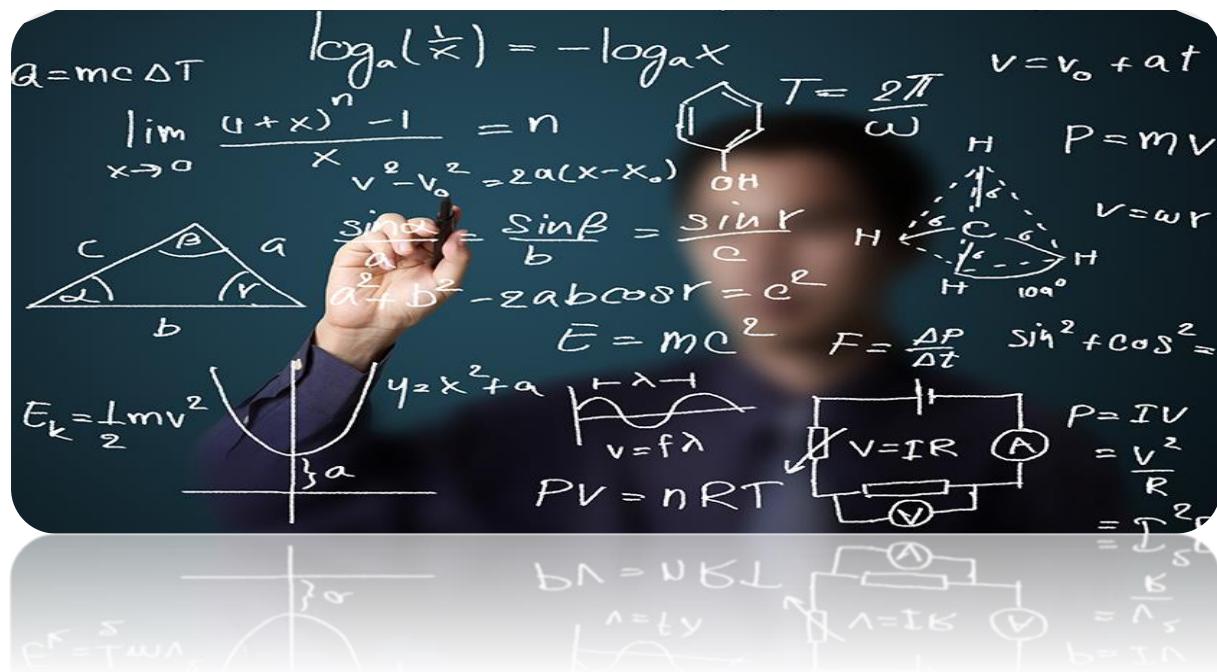


SVEUČILIŠTE U SPLITU
SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE



ANALIZA

Zbirka zadataka

Julija Mardešić

Listopad, 2019.

SADRŽAJ

| | |
|---|----|
| 1. FUNKCIJE..... | 1 |
| 2. LIMESI | 8 |
| Oblik $\frac{\infty}{\infty}$ | 9 |
| Oblik $\frac{0}{0}$ | 9 |
| Oblik $\infty - \infty$ | 10 |
| Oblik 1^{∞} | 10 |
| 3. NEPREKIDNOST..... | 10 |
| 4. DERIVACIJE | 12 |
| 4.1. TANGENTA I NORMALA | 14 |
| 4.2. EKSTREMI FUNKCIJE..... | 15 |
| 4.3. ASIMPTOTE FUNKCIJE..... | 16 |
| 4.4. KONVEKSNOST I KONKAVNOST | 17 |
| 4.5. TOK FUNKCIJE | 18 |
| 4.6. PRIMJENA DERIVACIJA..... | 18 |
| 4.7. L'HOSPITALOVO PRAVILO..... | 19 |
| 5. NIZOVI..... | 19 |
| 6. REDOVI | 22 |
| 6.1. RED POTENCIJA..... | 23 |
| 6.2. TAYLOROV RED | 24 |
| 7. INTEGRALI..... | 25 |
| 7.1. NEODREĐENI INTEGRAL | 25 |
| 7.1.1. METODA SUPSTITUCIJE..... | 26 |
| 7.1.2. METODA PARCIJALNE INTEGRACIJE..... | 27 |
| 7.1.3. INTEGRAL RACIONALNE FUNKCIJE..... | 28 |
| 7.2. ODREĐENI INTEGRAL..... | 29 |
| 7.2.1. SUPSTITUCIJA U ODREĐENOM INTEGRALU..... | 29 |
| 7.2.2. PARCIJALNA INTEGRACIJA U ODREĐENOM INTEGRALU | 30 |
| 7.2.3. NEPRAVI INTEGRALI | 30 |
| 7.3. PRIMJENA ODREĐENOG INTEGRALA..... | 31 |
| 7.3.1. POVRŠINA RAVNINSKOG LIKA..... | 31 |
| 7.3.2. DULJINA LUKA KRIVULJE | 32 |
| 7.3.3. VOLUMEN ROTACIONOG TIJELA..... | 32 |
| 8. PRIMJERI KOLOKVIJA I ISPITA..... | 33 |
| 9. LITERATURA..... | 39 |

1. FUNKCIJE

1. Odredite jesu li sljedeća preslikavanja funkcije:

- a) $y=x^2$, x i y su realni brojevi
- b) $y=x^3$, x i y su realni brojevi
- c) $x=y^2$, x je pozitivan realni broj, y je realni broj
- d) $x=y^2$, x je pozitivan realni broj, y je pozitivan realni broj
- e) $x=y^2$, x je pozitivan realni broj, y je negativan realni broj
- f) $x^2 + y^2 = 1$, x i y su realni brojevi .

R: a) Da b) Da c) Ne d) Da e) Da f) Ne

2. Zadana je funkcija $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,3,5,7,9\}$, $f(x) = 2x - 1$. Odredite domenu ili područje definicije i kodomenu ili područje vrijednosti funkcije f .

R: $D(f) = \{1,2,3,4,5\}$, $R(f) = \{1,3,5,7,9\}$

3. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1] \\ x^2, & x \in (1, \infty) \end{cases}$, izračunajte $f(-5)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$.

R: $f(-5) = -5$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(5) = 25$

4. Funkcija je zadana tablicom

| | | | | |
|------|---|---|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| f(x) | 4 | 7 | 10 | 13 |

Odredite područje definicije i $f(4)$.

R: $D(f) = \{1,2,3,4\}$, $f(4) = 13$

5. Odredite parametre a i b funkcije f zadane s $f(x) = ax + b$ ako je

- a) $f(2) = 10$, $f(1) = 5$
- b) $f(3) = 3$, $f(6) = 0$.

R: a) $a=5$, $b=0$ b) $a=-1$, $b=6$

6. Odredite kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ ako je $f(1) = 3$, $f(2) = 12$, $f(3) = 27$.

R: $f(x) = 3x^2$

7. Ako je $f(2x + 1) = 3x^2 - 5$ izračunajte $f(x)$, $f(5)$ i $f(x+3)$.

R: $f(x) = \frac{3x^2 - 6x - 17}{4}$, $f(5) = 7$, $f(x+3) = \frac{3x^2 + 12x + 10}{4}$

8. Ako je $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$ izračunajte $f(3)$, $f(x+1)$, $f(x-2)$ i $f(\frac{1}{x-1})$.

$$R: f(3) = \frac{4}{3}, f(x+1) = \frac{x^2+2x}{2x+2}, f(x-2) = \frac{x^2-4x+3}{2x-4}, f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{-x^2+2x}{2x-2}$$

9. Ako je $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$ odredite $f\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$.

$$R: f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{5x-1}{x+11}$$

10. Ako je $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{x}{x-2}$ odredite $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

$$R: f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2x}{2x+4}$$

11. Nacrtajte graf funkcije

- a) $f(x) = -2x + 1$
- b) $f(x) = 3x + 3$
- c) $f(x) = x^2 - x - 6$
- d) $f(x) = (x - 2)(3 - 2x)$.

12. Odredite područje definicije funkcije

a) $f(x) = \frac{1}{3x-5}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

e) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2-x}}$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{-2}{x-3}}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

i) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 8}$

j) $f(x) = \sqrt{-1 + \frac{2x-1}{x-1}}$

k) $f(x) = \ln(2x - x^2) + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

l) $f(x) = \operatorname{arctg}(x + 1)$

m) $f(x) = \sqrt{3x - x^2} + \sin(3x + 1)$.

