \varepsilon_y\right), \quad \sigma_y = \frac{E^*}{1-\left(\nu^*\right)^2} \cdot \left(\varepsilon_y + \nu^* \cdot \varepsilon_x\right) \\ &\tau_{xy} = G^* \cdot \gamma_{xy}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Primjer 9.4.

Ravninsko stanje deformacije zadano je komponentama tenzora naprezanja σ_x, σ_y i τ_{xy}.

Valja odrediti deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

Zadano je: $\sigma_x = 35$ MPa, $\sigma_y = -70$ MPa, $\tau_{xy} = 65$ MPa, $\varphi = 50^\circ$, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$.

***Rješenje*:**

Budući da je zadano ravninsko stanje deformacije, prvo se računaju vrijednosti fiktivnih konstanta elastičnosti prema (9.15):

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{210}{1-0,3^2} = 230,77 \text{ GPa},$$

$$\nu^* = \frac{0,3}{1-0,3} = 0,429 \text{ i}$$

$$G^* = G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{210}{2,6} = 80,77 \text{ GPa}.$$

Komponente tenzora naprezanja za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ dobivene prema izrazima (7.10), (7.11) i (7.12) glase:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{35+(-70)}{2} + \frac{35-(-70)}{2} \cdot \cos 100^\circ + 65 \cdot \sin 100^\circ = 37,40 \text{ MPa},$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{35+(-70)}{2} - \frac{35-(-70)}{2} \cdot \cos 100^\circ - 65 \cdot \sin 100^\circ = -72,40 \text{ MPa},$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -\frac{35-(-70)}{2} \cdot \sin 100^\circ + 65 \cdot \cos 100^\circ = -62,99 \text{ MPa}.$$

Glavna su naprezanja prema (7.16):

$$\sigma_1 = \frac{35+(-70)}{2} + \sqrt{\left[\frac{35-(-70)}{2}\right]^2 + 65^2} = 66,05 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{35+(-70)}{2} - \sqrt{\left[\frac{35-(-70)}{2}\right]^2 + 65^2} = -101,05 \text{ MPa},$$

a pravci glavnih naprezanja prema (7.15): .

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{65}{\left[35-(-70)\right]/2} = 1,2381,$$

$$2\varphi_0 = 51,07^\circ,\ \varphi_0 = 25,5^\circ \text{ (glavna os 1).}$$

Prema izrazima (9.16) mogu se dobiti komponente tenzora deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$:

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\bar{\sigma}_x - \nu^* \cdot \bar{\sigma}_y}{E^*} = \frac{37,40 - 0,429 \cdot (-72,40)}{230,77 \cdot 10^3} = 2,97 \cdot 10^{-4},$$

$$\bar{\varepsilon}_y = \frac{\bar{\sigma}_y - \nu^* \cdot \bar{\sigma}_x}{E^*} = \frac{(-72,40) - 0,429 \cdot 37,40}{230,77 \cdot 10^3} = -3,83 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{1}{2}\bar{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{\tau}_{xy}}{G} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-62,99}{80,77 \cdot 10^3} = -3,90 \cdot 10^{-4}.$$

Glavne deformacije jesu:

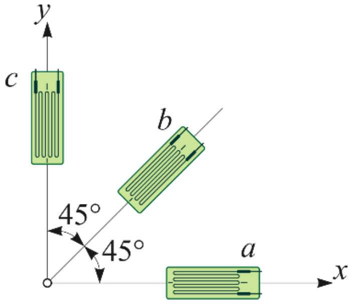
$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu^* \cdot \sigma_2}{E^*} = \frac{66,05 - 0,429 \cdot (-101,05)}{230,77 \cdot 10^3} = 4,74 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu^* \cdot \sigma_1}{E^*} = \frac{-101,05 - 0,429 \cdot 66,05}{230,77 \cdot 10^3} = -5,61 \cdot 10^{-4},$$

a za izotropne materijale pravci glavnih deformacija poklapaju se s pravcima glavnih naprezanja.

Primjer 9.5.

Ravninsko stanje deformacije zadano je linijskim deformacijama dobivenima uz pomoć mjernih tenzometara (slika 9.8.).



Slika 9.8. *Primjer 9.5.*

Valja odrediti naprezanja za osi x i y, glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja.

Zadano je: $\varepsilon_a = -6\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = -4\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 5\cdot 10^{-4}$, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$.

***Rješenje*:**

Prema slici 9.8. očito je da su linijske deformacije ε_x i ε_y zadane i iznose:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = -6\cdot 10^{-4},\ \varepsilon_y = \varepsilon_c = 5\cdot 10^{-4}.$$

Tenzorsku kutnu deformaciju $\gamma_{xy}/2$ treba odrediti prema izrazu (8.12):

$$1/2\,\gamma_{xy} = \varepsilon_b - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = \left[(-4) - \frac{(-6)+5}{2}\right]\cdot 10^{-4} = -3,5\cdot 10^{-4}.$$

Glavne deformacije računaju se prema (8.10):

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{(-6)+5}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-6)-5}{2}\right)^2 + (-3,5)^2}\right]\cdot 10^{-4} = 6,02\cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \left[\frac{(-6)+5}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-6)-5}{2}\right)^2 + (-3,5)^2}\right]\cdot 10^{-4} = -7,02\cdot 10^{-4},$$

a pravci glavnih deformacija prema (8.9):

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{-3,5\cdot 10^{-4}}{\left[(-6)-5\right]/2\cdot 10^{-4}} = 0,63636,$$

$$2\varphi_0 = 32,47^\circ,\quad \varphi_0 = 16,24^\circ \quad \text{(glavna os 2).}$$

Kako se radi o ravninskom stanju deformacije, treba računati fiktivne konstante elastičnosti koje iznose:

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{210}{1-0,3^2} = 230,77\ \text{GPa},$$

$$\nu^* = \frac{0,3}{1-0,3} = 0,429 \quad \text{i}$$

$$G^* = G = \frac{E}{2\cdot(1+\nu)} = \frac{210}{2,6} = 80,77\ \text{GPa}.$$

Komponente tenzora naprezanja za osi x i y dobiju se prema (9.17):

$$\sigma_x = \frac{E^*}{1-(\nu^*)^2}\cdot\left[\varepsilon_x + \nu^*\cdot\varepsilon_y\right] = \frac{230,77\cdot 10^3}{1-0,429^2}\cdot\left[(-6)+0,429\cdot 5\right]\cdot 10^{-4},$$

$$\sigma_x = -109,0\ \text{MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E^*}{1-(\nu^*)^2}\cdot\left[\varepsilon_y + \nu^*\cdot\varepsilon_x\right] = \frac{230,77\cdot 10^3}{1-0,429^2}\cdot\left[5+0,429\cdot(-6)\right]\cdot 10^{-4},$$

$\sigma_y = 68,6 \text{ MPa}$

$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = 80,77 \cdot 10^3 \cdot (-7) \cdot 10^{-4} = -56,5 \text{ MPa}$.

Glavna naprezanja jesu:

$$\sigma_1 = \frac{E^*}{1-(\nu^*)^2} \cdot \left[\varepsilon_1 + \nu^* \cdot \varepsilon_2\right] = \frac{230,77 \cdot 10^3}{1-0,429^2} \cdot \left[6,02 + 0,429 \cdot (-7,02)\right] \cdot 10^{-4}$$

$\sigma_1 = 85,1 \text{ MPa}$,

$$\sigma_2 = \frac{E^*}{1-(\nu^*)^2} \cdot \left[\varepsilon_2 + \nu^* \cdot \varepsilon_1\right] = \frac{230,77 \cdot 10^3}{1-0,429^2} \cdot \left[-7,02 + 0,429 \cdot 6,02\right] \cdot 10^{-4}$$

$\sigma_2 = -125,5 \text{ MPa}$.

Pravci glavnih naprezanja poklapaju se s pravcima glavnih deformacija.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 9.3.

Za ravninsko stanje deformacije poznate su komponente tenzora naprezanja σ_x , σ_y i τ_{xy} .

Potrebno je odrediti deformacije za osi $\bar{x}$ i $\bar{y}$ koje s osima x i y zatvaraju kut φ, glavne deformacije i pravce glavnih deformacija.

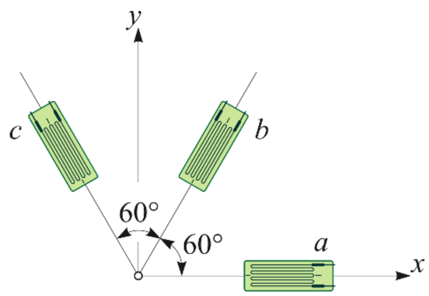
Zadano je: $\sigma_x = 60 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 0 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$, $\varphi = -20^\circ$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.

Zadatak 9.4.

Ravninsko stanje deformacije zadano je linijskim deformacijama ε_a , ε_b i ε_c dobivenima uz pomoć mjernih tenzometara (slika Z.9.4.).

Valja odrediti naprezanja za osi x i y , glavna naprezanja i pravce glavnih naprezanja.

Zadano je: $\varepsilon_a = 7 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_b = -4 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_c = 3 \cdot 10^{-4}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$.



Slika Z.9.4. *Zadatak 9.4.*

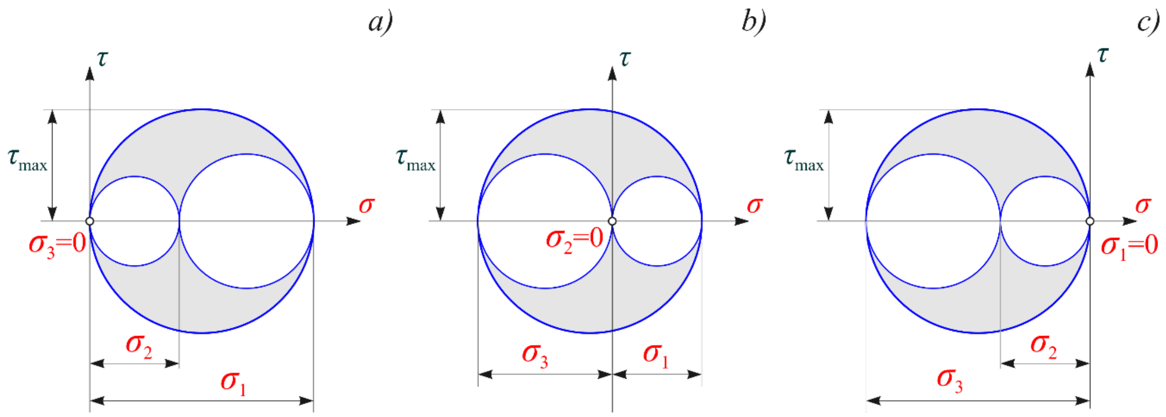
10. TEORIJE ČVRSTOĆE

Pri provjeri čvrstoće ili pri dimenzioniranju u slučaju aksijalnog opterećenja, čistog savijanja te čistog smicanja i uvijanja, najveće normalno odnosno najveće posmično naprezanje uspoređuje se s dopuštenim normalnim odnosno posmičnim naprezanjem koje je za različite materijale dobiveno laboratorijskim ispitivanjima, kako je to opisano u uvodnom poglavlju.

Međutim, pri složenom opterećenju štapa, koje će detaljnije biti promotreno u sljedećem poglavlju, javlja se u proizvoljnoj točki opterećenog deformabilnog tijela ravninsko stanje naprezanja. Laboratorijskim ispitivanjima praktično je nemoguće simulirati sve kombinacije koje mogu nastupiti pri složenom opterećenju, pa se postavlja pitanje što treba uspoređivati s dopuštenim naprezanjem pri provjeri čvrstoće odnosno pri dimenzioniranju. Odgovor na to pitanje daju teorije čvrstoće prema kojima se izračunava ekvivalentno naprezanje za usporedbu s dopuštenim naprezanjem. Određivanje ekvivalentnog naprezanja temelji se na glavnim naprezanjima čije je izračunavanje dano u sedmom poglavlju.

Ako se radi o dvoosnom stanju naprezanja, jedno od glavnih naprezanja uvijek je jednako nuli. Treba naglasiti važnost označavanja glavnih naprezanja, naime vrijedi dogovor $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Pritom se mogu pojaviti sjedeće situacije:

- ako su dva glavna naprezanja, koja su različita od nule, pozitivna, onda je $\sigma_3 = 0$, pozitivno naprezanje većeg iznosa je σ_1, a ono manjeg iznosa označava se σ_2 (slika 10.1.a);
- ako su dva glavna naprezanja, koja su različita od nule, suprotnog predznaka, onda se pozitivno naprezanje označava σ_1, negativno σ_3, a $\sigma_2 = 0$ (slika 10.1.b);
- ako su dva glavna naprezanja, koja su različita od nule, negativna, onda je $\sigma_1 = 0$, negativno naprezanje manjeg iznosa je σ_2, a ono većeg iznosa je σ_3 (slika 10.1.c).



Slika 10.1. *Glavna naprezanja: a) dva glavna naprezanja različita od nule su pozitivna, b) naprezanja različita od nule suprotnog predznaka, c) dva glavna naprezanja različita od nule su negativna*

Više je teorija čvrstoće i one su:

1. teorija najvećeg normalnog naprezanja (Rankinova teorija)
2. teorija najvećeg posmičnog naprezanja (Trescina teorija)

3. teorija najveće distorzijske energije (teorija HMH prema Huberu, von Misesu i Henckyju)
4. teorija najveće duljinske deformacije.

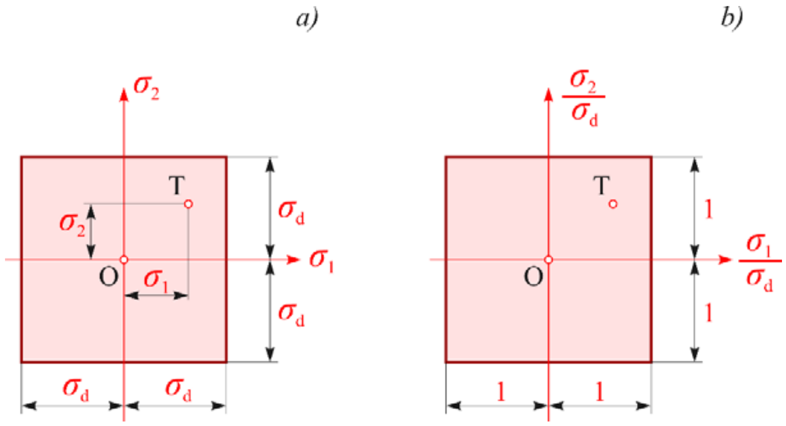
U ovom poglavlju detaljnije će se opisati prve tri teorije koje se najčešće primjenjuju u praktičnim problemima. Laboratorijska ispitivanja potvrdila su da se prva teorija može primjenjivati za krte materijale, dok su druga i treća teorija prikladne ako se radi o duktilnim materijalima.

10.1. TEORIJA NAJVEĆEG NORMALNOG NAPREZANJA

Po ovoj teoriji za provjeru čvrstoće mjerodavno je ono glavno naprezanje koje je po apsolutnoj vrijednosti najveće, te je ekvivalentno naprezanje σ_e jednako maksimalnom naprezanju $\sigma_{\max}$ tako da uvjet čvrstoće glasi:

$$\sigma_\mathrm{e} = \sigma_{\max} \le \sigma_\mathrm{d} \,. \tag{10.1}$$

Uvjet čvrstoće (10.1) grafički je prezentiran pomoću krivulja čvrstoće kako je to pokazano na slici 10.2. gdje su uzeta u razmatranje samo glavna naprezanja različita od nule i označena sa σ_1 i σ_2. U koordinatnom sustavu $O\sigma_1\sigma_2$ crta se točka T s koordinatama σ_1 i σ_2. Ako točka T ulazi unutar označenog kvadrata na slici 10.1.a, nema opasnosti od loma i uvjet čvrstoće je zadovoljen. Krivulje čvrstoće mogu se prikazivati i u nedimenzionalnom koordinatnom sustavu gdje su koordinate točke T $\sigma_1/\sigma_\mathrm{d}$ i $\sigma_2/\sigma_\mathrm{d}$ (slika 10.2.b).



Slika 10.2.: *a) krivulje čvrstoće prema teoriji najvećeg normalnog naprezanja, b) nedimenzionalni oblik krivulja čvrstoće*

10.2. TEORIJA NAJVEĆEG POSMIČNOG NAPREZANJA

Po ovoj teoriji kritično stanje nastaje kad najveće posmično naprezanje dostigne vrijednost dopuštenog posmičnog naprezanja dobivenoga prema Mohrovoj kružnici za jednoosno stanje naprezanja $\tau_\mathrm{d} = \sigma_\mathrm{d}/2$.

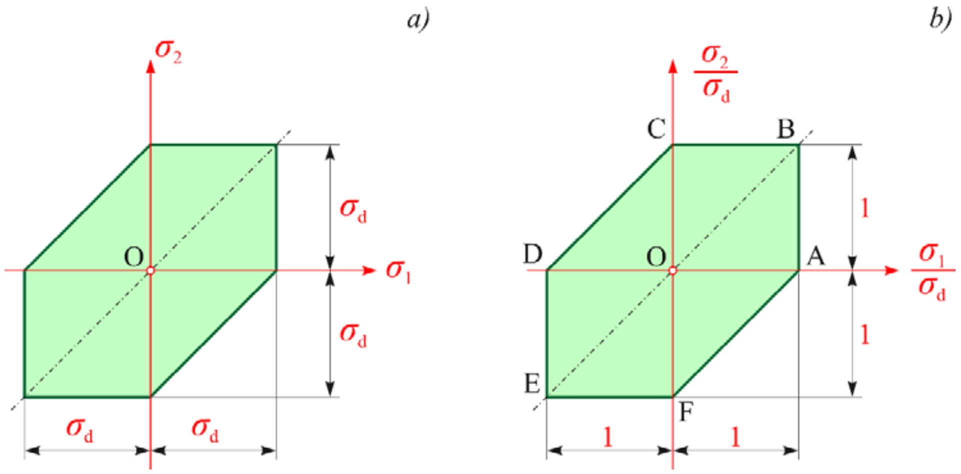
Kako je prema slici 10.1. najveće posmično naprezanje jednako $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, uvjet čvrstoće glasi:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \le \tau_{\mathrm{d}} = \frac{\sigma_d}{2},$$

odakle se dobije ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{\mathrm{e}} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{10.2}$$

Krivulje čvrstoće za ovu teoriju mogu se dobiti kako je prikazano na slici 10.3.a. Nedimenzionalni oblik krivulja čvrstoće dan je na slici 10.3.b.



