SVEUČILIŠTE U SPLITU
SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STRUČNE STUDIJE

UNIVERSITY OF SPLIT
UNIVERSITY DEPARTMENT OF PROFESSIONAL STUDIES

Analiza

Praktikum za laboratorijske vježbe

Arijana Burazin Mišura

Prosinac, 2017.

Predgovor

Matlab je programski paket namjenjen rješavanju raznih inženjerskih i znanstvenih problema. Prvobitno je dizajniran za izvođenje numeričkih izračuna prvenstveno iz linearne algebre. Međutim s vremenom su dodane brojne funkcionalnosti, kako matematičke tako i iz drugih područja znanosti: statistike, ekonomije, biologije, obrade podataka, obrade slike, modeliranja, ukratko gdje god se ukazala potreba za numeričkim izračunom.

Matlab možemo promatrati i kao programski jezik, kao što su C ili C++. Međutim, za razliku od njih on je interaktivan, pohranjivanje naredbi u zasebnu datoteku te njeno kompajliranje i izvođenje nije potrebno što ubrzava traženi izračun.

Ovaj praktikum namjenjen je studentima koji već posjeduju osnovno znanje uporabe Matlaba (obzirom da imaju odslušan kolegij Linearna algebra). Sadržaj prati predavanja i vježbe kolegija Analiza te stoga obrađeni matematički pojmovi nisu (ponovo) definirani. Naglasak je stavljen na njihovo priblližavanje studentima uz pomoć Matlaba.

Obzirom na važnost poznavanja i čitanja grafa funkcije, većina funkcija popraćena je odgovarajućim grafom (čak i kad u tekstu zadatka on nije eksplicitno zatražen).

Na početku svake vježbe dan je pregled naredbi u Matlabu pogodnih za objašnjenje/računanje odgovarajućih matematičkih zadataka. Nakon toga slijedi nekoliko u potpunosti riješenih primjera, dok se na kraju nalaze zadaci predviđeni za samostalni izračun.

1. VJEŽBA

Definiranje novih funkcija u Matlabu

Pored matematičkih funkcija ugrađenih u Matlab, moguće je koristiti i vlastite funkcije. To je moguće napraviti na više načina među kojima su najčešće korišteni uporaba simboličkog izraza, definiranje lokalne funkcije te anonimne funkcije. Osnovna razlika između lokalne funkcije i simboličkog izraza je što funkcija za razliku od simboličkog izraza može biti pozivana s proizvoljnom vrijednošću argumenta. S druge strane, simbolički izraz daje nam mogućnost upotrebe simboličkog deriviranja. Mnoge funkcije ugrađene u Matlab prihvaćaju lokalne i anonimne funkcije kao argument u njihovom pozivu. Prednost upotrebe anonimnih funkcija je što ne zahtjevaju editiranje datoteke kad se radi o jednostavno definiranim funkcijama.

Stoga u ovisnosti o tome na koji način želimo koristiti funkciju, te o složenosti same funkcije, biramo jedan od pristupa.

Lokalne funkcije

Kad postoji potreba za ponovnim izvođenjem slijeda naredbi, moguće je te naredbe pohraniti u datoteku. Kreiranjem takve datoteke nastaju ili skripte ili nove funkcije. Na ovaj način definirana je i većina funkcija koje su ugrađene u Matlab. Skripte su najjednostavniji oblik programa, obzirom da pohranjuju slijed naredbi točno kao što bi bile unesene u komandni prozor Matlaba. Funkcije osiguravaju veću fleksibilnost dozvoljavajući definiranje ulaznih i izlaznih vrijednosti. Sintaksa funkcijske m-datoteke izgleda ovako:

```
function [izlazne varijable] = imefunkcije(ulazne varijable)
naredbe
end
```

Ime funkcijske m-datoteke mora biti isto kao i ime funkcije koja se njom definira. Pri odabiru imena funkcije potrebno je voditi računa da odabrano ime nije korišteno za neku funkciju koja već postoji u Matlabu. Samu funkciju pozivamo kao i svaku drugu funkciju, koristeći njeno ime, zagrade, ulazne i izlazne varijable. Varijable mogu biti i brojevi i matrice. Jasno je da broj i tip varijabli u definiciji i pozivu funkcije moraju biti isti.