R: a) $D(f) = R \setminus \left\{ \frac{5}{3} \right\}$ b) $D(f) = R \setminus \{0\}$ c) $D(f) = R$ d) $D(f) = R$ e) $D(f) = [\frac{5}{2}, \infty)$

f) $D(f) = [-3, 2)$ g) $D(f) = (-\infty, 3)$ h) $D(f) = R$ i) $D(f) = \emptyset$

j) $D(f) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ k) $D(f) = (1, 2)$ l) $D(f) = R$ m) $D(f) = [0, 3]$

13. Odredite područje definicije funkcije

- a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x+2}}$
b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+2}}$
c) $f(x) = \ln(7 - 3x)$
d) $f(x) = \log(x^2 - 2x + 8)$
e) $f(x) = \log\left(\frac{2-x}{3+3x}\right) + e^x$
f) $f(x) = \sqrt{3x - x^2} + \cos(2x + 1)$.

R: a) $D(f) = (-2, \infty)$ b) $D(f) = (-2, 1] \cup [1, \infty)$ c) $D(f) = (-\infty, \frac{7}{3})$ d) $D(f) = R$
e) $D(f) = (-1, 2)$ f) $D(f) = [0, 3]$

14. Odredite područje definicije funkcije

- a) $f(x) = \arcsin(x^2 - 3)$
b) $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$
c) $f(x) = \sqrt{\ln x + 1}$
d) $f(x) = x(\ln x)^2$
e) $f(x) = x \ln x^2$
f) $f(x) = 2^{-x} \sqrt{x-5}$
g) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x}}$
h) $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$.

R: a) $D(f) = [-2, 2]$ b) $D(f) = (e, \infty)$ c) $D(f) = (e^{-1}, \infty)$ d) $D(f) = (0, \infty)$
e) $D(f) = R \setminus \{0\}$ f) $D(f) = [5, \infty)$ g) $D(f) = (-\infty, 2)$ h) $D(f) = R$

15. Jesu li jednake funkcije f i g ako je

- a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $g(x) = x + 3$
b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{2 - x} \cdot \sqrt{2 + x}$
c) $f(x) = \log x^2$, $g(x) = 2 \log x$
d) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$?

R: a) Ne b) Da c) Ne d) Ne

16. Odredite nul točke funkcije, ukoliko one postoje

- a) $f(x) = \sin x - 1$
b) $f(x) = \cos x + 4$
c) $f(x) = e^{x-1}$
d) $f(x) = e^x + 1$.

R: a) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) Nema nul točaka c) Nema nul točaka d) Nema nul točaka

17. Odredite nul točke funkcije

- a) $f(x) = x^2 - 4x$
- b) $f(x) = x^2 - x - 2$
- c) $f(x) = e^x - 1$
- d) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$
- e) $f(x) = \frac{3x-1}{4x^2}$.

R: a) $x_1 = 0, x_2 = 4$ b) $x_1 = -1, x_2 = 2$ c) $x = 0$ d) Nema nul točaka e) $x = \frac{1}{3}$

18. Ako je g neparna funkcija i $g(-1) = -2$ koliko iznosi $g(1)$?

R: $g(1) = 2$

19. Provjerite parnost odnosno neparnost funkcije

- a) $f(x) = x^2 - 9$
- b) $f(x) = x^3 + 1$
- c) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$
- d) $f(x) = x^3 - 6x$
- e) $f(x) = \frac{2x^2}{3 - 5x^4}$
- f) $f(x) = \frac{x - x^3}{x^2 + 2}$
- g) $f(x) = |x|$
- h) $f(x) = x|x|$.

R: a) Parna b) Ni parna ni neparna c) Parna d) Neparna e) Parna f) Parna g) Parna

h) Neparna

20. Ispitajte monotonost funkcija

- a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$
- b) $f(x) = x^2 - 4x$
- c) $f(x) = \sin x$
- d) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$
- e) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

R: a) Rastuća na skupu R b) Funkcija pada na $(-\infty, 2)$ a raste na $(2, \infty)$ c) Funkcija raste na

$(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ a pada na $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ d) Funkcija raste na

$(-\infty, \frac{5}{2})$ a pada na $(\frac{5}{2}, \infty)$ e) Rastuća na cijelom području definicije

21. Nacrtajte graf funkcije i ispitajte omeđenost

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} .$$

R: Funkcija je omeđena odozdo

22. Odredite gof i fog ako je

a) $f(x) = \frac{3x-1}{2}$, $g(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^2 + 1$, $g(x) = 3^x - 1$

c) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}$.

R: a) $fog(x) = 3x + 7$, $gof(x) = 3x + 4$

b) $fog(x) = 5 \cdot (3^x - 1)^2 + 1$, $gof(x) = 3^{5x^2+1} - 1$

c) $fog(x) = \frac{-x^2+6x+3}{x^2+1}$, $gof(x) = \frac{4x-1}{4x^2-4x+2}$

23. Ako je $f(x) = x^4$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ odredite fog , gof , foh , goh , hof , $hogof$.

R: $fog(x) = x^2$, $gof(x) = x^2$, $foh(x) = \frac{1}{(1+x^2)^4}$, $goh(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$, $hof(x) = \frac{1}{1+x^8}$
 $hogof(x) = \frac{1}{1+x^4}$

24. Odredite inverznu funkciju funkcije $f(x)$ ako je

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \frac{5x+2}{3x-1}$

c) $f(x) = \log_5(2x - 1) + 3$

d) $f(x) = 2^{x+3} - 1$.

R: a) $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3x-5}$ c) $f^{-1}(x) = \frac{5^{x-3}+1}{2}$

d) $f^{-1}(x) = \log_2(x + 1) - 3$

25. Ako je $f(2x + 1) = \frac{5x+1}{5-3x}$ odredite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

R: $f^{-1}(x) = \frac{13x+3}{3x+5}$

26. Ako je $f(2^x) = \frac{3+2^{x+1}}{1-2^{x+2}}$ odredite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

R: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2+4x}$

27. Ako je $fog(x) = \frac{1-x}{4+x}$ i $g(x) = 2 - x$ odredite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

R: $f^{-1}(x) = \frac{6x+1}{x+1}$

28. Ako je $f(2x - 1) = \frac{1+\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1-x}}$ odredite inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

$$R: f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+1}$$

29. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \ln x$ i izračunajte $f(1)$, $f(e)$, $f(e^2)$ i odredite područje definicije i nul točke.

$$R: f(1) = 0, f(e) = 1, f(e^2) = 2, D(f) = (0, \infty), \text{nul točka } (1, 0)$$

30. Odredite područje definicije, skup funkcijskih vrijednosti i nul točke funkcije

- a) $f(x) = \ln x - 2$
- b) $f(x) = \ln(x - 2)$
- c) $f(x) = \ln x^2$.

$$R: a) D(f) = (0, \infty), R(f) = R, (e^2, 0) \text{ je nul točka}$$

$$b) D(f) = (2, \infty), R(f) = R, (3, 0) \text{ je nul točka}$$

$$c) D(f) = R \setminus \{0\}, R(f) = R, (-1, 0) \text{ i } (1, 0) \text{ su nul točke}$$

31. Zadana je funkcija $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - 1$. Odredite x tako da je $f(x) \geq 0$.

$$R: x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$$

32. Odredite je li funkcija bijekcija

- a) $f(x) = 2x$
- b) $f(x) = x^2$
- c) $f(x) = -|x|$
- d) $f(x) = \sin x$.