Slika 10.3.: *a) krivulje čvrstoće prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja, b) nedimenzionalni oblik krivulja čvrstoće*

10.3. TEORIJA NAJVEĆE DISTORZIJSKE ENERGIJE – HMH TEORIJA

Za ovu teoriju potrebno je poznavati izraz za gustoću distorzijske energije. Ovdje je naveden izraz za gustoću distorzijske energije bez izvođenja, a koji glasi:

$$U_{\mathrm{de}} = \frac{1+\nu}{6\cdot E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right].$$

Pri jednoosnom stanju naprezanja za $\sigma_1 = \sigma_{\mathrm{d}}$ dobije se izraz za dopuštenu distorzijsku energiju koji glasi:

$$U_{\mathrm{dedop}} = \frac{1+\nu}{3\cdot E}\cdot \sigma_{\mathrm{d}}.$$

Uvjet čvrstoće jest:

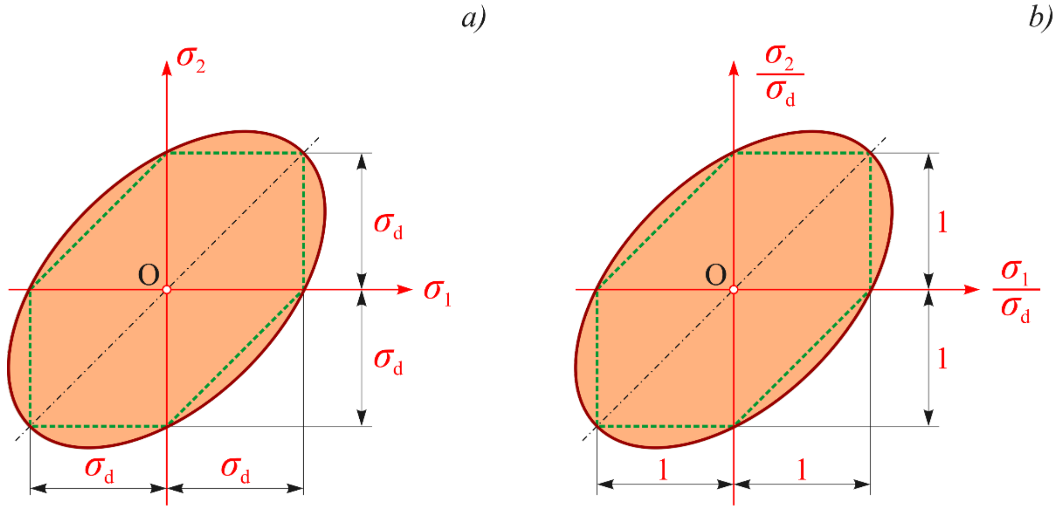
$$U_{\mathrm{de}} = \frac{1+\nu}{6\cdot E}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \le U_{\mathrm{dedop}} = \frac{1+\nu}{3\cdot E}\cdot \sigma_{\mathrm{d}},$$

te prema $\sigma_e \le \sigma_{\mathrm{d}}$ izraz za ekvivalentno naprezanje glasi:

$$\sigma_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]}. \tag{10.3}$$

Ova se teorija još naziva i HMH teorija po autorima koji su na njoj radili (M. T. Huber 1904., R. von Mises 1913. i H. Hencky 1925. godine).

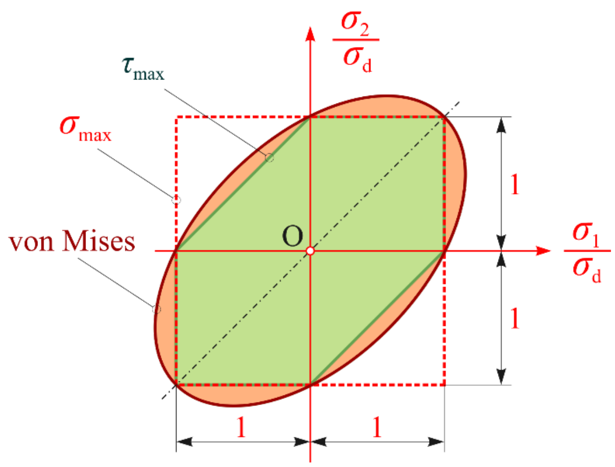
Krivulja čvrstoće po ovoj teoriji predstavljena je elipsom na slici 10.4.a, a nedimenzionalni oblik krivulje čvrstoće dan je na slici 10.4.b.



Slika 10.4.: *a) krivulje čvrstoće prema HMH teoriji, b) nedimenzionalni oblik krivulja čvrstoće*

10.4. USPOREDBA TEORIJA ČVRSTOĆE

Krivulje čvrstoće prema svim trima promatranim teorijama u nedimenzionalnom obliku dane su na slici 10.4. Područje sigurnosti prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja (označeno zelenom bojom na slici 10.5.) nalazi se unutar područja sigurnosti svih ostalih teorija, pa se može izvući zaključak da teorija najvećeg posmičnog naprezanja za ravninsko stanje naprezanja daje najveću sigurnost.



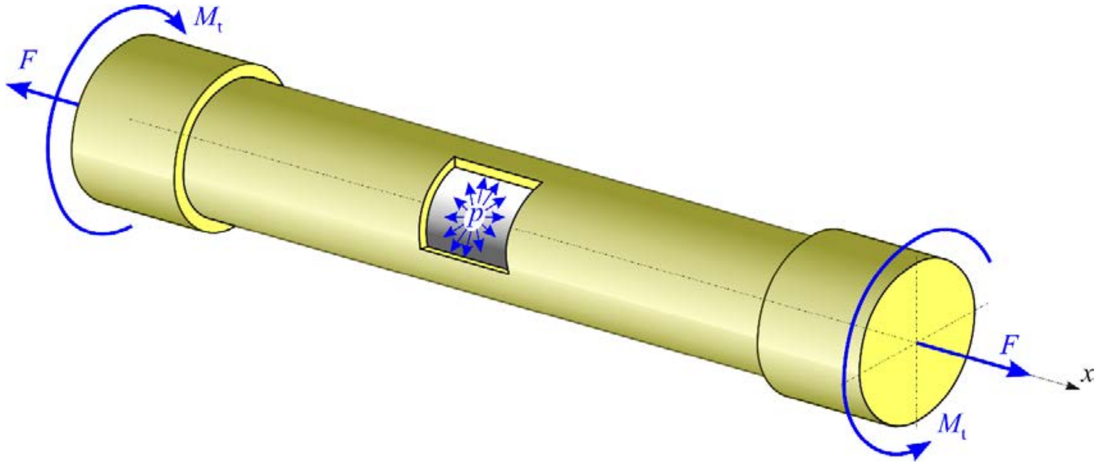
Slika 10.5. *Krivulje čvrstoće prema trima promatranim teorijama u nedimenzionalnom obliku*

Sve ove teorije provjeravane su eksperimentima u laboratorijskim ispitivanjima.

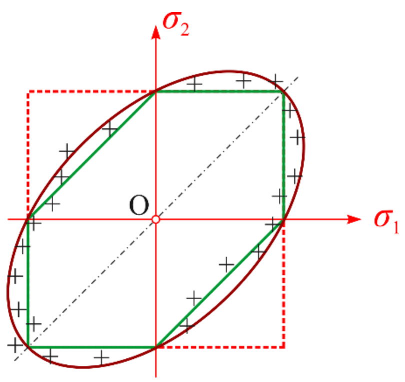
Slika 10.6. pokazuje epruvetu na kojoj je moguće ostvariti različite kombinacije dvoosnog stanja naprezanja. Epruveta je kružna tanka cijev koja se može istovremeno opteretiti unutarnjim pritiskom p, uzdužnom silom F i momentom M. Mijenjanjem vrijednosti opterećenja dobiju se u stijenci cijevi različite kombinacije naprezanja σ_1 i σ_2.

Rezultati ispitivanja pokazani su na slici 10.7.

Rastezljivi ili duktilni materijali dobro slijede teoriju najveće distorzijske energije, dok krhki materijali bolje slijede teoriju najvećeg normalnog naprezanja.



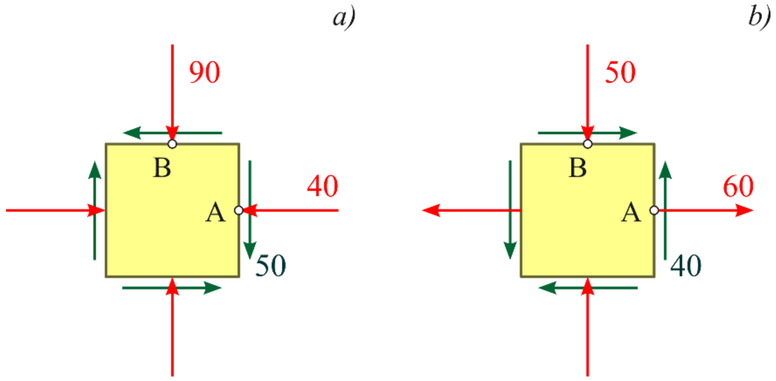
Slika 10.6. *Epruveta kojom se ostvaruju različita dvoosna stanja naprezanja*



Slika 10.7. *Eksperimentalna provjera teorija čvrstoće*

Primjer 10.1.

Za orijentirane elemente ravninskog stanja naprezanja prikazane na slici 10.8.a i b odrediti ekvivalentno naprezanje prema teorijama najvećeg normalnog i najvećeg posmičnog naprezanja te prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji).



Slika 10.8. *Primjer 10.1.*

***Rješenje*:**

<u>Orijentirani element prema slici 10.8.a.</u>

Komponente tenzora naprezanja koje pripadaju tom elementu jesu:

$$\sigma_x = -40 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -90 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = -50 \text{ MPa}.$$

Glavna naprezanja u ravnini *Oxy* računaju se prema (7.16) i iznose:

$$\sigma_1 = \frac{(-40)+(-90)}{2} + \sqrt{\left[\frac{(-40)-(-90)}{2}\right]^2 + (-50)^2} = -9{,}1 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{(-40)+(-90)}{2} - \sqrt{\left[\frac{(-40)-(-90)}{2}\right]^2 + (-50)^2} = -120{,}9 \text{ MPa}.$$

Nakon renumeracije glavnih naprezanja, vodeći računa da vrijedi $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, glavna naprezanja glase:

$$\sigma_1 = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -9{,}1 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -120{,}9 \text{ MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja računa se prema (10.2) i jednako je

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - (-120{,}9) = 120{,}9 \text{ MPa}.$$

Prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji) ekvivalentno naprezanje je (10.3):

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]},$$

odnosno uz $\sigma_1 = 0$ MPa:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3} = \sqrt{(-9{,}1)^2 + (-120{,}9)^2 - (-9{,}1)\cdot(-120{,}9)}$$

$$\sigma_e = 116{,}6 \text{ MPa}.$$

<u>Orijentirani element prema slici 10.8.b.</u>

Komponente tenzora naprezanja koje pripadaju tom elementu jesu:

$$\sigma_x = 60 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -50 \text{ MPa}, \quad \tau_{xy} = 40 \text{ MPa}.$$

U ravnini *Oxy* najveća normalna naprezanja iznose:

$$\sigma_1 = \frac{60+(-50)}{2} + \sqrt{\left[\frac{60-(-50)}{2}\right]^2 + 40^2} = 73{,}0 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{60+(-50)}{2} - \sqrt{\left[\frac{60-(-50)}{2}\right]^2 + 40^2} = -63{,}0 \text{ MPa}.$$

Nakon renumeracije glavna naprezanja jesu:

$$\sigma_1 = 73 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -63 \text{ MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja iznosi:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 73,0 - (-63,0) = 73,0 - (-63,0) = 136,0 \text{ MPa} .$$

Prema HMH teoriji ekvivalentno naprezanje jest:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]} ,$$

odnosno uz $\sigma_2 = 0$ MPa :

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3} = \sqrt{73,0^2 + (-63,0)^2 - 73,0 \cdot (-63,0)}$$

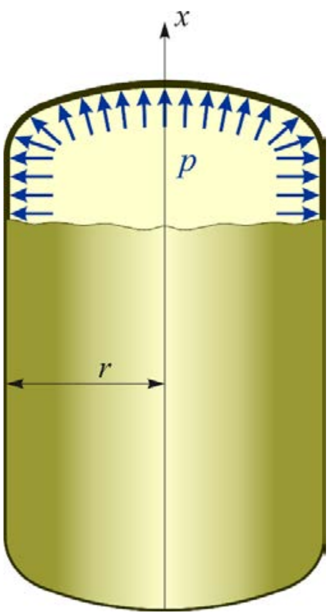
$$\sigma_e = 117,9 \text{ MPa} .$$

Primjer 10.2.

U zatvorenoj cilindričnoj posudi polumjera r i debljine stijenke t vlada pretlak p (slika 10.9).

Valja odrediti ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja i teoriji najveće distorzijske energije.

Zadano je: $r = 500$ mm , $t = 8$ mm , $p = 3$ MPa .



Slika 10.9. *Primjer 10.2.*

***Rješenje*:**

Normalna naprezanja u uzdužnom i cirkularnom smjeru jesu:

$$\sigma_x = \frac{p \cdot r}{2 \cdot t} = \frac{3 \cdot 500}{2 \cdot 8} = 93,75 \text{ MPa} , \quad \sigma_\varphi = \frac{p \cdot r}{t} = \frac{3 \cdot 500}{8} = 187,5 \text{ MPa} ,$$

pa glavna naprezanja na vanjskoj strani plašta iznose:

$$\sigma_1 = \sigma_\varphi = 187,5 \text{ MPa} ,$$

$$\sigma_2 = \sigma_x = 93,75 \text{ MPa} , \quad \sigma_3 = 0 \text{ MPa} .$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja iznosi:

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 187,5 - 0 = 187,5 \text{ MPa} .$$

Prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji) ekvivalentno naprezanje jest:

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]} ,$$

odnosno uz $\sigma_3 = 0$ MPa :

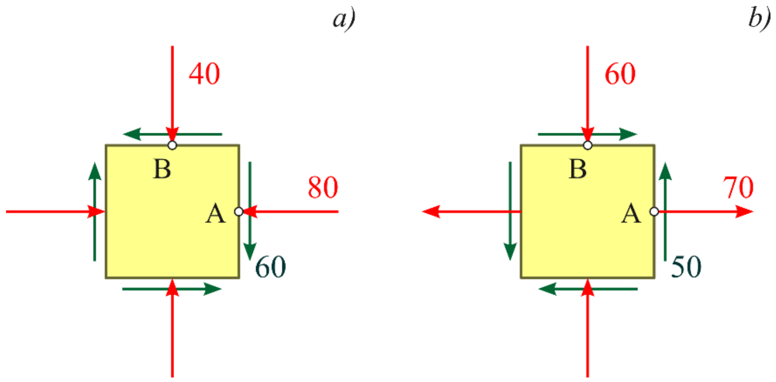
$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{187,5^2 + 93,75^2 - 187,5 \cdot 93,75}$$

$$\sigma_e = 162,4 \text{ MPa} .$$

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 10.1.

Za orijentirane elemente ravninskog stanja naprezanja prikazane na slici Z.10.1.a i b odrediti ekvivalentno naprezanje prema teorijama najvećeg normalnog i najvećeg posmičnog naprezanja te prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji).



Slika Z.10.1. *Zadatak Z.10.1.*

11. SLOŽENO OPTEREĆENJE

Bezbroj je mogućih kombinacija pri složenom opterećenju štapa koje će u njegovu proizvoljnom poprečnom presjeku izazvati u općem slučaju postojanje svih šest komponenata unutarnjih sila, kako je to navedeno u potpoglavlju 1.5.1. uvodnog poglavlja ovih skripata. Ukupna naprezanja određivat će se superpozicijom rezultata dobivenih od svakog pojedinog djelovanja, tj. od pojedinačnog djelovanja svake od šest komponenata unutarnjih sila.

U ovom poglavlju pokazat će se izračunavanje ekvivalentnog naprezanja u točkama poprečnog presjeka štapa za sljedeće kombinacije opterećenja:

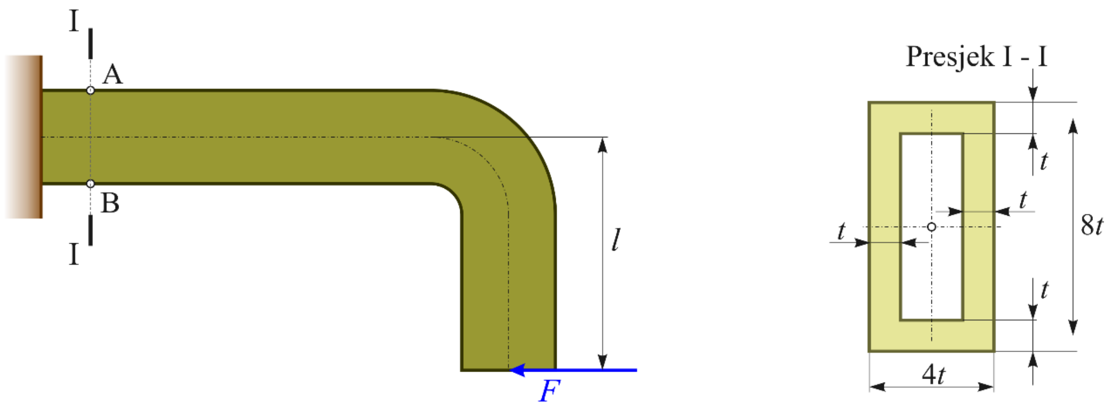
- osno (aksijalno) opterećenje i savijanje
- osno opterećenje i uvijanje
- uvijanje i savijanje
- osno opterećenje, uvijanje i savijanje.

11.1. AKSIJALNO OPTEREĆENJE I SAVIJANJE

Kod ovog slučaja opterećenja štapa javljaju se samo normalna naprezanja uzrokovana uzdužnom silom i momentom savijanja. Ukupno naprezanje računa se kao algebarski zbroj normalnih naprezanja računanih posebno od osnog opterećenja i posebno od savijanja.