Moguće je kreirati pomoćni tekst dodavajući komentare (obično) na početku funkcijske datoteke, odmah ispod definicije imena funkcije i ulaznih/izlaznih varijabli.

Dan je primjer izgleda funkcijske datoteke fact.m koja računa faktorijel prirodnog broja:

```
function f = fact(n)
//funkcija računa n!
f = prod(1:n);
end
```

(Premda se end naredba na kraju u određenim slučajevima može izostaviti, radi čitljivosti koda preporučeno ju je koristiti.)

Primjer poziva funkcije u komandnom prozoru:

```
y = fact(5)
y =     120
```

Anonimne funkcije

Anonimna funkcija je funkcija koja nije pohranjena u programskoj datoteci već je povezana s varijablom čiji je podatkovni tip `function_handle`. Poput uobičajenih funkcija anonimne funkcije prihvaćaju ulazne varijable i vraćaju izlazne. Njihov nedostatak je što mogu sadržavati samo jednu izvršnu naredbu.

Primjer anonimne funkcije koja računa kvadrat broja:

```
sqr = @(x) x.^2;
```

Varijabla `sqr` predstavlja rukovanje funkcijom. Operator `@` predstavlja rukovanje funkcijom dok sadržaj zagrada navedenih nakon njega predstavlja ulazne argumente. Anonimna funkcija prihvaća jedan ulazni argument i implicitno vraća jednu vrijednost, polje iste veličine

```
a = sqr(5)
a =

       25
```

Napomena: anonimna funkcija preporučena je zamjena za korištenje objekta `inline(exp)` koji neće biti podržavan u budućim verzijama Matlab-a. U dosadašnjim verzijama upotrebom navedene naredbe bilo je moguće definirati jednostavne funkcije te bi gore navedena funkcija bila definirana sa

```
f = inline('x.^2')
```

Korištenje funkcije upotrebom simboličkog izraza

```
syms x
f=x^2-sin(x)
```

Ukoliko za navedenu funkciju pokušamo izračunati vrijednost u nekoj točki, Matlab će nas upozoriti o pogrešci:

```
f(4)
Index exceeds matrix dimensions.
```

```
Error in sym/subsref (line 881)
            R_tilde = builtin('subsref',L_tilde,Idx);
```

Upotrebom naredbe `subs(function_name,argument_name,argument_value)` ipak možemo odrediti traženu vrijednost:

```
subs(f,x,4)
ans =
16 - sin(4)
```

Zadatak 1: Zadana je funkcija $f(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$

a) Za zadanu funkciju kreirajte funkcijsku m-datoteku pr1 i izračunajte f(4).

b) Izračunajte f(4) upotrebom anonimne funkcije.

c) Unesite formulu za f(x) kao simbolički izraz te njegovom uporabom izračunajte f(4)

Zadatak 2: Zadana je funkcija $f(x) = log(x^2 + 7)$

a) Za zadanu funkciju kreirajte funkcijsku m-datoteku pr2 i izračunajte f(3).

b) Izračunajte f(3) upotrebom anonimne funkcije.

c) Unesite formulu za f(x) kao simbolički izraz te njegovom uporabom izračunajte f(3)