R: a) Da b) Ne c) Ne d) Ne

33. Riješite jednadžbe

- a) $2^{\frac{3x-1}{3}} = 16\sqrt{8}$
- b) $9^x \cdot 27^{2x} = 3$
- c) $\frac{1}{25} \cdot 5^{\frac{3x+1}{2}} = 0.2 \cdot \sqrt{125}$
- d) $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$
- e) $25^x - 6 \cdot 5^{x+1} + 5^3 = 0$

$$R: a) x = \frac{35}{6} \quad b) x = \frac{1}{8} \quad c) x = \frac{4}{3} \quad d) x = 2 \quad e) x_1 = 1, x_2 = 2$$

34. Riješite jednadžbe

- a) $\log(2x) - \log(x - 3) = 1$
- b) $\log_3(\log_2(2x - 3)) = 1$

- c) $\ln(3x + 8) = \ln(2x + 2) + \ln(x - 2)$
d) $16^{\log_4 x} = 25$
e) $\log_b x = \frac{2}{3} \log_b 27 + 2 \log_b 2 - \log_b 3, b > 0.$

R: a) $x = \frac{15}{4}$ b) $x = \frac{11}{2}$ c) $x = 4$ d) $x = 5$ e) $x = 12$

35. Rastavite funkcije na parcijalne razlomke

- a) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+3x}$
b) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+9}$
c) $f(x) = \frac{-3x^2-x+3}{x^3(x-1)}$
d) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x(x^2+x+1)}$
e) $f(x) = \frac{3}{x^2(x^2+x+3)}.$

R: a) $\frac{-1}{x} + \frac{2}{x+3}$ b) $\frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2}$ c) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x-1}$ d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+x+1}$ e) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2+x+3}$

36. Napišite rastav na parcijalne razlomke funkcije $f(x) = \frac{9x^2-6x^3+1}{x^2(2x^2-3x+1)}$ (dovoljno je samo postaviti).

R: $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2x-1} + \frac{D}{x-1}$

37. Ako je $f(x) = \ln x + 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$ odredite domenu od gof .

R: $D(gof) = [e^{-1}, \infty)$

38. Izračunajte $(gof)(0)$ ako je $f(x) = x + \pi$ i $g(x) = \cos x$.

R: $(gof)(0) = -1$

39. Odredite domenu, skup funkcija vrijednosti, nul točke, intervale monotonosti, parnost i omeđenost funkcija

- a) $f(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = -3x + 1$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
d) $f(x) = -x^2 + 1$
e) $f(x) = \frac{1}{x}$
f) $f(x) = e^x$
g) $f(x) = 2^x - 1$
h) $f(x) = (\frac{1}{2})^x.$

R: a) $D(f) = R, R(f) = R$, nul točka je $(-\frac{1}{2}, 0)$, funkcija raste na cijelom području

domene, ni parna ni neparna, nije omeđena

- b) $D(f) = R, R(f) = R$, nul točka je $(\frac{1}{3}, 0)$, funkcija pada na cijelom području domene, ni parna ni neparna, nije omeđena
- c) $D(f) = R, R(f) = [-1, \infty)$, nul točke $(1, 0)$ i $(3, 0)$, funkcija pada na $(-\infty, 2)$ a raste na $(2, \infty)$, ni parna ni neparna, omeđena odozdo
- d) $D(f) = R, R(f) = [-\infty, 1)$, nul točke $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, funkcija raste na $(-\infty, 0)$ a pada na $(0, \infty)$, ni parna ni neparna, omeđena odozgo
- e) $D(f) = R \setminus \{0\}, R(f) = R \setminus \{0\}$, nul točaka nema, funkcija pada na cijelom području definicije, neparna, nije omeđena
- f) $D(f) = R, R(f) = (0, \infty)$, nul točaka nema, funkcija raste na cijelom području definicije, ni parna ni neparna, omeđena odozdo
- g) $D(f) = R, R(f) = [-1, \infty)$, nul točka $(0, 0)$, funkcija raste na cijelom području definicije, ni parna ni neparna, omeđena odozdo
- h) $D(f) = R, R(f) = (0, \infty)$, nul točaka nema, funkcija pada na cijelom području definicije, ni parna ni neparna, omeđena odozdo

2. LIMESI

1. Izračunajte limese

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^x$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\frac{1}{x}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}}$

R: a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) ∞ e) 0 f) 1 g) ∞ h) 0 i) 1 j) 1 k) ∞ l) 0

Oblik $\frac{\infty}{\infty}$

2. Izračunajte limese

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x}$
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 2}{3x^3 + 2x - 4}$
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x + 2}{3x^2 + 2x - 4}$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x + 1}$
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - x}}{2x + 3}$.

R: a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) ∞ d) 1 e) 1

Oblik $\frac{0}{0}$

3. Izračunajte limese

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x^2 - x}$
c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$
d) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$
e) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan^2 x}$
f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin x}{x}$
h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x}$
j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan x}$
k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

R: a) 1 b) 2 c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ f) $\frac{1}{2}$ g) 3 h) $-\frac{1}{4}$ i) 2 j) 2 k) 1

Oblik $\infty - \infty$

4. Izračunajte limese

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-3})$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x + 4})$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right).$

R: a) 0 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 0 e) -1

Oblik 1^∞

5. Izračunajte limese

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}}{\cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2} \right)^{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^x$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x.$

R: a) e^3 b) e^2 c) e^5 d) e^{-4} e) e^2

3. NEPREKIDNOST

1. Funkcija $f: R \rightarrow R$ je zadana formulom $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ x^2-1, & x \geq 2 \end{cases}$. Odredite točke prekida ako ih funkcija ima.

R: $x_0 = 2$ je točka prekida

2. Funkcija $f: R \rightarrow R$ je zadana formulom $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$. Je li funkcija f neprekidna u točki $x_0 = 1$?

R: Funkcija f nije neprekidna u točki $x_0 = 1$

3. Odredite vrijednost parametra a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \leq 3 \\ x + a, & x > 3 \end{cases}$ bude neprekidna.

R: $a = -3$

4. Odredite vrijednost parametra a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ bude neprekidna.

R: $a = 1$

5. Ispitajte neprekidnost funkcije $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x+1}, & x < -1 \\ -2, & x \geq -1 \end{cases}$.

R: Funkcija je neprekidna

6. Odredite vrijednost parametra a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x+2}, & x < -2 \\ 2 + a, & x \geq -2 \end{cases}$ bude neprekidna u $x_0 = -2$.

R: $a = -6$

7. Je li funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ -x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$

- a) neprekidna u točki $x_0 = 1$
- b) neprekidna u točki $x_0 = 3$?

R: a) Da b) Da

8. Nacrtajte graf funkcije $f: R \rightarrow R$ i provjerite je li funkcija neprekidna

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 3x, & x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < 1 \\ x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$

R: a) Ne b) Da c) Ne

9. Odredite vrijednost parametara a i b tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < -1 \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$ bude neprekidna na skupu R .

R: $a = 3, b = 1$

4. DERIVACIJE

1. Nađite prvu derivaciju zadanih funkcija

- a) $f(x) = x^5 + 3\cos x - e^x$
- b) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 2x + 2$
- c) $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- d) $f(x) = 5\tan x - \arcsin x + \frac{1}{x}$
- e) $f(x) = 2\ln x + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$.

R: a) $f'(x) = 5x^4 - 3\sin x - e^x$ b) $f'(x) = 15x^2 - 4x + 2$ c) $f'(x) = \frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x^2}$ e) $f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{7}{4}}$

2. Nađite prvu derivaciju zadanih funkcija

- a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$
- b) $f(x) = 3^x \cdot x^3$
- c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$
- d) $f(x) = (x^3 + 2x) \cdot \sin x$
- e) $f(x) = \sqrt{x^3} \cdot \cos x$
- f) $f(x) = (\ln x - \frac{1}{x}) \cdot e^x$.

R: a) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$ b) $f'(x) = 3^x \cdot x^2(x\ln 3 + 3)$ c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$

d) $f'(x) = (3x^2 + 2) \cdot \sin x + (x^3 + 2x) \cdot \cos x$ e) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \cos x - x\sqrt{x} \sin x$

f) $f'(x) = e^x(\ln x + \frac{1}{x^2})$

3. Odredite prvu derivaciju zadanih funkcija

- a) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3+2x}$
- b) $f(x) = \frac{e^x}{2x-1}$
- c) $f(x) = \frac{x\ln x}{3}$
- d) $f(x) = \frac{\sin x}{2x}$
- e) $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$
- f) $f(x) = \frac{1-\sin x}{2-\cos x}$.

R: a) $f(x) = \frac{-x^4+11x^2+6}{(x^3+2x)^2}$ b) $f(x) = \frac{e^x(2x-3)}{(2x-1)^2}$ c) $f'(x) = \frac{1}{3}(\ln x + 1)$ d) $f'(x) = \frac{2x\cos x - 2\sin x}{4x^2}$

e) $f'(x) = \frac{-7}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)^2}$ f) $f'(x) = \frac{1-\sin x - 2\cos x}{(2-\cos x)^2}$

4. Odredite prvu derivaciju složenih funkcija

- a) $f(x) = (x^2 - 3x)^{20}$
- b) $f(x) = e^{2x+2}$
- c) $f(x) = \ln(x^2 - x)$
- d) $f(x) = \cos(\sqrt{x} - 3)$
- e) $f(x) = \operatorname{tg}^2(3x)$
- f) $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^5$
- g) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$
- h) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$
- i) $f(x) = \sin \sqrt{x}$
- j) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{3}{x^2}}$
- k) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$
- l) $f(x) = \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} + \frac{x - \pi}{\sin(x - \pi)}$
- m) $f(x) = \log_3 \sqrt{x^2 - x}$
- n) $f(x) = \frac{1}{18} \sin^6(3x) - \frac{1}{24} \sin^8(3x)$
- o) $f(x) = \frac{1 + \operatorname{arctg} x}{1 - \operatorname{arctg} x}$.