Primjer 11.1.

Zakrivljeni štap zadanoga poprečnog presjeka opterećen je na slobodnom kraju silom iznosa F (slika 11.1.). Potrebno je izračunati najveće vlačno i najveće tlačno naprezanje te prikazati raspodjelu normalnih naprezanja po visini poprečnog presjeka na mjestu uklještenja. Zadano je: $F = 60\ \text{kN}$, $l = 200\ \text{mm}$, $t = 12\ \text{mm}$.



Slika 11.1. *Primjer 11.1.*

***Rješenje*:**

Unutarnje sile u poprečnom presjeku određene su razmatranjem ravnoteže dijela štapa desno od zamišljenog presjeka (slika 11.2.). Uvjeti ravnoteže glase:

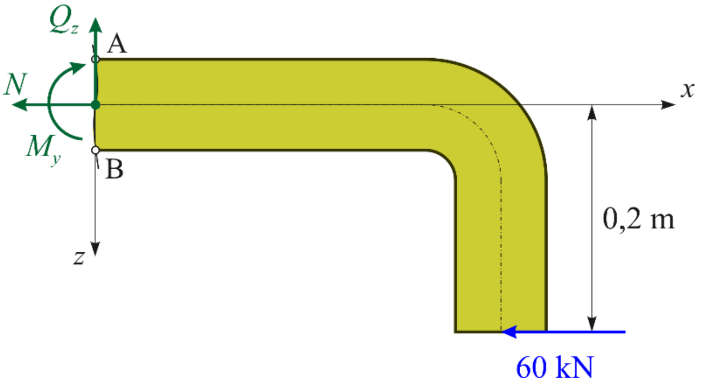
$$\sum F_x = 0: \qquad -N - F = 0,$$

$$\sum F_z = 0: \qquad -Q_z = 0\,,$$

$$\sum M_\mathrm{P} = 0: \qquad -M_y - F\cdot l = 0\,.$$

Iz gornjih jednadžbi dobiju se vrijednosti unutarnjih sila koje iznose:

$$N = -F = -60\ \mathrm{kN}\,; \qquad M_y = -F\cdot l = -60\cdot 0,2 = -12\ \mathrm{kN\cdot m}\,.$$



Slika 11.2. *Primjer 11.1. Dio nosača desno od zamišljenog presjeka*

Površina i aksijalni moment tromosti za težišnu os y zadanoga poprečnog presjeka jesu:

$$A = 2880\ \mathrm{mm}^2\,, \qquad I_y = 2,7924\cdot 10^6\ \mathrm{mm}^4\,.$$

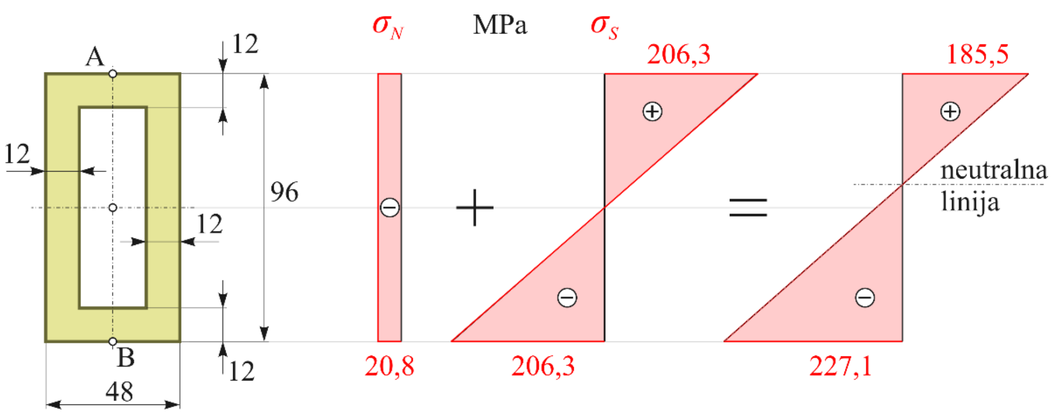
Navedene unutarnje sile izazivaju normalna naprezanja koja su od uzdužne sile jednoliko raspodijeljena po visini poprečnog presjeka i imaju vrijednost:

$$\sigma_\mathrm{N} = \frac{N}{A} = \frac{-60\cdot 10^3}{2880} = -20,8\ \mathrm{MPa}\,,$$

a od momenta savijanja linearno raspodijeljena po visini presjeka s najvećim vrijednostima na gornjem i donjem rubu (u točkama A i B):

$$\sigma_\mathrm{S,A} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z_A = \frac{-12\cdot 10^6}{2,7924\cdot 10^6}\cdot(-48) = 206,3\ \mathrm{MPa}\,,$$

$$\sigma_\mathrm{S,B} = \frac{M_y}{I_y}\cdot z_B = \frac{-12\cdot 10^6}{2,7924\cdot 10^6}\cdot 48 = -206,3\ \mathrm{MPa}\,.$$



Slika 11.3. *Primjer 11.1. Raspodjela normalnih naprezanja po visini poprečnog presjeka*

Ukupna normalna naprezanja u točkama A i B dobiju se algebarskim zbrajanjem naprezanja nastalih od uzdužne sile i onih od momenta savijanja (slika 11.3):

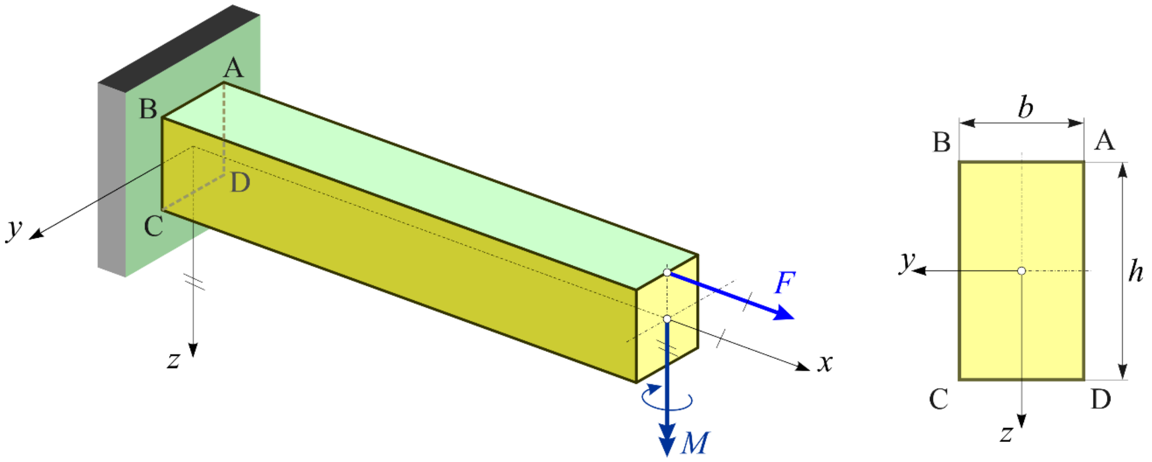
$$\sigma_A = \sigma_N + \sigma_{S,A} = -20,8 + 206,3 = 185,5 \text{ MPa},$$

$$\sigma_B = \sigma_N + \sigma_{S,B} = -20,8 - 206,3 = -227,1 \text{ MPa}.$$

Primjer 11.2.

Štap pravokutnoga poprečnog presjeka opterećen je na slobodnom kraju silom iznosa F i spregom momenta M (slika 11.4.). Potrebno je izračunati ukupno normalno naprezanje u točkama A, B, C i D poprečnog presjeka na mjestu uklještenja te skicirati raspodjelu normalnih naprezanja po poprečnom presjeku na tom mjestu.

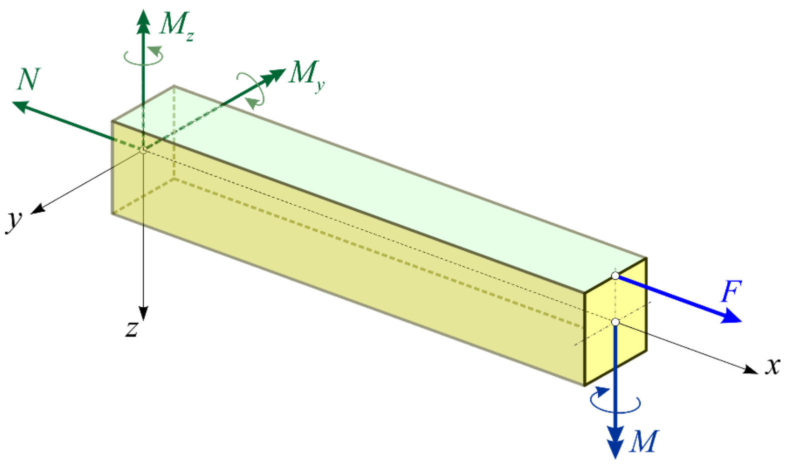
Zadano je: $F = 60 \text{ kN}$, $M = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $b = 50 \text{ mm}$, $h = 90 \text{ mm}$.



Slika 11.4. *Primjer 11.2.*

***Rješenje*:**

Zadano opterećenje pored rastezanja izaziva i savijanje u vertikalnoj i horizontalnoj ravnini. Razmatranjem ravnoteže dijela štapa desno od zamišljenog presjeka (slika 11.5.) i postavljanjem uvjeta ravnoteže za taj dio mogu se odrediti unutarnje sile u poprečnom presjeku.



Slika 11.5. *Primjer 11.2.: Dio nosača desno od zamišljenog presjeka*

Uvjeti ravnoteže potrebni za određivanje unutarnjih sila glase:

$$\sum F_x = 0: \qquad -N + F = 0\,,$$

$$\sum M_y = 0: \qquad -M_y - F \cdot h/2 = 0\,,$$

$$\sum M_z = 0: \qquad -M_z + M = 0\,.$$

Unutarnje sile dobivene rješavanjem gornjih jednadžbi jesu:

$$N = F = 60 \text{ kN}\,,$$

$$M_y = -F \cdot h/2 = -60 \cdot 0{,}045 = -2{,}7 \text{ kN} \cdot \text{m}\,,$$

$$M_z = M = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}\,.$$

Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka iznose:

$$A = 4500 \text{ mm}^2\,, \quad I_y = 3{,}0375 \cdot 10^6 \text{ mm}^4\,, \quad I_z = 0{,}9375 \cdot 10^6 \text{ mm}^4\,.$$

Uzdužna sila izaziva normalna naprezanja jednoliko raspodijeljena po poprečnom presjeku tako da u svim točkama poprečnog presjeka imaju vrijednost:

$$\sigma_{\text{N,A}} = \sigma_{\text{N,B}} = \sigma_{\text{N,C}} = \sigma_{\text{N,D}} = \frac{N}{A} = \frac{60 \cdot 10^3}{4500} = 13{,}3 \text{ MPa}\,.$$

Od momenta savijanja M_y nastaje savijanje u vertikalnoj ravnini te su normalna naprezanja u karakterističnim točkama A, B, C i D poprečnog presjeka:

$$\sigma_{\text{A,B}} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\text{A}} = \frac{-2{,}7 \cdot 10^6}{3{,}0375 \cdot 10^6} \cdot (-45) = 40{,}0 \text{ MPa}\,,$$

$$\sigma_{\text{C,D}} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\text{C}} = \frac{-2{,}7 \cdot 10^6}{3{,}0375 \cdot 10^6} \cdot 45 = -40{,}0 \text{ MPa}\,.$$

Moment savijanja M_z savija štap u horizontalnoj ravnini. Nastala normalna naprezanja u točkama A, B, C i D poprečnog presjeka iznose:

$$\sigma_{\text{A,D}} = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\text{A}} = -\frac{2 \cdot 10^6}{0{,}9375 \cdot 10^6} \cdot (-25) = 53{,}3 \text{ MPa}\,,$$

$$\sigma_{\text{B,C}} = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\text{B}} = -\frac{2 \cdot 10^6}{0{,}9375 \cdot 10^6} \cdot 25 = -53{,}3 \text{ MPa}\,.$$

Ukupna normalna naprezanja u karakterističnim točkama jesu:

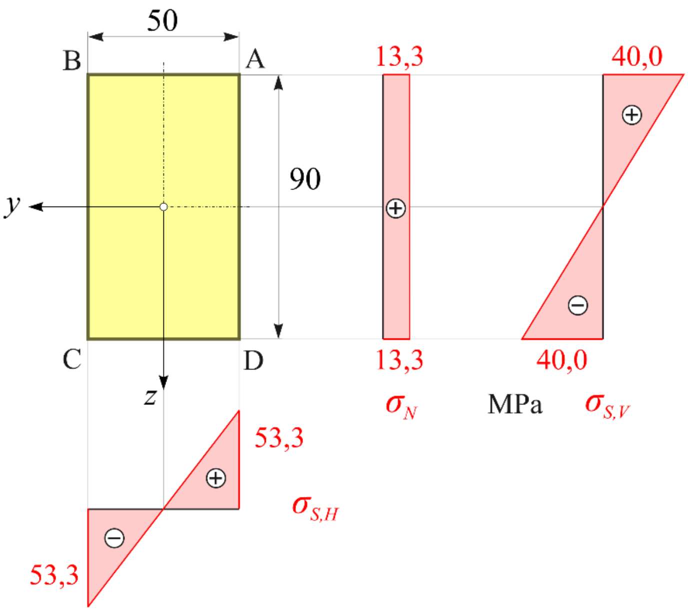
$$\sigma_{\text{A}} = 13{,}3 + 40{,}0 + 53{,}3 = 106{,}6 \text{ MPa}\,,$$

$$\sigma_{\text{B}} = 13{,}3 + 40{,}0 - 53{,}3 = 0 \text{ MPa}\,,$$

$$\sigma_{\text{C}} = 13{,}3 - 40{,}0 - 53{,}3 = -80{,}0 \text{ MPa}\,,$$

$$\sigma_{\text{D}} = 13{,}3 - 40{,}0 + 53{,}3 = 26{,}6 \text{ MPa}\,.$$

Prikaz raspodjele normalnih naprezanja po poprečnom presjeku dan je na slici 11.6.

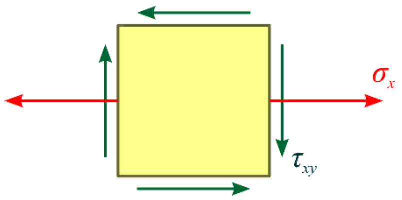


Slika 11.6. *Primjer 11.2.: Raspodjela normalnih naprezanja po visini poprečnog presjeka*

11.2. AKSIJALNO OPTEREĆENJE I UVIJANJE

Pri ovoj kombinaciji složenog opterećenja u poprečnom presjeku štapa od unutarnjih sila samo su uzdužna sila i moment uvijanja različiti od nule. Od uzdužne sile javljaju se normalna naprezanja jednoliko raspodijeljena po poprečnom presjeku, a od momenta uvijanja posmična naprezanja linearno raspodijeljena po poprečnom presjeku s najvećom vrijednosti u rubnim točkama okruglog poprečnog presjeka.

Normalno naprezanje dobije se prema $\sigma = N/A$, a najveće posmično naprezanje prema $\tau = M_t/W_p$, pa se za bilo koju točku na rubu poprečnog presjeka stanje naprezanja može prikazati orijentiranim elementom prikazanim na slici 11.7.



Slika 11.7. *Orijentirani element bilo koje točke ruba poprečnog presjeka*

Za prikazani element glavna naprezanja jesu:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - 0}{2}\right)^2 + \left(-\tau_{xy}\right)^2} \,.$$

Ako se, radi jednostavnijeg pisanja, uzme $\sigma_x = \sigma$ i $\tau_{xy} = \tau$, izrazi za glavna naprezanja nakon sređivanja postaju:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \,,$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \ .$$

Budući da su glavna naprezanja suprotnog predznaka, nakon renumeracije, kako je to pokazano u desetom poglavlju, ona glase:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\ , \qquad \sigma_2 = 0\, , \qquad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}\ .$$

Uvrštavanjem izraza za glavna naprezanja u izraze (10.2) i (10.3) mogu se dobiti izrazi za izračunavanje ekvivalentnih naprezanja kako slijedi:

- prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \tag{11.1}$$

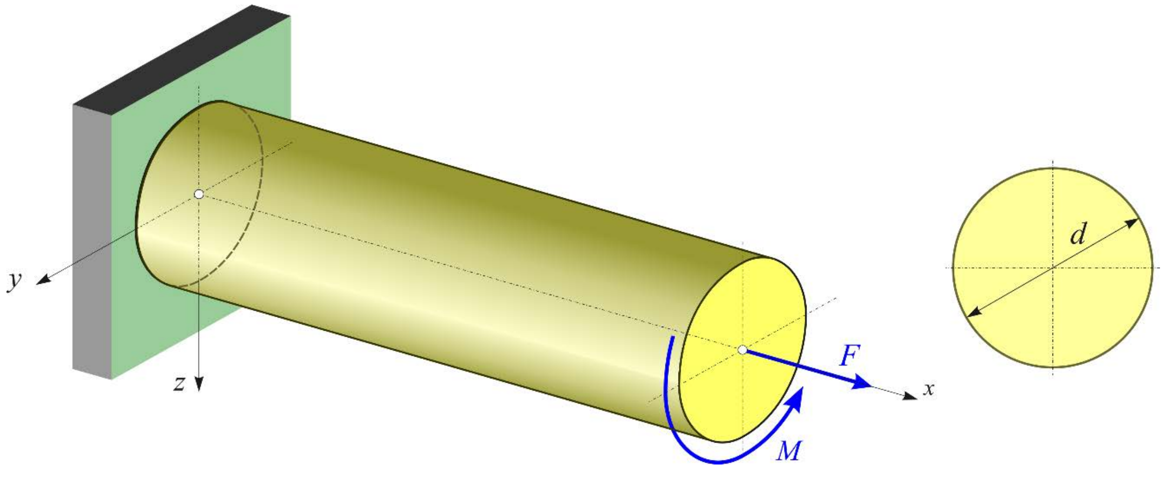
- prema teoriji najveće distorzijske energije (HMH teoriji)

$$\sigma_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sigma_1 - \sigma_2 \right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3 \right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1 \right)^2 \right]} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}\ . \tag{11.2}$$

Primjer 11.3.