2. VJEŽBA

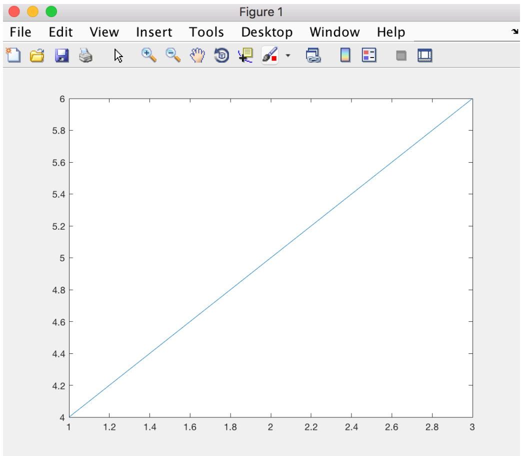
Crtanje funkcije u Matlabu

Naredba plot

Osnovni alat korišten za crtanje u Matlabu je naredba `plot`. Da bismo shvatili kako ta naredba radi, zamislimo da želimo nacrtati liniju koja prolazi kroz točke (1,4) i (3,6). Prvo definiramo vektor koji sadrži obje apscise x=(1,3) i vektor koji sadrži obje ordinate y=(4,6). Zatim nacrtamo točke definirane tim vektorima: Matlab to radi na način da spari vrijednosti na istim pozicijama u navedenim vektorima (1 s 4) i (3 sa 6)) i poveže ih linijom. Odgovarajuće naredbe u Matlabu bile bi:

```
x=[1 3];
y=[4 6];
plot(x,y)
```

Na ekranu se pojavio grafički prozor naziva Figure no.1 sa sljedećim sadržajem:



Naredbom `figure` Matlab otvara novi grafički prozor u kojem izvodi naredbu. Moguće je prozoru dati naslov.

```
figure('Name','Measured Data');
```

Krenimo sada na složeniji primjer:

Pretpostavimo da želimo nacrtati graf funkcije y=sin 3x na intervalu od 0 do 1. To ćemo napraviti na sljedeći način: funkciju ćemo opisati proizvoljnim brojem točaka koje ćemo povezati ravnim linijama. Prepostavimo da uzmemo N+1 točaka koje su ekvidistantne, udaljene za h:

```
N = 10; h = 1/N; x = 0:h:1;
```

Na taj način nastaje niz x = 0; h; 2h; …; 1-h; 1.

Isti efekt smo mogli postići korištenjem naredbe `linspace (a,b,n)` koja generira n+1 jednako udaljenih točaka između a i b, uključujući rubove.

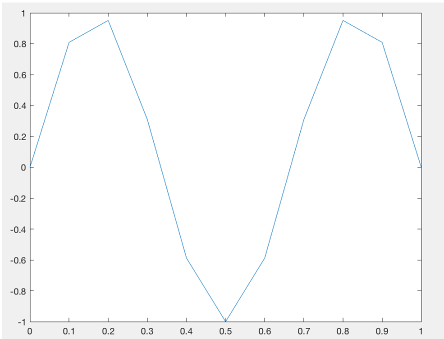
```
x = linspace (0,1,11);
```

Idući korak je da izračunamo njima odgovarajuće vrijednosti funkcije koje ćemo smjestiti u vektor y:

```
y = sin(3*pi*x);
```

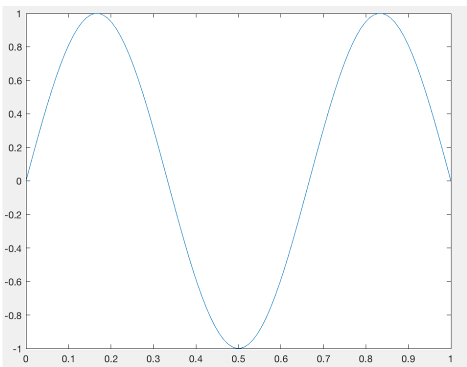
I konačno, Matlabu dajemo naredbu za crtanje:

```
plot(x,y)
```



Rezultat je vidljiv na gornjoj slici i očito je da je uzeti N premalen. Ako N povećamo na 100, rezultat je puno bolji:

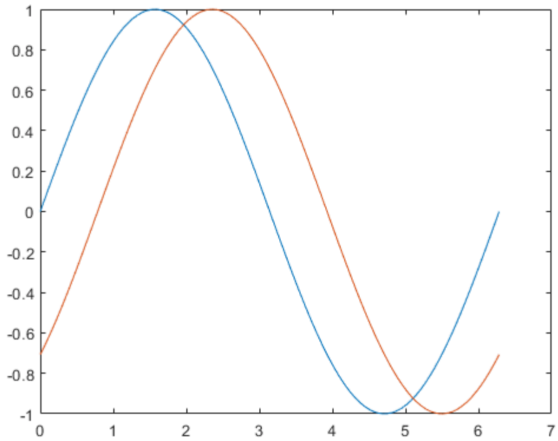
```
x = linspace (0,1,100);
y = sin(3*pi*x);
plot(x,y)
```



Pozivom naredbe `plot`, ukoliko je već otvoren grafički prozor, Matlab briše postojeće grafove i novi crta u postojećem prozoru.

U idućem primjeru pokazano je kako jednim pozivom naredbe `plot` možemo u istom grafičkom prozoru prikazati više funkcija:

```
x = linspace(0,2*pi,100);
y1 = sin(x);
y2 = sin(x-pi/4);
plot(x,y1,x,y2)
```



Slijed boja korištenih za crtanje grafa pre-definiran je, međutim izgled grafa moguće je prilagoditi svojim željama što je pokazano u idućem poglavlju.

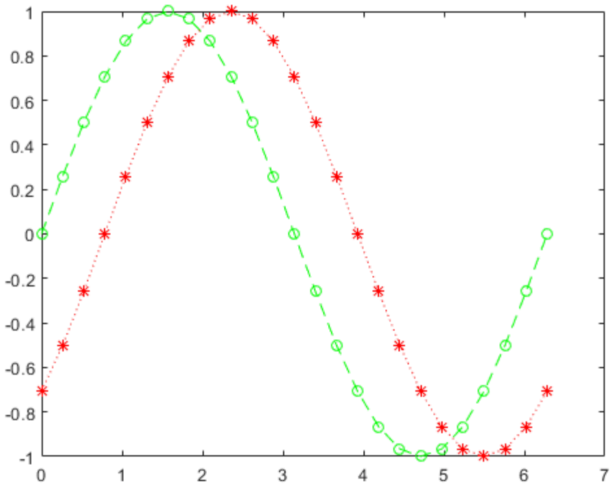
Prilagođavanje izgleda grafa

«Uljepšavanje» grafa moguće je korištenjem dodatnog argumenta kod poziva funkcije `plot`. Treći argument u funkciji plot je *string* u kojem prvo slovo specificira boju, drugo oznaku točaka te treće oznaku linije. Opcije za boje i stilove su:

Boja		Oznaka točaka		Oznaka linije	
y	yellow	.	point	:	dotted
m	magenta	o	circle	-.	dashdot
c	cyan	x	x-mark	--	dashed
r	red	+	plus	-	solid
g	green	*	star		
b	blue	s	square		
w	white	d	diamond		
k	black	v	triangle (down)		
		^	triangle (up)		
		<	triangle (left)		
		>	triangle (right)		
		p	pentagram		
		h	hexagram		

Ukoliko bismo grafove u prethodnom primjeru željeli prilagoditi svojim zahtjevima, npr. da funkcija sin x bude prikazana isprekidanom zelenom linijom pri čemu su točke označene kružićima, a funkcija sinx – pi/4 crvenim dvotočkama sa zvijezdicama na mjestu točaka, Matlabu bi dali naredbu:

```
x = linspace(0,2*pi,25);
y1 = sin(x);
y2 = sin(x-pi/4);
plot(x,y1,'--go',x,y2,':r*')
```



Dodavanje naslova i oznaka na graf

Ukoliko na graf želimo dodati naslov, te oznake osi, koristimo:

```
title('Grafovi funkcija')
xlabel('x-os')
ylabel('y-os')
```

Moguće je dodati legendu za identifikaciju prikazanih grafova. Opisi stavljeni u legendu moraju biti u istom slijedu u kojem su grafovi crtani.

```
legend('y = sin(x)','y = sin(x-pi/4)')
```