R: a) $f'(x) = 20(x^2 - 3x)^{19}(2x - 3)$ b) $f'(x) = 2e^{2x+2}$ c) $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$

d) $f'(x) = -\sin(\sqrt{x}-3) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e) $f'(x) = 6\operatorname{tg}(3x) \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)}$ f) $f'(x) = \frac{5(x-1)(x+1)^4}{2x^3\sqrt{x}}$

g) $f'(x) = \frac{-1}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}$ h) $f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ i) $f'(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ j) $f'(x) = \frac{3}{x^3 \cdot \sin^2 \frac{3}{x^2} \cdot \sqrt{\operatorname{ctg} \frac{3}{x^2}}}$

k) $f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$ l) $f'(x) = \frac{(x-\pi) \cdot \cos(x-\pi) - \sin(x-\pi)}{(x-\pi)^2} + \frac{\sin(x-\pi) - (x-\pi) \cdot \cos(x-\pi)}{\sin^2(x-\pi)}$

m) $f'(x) = \frac{2x-1}{2\ln 3(x^2-x)}$ n) $f'(x) = \sin^5(3x)\cos^3(3x)$ o) $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)(1-\operatorname{arctg} x)^2}$

5. Odredite derivaciju trećeg reda za funkciju $f(x) = \sqrt{x^3}$.

R: $f'''(x) = \frac{-3}{8} x^{-\frac{3}{2}}$

6. Odredite derivaciju n-tog reda za funkcije

- a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5$
- b) $f(x) = e^{2x}$.

R: a) $f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 4$ b) $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$

7. Odredite derivaciju funkcije zadane implicitno

a) $x^2 - 2xy + 6y^3 - 10 = 0$

- b) $y^2 \cdot \sin xy = 0$
c) $3x \cdot \cos(x + y) = 0$.

R: a) $y' = \frac{y-x}{9y^2-x}$ b) $y' = \frac{-y^2 \cos xy}{2\sin xy + x \cos xy}$ c) $y' = \frac{-ctg(x+y)}{x} - 1$

8. Odredite derivaciju funkcija

- a) $f(x) = a^{x^2-3x+1} + \log_a(x^2 - 3x + 1)$
b) $f(x) = (2x^2 - 3x + 3)^{x-1}$.

R: a) $f'(x) = (2x - 3)(a^{x^2-3x+1} \ln a + \frac{1}{(x^2-3x+1)\ln a})$

b) $f'(x) = (2x^2 - 3x + 3)^{x-1}(\ln(2x^2 - 3x + 3) + \frac{(x-1)(4x-3)}{2x^2-3x+3})$

4.1. TANGENTA I NORMALA

1. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^2$ u točki $T(3, f(3))$.

R: $y = 6x - 9$

2. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - x + 2$ u točki s apscisom $x_0 = 1$.

R: $y = 2x$

3. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ u točki s apscisom $x_0 = 0$.

R: $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$

4. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sin x$ u točki s apscisom $x_0 = 0$.

R: $y = x$

5. Odredite jednadžbu tangente na elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$ u točki $D(2, y < 0)$.

R: $y = \frac{1}{2}x - 4$

6. Odredite jednadžbu tangente i normale na hiperbolu $y = \frac{1}{x}$ u točki s apscisom $x_0 = \frac{1}{2}$.

R: $y = -4x + 4$, $y = \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$

7. Pod kojim kutem se sijeku krivulje $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$?

R: $\varphi = 36^\circ 52'$

8. Odredite kut pod kojim se sijeku grafovi funkcija $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ i $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

R: $\varphi = 0^\circ$

9. Kako glasi jednadžba tangente na krivulju $y = 1 + 2x - x^2$ u točki njenog presjeka s osi ordinata?

R: $y = 2x - 1$

10. Kako glasi jednadžba tangente na graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x + 5$ koja je okomita na pravac $y=x$?

R: $y = -x + \frac{19}{4}$

4.2. EKSTREMI FUNKCIJE

1. Odredite intervale monotonosti i ekstreme funkcije

- a) $f(x) = x^3 - 12x + 1$
- b) $f(x) = x^4 - x^3$
- c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
- d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$
- e) $f(x) = x^4 - 4x^3$.

R: a) Funkcija raste na $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, funkcija pada na $(-2, 2)$. $T_1(-2, 17)$ je

lokalni maksimum, $T_2(2, -15)$ je lokalni minimum funkcije.

b) Funkcija pada na $(-\infty, \frac{3}{4})$ a raste na $(\frac{3}{4}, \infty)$. Točka $(\frac{3}{4}, -\frac{27}{1024})$ je minimum.

c) Funkcija raste $\forall x \in R$ i nema ekstrema.

d) Funkcija raste na $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ a pada na $(1, 2)$. U točki $(1, -\frac{1}{6})$ ima lokalni maksimum a u točki $(2, -\frac{1}{3})$ je lokalni minimum.

e) Funkcija pada na $(-\infty, 3)$ a raste na $(3, \infty)$, u točki $(3, -27)$ ima minimum.

2. Odredite intervale monotonosti i ekstreme funkcije

- a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
- b) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 7x - 10}$
- c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
- d) $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 4)$

e) $f(x) = \frac{x^2+5}{2-x}$

f) $f(x) = \frac{x+4}{7-x^2}$.

R: a) Funkcija raste na $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ a pada na $(0,2) \setminus \{1\}$. U točki $(0,0)$ je lokalni maksimum.

b) Funkcija raste na $[2, \frac{7}{2})$ a pada na $(\frac{7}{2}, 5]$. U točki $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ je maksimum .

c) Funkcija pada na $(-\infty, 2]$ a raste na $[3, \infty)$. Nema ekstrema.

d) Funkcija pada na $(-\infty, -4)$ a raste na $(-1, \infty)$. Nema ekstrema.

e) Funkcija pada na $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ a raste na $(-1,5) \setminus \{2\}$. U točki $(-1,2)$ ima lokalni minimum a u točki $(5,-10)$ lokalni maksimum.

f) Funkcija raste na $(-\infty, -7) \cup (-1, \infty) \setminus \{\sqrt{7}\}$ a pada na $(-7,-1) \setminus \{-\sqrt{7}\}$. U točki $(-1, \frac{1}{2})$ ima lokalni minimum a u točki $(-7, \frac{1}{14})$ lokalni maksimum.

3. Odredite vrijednost koeficijenta a tako da funkcija f postiže ekstrem u točki x_0 i provjerite radi li se o minimumu ili o maksimumu

a) $f(x) = x^2 + ax + 2, x_0 = 3$

b) $f(x) = ax^2 + 2x - 5, x_0 = 5$.

R: a) $a = -6$, minimum funkcije b) $a = -\frac{1}{5}$, maksimum funkcije

4. Odredite područje definicije, nul točke, intervale monotonosti i stacionarne točke funkcije

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}.$$

R: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, nul točaka nema. Funkcija raste na $(-\infty, 0) \setminus \{-2\}$ a pada na $(0, \infty) \setminus \{2\}$. U točki $(0,-1)$ je lokalni maksimum.

4.3. ASIMPTOTE FUNKCIJE

1. Odredite asimptote funkcije

a) $f(x) = \frac{3-2x}{3x+1}$

b) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{3x^2+2x+1}{x^2-1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-3x}{2x+1}$

e) $f(x) = \frac{3x^3-1}{x^2-2}$

f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

g) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

h) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x+1}$.