Zadan je štap kružnoga poprečnog presjeka koji je na slobodnom kraju opterećen aksijalnom silom iznosa F i spregom momenta M (slika 11.8.). Potrebno je izračunati ekvivalentno naprezanje u proizvoljnoj točki na obodu štapa prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja i prema HMH teoriji.

Zadano je: $F = 50\ \mathrm{kN}$, $M = 5\ \mathrm{kN \cdot m}$, $d = 80\ \mathrm{mm}$.



Slika 11.8. *Primjer 11.3.*

***Rješenje*:**

Unutarnje sile u proizvoljnom poprečnom presjeku određene su razmatranjem ravnoteže dijela štapa desno od zamišljenog presjeka (slika 11.9.).

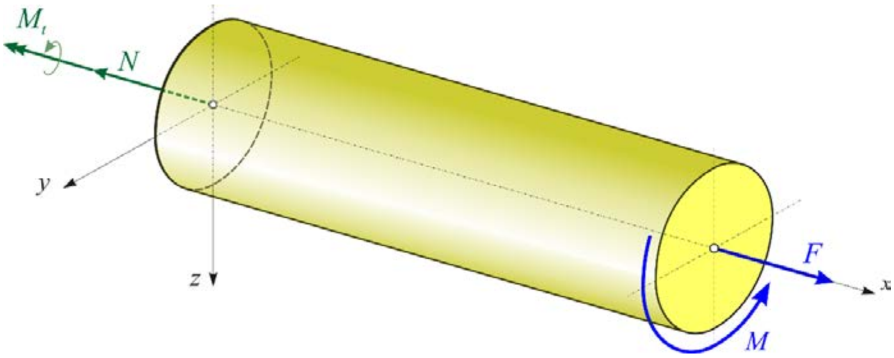
Uvjeti ravnoteže glase:

$$\sum F_x = 0: \qquad -N + F = 0\, ,$$

$$\sum M_x = 0: \qquad -M_t + M = 0\, ,$$

odakle su unutarnje sile:

$$N = F = 50\ \text{kN}, \qquad M_t = M = 5\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$



Slika 11.9. *Primjer 11.3.: Unutarnje sile u presjeku štapa*

Površina i polarni moment otpora zadanog presjeka jesu:

$$A = \frac{d^2\cdot\pi}{4} = \frac{80^2\cdot\pi}{4} = 5027\ \text{mm}^2, \quad W_p = \frac{d^3\cdot\pi}{16} = \frac{80^3\cdot\pi}{16} = 0{,}101\cdot 10^6\ \text{mm}^3.$$

Normalno naprezanje u bilo kojoj točki poprečnog presjeka, pa tako i u točkama na rubu, iznosi:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{50\cdot 10^3}{5027} = 9{,}95\ \text{MPa},$$

dok je najveće posmično naprezanje u rubnim točkama iznosa:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{5\cdot 10^6}{0{,}101\cdot 10^6} = 49{,}5\ \text{MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja prema (11.1) jest:

$$\sigma_\text{e} = \sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2} = \sqrt{9{,}95^2 + 4\cdot 49{,}5^2} = 99{,}5\ \text{MPa},$$

a prema HMH teoriji (11.2) iznosi:

$$\sigma_\text{e} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\tau^2} = \sqrt{9{,}95^2 + 3\cdot 49{,}5^2} = 86{,}3\ \text{MPa}.$$

11.3. UVIJANJE I SAVIJANJE

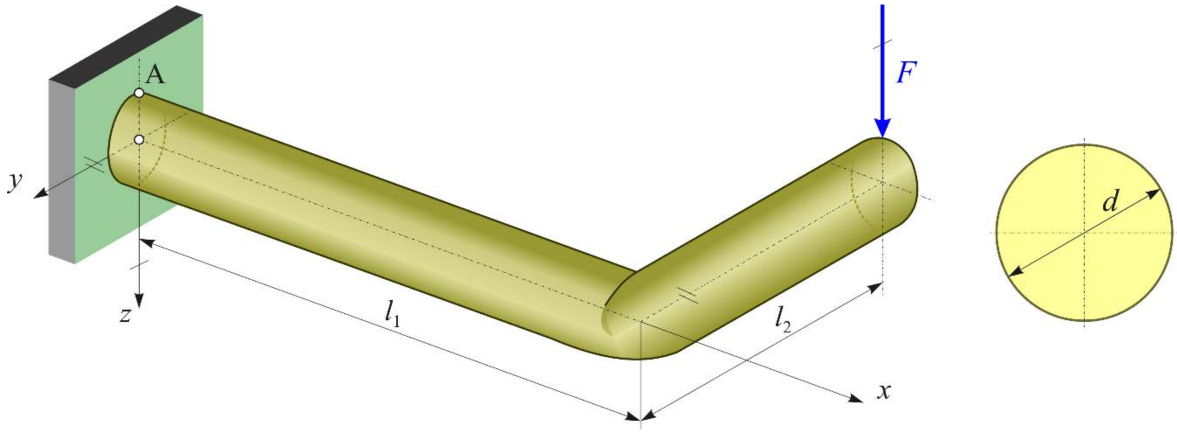
Ova kombinacija složenog opterećenja nastaje kada se u poprečnom presjeku štapa od unutarnjih sila javljaju samo momenti savijanja i moment uvijanja. Od momenta savijanja javlja se normalno naprezanje, a zbog momenta uvijanja pojavljuje se posmično naprezanje. Oba ova naprezanja raspodijeljena su linearno po poprečnom presjeku i imaju najveću vrijednost na obodu okruglog presjeka. Najveće normalno naprezanje računa se prema izrazu $\sigma_{\max} = M_s/W_y$, a najveće posmično naprezanje prema izrazu $\tau_{\max} = M_t/W_p$, gdje je M_s ukupni moment savijanja dobiven prema izrazu:

$$M_s = \sqrt{\left(M_y\right)^2 + \left(M_z\right)^2}. \tag{11.3}$$

Primjer 11.4.

Štap kružnoga poprečnog presjeka opterećen je na slobodnom kraju silom iznosa F (slika 11.10.). Potrebno je dimenzionirati štap prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja i prema HMH teoriji. Promjer d izraziti kao cjelobrojnu vrijednost u milimetrima.

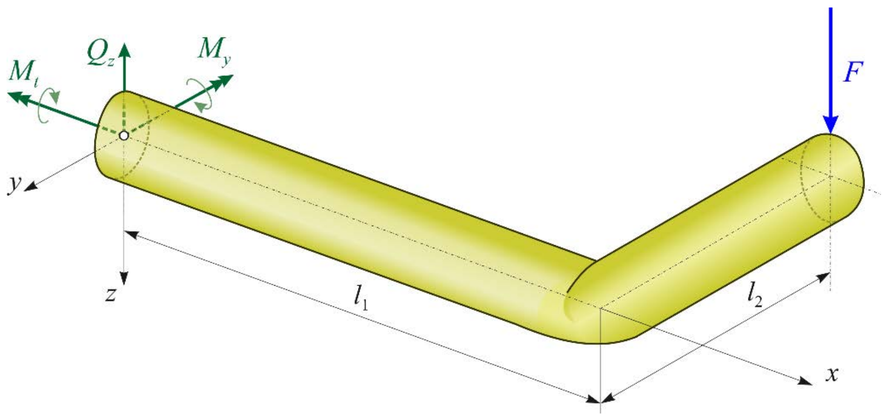
Zadano je: $l_1 = 1,8\ \text{m}$, $l_2 = 1,2\ \text{m}$, $F = 15\ \text{kN}$, $\sigma_\text{d} = 180\ \text{MPa}$.



Slika 11.10. *Primjer 11.4.*

***Rješenje*:**

Unutarnje sile u proizvoljnom poprečnom presjeku određene su metodom presjeka. Razmatra se ravnoteža odsječenog dijela štapa desno od zamišljenog presjeka (slika 11.11.).



Slika 11.11. *Primjer 11.4.: Unutarnje sile u presjeku štapa*

Uvjeti ravnoteže potrebni za određivanje unutarnjih sila različitih od nule jesu:

$$\sum F_z = 0: \qquad -Q_z + F = 0,$$

$$\sum M_x = 0: \qquad -M_t - F \cdot l_2 = 0,$$

$$\sum M_y = 0: \qquad -M_y - F \cdot l_1 = 0.$$

Unutarnje sile sljedećih su iznosa:

$$Q_z = -F = -15\ \text{kN},$$

$$M_t = -F \cdot l_2 = -15 \cdot 1,2 = -18, \qquad M_y = -F \cdot l_1 = -15 \cdot 1,8 = -27\ \text{kN} \cdot \text{m}.$$

Posmično naprezanje uzrokovano poprečnom silom puno je manje od onog nastaloga od momenta uvijanja. S druge strane, ono je u rubnim točkama okruglog presjeka jednako nuli, tako da se ovaj primjer može shvatiti kao kombinacija samo savijanja i uvijanja.

Odgovarajući orijentirani element u točki A razmatranog štapa na mjestu uklještenja je prema slici 11.7.

Dimenzioniranje se provodi prema uvjetu čvrstoće, tj. mora biti $\sigma_\mathrm{e} \le \sigma_\mathrm{d}$.

Prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja (11.1) jest:

$$\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{\sigma^2 + 4\cdot\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} \,.$$

Kako je za kružni poprečni presjek $W_p = 2\cdot W_y$, gornji izraz nakon sređivanja može se pisati u obliku:

$$\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{\left(M_y\right)^2 + \left(M_t\right)^2}{\left(W_y\right)^2}} = \frac{M_\mathrm{e}}{W_y} \,,$$

gdje je ekvivalentni moment savijanja:

$$M_\mathrm{e} = \sqrt{\left(M_y\right)^2 + \left(M_t\right)^2} \,. \tag{11.4}$$

Prema HMH teoriji (11.2) jest:

$$\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{\sigma^2 + 3\cdot\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} \,,$$

$$\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{\left(M_y\right)^2 + 0,75\cdot\left(M_t\right)^2}{\left(W_y\right)^2}} = \frac{M_\mathrm{e}}{W_y} \,,$$

gdje je ekvivalentni moment savijanja:

$$M_\mathrm{e} = \sqrt{\left(M_y\right)^2 + 0,75\cdot\left(M_t\right)^2} \,. \tag{11.5}$$

Za zadane vrijednosti po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja ekvivalentni moment je (11.4):

$$M_\mathrm{e} = \sqrt{\left(-27\right)^2 + \left(-18\right)^2} = 32,45 \text{ kN}\cdot\text{m} \,,$$

pa se traženi promjer dobije prema izrazu:

$$\sigma_\mathrm{e} = \frac{M_\mathrm{e}}{W_y} = \frac{M_\mathrm{e}}{\dfrac{\pi\cdot d^3}{32}} \le \sigma_\mathrm{d} \,, \quad d \ge \sqrt[3]{\frac{32\cdot M_\mathrm{e}}{\pi\cdot\sigma_\mathrm{d}}} \,,$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32\cdot 32,45\cdot 10^6}{\pi\cdot 180}} = 122,5 \text{ mm} \,, \quad d = 123 \text{ mm} \,.$$

Ekvivalentni moment po HMH teoriji za zadane vrijednosti iznosi (11.5):

$$M_e = \sqrt{(-27)^2 + 0,75 \cdot (-18)^2} = 31,18\ \text{kN} \cdot \text{m}\,.$$

Traženi promjer jest:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_e}{\pi \cdot \sigma_d}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 31,18 \cdot 10^6}{\pi \cdot 180}} = 120,8\ \text{mm}\,, \quad d = 121\ \text{mm}\,.$$

11.4. AKSIJALNO OPTEREĆENJE; SAVIJANJE I UVIJANJE

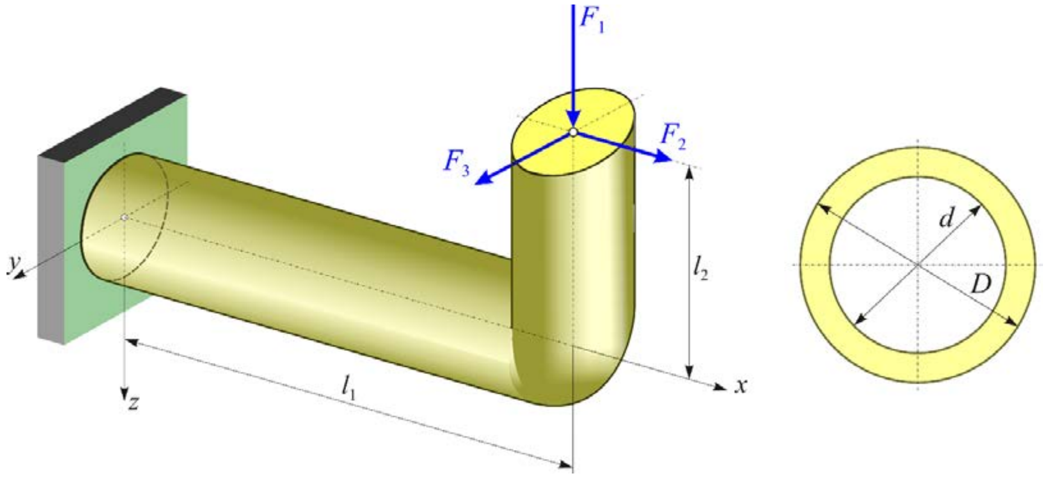
Razlika ovog slučaja u odnosu na prethodni jest u tome što će se u poprečnom presjeku javiti i uzdužna sila pa će normalnom naprezanju od savijanja trebati pridodati normalno naprezanje od uzdužne sile, tj. najveće normalno naprezanje računa se prema izrazu:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_s}{W_y}\,.$$

Primjer 11.5.

Zakrivljeni štap okruglog presjeka oblika kružnog vijenca opterećen je trima silama na slobodnom kraju. Sile su poznatih intenziteta F_1, F_2 i F_3 (slika 11.12.). Valja provjeriti čvrstoću zakrivljenog štapa prema HMH teoriji.

Zadano je: $l_1 = 1,6\ \text{m}$, $l_2 = 0,9\ \text{m}$, $D = 120\ \text{mm}$, $d = 80\ \text{mm}$, $F_1 = 12\ \text{kN}$, $F_2 = 10\ \text{kN}$, $F_3 = 18\ \text{kN}$, $\sigma_d = 200\ \text{MPa}$.

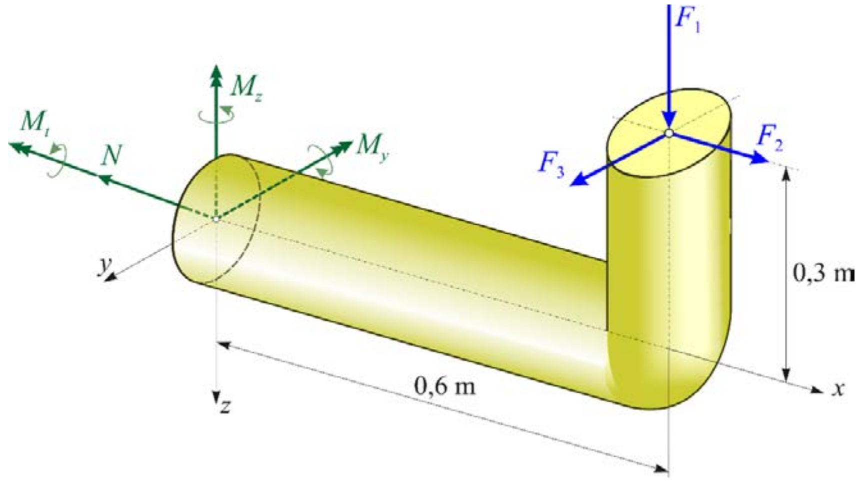


Slika 11.12. *Primjer 11.5.*

***Rješenje*:**

Unutarnje sile u proizvoljnom poprečnom presjeku određene su metodom presjeka. Utjecaj poprečnih sila Q_y i Q_z, kako je već prije spomenuto, može se zanemariti.

Stoga se pišu samo oni uvjeti ravnoteže za odsječeni dio zakrivljenog štapa desno od presjeka (slika 11.13.) iz kojih se mogu dobiti uzdužna sila, moment uvijanja i momenti savijanja:



Slika 11.13. *Primjer 11.5.: Unutarnje sile u presjeku štapa*

$$\sum F_x = 0: \qquad -N + F_2 = 0\,,$$

$$\sum M_x = 0: \qquad -M_t + F_3 \cdot l_2 = 0\,,$$

$$\sum M_y = 0: \qquad -M_y - F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 = 0\,,$$

$$\sum M_z = 0: \qquad -M_z + F_3 \cdot l_1 = 0\,,$$

odakle je

$$N = F_2 = 10\ \mathrm{kN}\,,$$

$$M_t = F_3 \cdot l_2 = 18 \cdot 0,9 = 16,2\ \mathrm{kN \cdot m}\,,$$

$$M_y = -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 = -12 \cdot 1,6 - 10 \cdot 0,9 = -28,2\ \mathrm{kN \cdot m}\,,$$

$$M_z = F_3 \cdot l_1 = 18 \cdot 1,6 = 28,8\ \mathrm{kN \cdot m}\,.$$

Ukupni moment savijanja jest:

$$M_s = \sqrt{\left(M_y\right)^2 + \left(M_z\right)^2} = \sqrt{\left(-28,2\right)^2 + 28,8^2} = 40,307\ \mathrm{kN \cdot m}\,.$$

Geometrijske karakteristike zadanoga poprečnog presjeka potrebne za izračunavanje naprezanja jesu:

$$A = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} - \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{120^2 \cdot \pi}{4} - \frac{80^2 \cdot \pi}{4} = 6283\ \mathrm{mm}^2\,,$$

$$W_y = \frac{D^3 \cdot \pi}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{120^3 \cdot \pi}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{80}{120}\right)^4\right] = 0,136 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^3,$$

$$W_p = \frac{D^3 \cdot \pi}{16} \cdot \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{120^3 \cdot \pi}{16} \cdot \left[1 - \left(\frac{80}{120}\right)^4\right] = 0,272 \cdot 10^6\ \mathrm{mm}^3.$$

Ukupno normalno naprezanje iznosi:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_s}{W_y} = \frac{10 \cdot 10^3}{6283} + \frac{40,307 \cdot 10^6}{0,136 \cdot 10^6} = 1,59 + 296,4 = 298,0 \text{ MPa},$$

dok je posmično naprezanje:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16,2 \cdot 10^6}{0,272 \cdot 10^6} = 59,6 \text{ MPa}.$$

Ekvivalentno naprezanje prema HMH teoriji iznosi:

$$\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{298,0^2 + 3 \cdot 59,6^2} = 315,4 \text{ MPa}.$$

Budući da je

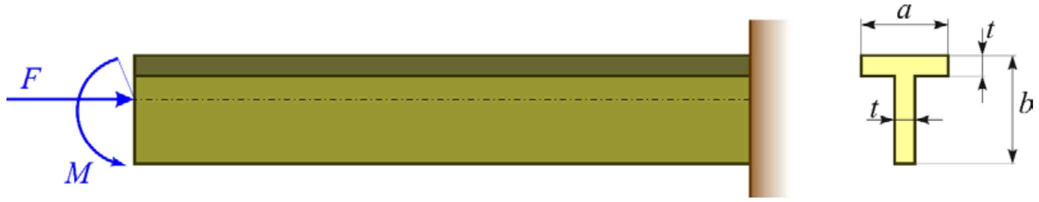
$$\sigma_\mathrm{e} = 315,4 \text{ MPa} \geq \sigma_\mathrm{d} = 200 \text{ MPa},$$

čvrstoća štapa ne zadovoljava pa bi trebalo povećati dimenzije poprečnog presjeka.

ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 11.1.

Štap zadanoga poprečnog presjeka opterećen je na slobodnom kraju koncentriranom silom iznosa F i spregom momenta M (sl. Z.11.1.). Potrebno je izračunati najveće vlačno i najveće tlačno naprezanje te skicirati raspodjelu normalnog naprezanja po visini poprečnog presjeka štapa ako je zadano: $F = 20$ kN, $M = 4$ kN·m, $a = 80$ mm, $b = 100$ mm, $t = 20$ mm.

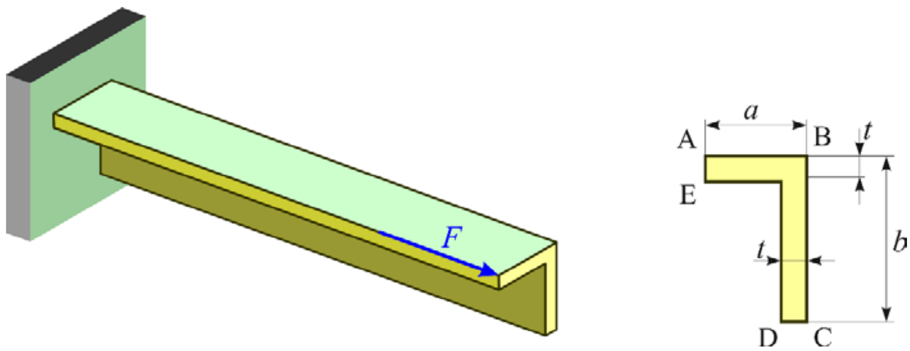


Slika Z.11.1. *Zadatak Z.11.1.*

Zadatak 11.2.

Za štap opterećen ekscentričnom aksijalnom silom iznosa F na slobodnom kraju (slika Z.11.2.) valja izračunati najveće vlačno i najveće tlačno naprezanje.

Zadano je: $F = 50$ kN, $a = 100$ mm, $b = 180$ mm, $t = 40$ mm.



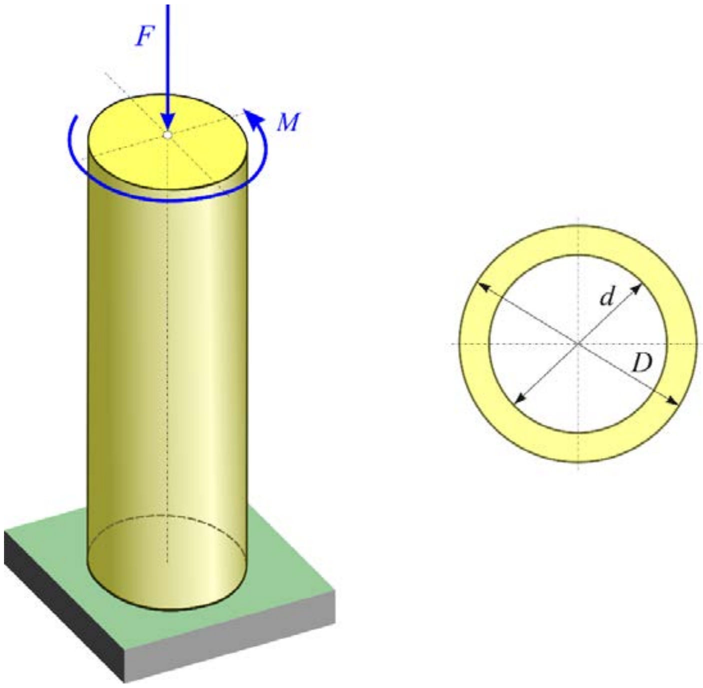
Slika Z.11.2. *Zadatak Z.11.2.*

Zadatak 11.3.

Štap poprečnog presjeka oblika kružnog vijenca opterećen je na slobodnom kraju aksijalnom silom iznosa F i spregom momenta M (slika Z.11.3.).

Valja odrediti ekvivalentno naprezanje, u proizvoljnoj točki T na obodu štapa, prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja i prema HMH teoriji.

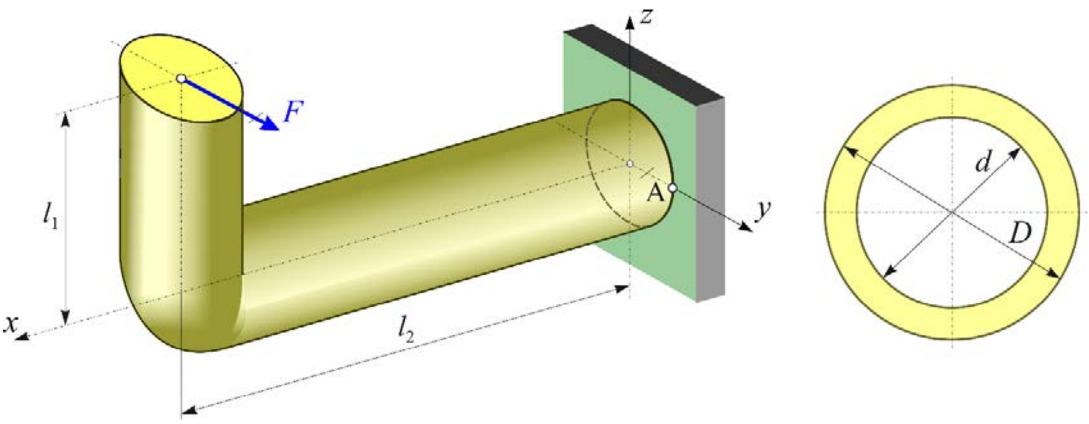
Zadano je: $F = 30\ \text{kN}$, $M = 6\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $D = 90\ \text{mm}$, $d = 60\ \text{mm}$.



Slika Z.11.3. *Zadatak Z.11.3.*

Zadatak 11.4.

Na slobodnom kraju zakrivljenog štapa poprečnog presjeka oblika kružnog vijenca djeluje sila iznosa F (slika Z.11.4.).



Slika Z.11.4. *Zadatak Z.11.4.*

Valja odrediti ekvivalentno naprezanje u A na mjestu uklještenja štapa prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja.

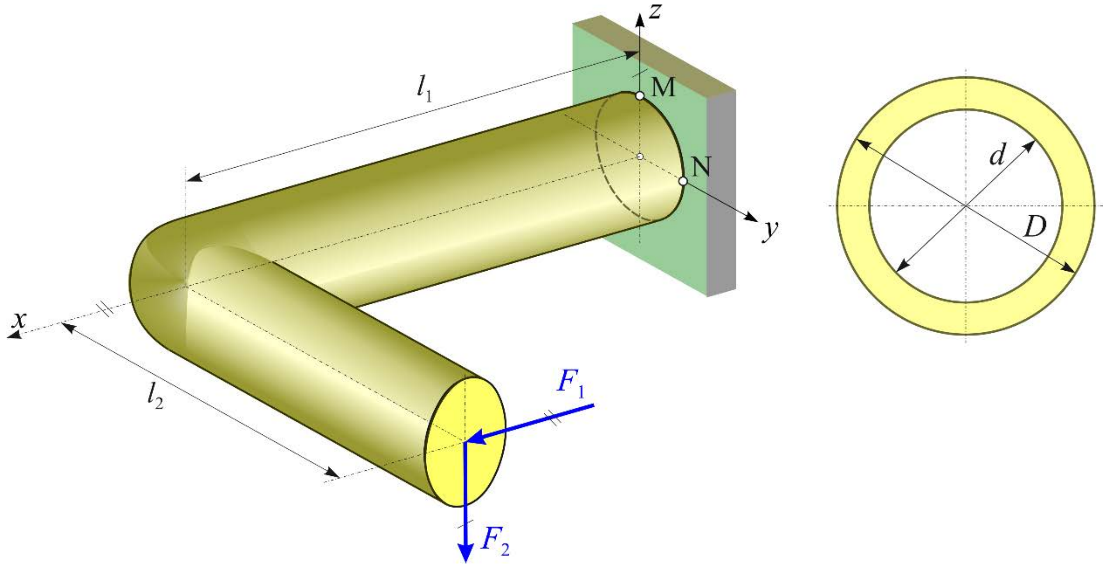
Zadano je: $l_1 = 1{,}4\ \text{m}$, $l_2 = 0{,}9\ \text{m}$, $F = 25\ \text{kN}$, $D = 120\ \text{mm}$, $d = 80\ \text{mm}$.

Zadatak 11.5.

Zakrivljeni štap okruglog presjeka u obliku kružnog vijenca opterećen je dvjema silama iznosa F_1 i F_2 na svom slobodnom kraju (slika Z.11.5.).

Valja odrediti ekvivalentno naprezanje u točkama M i N prema HMH teoriji.

Zadano je: $F_1 = 25\ \mathrm{kN}$, $F_2 = 15\ \mathrm{kN}$, $l_1 = 2,2\ \mathrm{m}$, $l_2 = 1,4\ \mathrm{m}$, $D = 130\ \mathrm{mm}$, $d = 90\ \mathrm{mm}$.

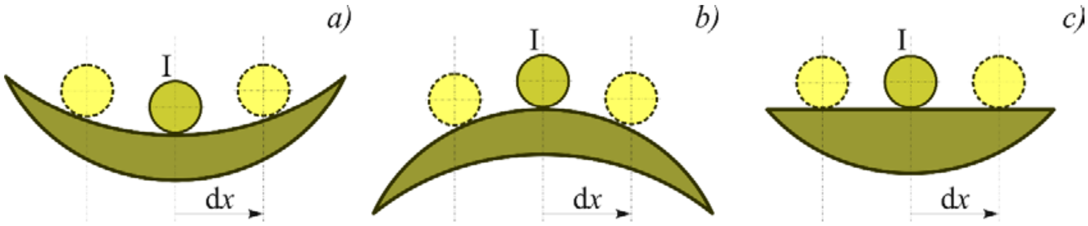


Slika Z.11.5. *Zadatak Z.11.5.*

12. IZVIJANJE

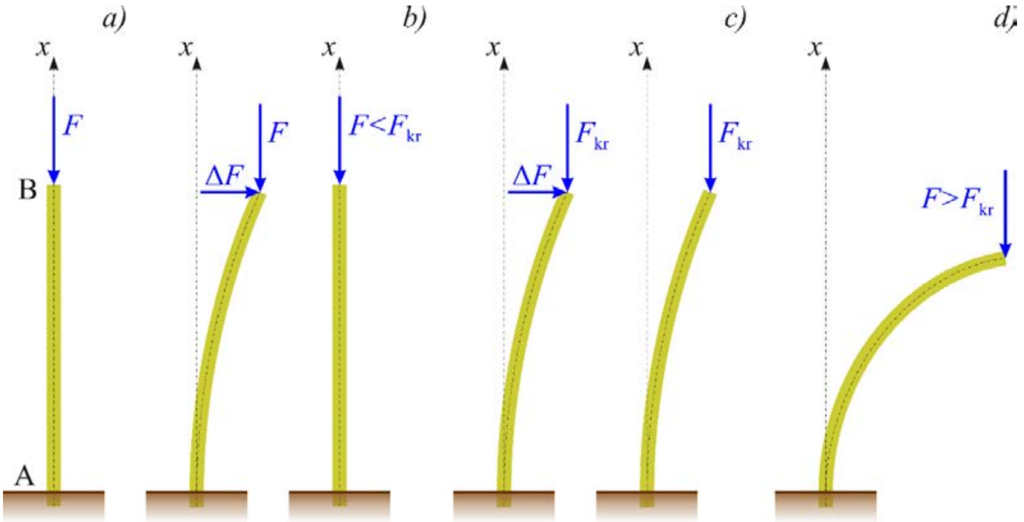
Štapovi se često javljaju kao dijelovi realnih konstrukcija. Pored uvjeta čvrstoće, važno je da imaju zadovoljavajuću krutost, ali isto tako trebaju ispuniti uvjet stabilne ravnoteže. Pojam stabilnosti ravnoteže može se razjasniti na primjeru krutog tijela. Na slici 12.1. prikazana je kuglica u početnom ravnotežnom položaju (srednji položaj) postavljena na trima različitim podlogama:

- U slučaju podloge prema slici 12.1.a nakon što se kuglica izvede iz ravnotežnog položaja pomicanjem lijevo ili desno, nakon nekog vremena vratit će se u prvotni ravnotežni položaj. Kaže se da je kuglica u *stabilnoj ravnoteži*.
- Na slici 12.1.b oblik podloge je takav da se pomicanjem kuglice ona sve više udaljava od prvotnog ravnotežnog položaja. To je slučaj *labilne ravnoteže*.
- Pri pomicanju kuglice po podlozi prikazanoj na slici 12.1.c ona ostaje u ravnoteži u bilo kojem novom položaju koji je blizak prvotnom ravnotežnom položaju. U tom slučaju radi se o *indiferentnoj ravnoteži*.



Slika 12.1. *Ravnoteža krutog tijela: a) stabilna, b) labilna, c) indiferentna*

Kad se štap promatra kao deformabilno tijelo, postoji sličan problem stabilnosti ravnoteže. Pri opterećenju štapa on se deformira dok ne poprimi ravnotežni deformirani oblik koji također može biti stabilan, labilan ili indiferentan. Na slici 12.2.a prikazan je štap na jednom kraju slobodan, a na drugom ukliješten. Štap je na slobodnom kraju opterećen aksijalnom silom iznosa F .



Slika 12.2. *Stabilna, indiferentna i labilna ravnoteža elastičnog štapa*

Neka je štap idealno ravan, izrađen od homogenog materijala i idealno centrično opterećen.

Ako na štap djeluje sada neka mala bočna sila ΔF , opet mogu nastati tri slučaja ponašanja štapa:

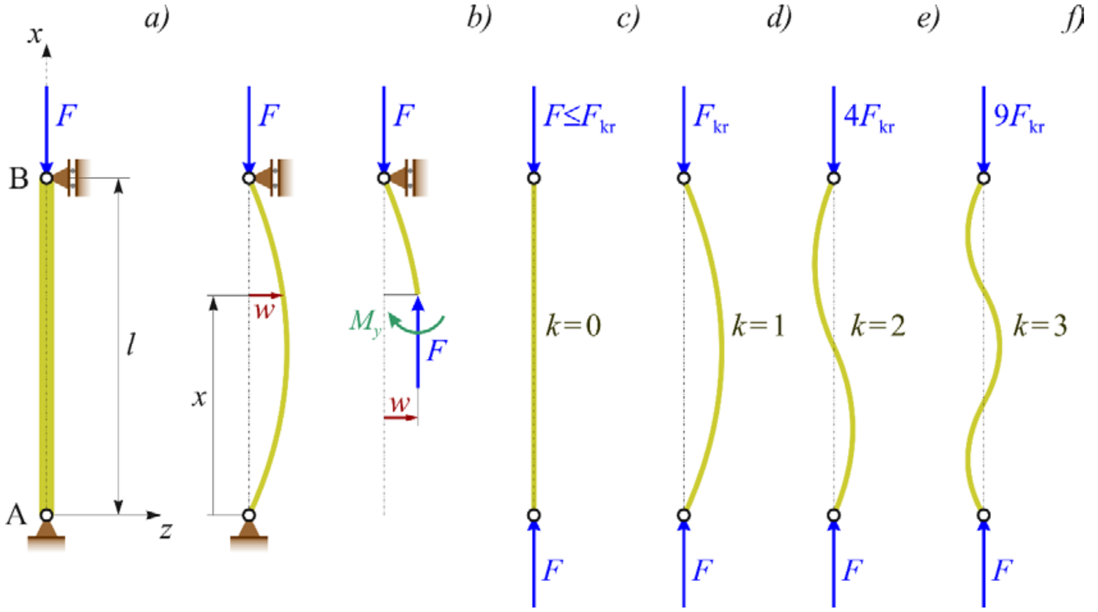
1. Štap se izvije u stranu i nakon uklanjanja bočne sile ΔF vraća se u početni ravni položaj. Kaže se da je štap u *stabilnoj elastičnoj ravnoteži* (slika 12.2.b). Ovaj slučaj se javlja pri malim vrijednostima iznosa sile F .
2. Štap se izvija u stranu i nakon uklanjanja bočne sile zadržava izvijeni oblik. Taj slučaj nastupa pri tzv. *kritičnoj sili* F_{kr} i naziva se indiferentna elastična ravnoteža (slika 12.2.c).
3. Pri najmanjoj bočnoj sili dolazi do jakog izvijanja štapa u stranu (slika 12.2.d) pri čemu može doći do loma štapa. To nastupa kada je $F > F_{\mathrm{kr}}$ i štap je u *labilnoj elastičnoj* ravnoteži.

U realnim konstrukcijama štap nikada nije idealno ravan i homogen niti je idealno centrično opterećen. Pojava nehomogenog materijala ili najmanje odstupanje sile od idealno centričnog djelovanja izaziva isti učinak na štap kao i mala bočna sila ΔF . Može se reći da do izvijanja dolazi uvijek kada tlačna sila F prijeđe kritičnu vrijednost F_{kr} .