Lokacija legende također može biti određena postavljanjem vrijednosti parametra Location na neko od osam mogućih usmjerenja.

```
legend('y = sin(x)','y = sin(x-pi/4)','Location','southwest')
```

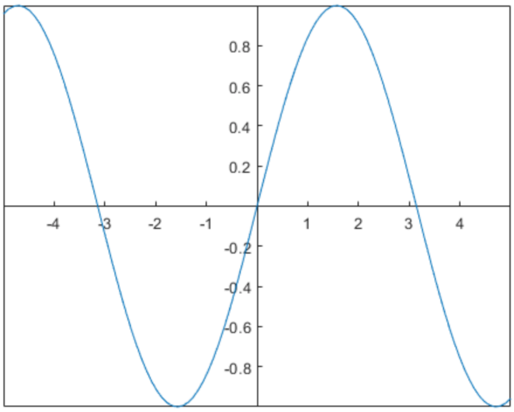
Kod prikaza grafa funkcije moguće je odrediti koji podaci su vidljivi specificirajući raspon x i y-osi. Dan je primjer postavljanja ograničenja:

```
xlim([0 10])
ylim([-0.4 0.8])
```

Naredbe `xlim auto`, odnosno `ylim auto` vraćaju raspon prikaza na početne postavke.

Standardni način crtanja grafa funkcije «na papiru» je da prvo odredimo koordinatne osi, obično uključujući i ishodište. Matlab koordinatne osi označava na vanjskom rubu područja unutar kojeg je smješten graf, pri čemu ishodište često nije vidljivo. Promjenu lokacije osi na način da se one sijeku u ishodištu postižemo postavljajući vrijednost `XAxisLocation` svojstva `Axes` objekta na `'top'`, `'bottom'`, ili `'origin'`, a `YAxisLocation` na `'left'`, `'right'`, ili `'origin'`.

```
x = linspace(-5,5);
y = sin(x);
plot(x,y)
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```



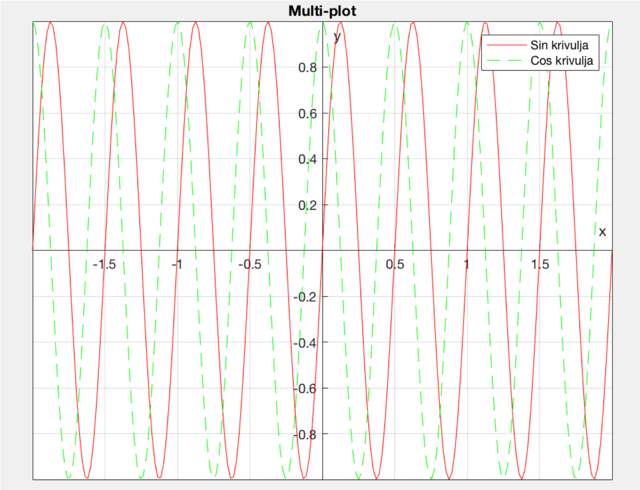
Moguće je ukloniti vanjske rubove slike s

```
box off
```

Ako na graf zelimo dodati mrežu, dodajemo je i isto tako brišemo naredbom `grid`.

Primjer uporabe navedenih funkcionalnosti: na istom grafičkom prozoru želimo usporediti grafove funkcija $\sin 4\pi x$ i $\cos 4\pi x$. Nacrtajte ih, označite naslov, koordinatne osi i ishodište.