R: a) $x = -\frac{1}{3}$ je vertikalna asimptota, $y = -\frac{2}{3}$ je horizontalna asimptota.

b) $x = -3$ je vertikalna asimptota, $y = 1$ je horizontalna asimptota.

c) $x = 1$ i $x = -1$ su vertikalne asimptote, $y = 3$ je horizontalna asimptota.

d) $x = -\frac{1}{2}$ je vertikalna asimptota, $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ je kosa asimptota.

e) $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ su vertikalne asimptote, $y = 3x$ je kosa asimptota.

f) $x = 1$ i $x = -1$ su vertikalne asimptote, $y = x$ je kosa asimptota.

g) $x = -1$ je vertikalna asimptota, $y = x - 1$ je kosa asimptota.

h) $y = x - 1$ je kosa asimptota, vertikalnih nema.

2. Odredite asimptote funkcije

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.

R: a) $y = x$ je desna kosa asimptota, $y = -x$ je lijeva kosa asimptota, vertikalnih nema.

b) $x = 0$ je desna vertikalna asimptota, $y = -x + 1$ je obostrana kosa asimptota.

3. Odredite vertikalne asimptote grafa funkcije $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x+6}$. Ima li graf kosu asimptotu? (ako ima, napišite njenu jednadžbu).

R: $x = -2$ je vertikalna asimptota, $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ je kosa asimptota.

4.4. KONVEKSNOST I KONKAVNOST

1. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke pregiba funkcije f

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x$

b) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 72x^2 + 4x$.

R: a) $(\frac{2}{3}, \frac{-140}{27})$ je točka pregiba. Funkcija je konkavna na $(-\infty, \frac{2}{3})$ a konveksna na $(\frac{2}{3}, \infty)$.

b) Točke $(-4, f(-4))$ i $(3, f(3))$ su točke pregiba. Funkcija je kokavna na $(-4, 3)$ a konveksna na $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

4.5. TOK FUNKCIJE

1. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije f

a) $f(x) = \frac{x^4}{8} - x^2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

4.6. PRIMJENA DERIVACIJA

1. Konopom duljine 60 m treba omeđiti vrt tako da njegova površina bude što veća.

Koliko iznosi površina vrta?

R: $a = 15\text{m}$, $b = 15\text{m}$, $P = 225\text{m}^2$

2. U krug polumjera 10 cm upišite pravokutnik najvećeg opsega.

R: $a = b = 10\sqrt{2} \text{ cm}$, $O = 40\sqrt{2} \text{ cm}$

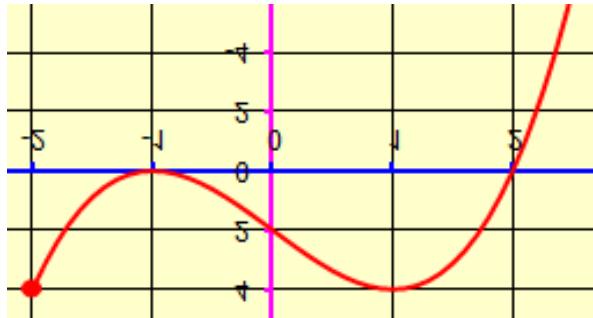
3. Broj x rastavite kao zbroj dva broja tako da njihov umnožak bude najveći.

R: $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$

4. Odredite duljine stranica jednakokračnog trokuta kojem je opseg 18 cm tako da mu površina bude maksimalna.

R: $a = b = 6 \text{ cm}$, $P = 9\sqrt{3}$

5. Na slici je dan graf derivacije $f'(x)$ funkcije $f(x)$. Odredite lokalne ekstreme funkcije f



R: $(2, f(2))$ je lokalni maksimum funkcije.

4.7. L'HOSPITALOVO PRAVILO

1. Primjenom L`Hospitalovog pravila izračunajte limese

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctg x}$

e) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 3x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)\sin \frac{1}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}.$

R: a) -2 b) 0 c) 2 d) 1 e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{2}$ g) 1 h) ∞ i) 2 j) $\frac{1}{2}$

5. NIZOVI

1. Zadani su opći članovi niza . Napišite prvih 5 članova niza

a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) $a_n = 2 + (-1)^n$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+2}$

d) $a_n = \cos \frac{n\pi}{4}.$

R: a) 3,6,12,24,48 b) 1,3,1,3,1 c) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{27}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Odredite opći član niza

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

b) $\frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \dots$

c) $0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \dots$

R: a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ c) $a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k-1 \\ \frac{1}{\frac{n}{2}+2}, & n = 2k \end{cases}$

3. Odredite aritmetički niz ako je

a) $a_3 + a_7 = 2$ b) $a_3 + a_9 = 10$
 $a_6 - a_4 = 2$ $a_1 \cdot a_4 = 45$.

R: a) $a_1 = -3, d = 1$ b) $a_1 = -15, d = 4$ ili $a_1 = \frac{15}{2}, d = -\frac{1}{2}$

4. Koliki je zbroj prvih 17 članova aritmetičkog niza čiji je deveti član jednak 35 ?

R: $S_{17} = 595$

5. U aritmetičkom nizu je $a_3 + a_7 = 10$. Odredite sumu prvih devet članova tog niza.

R: $S_9 = 45$

6. U jednadžbi $2 + 5 + 8 + \dots + x = 155$ izračunajte koliko iznosi x.

R: $x = 29$

7. Dokažite da je niz $a_n = -5 \cdot 2^n$ geometrijski.

R: $a_1 = -10, q = 2$

8. Odredite geometrijski niz ako je

a) $a_1 - a_2 = 35$
 $a_3 - a_4 = 560$
b) $a_1 + a_2 + a_3 = 31$
 $a_1 + a_3 = 26$.

R: a) $a_1 = \frac{35}{4}, q = 4$ ili $a_1 = -\frac{35}{4}, q = -4$ b) $a_1 = 1, q = 5$ ili $a_1 = 25, q = \frac{1}{5}$

9. Odredite x tako da brojevi $x + 5$, $25 - x$ i $30 + 2x$ budu tri uzastopna člana geometrijskog niza.

R: $x_1 = 5, x_2 = 95$

10. Ispitajte je li niz čiji je opći član $a_n = \frac{1}{n+2}$ omeđen .

R: Niz je omeđen.

11. Ispitajte je li niz čiji je opći član $a_n = \frac{n+1}{n}$ monoton ?

R: Niz je monoton.

12. Ispitajte monotonost niza čiji je opći član $a_n = \frac{2^n}{n+1}$.

R: Niz je monoton.

13. Opći član niza je $a_n = \frac{1}{n^3}$. Je li niz konvergentan ?

R: Niz je konvergentan.

14. Napišite prva dva člana niza $a_n = \frac{1-5n^2}{2n^2+2n+4}$. Je li niz konvergentan ?

R: $\frac{1}{2}, -\frac{19}{16}$, niz je konvergentan.

15. Ispitajte konvergenciju niza čiji je opći član

a) $a_n = \frac{1-5n}{2n^2}$

b) $a_n = \frac{5n^2-3}{3n+2n^2}$

c) $a_n = \frac{3n^2+2n}{5n-1}$.

R: a) Da b) Da c) Ne

16. Izračunajte limes sljedećih nizova čiji je opći član

a) $a_n = \frac{3n^3+2n^2}{n^3-n^2+1}$

b) $a_n = \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2-2n+1}}$

c) $a_n = 4n(\sqrt{n^2+1} - n)$

d) $a_n = \frac{3^n+1}{2-3^{n+1}}$

e) $a_n = (1 - \frac{2}{3^n})^n$.

R: a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $-\frac{1}{3}$ e) e^{-2}

17. Izračunajte

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})^n$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n-1})^n$.

R: a) e^{-1} b) e^2

18. Napišite peti član rekurzivnog niza određenog uvjetima

a) $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} + 1$

b) $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1} - n$.

R: a) $a_5 = 202$ b) $a_5 = 7$

6. REDOVI

1. Ispitajte konvergenciju reda

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2n^2+2}$.

R: a) Red divergira b) Red divergira

2. Pokažite da je red geometrijski i izračunajte mu sumu

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$.

R: a) $q = \frac{1}{10}$, $S = \frac{40}{9}$ b) $q = \frac{1}{3}$, $S = 1$

3. Ispitajte konvergenciju reda

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^{n+1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 5^{n+1}}{10^n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5^{n+1}}{n!}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n-1) \cdot \pi$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.

R: a) Konvergira b) Divergira c) Konvergira d) Konvergira e) Konvergira f) Konvergira

g) Divergira h) Konvergira i) Divergira j) Konvergira k) Divergira

4. Ispitajte koji red konvergira

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \leq 1$.

R: a) Konvergira b) Divergira

5. Ispitajte jesu li zadani redovi konvergentni

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$

- b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^3}$.