Zadatak je ovog poglavlja određivanje kritične sile F odnosno kritičnog naprezanja σ_{kr} za razne oblike i dimenzije štapova izrađenih od različitih materijala.

12.1. IZVIJANJE ŠTAPA U ELASTIČNOM PODRUČJU, EULEROVA KRITIČNA SILA

Na slici 12.3.a prikazan je štap na obama krajevima vezan s pomoću zglobnih oslonaca i centrično opterećen silom F . Štap ostaje ravan sve dok je sila F manja od kritične sile izvijanja F_{kr} , tj. dok vrijedi $F < F_{\mathrm{kr}}$. Kad sila dostigne kritičnu vrijednost, počinje bočno izvijanje, a uzdužna os štapa prelazi u elastičnu liniju $w = w(x)$ (slika 12.3.b).



Slika 12.3. *Osnovna forma i više forme izvijanja štapa*

U tom slučaju javlja se u proizvoljnom presjeku moment savijanja $M_y = F \cdot w$. Diferencijalna jednadžba elastične linije glasi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_y}{E \cdot I_y} = -\frac{F}{E \cdot I_y} w ,$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \alpha^2 \cdot w = 0 , \tag{12.1}$$

gdje je

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I_y} . \tag{12.2}$$

Jednadžba (12.1) homogena je diferencijalna jednadžba drugog reda i njeno opće rješenje glasi:

$$w = C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x . \tag{12.3}$$

Konstante integracije C_1 i C_2 mogu se odrediti iz rubnih uvjeta:

$$w(0) = 0 \text{ i } w(l) = 0 .$$

Iz prvog rubnog uvjeta dobije se $C_2 = 0$, a iz drugog:

$$0 = C_1 \cdot \sin \alpha l . \tag{12.4}$$

Taj izraz jednak je nuli ako je $C_1 = 0$, što dovodi do trivijalnog rješenja $w = w(x) = 0$ gdje bi elastična linija bila pravac. To pokazuje da je ravan oblik štapa jedan od mogućih ravnotežnih oblika. Druga mogućnost da izraz (12.4) bude jednak nuli jest da vrijedi:

$$\sin(\alpha \cdot l) = 0 ,$$

odnosno

$$\alpha l = k \cdot \pi , \quad k = 0,1,2,3..... \tag{12.5}$$

Ako se izraz (12.2) uvrsti u (12.5), dobije se:

$$l \cdot \sqrt{\frac{F}{E \cdot I_y}} = k \cdot \pi .$$

Iz gornjeg izraza može se dobiti vrijednost sile pri kojoj nastupa izvijanje:

$$F = k^2 \cdot \frac{E \cdot I_y}{l^2} \cdot \pi^2 . \tag{12.6}$$

Jednadžba elastične linije u tom slučaju glasi:

$$w = C_1 \cdot \sin \alpha x = C_1 \cdot \sin \frac{k \cdot \pi}{l} x . \tag{12.7}$$

Elastična linija može imati više oblika ovisno o tome koje vrijednosti ima k. Svakom obliku elastične linije odgovara druga sila izvijanja. Za $k = 0$ prema (12.6) $F = 0$ odnosno prema

(12.7) može se vidjeti da je elastična linija pravac (slika 12.3.c). Ako je $k = 1$, elastična linija ima oblik sinusnog poluvala, kako je prikazano na slici 12.3.d. Sila izvijanja ima u tom slučaju najmanju vrijednost, tj. ona je kritična sila pri kojoj nastaje izvijanje:

$$F_{\mathrm{kr}} = \frac{E \cdot I_y}{l^2} \cdot \pi^2 . \tag{12.8}$$

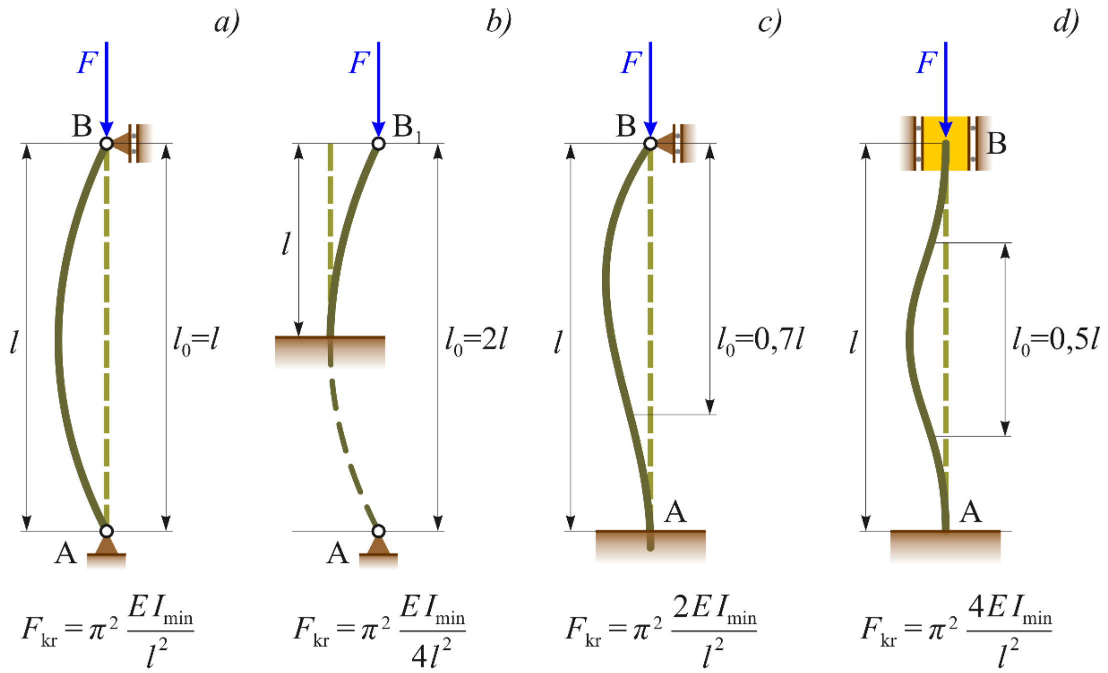
Izraz za kritičnu silu izveo je 1757. godine L. Euler, pa se ova sila naziva Eulerova kritična sila izvijanja.

Kada je $k = 2$, elastična linija ima oblik pune sinusoide (slika 12.3.e), dok je sila izvijanja četiri puta veća od kritične sile izvijanja. Forma izvijanja za $k = 3$ dana je na slici 12.3.f pri čemu je sila izvijanja devet puta veća od kritične pri osnovnoj formi izvijanja. Više forme izvijanja mogu se ostvariti u laboratorijskim uvjetima; u praksi izvijanje se vrši uvijek po prvoj formi čim sila F premaši kritičnu vrijednost F_{kr}.

Dakle, izrazom (12.8) određena je sila pri kojoj započinje izvijanje, koje nastaje oko one osi poprečnog presjeka štapa za koju je krutost štapa najmanja. U izrazu (12.8) za aksijalni moment tromosti treba uzeti glavni moment tromosti $I_{\min} = I_2$, pa izraz (12.8) postaje:

$$F_{\mathrm{kr}} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_{\min}}{l_o^2} , \tag{12.9}$$

gdje l_o predstavlja duljinu izvijanja štapa koja ovisi o rubnim uvjetima.



Slika 12.4. *Duljine izvijanja za različite slučajeve vezivanja štapa: a) dvije zglobne veze, b) uklještenje na jednom kraju, c) uklještenje i zglobna veza, d) uklještenje na oba kraja*

Izraz (12.9) može se rabiti za različite slučajeve vezivanja štapa na krajevima (slika 12.4.) uz vrijednost duljine izvijanja l_o prema duljini štapa l kako slijedi:

- $l_o = l$ za štap zglobno vezan na krajevima (slika 12.4.a);

- $l_o = 2l$ za štap na jednom kraju ukliješten, a na drugom slobodan (slika 12.4.b);
- $l_o = 0,7l$ za štap na jednom kraju ukliješten, a na drugom zglobno vezan (slika 12.4.c);
- $l_o = 0,5l$ za slučaj vezivanja štapa prema slici 12.4.d.

Dijeljenjem izraza (12.9) s površinom poprečnog presjeka dobije se:

$$\frac{F_{\mathrm{kr}}}{A} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I_{\min}/A}{l_{\mathrm{o}}^2}.$$

Uvođenjem pojma kritično naprezanje $\sigma_{\mathrm{kr}} = F_{\mathrm{kr}}/A$ te uz $I_{\min}/A = i_{\min}^2$ gornji izraz postaje:

$$\sigma_{\mathrm{kr}} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot i_{\min}^2}{l_{\mathrm{o}}^2} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\left(l_{\mathrm{o}}/i_{\min}\right)^2},$$

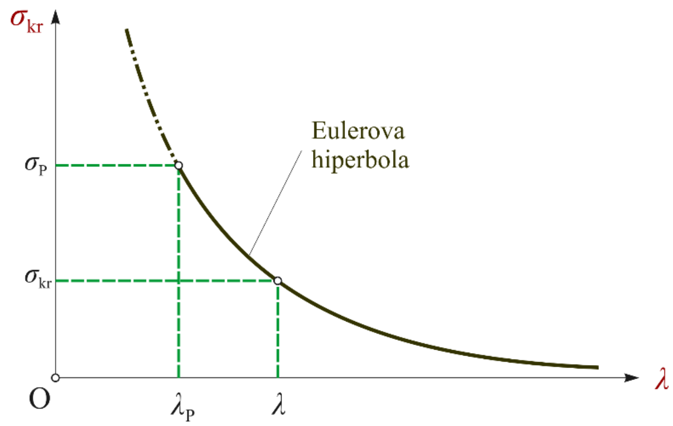
odnosno

$$\sigma_{\mathrm{kr}} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2}, \qquad (12.10)$$

gdje je

$$\lambda = \frac{l_{\mathrm{o}}}{i_{\min}} \qquad (12.11)$$

nedimenzionalna karakteristika štapa i naziva se *vitkost štapa*. Izraz (12.10) prikazan je grafički na slici 12.5. i ima oblik hiperbole. Što je štap vitkiji, to ga manje kritično naprezanje dovodi do izvijanja.



Slika 12.5. *Ovisnost kritičnog naprezanja o vitkosti štapa*

Izraz (12.10) vrijedi pod pretpostavkom da je modul elastičnosti E konstantan, tj. ako je $\sigma_{\mathrm{kr}} < \sigma_p$. Granična vitkost λ_{p} dobije se uvrštavanjem u izraz (12.10) $\sigma_{\mathrm{kr}} = \sigma_p$ i $\lambda = \lambda_{\mathrm{p}}$:

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\mathrm{p}}}}. \qquad (12.12)$$

Dakle, kritično naprezanje računa se po Eulerovu izrazu (12.10) samo ako je $\lambda > \lambda_{\mathrm{p}}$.

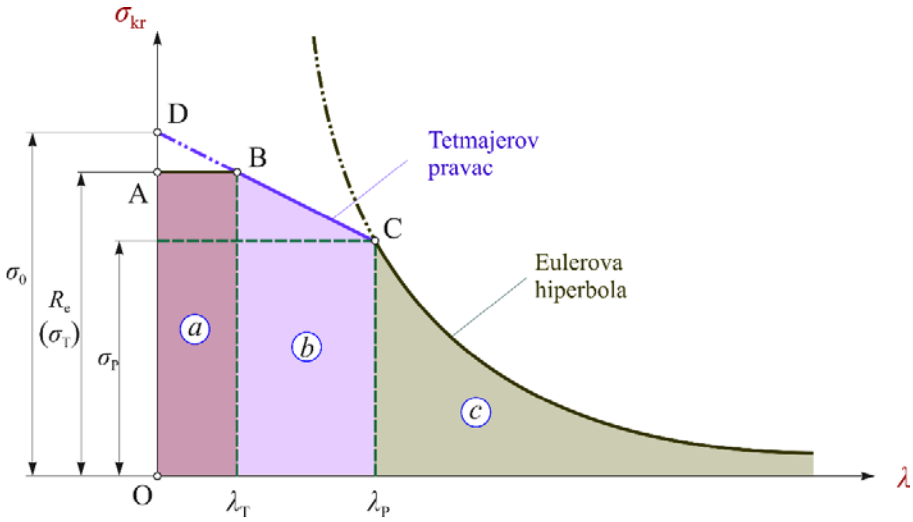
Iz izraza (12.12) vidljivo je da granična vitkost λ_{p} ovisi samo o materijalu od kojeg je štap izrađen.

12.2. IZVIJANJE ŠTAPA U PLASTIČNOM PODRUČJU

Za slučaj da je $\lambda_T < \lambda < \lambda_p$ kritično naprezanje računat će se prema izrazu koji je predložio Tetmajer:

$$\sigma_{kr} = \sigma_o - \left(\sigma_o - \sigma_p\right) \cdot \frac{\lambda}{\lambda_p}, \tag{12.13}$$

gdje je σ_p granica proporcionalnosti, a σ_o neko karakteristično naprezanje koje se dobiva kada se eksperimentalne podatke o izvijanju aproksimira pravcem (slika 12.6.).



Slika 12.6. *Ovisnost kritičnog naprezanja o vitkosti štapa u elastičnom i plastičnom području*

Smanjenjem vitkosti štapa raste kritično naprezanje i pri vitkosti označenoj s λ_T dostiže granicu tečenja R_e (stara oznaka σ_T). Pri vitkosti $\lambda < \lambda_T$ prije će doći do gnječenja (tečenja) štapa nego do izvijanja, pa primjena izraza (12.13) nema opravdanja. Može se lako izračunati da je

$$\lambda_T = \lambda_p \cdot \frac{\sigma_o - \sigma_T}{\sigma_o - \sigma_p}. \tag{12.14}$$

Na slici 12.6. prikazana su tri područja ovisno o vitkosti štapa:

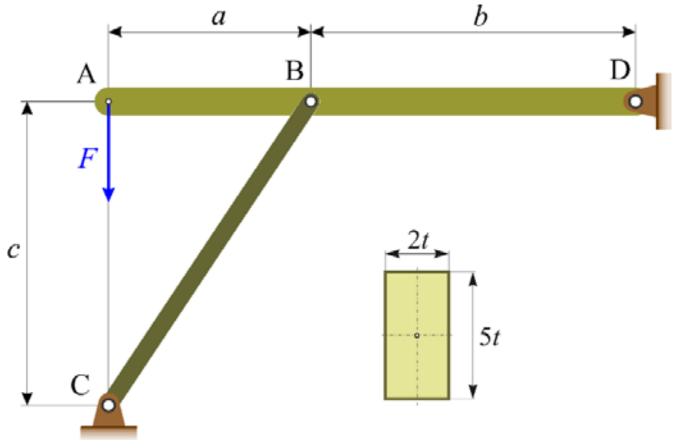
- Kratki štapovi za vitkost $\lambda < \lambda_T$ kada se štapovi proračunavaju na tlačnu čvrstoću i izvijanje se ne uzima u obzir.
- Srednje dugi štapovi za vitkost $\lambda_T < \lambda < \lambda_p$ kada se štapovi proračunavaju na izvijanje prema (12.13) ili prema nekom drugom empirijskom izrazu.
- Vitki štapovi za vitkost $\lambda > \lambda_p$ kada se štapovi proračunavaju na izvijanje prema Eulerovu izrazu (12.10).

Primjer 12.1.

Konstrukcija sastavljena od krute grede ABD i deformabilnog štapa opterećena je u A koncentriranom silom iznosa F (slika 12.7.).

Potrebno je provjeriti stabilnost štapa BC zadanoga pravokutnog poprečnog presjeka.

Zadano je: $a = 1,2\ \text{m}$, $b = 1,8\ \text{m}$, $c = 2,2\ \text{m}$, $t = 20\ \text{mm}$, $F = 12\ \text{kN}$, $E = 200\ \text{GPa}$, $\sigma_\text{p} = 180\ \text{MPa}$.



Slika 12.7. *Primjer 12.1.*

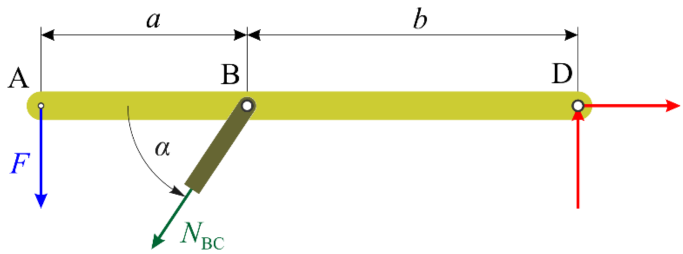
***Rješenje*:**

Oslobađanjem grede od veza i zamjenom veza odgovarajućim reakcijama veza (slika 12.8.) može se napisati uvjet ravnoteže za gredu AD:

$$\sum M_\text{D} = 0: \qquad F\cdot(a+b) + N_\text{BC}\cdot\sin\alpha\cdot b = 0,$$

gdje je kut α dobiven prema izrazu:

$$\tan\alpha = c/a = 2,2/1,2 = 1,83333, \qquad \alpha = 61,39^\circ.$$



Slika 12.8. *Primjer 12.1.: Kruta greda ABD oslobođena od veza*

Tlačna sila u štapu BC dobivena iz uvjeta ravnoteže iznosi:

$$N_\text{BC} = -\frac{F\cdot(a+b)}{b\cdot\sin\alpha} = -\frac{12\cdot(1,2+1,8)}{1,8\cdot\sin 61,39^\circ} = -22,782\ \text{kN}.$$

Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka štapa jesu:

$$A = 2t\cdot 5t = 10\cdot t^2 = 10\cdot 20^2 = 4000\ \text{mm}^2,$$

$$I_\text{min} = I_z = \frac{5t\cdot(2t)^3}{12} = \frac{100\cdot 40^3}{12} = 533333\ \text{mm}^4,$$

$$i_\text{min} = \sqrt{\frac{I_\text{min}}{A}} = \sqrt{\frac{533333}{4000}} = 11,55\ \text{mm}.$$

Štap je zglobno vezan na svojim krajevima, pa je duljina izvijanja jednaka duljini štapa:

$$l_o = l = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{1,2^2 + 2,2^2} = 2,506 \text{ m}.$$

Vitkost štapa iznosi:

$$\lambda = \frac{l_o}{i_{min}} = \frac{2506}{11,55} = 217,0,$$

a granična vitkost je

$$\lambda_p = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3.$$

Budući da je $\lambda = 217,0 > \lambda_p = 107,3$, kritično naprezanje računa se prema Euleru:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \cdot \frac{210000}{217,0^2} = 44,0 \text{ MPa}.$$

Tlačno naprezanje u štapu jest:

$$\sigma = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{-22,782 \cdot 10^3}{4000} = -5,7 \text{ MPa}.$$

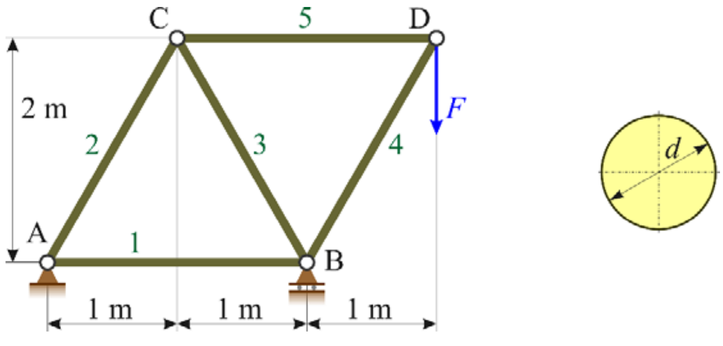
Može se zaključiti da je štap stabilan jer vrijedi:

$$|\sigma| = 5,7 \text{ MPa} < \sigma_{kr} = 44 \text{ MPa}.$$

Primjer 12.2.