R: a) Da b) Da c) Da

6. Provjerite jesu li redovi absolutno konvergentni

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{5^n}$.

R: a) Da b) Da

6.1. RED POTENCIJA

1. Odredite radijus konvergencije i interval konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} \cdot (x - 1)^n. \text{ Konvergira li red za } x = 2 ?$$

R: $r = 4$, interval konvergencije $(-3, 5)$, red konvergira za $x = 2$

2. Odredite radijus konvergencije i interval konvergencije reda potencija

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)} \cdot (x + 2)^n$
b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!} \cdot x^n$.

R: a) $r = 1$, interval konvergencije $(-3, -1)$ b) $r = \infty$, red konvergira $\forall x \in R$

3. Odredite radijus i interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n} x^n$. Konvergira li red za $x=1$?

R: $r = 0$, red divergira $\forall x \in R$

4. Odredite interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{(n+1)!} (x - 1)^n$. Konvergira li red za $x = 5$?

R: Red konvergira $\forall x \in R$

5. Odredite interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x + 1)^n$.

R: $r = \infty$, red konvergira $\forall x \in R$

6. Odredite interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!} (x + 1)^n$. Konvergira li red za $x = 1$?

R: $r = \infty$, red konvergira $\forall x \in R$

6.2. TAYLOROV RED

1. Odredite Taylorov polinom četvrtog stupnja $P_4(x)$ za funkciju $f(x) = e^x$ u okolini točke $x_0 = 0$.

$$R: P_4(x) = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

2. Odredite Taylorov polinom četvrtog stupnja $P_4(x)$ za funkciju $f(x) = \cos x$ u okolini točke $x_0 = 0$.

$$R: P_4(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

3. Odredite MacLaurinov polinom petog stupnja za funkciju $f(x) = \ln(x + 2)$.

$$R: P_5(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{160}x^5$$

4. Funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ razvijte u Taylorov red u okolini točke $x_0 = 2$.

$$R: \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x - 2)^n$$

5. Odredite Taylorov polinom trećeg stupnja za funkciju $f(x) = \sin x$ u okolini točke

$$x_0 = \pi.$$

$$R: P_3(x) = -1(x - \pi) + \frac{1}{6}(x - \pi)^3$$

6. Funkciju $f(x) = \frac{1}{1-x}$ razvijte u MacLaurinov red potencija. Odredite interval konvergencije reda.

$$R: \sum_{n=0}^{\infty} x^n, r = 1, (-1, 1) \text{ je interval konvergencije}$$

7. Funkciju $f(x) = e^x$ razvijte u MacLaurinov red potencija. Odredite interval konvergencije reda.

$$R: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, r = \infty, \text{ red konvergira } \forall x \in R$$

8. Izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x) = \ln x$ u točki $x = 0.9$ pomoću Taylorovog polinoma 2.stupnja u okolini točke $x_0 = 1$.

$$R: P_2(0.9) = -0.105$$

9. Pomoću Taylorovog polinoma drugog stupnja u okolini točke $x_0 = 1$ izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x) = e^{x^2}$ za $x = 1.1$.

$$R: P_2(1.1) = 3.343487$$

- 10.** Pomoću Taylorovog polinoma drugog stupnja u okolini točke $x_0 = 1$ izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x) = e^{1-x}$ za $x = 1.1$.

R: $P_2(1.1) = 0.905$

7. INTEGRALI

7.1. NEODREĐENI INTEGRAL

- 1.** Sljedeće integrale svedite na tablične transformirajući podintegralnu funkciju i koristeći osnovna pravila za integriranje.

- $\int x^3 dx$
- $\int (x^2 - 5x + 5) dx$
- $\int \left(\sin x - \cos x + \frac{2}{x}\right) dx$
- $\int (5e^x + 3\operatorname{tg} x) dx$
- $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x} dx$
- $\int \sqrt{x} \sqrt{x \sqrt{x}} dx$
- $\int (1 + x^2)^2 dx$
- $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x} dx$
- $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$
- $\int (5 - 2^x) dx$.

R: a) $\frac{x^4}{4} + c$ b) $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 5x + c$ c) $-\cos x - \sin x + 2\ln|x| + c$ d) $5e^x - 3\ln|\cos x| + c$

e) $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + c$ f) $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + c$ g) $x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$ h) $\frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|x| + c$ i) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{\frac{-1}{4}} + c$

j) $5x - \frac{2^x}{\ln 2} + c$

- 2.** Riješite sljedeće integrale transformacijom kvadratnog trinoma i svođenjem na tablične integrale

- $\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$
- $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$
- $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$
- $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$
- $\int \frac{dx}{x - x^2 - \frac{5}{2}}$

f) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$
 g) $\int \frac{dx}{2x^2 - 14x + 20}$
 h) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}$
 i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}}$
 j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

R: a) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$ c) $\frac{2\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + c$ d) $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(x + \frac{1}{2} \right) + c$

e) $\frac{-2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3} + c$ f) $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + c$ g) $\frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-5}{x-2} \right| + c$
 h) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + \frac{5}{2}} \right| + c$ i) $\arcsin(x+2) + c$ j) $\ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| + c$

7.1.1. METODA SUPSTITUCIJE

1. Riješite integrale metodom supstitucije

a) $\int (2 - 2x)^5 dx$
 b) $\int \frac{dx}{(x-3)^2}$
 c) $\int \sqrt{2x-1} dx$
 d) $\int e^{-x} dx$
 e) $\int \frac{dx}{x-3}$
 f) $\int \operatorname{tg} x dx$
 g) $\int \operatorname{ctg} x dx$
 h) $\int \sin(2x + 3) dx$
 i) $\int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx$
 j) $\int \frac{x dx}{1+x^4}$
 k) $\int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}.$

R: a) $-\frac{1}{12}(2 - 2x)^6 + c$ b) $-\frac{1}{x-3} + c$ c) $\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + c$ d) $-e^{-x} + c$

e) $\ln|x-3| + c$ f) $-\ln|\cos x| + c$ g) $\ln|\sin x| + c$ h) $-\frac{1}{2}\cos(2x + 3) + c$

i) $\frac{2}{3}(3 + \ln x)\sqrt{3 + \ln x} + c$ j) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) + c$ k) $-\frac{1}{1+e^x} + c$

2. Riješite integrale koristeći metodu supstitucije

a) $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$

- b) $\int 2^{\cos x} \cdot \sin x dx$
 c) $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$
 d) $\int (3x^2 + 2x)(x^3 + x^2 - 1) dx$
 e) $\int \frac{x dx}{3-2x^2}$
 f) $\int \sin x \cos^3 x dx$
 g) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$
 h) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$
 i) $\int \sin x \cdot e^{-\cos x} dx.$

R: a) $e^{\sin x} + c$ b) $-\frac{2^{\cos x}}{\ln 2} + c$ c) $-\frac{1}{\ln x} + c$ d) $\frac{1}{4}(x^3 + x^2 - 1)^4 + c$ e) $-\frac{1}{4} \ln |3 - 2x^2| + c$
 f) $-\frac{1}{4} \cos^4 x + c$ g) $\frac{1}{\cos x} + c$ h) $-\sqrt{1-x^2} + c$ i) $e^{-\cos x} + c$

3. Riješite metodom supstitucije

- a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+2}}$
 b) $\int x \cdot \sqrt[3]{x-3} dx.$

R: a) $-4\sqrt{x+2} + c$ b) $\frac{3}{7}(x-3)^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{4}(x-3)^{\frac{4}{3}} + c$

7.1.2. METODA PARCIJALNE INTEGRACIJE

1. Riješite integrale primjenom metode parcijalne integracije

- a) $\int \ln x dx$
 b) $\int x \ln x dx$
 c) $\int x \cdot \ln(x^2 - 1) dx$
 d) $\int x \cos x dx$
 e) $\int x \sin x dx$
 f) $\int x \cdot 2^{-x} dx$
 g) $\int x \cdot \arctan x dx$
 h) $\int \arctan x dx$
 i) $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$
 j) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$
 k) $\int x \sin x \cos x dx$
 l) $\int x e^{-x} dx$
 m) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$
 n) $\int e^{-x} \sin x dx.$

R: a) $x \ln x - x + c$ b) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$ c) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln|x^2 - 1| - \frac{1}{2}x^2 + c$
d) $x \sin x + \cos x + c$ e) $-x \cos x + \sin x + c$ f) $\frac{-x \ln 2 - 1}{2^x \ln^2 2} + c$
g) $\frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctan x + c$ h) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1 + x^2| + c$
i) $\frac{-2 \ln x - 1}{4x^2} + c$ j) $-x \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + c$ k) $\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] + c$
l) $x e^x - e^x + c$ m) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$ n) $-\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + c$

7.1.3. INTEGRAL RACIONALNE FUNKCIJE

1. Riješite integrale

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4}$
b) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x}$
c) $\int \frac{x-3}{x^3-x} dx$
d) $\int \frac{x^2+2}{-x^2+2} dx$
e) $\int \frac{x+1}{x^2-x+\frac{1}{4}} dx$
f) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$
g) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+2} dx$
h) $\int \frac{10+x}{12+x-x^2} dx$
i) $\int \frac{-x-4}{x^2-x} dx.$

R: a) $\frac{1}{5} \ln|x - 1| - \frac{1}{5} \ln|x - 4| + c$ b) $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{x+5} \right| + c$
c) $3 \ln|x| - \ln|x - 1| - 2 \ln|x + 1| + c$ d) $-x - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + c$
e) $\ln \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{3}{2x-1} + c$ f) $\frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 + 2| + \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c$
g) $\ln|x^2 - x + 2| + c$

2. Riješite integrale

a) $\int \frac{x^2-2x+3}{x-1} dx$
b) $\int \frac{2x^2-2x+3}{x-1} dx$
c) $\int \frac{2x-1}{x-1} dx$

d) $\int \frac{2x^3 - 1}{x-1} dx$
e) $\int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx$
f) $\int \frac{4x+3}{6-2x} dx$
g) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$

R: a) $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-1| + c$ b) $x^2 + 3\ln|x-1| + c$ c) $2x + \ln|x-1| + c$

d) $\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 2x + \ln|x-1| + c$ e) $x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$ f) $-2x - \frac{15}{2}\ln|x-3| + c$
g) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + c$

7.2. ODREĐENI INTEGRAL

1. Izračunajte sljedeće određene integrale

a) $\int_{-1}^3 3x dx$
b) $\int_1^5 \frac{dx}{x^2}$
c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{x} dx$
d) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
e) $\int_0^{\pi} \sin x dx$
f) $\int_0^{\pi} (x + \cos x) dx$
g) $\int_{-1}^1 (e^x - 2x) dx$
h) $\int_1^{10} \frac{2dx}{x}$
i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+1}.$

R: a) 12 b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) 2 f) $\frac{\pi}{2}$ g) $e - e^{-1}$ h) $2\ln 10$ i) $\frac{\pi}{2}$

7.2.1. SUPSTITUCIJA U ODREĐENOM INTEGRALU

1. Izračunajte sljedeće integrale

a) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}$
b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx$
c) $\int_0^2 2x \cdot (x^2 + 1)^3 dx$

- d) $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{1+2x}}$
 e) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 11} dx$
 f) $\int_0^2 (2 - 3x^2)(x^3 - 2x + 1)^3 dx$
 g) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x dx.$

R: a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) 156 d) 3 e) $2 - \frac{\pi}{2}$ f) -156 g) $\frac{1}{5}(e - 1)^5$

7.2.2. PARCIJALNA INTEGRACIJA U ODREĐENOM INTEGRALU

1. Riješite sljedeće integrale primjenom formule za parcijalnu integraciju

- a) $\int_1^e \ln x dx$
 b) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$
 c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$
 d) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$
 e) $\int_{-1}^1 x \arctan x dx.$

R: a) 1 b) $1 - 2e^{-1}$ c) $\frac{\pi}{2} - 1$ d) 1 e) $\frac{\pi}{2} - 1$

7.2.3. NEPRAVI INTEGRALI

1. Izračunajte neprave integrale

- a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$
 b) $\int_{-\infty}^3 e^x dx$
 c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
 d) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$
 e) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$
 f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
 g) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

R: a) ∞ b) e^3 c) π d) $-\infty$ e) 1 f) 2 g) ∞

7.3. PRIMJENA ODREĐENOG INTEGRALA

7.3.1. POVRŠINA RAVNINSKOG LIKA

1. Nacrtajte lik omeđen krivuljama $y = 1 + x^2$ i $y = x + 3$ i izračunajte mu površinu.

$$R: P = \frac{9}{2}$$

2. Nacrtajte lik omeđen krivuljama $y = 6 - x - 2x^2$ i $y = 4x + 3$ i izračunajte mu površinu.

$$R: P = \frac{343}{24}$$

3. Nacrtajte lik omeđen krivuljama $x = 2$, $y = -2x + 2$, $y = \ln x$ i izračunajte mu površinu.

$$R: P = 2\ln 2$$

4. Nacrtajte lik omeđen krivuljama $y = 3-3x$, $y = \ln x$ i $x = 3$ i izračunajte mu površinu.

$$R: P = 3\ln 3 + 4$$

5. Skicirajte lik omeđen grafom funkcija $f(x) = x^2 + 2x - 3$ i $g(x) = 2x + 1$ i izračunajte mu površinu.

$$R: P = \frac{32}{3}$$

6. Izračunajte površinu omeđenu grafom funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, osi y i pravcima $y = 1$ i $y = 3$.

$$R: P = \frac{26}{3}$$

7. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = -x^2 + 2x$ i pravcem $y = -x$.

$$R: P = \frac{9}{2}$$

8. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

$$R: P = 9$$

9. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y^2 = x$ i $y = x + 2$.

$$R: P = \frac{9}{2}$$

7.3.2. DULJINA LUKA KRIVULJE

1. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \sqrt{(x+1)^3}$ između točaka s apscisom $x_1 = -1$ i $x_2 = 4$.

$$R: l = \frac{335}{27}$$

2. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = x \cdot \sqrt{x}$, $x \in [0,5]$.

$$R: l = \frac{335}{3}$$

3. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \sqrt{(2x-1)^3}$ od točke A(0.5, 0) do točke u kojoj krivulja siječe pravac $x=4$.

$$R: l = \frac{511}{27}$$

7.3.3. VOLUMEN ROTACIONOG TIJELA

1. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x}$ te prvcima $y = 0$, $x = 0$ i $x = 4$.

$$R: V = 8\pi$$

2. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog krivuljom $y = x^2 + 1$, osi x, $0 \leq x \leq 3$.

$$R: V = \frac{348}{5}\pi$$

3. Odredite obujam tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog parabolom $y = -x^2 + 4x$ i prvcem $y = x$ oko osi x.

$$R: V = \frac{108}{5}\pi$$

4. Izračunajte obujam tijela nastalog rotacijom oko osi x lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x$ i prvcem $x = 1$.

$$R: V = 2\pi$$

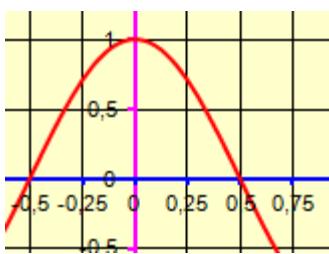
5. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom oko osi x lika omeđenog grafom funkcije $y = x^3$ i prvcem $x = 1$.

$$R: V = \frac{\pi}{7}$$

8. PRIMJERI KOLOKVIJA I ISPITA

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE / ANALIZE 1

1. Odredite područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 6}$.
 2. Odredite kompoziciju funkcija $(fog)(x)$ i $(gof)(1)$ ako je $f(x) = \log x + 5x$ i $g(x) = 10^{x-2}$.
 3. Napišite neku logaritamsku funkciju s bazom manjom od 1 i nacrtajte je. Odredite joj domenu. Koliki je $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?
 4. Izračunajte: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$.
 5. Odredite derivaciju funkcije a) $f(x) = \sqrt{2x^4 - 2x^3 + 1}$ b) $f(x) = \sin^2(2x^4 - 5)$.
 6. Kako glasi jednadžba tangente na graf funkcije $f(x) = x \ln x$ u točki $(1,0)$?
 7. Nacrtajte funkciju i odredite je li neprekidna u točki $x_0=0$? Obrazložite odgovor.
- $$f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$$
8. Odredite intervale monotonosti i ekstreme funkcije $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3x + 4}$.
 9. Odredite sve asymptote grafa funkcije $f(x) = \frac{-2x^2 - 5}{x + 1}$.
 10. Na slici je dan graf derivacije $f'(x)$ funkcije $f(x)$. Odredite lokalne ekstreme funkcije f .