Rešetkasti nosač opterećen je koncentriranom silom iznosa F i vezan je za podlogu nepomičnim osloncem u A i pomičnim osloncem u B (slika 12.9.). Svi su štapovi kružnoga poprečnog presjeka zadanog promjera d. Valja provjeriti stabilnost štapova rešetkaste konstrukcije.

Zadano je: $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $d = 20 \text{ mm}$, $F = 6 \text{ kN}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\sigma_p = 180 \text{ MPa}$.



Slika 12.9. *Primjer 12.2.*

***Rješenje*:**

Reakcije oslonaca, kao i sile u štapovima rešetkastog nosača, mogu se dobiti na poznati način iz uvjeta ravnoteže te metodom čvorova, kako je to opisano u šestom poglavlju skripata *Tehnička mehanika I.*

Uzdužne sile u štapovima rešetkastog nosača jesu:

$$N_1 = -1,50\ \text{kN}\,; \quad N_2 = 3,35\ \text{kN}\,, \quad N_3 = -3,35\ \text{kN}\,,$$

$$N_4 = -6,71\ \text{kN}\,, \quad N_5 = 3,0\ \text{kN}\,.$$

Potrebno je provjeriti stabilnost tlačno opterećenih štapova, tj. štapova 1, 3 i 4. Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka navedenih štapova jesu:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = 314,2\ \text{mm}^2\,,$$

$$I_{\min} = I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot 20^4}{64} = 7854\ \text{mm}^4\,,$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{7854}{314,2}} = 5\ \text{mm}\,.$$

Minimalni polumjer tromosti za kružni poprečni presjek mogao bi se izračunati i na ovaj način:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = \frac{20}{4} = 5\ \text{mm}\,.$$

Štapovi su zglobno vezani na svojim krajevima, pa je njihova duljina izvijanja jednaka njihovim duljinama, tj.:

$$l_{\text{o},1} = l_1 = 2\ \text{m}\,; \quad l_{\text{o},3,4} = l_{3,4} = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,236\ \text{m}\,.$$

Vitkosti štapova iznose:

$$\lambda_1 = \frac{l_{\text{o},1}}{i_{\min}} = \frac{2000}{5} = 400\,; \qquad \lambda_{3,4} = \frac{l_{\text{o},3,4}}{i_{\min}} = \frac{2236}{5} = 447,2\,;$$

dok je granična vitkost:

$$\lambda_{\text{p}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{p}}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3\,.$$

Kako su vitkosti štapova veće od granične vitkosti, kritična naprezanja računaju se prema Euleru i iznose:

$$\sigma_{\text{kr},1} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \cdot \frac{210000}{400^2} = 13,0\ \text{MPa}\,;$$

$$\sigma_{\text{kr},3,4} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \cdot \frac{210000}{447,2^2} = 10,4\ \text{MPa}\,.$$

Tlačna naprezanja u štapovima jesu:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{-1,5 \cdot 10^3}{314,2} = -4,77\ \text{MPa}\,;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{-3,35 \cdot 10^3}{314,2} = -10,7 \text{ MPa} ; \qquad \sigma_4 = \frac{N_4}{A} = \frac{-6,71 \cdot 10^3}{314,2} = -21,4 \text{ MPa} .$$

Budući da je

$$|\sigma_1| = 4,77 \text{ MPa} < \sigma_{\text{kr},1} = 13 \text{ MPa} ,$$

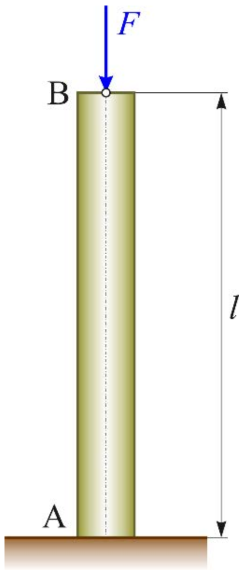
$$|\sigma_3| = 10,7 \text{ MPa} > \sigma_{\text{kr},3} = 10,4 \text{ MPa} , \qquad |\sigma_4| = 21,4 \text{ MPa} > \sigma_{\text{kr},4} = 10,4 \text{ MPa} ,$$

može se zaključiti da je štap 1 stabilan, dok štapovi 3 i 4 ne zadovoljavaju uvjet stabilnosti, pa bi trebalo povećati promjer poprečnog presjeka tih štapova.

Primjer 12.3.

Štap AB vezan je za podlogu uklještenjem u A i opterećen koncentriranom silom iznosa F na slobodnom kraju. Potrebno je provjeriti stabilnost štapa ako je njegov poprečni presjek oblika kvadrata kojem je brid a (slika 12.10.).

Zadano je: $l = 0,4$ m , $a = 30$ mm , $F = 90$ kN , $E = 210$ GPa , $\sigma_\text{p} = 180$ MPa , $\sigma_\text{o} = 310$ MPa.



Slika 12.10. *Primjer 12.3.*

***Rješenje*:**

Uzdužna sila u poprečnom presjeku štapa jest:

$$N = -F = -90 \text{ kN} .$$

Poprečni presjek ima sljedeće geometrijske karakteristike:

$$A = a^2 = 30^2 = 900 \text{ mm}^2 ,$$

$$I_{\min} = I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{30^4}{12} = 67500 \text{ mm}^4 ,$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{67500}{900}} = 8,66 \text{ mm} .$$

Štap je na jednom kraju slobodan, a na drugom ukliješten, pa je njegova duljina izvijanja jednaka njegovoj dvostrukoj duljini, tj.:

$$l = 2 \cdot l = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ m} .$$

Vitkost štapa iznosi:

$$\lambda = \frac{l_{\mathrm{o}}}{i_{\min}} = \frac{800}{8,66} = 92,4 ,$$

dok je granična vitkost:

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\mathrm{p}}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3 .$$

Budući da je

$$\lambda = 92,4 < \lambda_{\mathrm{p}} = 107,3 ,$$

kritično naprezanje računa se prema Tetmajeru:

$$\sigma_{\mathrm{kr}} = \sigma_{\mathrm{o}} - \left(\sigma_{\mathrm{o}} - \sigma_{\mathrm{p}}\right) \cdot \frac{\lambda}{\lambda_{\mathrm{p}}} = 310 - \left(310 - 180\right) \cdot \frac{92,4}{107,3} = 198,1 \text{ MPa} .$$

Tlačno naprezanje u štapu iznosi:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-90 \cdot 10^3}{900} = -100 \text{ MPa} .$$

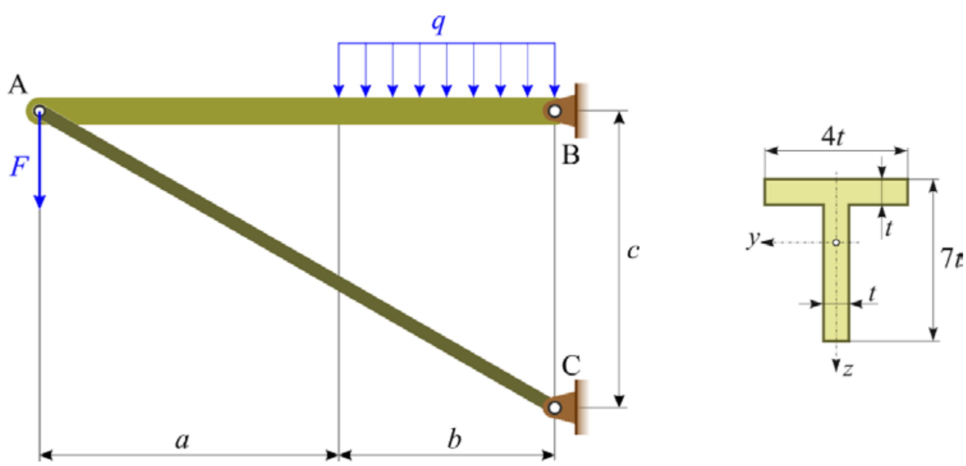
Kako je

$$\left|\sigma\right| = 100 \text{ MPa} < \sigma_{\mathrm{kr}} = 198,1 \text{ MPa} ,$$

može se zaključiti da je štap stabilan.

Primjer 12.4.

Konstrukcija na slici 12.11. sastoji se od krute grede AB i deformabilnog štapa AC zadanog oblika poprečnog presjeka. Konstrukcija je opterećena koncentriranom silom iznosa F i jednoliko raspodijeljenim kontinuiranim opterećenjem iznosa q.



Slika 12.11. *Primjer 12.4.*

Potrebno je provjeriti stabilnost štapa AC ako je zadano: $a = 1{,}5\ \text{m}$, $b = 1{,}1\ \text{m}$, $c = 2{,}4\ \text{m}$, $t = 20\ \text{mm}$, $F = 8\ \text{kN}$, $q = 12\ \text{kN/m}$, $E = 200\ \text{GPa}$, $\sigma_\text{p} = 180\ \text{MPa}$, $\sigma_\text{o} = 310\ \text{MPa}$.

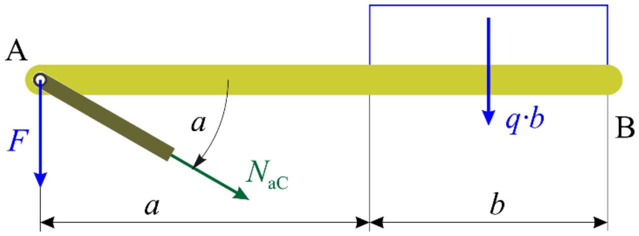
***Rješenje*:**

Uzdužna sila u štapu AC može se dobiti iz uvjeta ravnoteže (slika 12.12.):

$$\sum M_\text{B} = 0: \qquad F \cdot (a+b) + q \cdot b \cdot b/2 + N_\text{AC} \cdot \sin\alpha \cdot (a+b) = 0,$$

gdje je kut α dobiven prema izrazu:

$$\tan\alpha = c/(a+b) = 2{,}4/2{,}6 = 0{,}92308, \qquad \alpha = 42{,}71^\circ.$$



Slika 12.12. *Primjer 12.4.: Kruta greda AB oslobođena od veza*

Tlačna sila u štapu BC iznosi:

$$N_\text{BC} = -\frac{F \cdot (a+b) + q \cdot b^2/2}{(a+b)\cdot \sin\alpha} = -\frac{8 \cdot (1{,}5+1{,}1) + 12 \cdot 1{,}1^2/2}{(1{,}5+1{,}1)\cdot \sin 42{,}71^\circ} = -15{,}911\ \text{kN}.$$

Geometrijske karakteristike zadanoga poprečnog presjeka iznose:

$$A = 4000\ \text{mm}^2, \quad I_\text{min} = I_z = 933333\ \text{mm}^4,$$

$$i_\text{min} = \sqrt{\frac{I_\text{min}}{A}} = \sqrt{\frac{933333}{4000}} = 15{,}28\ \text{mm}.$$

Štap je na obama krajevima zglobno vezan, pa su duljina izvijanja i duljina štapa jednake:

$$l_\text{o} = l = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} = \sqrt{(1{,}5+1{,}1)^2 + 2{,}4^2} = 3{,}538\ \text{m}.$$

Vitkost štapa jest:

$$\lambda = \frac{l_\text{o}}{i_\text{min}} = \frac{3538}{15{,}28} = 231{,}5,$$

dok je granična vitkost:

$$\lambda_\text{p} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_\text{p}}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{200000}{180}} = 104{,}7.$$

Budući da je

$$\lambda = 231{,}5 > \lambda_\text{p} = 104{,}7,$$

kritično naprezanje računa se prema Euleru:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \cdot \frac{200000}{231,5^2} = 36,8 \text{ MPa} .$$

Tlačno naprezanje u štapu iznosi:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{-15,911 \cdot 10^3}{4000} = -3,98 \text{ MPa} .$$

Štap AC je stabilan jer vrijedi:

$$|\sigma| = 3,98 \text{ MPa} < \sigma_{kr} = 36,8 \text{ MPa} .$$

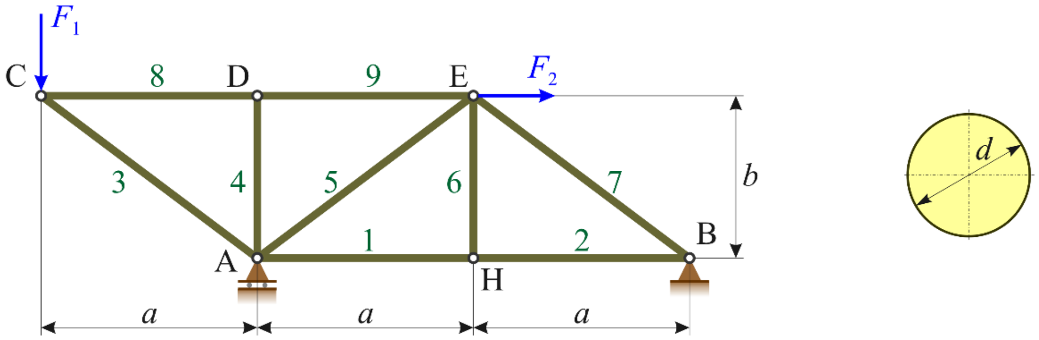
ZADATCI ZA VJEŽBU:

Zadatak 12.1.

Rešetkasta konstrukcija opterećena je dvjema koncentriranim silama iznosa F_1 i F_2 te vezana za podlogu pomičnim osloncem u A i nepomičnim osloncem u B (slika Z.12.1.). Svi štapovi rešetkastog nosača su kružnog poprečnog presjeka zadanog promjera d .

Valja provjeriti čvrstoću i stabilnost štapa 3 rešetkaste konstrukcije.

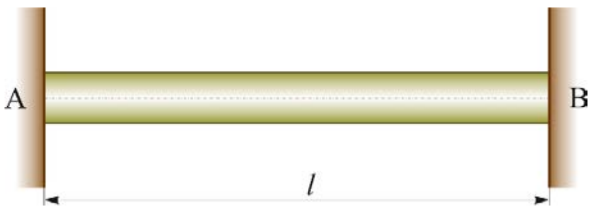
Zadano je: $a = 4$ m, $b = 3$ m, $d = 50$ mm, $F_1 = 15$ kN, $F_2 = 10$ kN, $E = 210$ GPa, $\sigma_d = 180$ MPa, $\sigma_p = 180$ MPa .



Slika Z.12.1. *Zadatak Z.12.1.*

Zadatak 12.2.

Štap kružnoga poprečnog presjeka zadanog promjera d ukliješten je na krajevima (slika Z.12.4.). Koliko se može povećati temperatura štapa tako da ne dođe do gubitka njegove stabilnosti ako je zadano: $l = 2,5$ m, $d = 40$ mm, $\alpha = 12,6 \cdot 10^{-6}\ 1/{}^\circ\text{C}$, $E = 200$ GPa, $\sigma_p = 180$ MPa ?



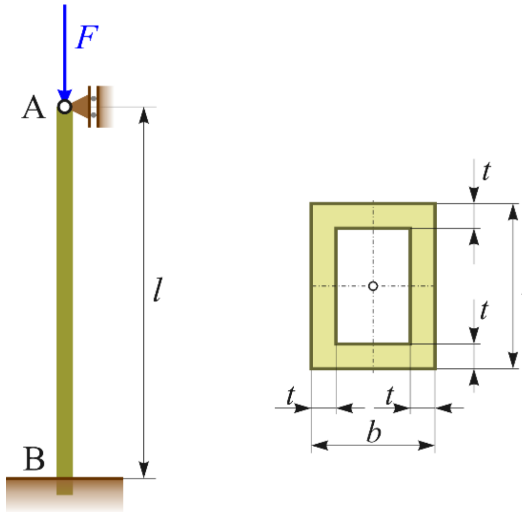
Slika Z.12.2. *Zadatak Z.12.2.*

Zadatak 12.3.

Štap AB zadanoga poprečnog presjeka vezan je za podlogu pomičnim zglobnim osloncem u A i ukliještenjem u B. Štap je opterećen koncentriranom silom iznosa F (slika Z.12.3.).

Valja provjeriti stabilnost štapa.

Zadano je: $l = 3\ \mathrm{m}$, $b = 60\ \mathrm{mm}$, $h = 120\ \mathrm{mm}$, $t = 12\ \mathrm{mm}$, $F = 100\ \mathrm{kN}$, $\sigma_\mathrm{p} = 180\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_\mathrm{o} = 310\ \mathrm{MPa}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$.