Rješenja:

1. $D(f) = [-3, 2]$
2. $fog(x) = x - 2 + 5 \cdot 10^{x-2}$, $gof(1) = 10^3$
3. $D(f) = (0, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$

4. a) 0 b) -5

5. a) $f'(x) = \frac{8x^3 - 6x^2}{2\sqrt{2x^4 - 2x^3 + 1}}$ b) $f'(x) = 2\sin(2x^4 - 5) \cdot \cos(2x^4 - 5) \cdot 8x^3$

6. $y = x - 1$

7. Nije neprekidna

8. Na $(-\infty, -\frac{3}{2})$ raste, na $(-\frac{3}{2}, \infty)$ pada, $(-\frac{3}{2}, \frac{24}{43})$ je maksimum.

9. $x = -1$ je vertikalna asimptota, $y = -2x + 2$ je kosa asimptota.

10. $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ je lokalni minimum, $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ je lokalni maksimum.

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE / ANALIZE 1

1. Izračunajte a) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int \frac{-x-4}{x^2-x} dx$ c) $\int (3x+2)\cos x dx$.

2. Nacrtajte lik omeđen krivuljama $y = 1 + x^2$ i $y = x + 3$ i izračunajte mu površinu.

3. Lik omeđen krivuljom $y = \sqrt{\frac{2x+5}{x^2+4}}$, x-osi za $x \in [0,1]$ rotira oko x-osi. Izračunajte volumen tako nastalog tijela.

4. Napišite prva dva člana niza $a_n = \frac{1-5n^2}{2n^2+2n+4}$. Je li niz konvergentan?

5. Odredite interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}(x+1)^n$. Konvergira li red za $x = 0$?

6. Pomoću Taylorovog polinoma drugog stupnja u okolini točke $x_0 = 0$ izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x) = \ln(2x+1)$ za $x = 0.1$.

Rješenja:

1. a) $-2\cos\sqrt{x} + c$ b) $4\ln|x| - 5\ln|x-1| + c$ c) $(3x+2)\sin x + 3\cos x + c$

2. $P = \frac{9}{2}$

3. $V = \pi[\ln 5 - \ln 4 + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}]$

4. $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{19}{16}$, niz je konvergentan.

5. $r = \infty$, red konvergira $\forall x \in R$

6. $P_2(x) = 2x - 2x^2$, $P_2(0.1) = 0.18$

ISPIT IZ ANALIZE 1/ANALIZE

I DIO

1. Odredite područje definicije, nul točke, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}.$$

2. Odredite sve asimptote grafa funkcije $f(x) = \frac{2-x^3}{x^2-1}$ i pokažite računski.

3. Odredite f' ako je a) $f(x) = \sin^2(5x-11)$ b) $f(x) = e^{x^2} + 2x^2$

c) $f(x) = \frac{2}{x^5} + 3x^3 \sqrt[4]{x^3}.$

4. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x \leq 2 \\ x+a & x > 2 \end{cases}$. Odredite vrijednost parametra a tako da funkcija f

bude neprekidna. Za dobivenu vrijednost parametra a nacrtajte funkciju $f(x)$.

II DIO

1. a) Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-6)^n}$

b) Odredite radijus i interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x-2)^n$. Konvergira li red za $x = -1$?

2. Pomoću Taylorovog polinoma drugog stupnja u okolini točke $x_0 = 1$ izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x) = \ln x$ za $x = 1.1$.

3. Izračunajte a) $\int \left(2 - \frac{2}{x^3}\right) \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x} dx$ b) $\int x \ln x dx$

c) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} dx.$

4. Skicirajte lik omeđen grafom funkcija $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ i $g(x) = -2x - 1$.

Izračunajte površinu tog lika.

Rješenja:

I DIO

1. $D(f) = (-2, 3)$, funkcija raste na intervalu $(-2, \frac{1}{2})$ a pada na intervalu $(\frac{1}{2}, 3)$. Točka

$(-\frac{1}{2}, \ln \frac{21}{4})$ je stacionarna točka (maksimum funkcije).

2. $x = 1$ i $x = -1$ su vertikalne asimptote, $y = -x$ je kosa asimptota.

3. a) $f'(x) = 10\sin(5x - 11) \cdot \cos(5x - 11)$

b) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} + 4x$

c) $f'(x) = -10x^{-6} + \frac{45}{4}x^{\frac{11}{4}}$

4. $a = -2$

II DIO

1. a) Red konvergira

b) $r = 0$, red ne konvergira za $x = -1$

2. $P_2(x) = x - 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$

$P_2(1.1) = 0.05$

3. a) $\frac{16}{21}x^{\frac{21}{8}} + \frac{16}{3}x^{-\frac{3}{8}} + c$

b) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + c$

c) $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x - 1| + c$

4. $P = \frac{32}{3}$

ISPIT IZ ANALIZE 1/ANALIZE

I DIO

1. Odredite područje definicije, nul točke, intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x^2+25}{x^2-25}.$$

2. Odredite vertikalne asimptote grafa funkcije $f(x) = \frac{2x^2+1}{3x+6}$. Ima li graf lijevu kosu asimptotu? (ako ima, napišite njenu jednadžbu)

3. Odredite f' ako je a) $f(x) = \operatorname{tg}^3(4x-1)$ b) $f(x) = e^x \sin 3x$

c) $f(x) = \frac{3}{x} + 2x^2 \sqrt[4]{x^3}$.

4. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 0.5^x & x < 0 \\ 2a & x = 0 \\ 1-x & x > 0 \end{cases}$. Odredite vrijednost parametra a tako da funkcija f bude neprekidna. Za dobivenu vrijednost parametra, nacrtajte funkciju $f(x)$.

II DIO

1. a) Ispitajte konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{n^2 + 2}$

b) Odredite radius i interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} (x-3)^n$. Konvergira li red za $x=2$?

2. Napišite Taylorov polinom četvrtog stupnja za funkciju $f(x) = e^{-x}$ u okolini točke

$$x_0 = -2.$$

3. Izračunajte a) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} dx$ b) $\int \frac{x}{\sin^2(x^2 - 3)} dx$

c) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{5}{x^3} \right) \sqrt{x^5} \sqrt{x} dx.$

4. Izračunajte površinu lika omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 3x$ i x osi za $x \in [0, 3]$.

Rješenja:

I DIO

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$, nul točaka nema, funkcija raste na $(-\infty, 0)$ a pada na $(0, \infty)$. Točka $(0, -1)$ je lokalni maksimum funkcije.
2. $x = -2$ je vertikalna asimptota funkcije, $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ je kosa asimptota.
3. a) $f'(x) = \frac{12tg^2(4x-1)}{\cos^2(4x-1)}$
b) $f'(x) = e^x \sin 3x + 3e^x \cos 3x$
c) $f'(x) = -3x^{-2} + \frac{11}{2}x^{\frac{7}{4}}$
4. $a = \frac{1}{2}$

II DIO

1. a) red divergira
b) $r = 0$, red ne konvergira za $x = 2$.
2. $P_4(x) = e^2 - e^2(x+2) + \frac{e^2}{2}(x+2)^2 - \frac{e^2}{6}(x+2)^3 + \frac{e^2}{24}(x+2)^4$
3. a) $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x-1| + c$
b) $-\frac{1}{2}ctg(x^2 - 3) + c$
c) $\frac{4}{17}x^{\frac{17}{4}} - \frac{20}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$
4. $P = \frac{9}{2}$

9. LITERATURA

1. Rivier, Karmen: Matematika, Zbirka riješenih zadataka, Veleučilište u Splitu, Split, 2003.
2. Antoliš, S., Copić, A., Antončić, N.: Matematika 4, Udžbenik sa zbirkom zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
3. Dakić, B., Elezović, N.: Matematika 4, Udžbenik i zbirka zadataka, Element, Zagreb, 2007.
4. Javor, Petar: Uvod u matematičku analizu, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
5. Dohvaćeno s
http://matematika.fkit.hr/staro/matematika_2/vjezbe/2%20-%20odredjeni%20integral%20i%20primjene.pdf
6. Beban – Brkić, Jelena: Realne funkcije; Dohvaćeno s
<http://www2.geof.unizg.hr/~jbeban/M1/06.pdf>
7. Pašić, Mervan: Funkcije; Dohvaćeno s
https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/C3Funkcije.pdf