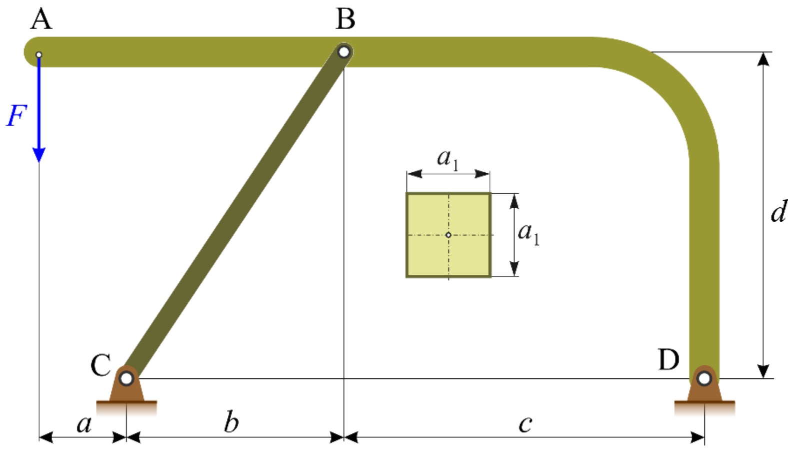
Slika Z.12.3. *Zadatak Z.12.3.*

Zadatak 12.4.

Konstrukcija na slici Z.12.4. sastoji se od zakrivljenog krutog dijela ABD i deformabilnog štapa BC. Konstrukcija je opterećena koncentriranom silom iznosa F.

Dimenzionirati kvadratni poprečni presjek štapa BC zadanog brida a_1 prema uvjetu čvrstoće te nakon toga provjeriti njegovu stabilnost.

Zadano je: $a = 0,2\ \mathrm{m}$, $b = 0,6\ \mathrm{m}$, $c = 1,4\ \mathrm{m}$, $d = 1,2\ \mathrm{m}$, $F = 3\ \mathrm{kN}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$, $\sigma_\mathrm{p} = 180\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_\mathrm{d} = 160\ \mathrm{MPa}$.



Slika Z.12.4. *Zadatak Z.12.4.*

13. RJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU

2. Aksijalno opterećenje

Zadatak 2.1.

$F = 4,0\ \text{kN}$, $\sigma_1 = 80\ \text{MPa}$,
$\sigma_2 = 40\ \text{MPa}$, $\Delta l_u = 0,457\ \text{mm}$.

Zadatak 2.2.

$F = 37,0\ \text{kN}$, $\sigma_{\text{BC}} = 178\ \text{MPa}$,
$\delta_{\text{B}} = 5,69\ \text{mm}$.

Zadatak 2.3.

$A_1 = 34,0\ \text{mm}^2$, $A_2 = 236\ \text{mm}^2$,
$\delta_{\text{B}} = 2,854\ \text{mm}$, $\delta_{\text{D}} = 3,554\ \text{mm}$.

Zadatak 2.4.

$\sigma_1 = 16,4\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 21,9\ \text{MPa}$,
$\sigma_3 = 16,4\ \text{MPa}$, $\delta_{\text{A}} = 0,156\ \text{mm}$.

Zadatak 2.5.

$\sigma_1 = 198\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 144\ \text{MPa}$,
$\sigma_3 = 118\ \text{MPa}$, $\delta_{\text{B}} = 1,282\ \text{mm}$.

Zadatak 2.6.

$\sigma_1 = 120\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 60,2\ \text{MPa}$,
$\delta_{\text{D}} = 0,826\ \text{mm}$.

Zadatak 2.7.

$\sigma_1 = -118\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = -82,3\ \text{MPa}$,
$\sigma_3 = -185\ \text{MPa}$.

Zadatak 2.8.

$\sigma_1 = -84,7\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 42,3\ \text{MPa}$.

Zadatak 2.9.

$\sigma_1 = -43,9\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 62,1\ \text{MPa}$.

Zadatak 2.10.

$\sigma_1 = 138\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = 138\ \text{MPa}$,
$\sigma_3 = 120\ \text{MPa}$.

Zadatak 2.11.

$F = 48\ \text{kN}$.

3. Smicanje

Zadatak 3.1.

$\tau = 44,8\ \text{MPa}$.

Zadatak 3.2.

$d = 16\ \text{mm}$.

Zadatak 3.3.

$F = 30\ \text{kN}$.

Zadatak 3.4.

$d = 19\ \text{mm}$.

Zadatak 3.5.

$l = 15\ \text{mm}$.

Zadatak 3.6.

$l_1 = 153\ \text{mm}$, $l_2 = 62\ \text{mm}$.

4. Geometrijske karakteristike poprečnih presjeka

Zadatak 4.1.

$A = 3138\ \text{mm}^2$, $I_y = I_z = 48,65 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$,

$I_{yz} = 0\ \text{mm}^4$, $i_y = i_z = 39,4\ \text{mm}$, $W_y = W_z = 81,1 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$.

Zadatak 4.2.

$y_{\text{T}} = 24,1\ \text{mm}$, $A = 1920\ \text{mm}^2$, $I_y = 102,6 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$, $I_z = 23,4 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$,

$I_{yz} = 0\ \text{mm}^4$, $i_y = 23,1\ \text{mm}$, $i_z = 11\ \text{mm}$, $W_y = 29,3 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$, $W_z = 9,71 \cdot 10^3\ \text{mm}^3$.

Zadatak 4.3.

a) $A = 3600\ \text{mm}^2$, $y_\text{T} = 23{,}9\ \text{mm}$, $z_\text{T} = 45{,}6\ \text{mm}$, $I_y = 42{,}1 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$,
$I_z = 12{,}3 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$, $I_{yz} = -5{,}78 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$, $I_1 = 43{,}2 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$, $I_2 = 11{,}2 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$,
$\varphi_0 = 10{,}6\ °$, $i_1 = 34{,}6\ \text{mm}$, $i_2 = 17{,}6\ \text{mm}$.

b) $A = 3600\ \text{mm}^2$, $y_\text{T} = 54{,}4\ \text{mm}$, $z_\text{T} = 54{,}4\ \text{mm}$, $I_y = 42{,}1 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$,
$I_z = 18{,}1 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$, $I_{yz} = -19{,}1 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$, $I_1 = 52{,}7 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$, $I_2 = 7{,}52 \cdot 10^5\ \text{mm}^4$,
$\varphi_0 = 28{,}9\ °$, $i_1 = 38{,}2\ \text{mm}$, $i_2 = 14{,}5\ \text{mm}$.

5. Uvijanje

Zadatak 5.1.

$\tau_\text{I} = -244\ \text{MPa}$, $\tau_\text{II} = 104\ \text{MPa}$,

$\tau_\text{III} = -119\ \text{MPa}$, $\alpha_\text{C} = -2{,}88 \cdot 10^{-2}\ \text{rad}$.

Zadatak 5.2.

$M = 473\ \text{N} \cdot \text{m}$, $\tau_\text{I} = 37{,}6\ \text{MPa}$,

$\tau_\text{II} = 33{,}5\ \text{MPa}$,

$\alpha_\text{B} = 7{,}06 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$, $\alpha_\text{C} = 12{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$.

Zadatak 5.3.

$M_2 = 917\ \text{N} \cdot \text{m}$

$d_1 = 31\ \text{mm}$, $d_2 = 39\ \text{mm}$.

Zadatak 5.4.

$M_\text{A} = 5{,}87\ \text{kN} \cdot \text{m}$, $M_\text{D} = 4{,}13\ \text{kN} \cdot \text{m}$,

$\tau_\text{I} = -41{,}0\ \text{MPa}$, $\tau_\text{II} = -61{,}5\ \text{MPa}$,

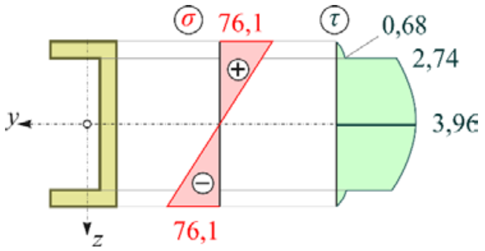
$\tau_\text{III} = 97{,}4\ \text{MPa}$, $\alpha_\text{B} = -3{,}15 \cdot 10^{-2}\ \text{rad}$,

$\alpha_\text{C} = -7{,}49 \cdot 10^{-2}\ \text{rad}$.

6. Savijanje

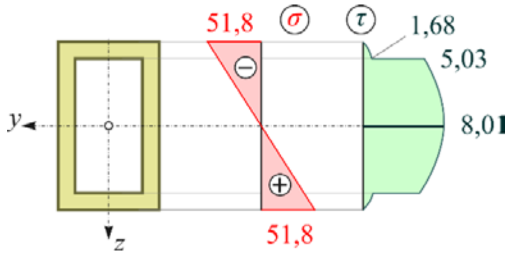
Zadatak 6.1.

$\sigma_1 = 95{,}1\ \text{MPa}$



Zadatak 6.2.

$t = 10\ \text{mm}$



Zadatak 6.3.

$d = 56\ \text{mm}$,

$w_\text{max} = -15{,}5\ \text{mm}$, $\beta_\text{max} = 0{,}031\ \text{rad}$.

Zadatak 6.4.

$t = 9\ \text{mm}$,

$w_\text{max} = 9{,}41\ \text{mm}$, $\beta_\text{max} = 7{,}84 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$.

Zadatak 6.5.

Neutralna os: $z_0 = -1{,}47 \cdot y_0$

$\sigma_\text{v,max} = 169\ \text{MPa}$, $\sigma_\text{t,max} = -201\ \text{MPa}$.

Zadatak 6.6.

$F_\text{A} = -4{,}5\ \text{kN}$, $M_\text{A} = 4{,}5\ \text{kN} \cdot \text{m}$,

$F_\text{B} = 10{,}5\ \text{kN}$.

Zadatak 6.7.

$F_\text{A} = 24{,}4\ \text{kN}$, $M_\text{A} = -19{,}7\ \text{kN} \cdot \text{m}$,

$F_\text{B} = 35{,}6\ \text{kN}$.

Zadatak 6.8.

$F_\text{A} = F_\text{B} = 16\ \text{kN}$,

$M_\text{A} = M_\text{B} = -10{,}7\ \text{kN} \cdot \text{m}$.

Zadatak 6.9.

$F_A = F_B = 7{,}5\ \text{kN}$,

$M_A = M_B = -11{,}3\ \text{kN}\cdot\text{m}$.

Zadatak 6.10.

$F_A = 1{,}667\ \text{kN}$, $F_B = 11{,}5\ \text{kN}$,

$F_C = 2{,}833\ \text{kN}$.

Zadatak 6.11.

$F_B = 18{,}4\ \text{kN}$, $F_D = 12{,}1\ \text{kN}$,

$w_C = -3{,}604\ \text{mm}$, $\beta_H = -0{,}0018\ \text{rad}$.

Zadatak 6.12.

$F_C = 26{,}5\ \text{kN}$, $F_H = 6{,}85\ \text{kN}$,

$\beta_B = 0{,}0031\ \text{rad}$, $w_E = 20{,}3\ \text{mm}$.

7. Tenzor naprezanja

Zadatak 7.1.

$\bar{\sigma}_x = -79{,}6\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_y = -40{,}4\ \text{MPa}$, $\bar{\tau}_{xy} = -33{,}8\ \text{MPa}$, $\sigma_1 = -20{,}9\ \text{MPa}$,

$\sigma_2 = -99{,}1\ \text{MPa}$, $\varphi_0 = -25{,}1°$ (os 1), $\tau_{max} = 39{,}1\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_{x1} = \bar{\sigma}_{y1} = -60\ \text{MPa}$.

Zadatak 7.2.

$\bar{\sigma}_x = 22{,}1\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_y = 45{,}9\ \text{MPa}$, $\bar{\tau}_{xy} = 54{,}3\ \text{MPa}$, $\sigma_1 = 89{,}6\ \text{MPa}$,

$\sigma_2 = -21{,}6\ \text{MPa}$, $\varphi_0 = 26{,}2°$ (os 1), $\tau_{max} = 55{,}6\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_{x1} = \bar{\sigma}_{y1} = 34{,}0\ \text{MPa}$.

Zadatak 7.3.

$\tau_{xy} = -30{,}0\ \text{MPa}$.

Zadatak 7.4.

$\sigma_x = -50\ \text{MPa}$, $\sigma_y = 10\ \text{MPa}$, $\tau_{xy} = 15\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_x = -35\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_y = -5\ \text{MPa}$,

$\bar{\tau}_{xy} = -30\ \text{MPa}$, $\sigma_1 = 13{,}5\ \text{MPa}$, $\sigma_2 = -53{,}5\ \text{MPa}$, $\varphi_0 = -13{,}3°$ (os 2),

$\tau_{max} = 33{,}5\ \text{MPa}$, $\bar{\sigma}_{x1} = \bar{\sigma}_{y1} = -20\ \text{MPa}$.

8. Tenzor deformacije

Zadatak 8.1.

$\bar{\varepsilon}_x = 1{,}29\cdot 10^{-4}$, $\bar{\varepsilon}_y = -1{,}29\cdot 10^{-4}$,

$\bar{\gamma}_{xy}/2 = -1{,}53\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 2\cdot 10^{-4}$,

$\varepsilon_2 = -2\cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 = 45°$ (os 1).

Zadatak 8.2.

$\bar{\varepsilon}_x = 3{,}97\cdot 10^{-4}$, $\bar{\varepsilon}_y = -1{,}97\cdot 10^{-4}$,

$\bar{\gamma}_{xy}/2 = 3{,}54\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 5{,}62\cdot 10^{-4}$,

$\varepsilon_2 = -3{,}62\cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 = 75°$ (os 1).

Zadatak 8.3.

$\bar{\varepsilon}_x = 5{,}99\cdot 10^{-4}$, $\bar{\varepsilon}_y = 0{,}01\cdot 10^{-4}$, $\bar{\gamma}_{xy}/2 = 5{,}3\cdot 10^{-6}$,

$\varepsilon_1 = 9{,}08\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = -3{,}08\cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 = -4{,}73°$ (os 1).

9. Međusobna ovisnost naprezanja i deformacija

Zadatak 9.1.

$\bar{\varepsilon}_x = 0{,}87\cdot 10^{-4}$, $\bar{\varepsilon}_y = 1{,}23\cdot 10^{-4}$,

$\bar{\gamma}_{xy}/2 = 3{,}24\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 4{,}3\cdot 10^{-4}$,

$\varepsilon_2 = -2{,}2\cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 = 26{,}6°$ (os 1).

Zadatak 9.2.

$\sigma_x = 182\ \text{MPa}$, $\sigma_y = 118\ \text{MPa}$,

$\tau_{xy} = -145\ \text{MPa}$, $\sigma_1 = 299\ \text{MPa}$,

$\sigma_2 = 1\ \text{MPa}$, $\varphi_0 = -38{,}7°$ (os 1).

Zadatak 9.3.

$\bar{\varepsilon}_x = 0,6 \cdot 10^{-4}$, $\bar{\varepsilon}_y = 0,96 \cdot 10^{-4}$,

$\bar{\gamma}_{xy}/2 = 3,25 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_1 = 4,03 \cdot 10^{-4}$,

$\varepsilon_2 = -2,47 \cdot 10^{-4}$, $\varphi_0 = 26,6°$ (os 1).

Zadatak 9.4.

$\sigma_x = 162$ MPa, $\sigma_y = 0$ MPa,

$\tau_{xy} = -65,3$ MPa, $\sigma_1 = 185$ MPa,

$\sigma_2 = -23$ MPa, $\varphi_0 = -19,5°$ (os 1).

10. Teorije čvrstoće

Zadatak 10.1.

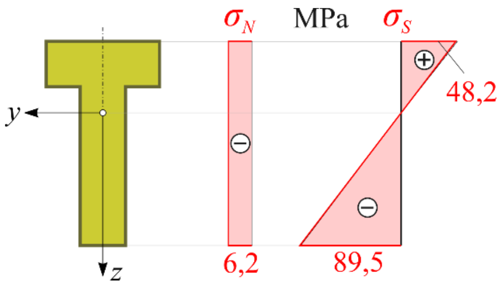
a) $\sigma_{e(\sigma_{\max})} = 123$ MPa, $\sigma_{e(\tau_{\max})} = 127$ MPa, $\sigma_{e(\mathrm{HMH})} = 125$ MPa,

b) $\sigma_{e(\sigma_{\max})} = 87$ MPa, $\sigma_{e(\tau_{\max})} = 164$ MPa, $\sigma_{e(\mathrm{HMH})} = 142$ MPa.

11. Složeno opterećenje

Zadatak 11.1.

$\sigma_{\mathrm{v,max}} = 42,0$ MPa, $\sigma_{\mathrm{t,max}} = -95,7$ MPa.



Zadatak 11.2.

$\sigma_{\mathrm{v,max}} = \sigma_{\mathrm{B}} = 22,5$ MPa,

$\sigma_{\mathrm{t,max}} = \sigma_{\mathrm{D}} = -13,6$ MPa.

Zadatak 11.3.

$\sigma_{e(\tau_{\max})} = 105$ MPa, $\sigma_{e(\mathrm{HMH})} = 90,8$ MPa.

Zadatak 11.4.

$\sigma_e = 306$ MPa.

Zadatak 11.5.

$\sigma_{e,\mathrm{M}} = 230$ MPa, $\sigma_{e,\mathrm{N}} = 241$ MPa.

12. Izvijanje

Zadatak 12.1.

$\sigma = 12,7 \text{ MPa} < \sigma_{\mathrm{d}} = 180$ MPa,

$\sigma = 12,7 \text{ MPa} < \sigma_{\mathrm{kr}} = 13,0$ MPa.

/štap zadovoljava uvjete čvrstoće i stabilnosti/

Zadatak 12.2.

$\Delta t = 50,1$ °C.

Zadatak 12.3.

$|\sigma| = 26,7 \text{ MPa} < \sigma_{\mathrm{kr}} = 197$ MPa.

/štap je stabilan/

Zadatak 12.4.

$a_1 = 6$ mm,

$|\sigma| = 146 \text{ MPa} > \sigma_{\mathrm{kr}} = 3,45$ MPa.

/štap nije stabilan/

L I T E R A T U R A

[1] Alfirević, I. *NAUKA O ČVRSTOĆI I*, Tehnička knjiga Zagreb, 1989.

[2] Beer, F. P., Johnston, E. R., Dewolf, J. T, Mazurek, D. F. *MECHANICS of MATERIALS*, McGraw-Hill Companies, New York, 2012.

[3] Gere, J. M., Z. Goodno, B. J. *MECHANICS of MATERIALS*, Cengage Learning, Toronto, 2009.

[4] Craig, R. R. *MECHANICS of MATERIALS*, Wiley & Sons, New York, 2000.

[5] Philpot, T. A. *MECHANICS of MATERIALS: An Intergrated Learning System*, Wiley & Sons, New York, 2013.