```
x = linspace (-2,2,200);
plot(x, sin(4*pi*x),'r-',x,cos(4*pi*x),'g--');
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
legend('Sin krivulja','Cos krivulja');
title('Multi-plot');
xlabel('x'), ylabel('y')
grid
```



Zadatak 1: Upotrebom naredbe plot nacrtajte graf idućih funkcija:

a) $f(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$

b) $g(x) = sin(x^2 - x)$

Grafovima dodajte naslov, označite koordinatne osi, te pogledajte kako se mijenja izgled grafa u ovisnosti o rasponu prikazanih vrijednosti na koordinatnim osima.

3. vježba

Crtanje funkcije u Matlabu - nastavak

Naredba fplot

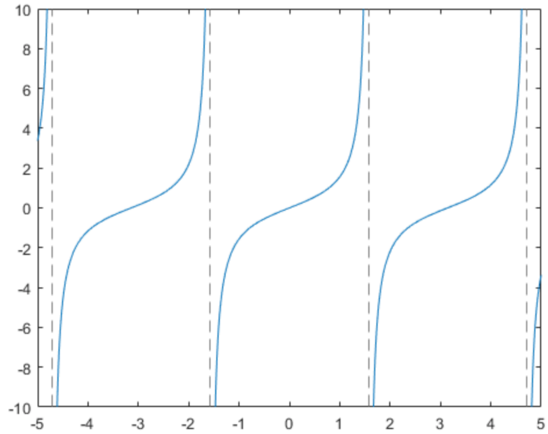
Symbolic Toolbox omogućuje crtanje grafa funkcije korištenjem naredbe fplot koja za argument osim funkcije može imati i simbolički izraz.

`fplot(f)` crta izraz f = f(x) na domeni: -5 < x < 5.

`fplot(f,[min,max])` crta f = f(x) na domeni: min < x < max.

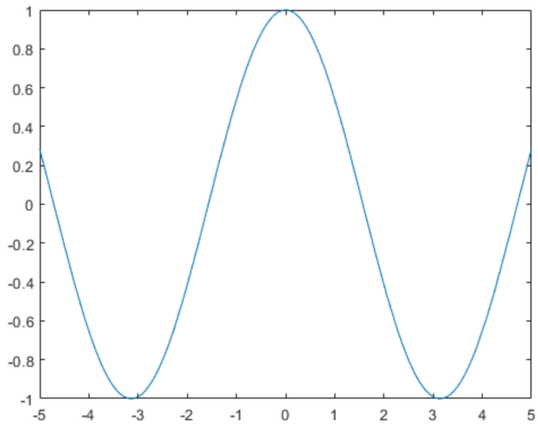
Iduće naredbe crtaju graf funkcije tangens na intervalu [-5 5] kao argument uzimajući simbolički izraz. Vertikalne asimptote `fplot` prikazuje po pre-definiranim postavkama.

```
syms x
fplot(tan(x))
```



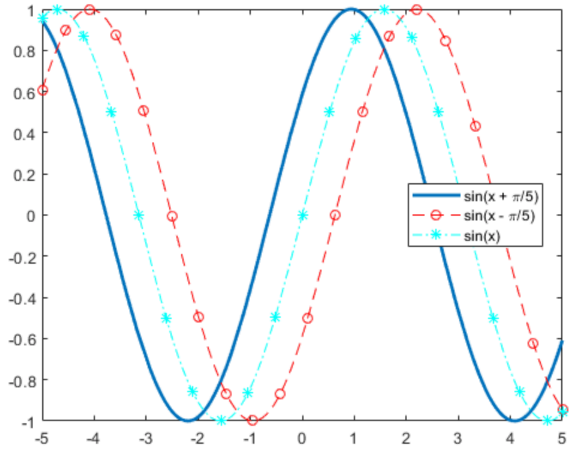
Iduće naredbe crtaju graf funkcije cosinus na intervalu [-5 5] kao argument uzimajući simboličku funkciju.

```
syms f(x)
f(x) = cos(x);
fplot(f)
```



Moguće je više grafova prikazati u istom grafičkom prozoru, te kao i kod naredbe plot prilagoditi izgled grafova svojim željama, te dodati naslov, legendu.

```
syms x
fplot(sin(x+pi/5),'Linewidth',2)
hold on
fplot(sin(x-pi/5),'--or')
fplot(sin(x),'-.*c')
legend('show','Location','best')
hold off
```



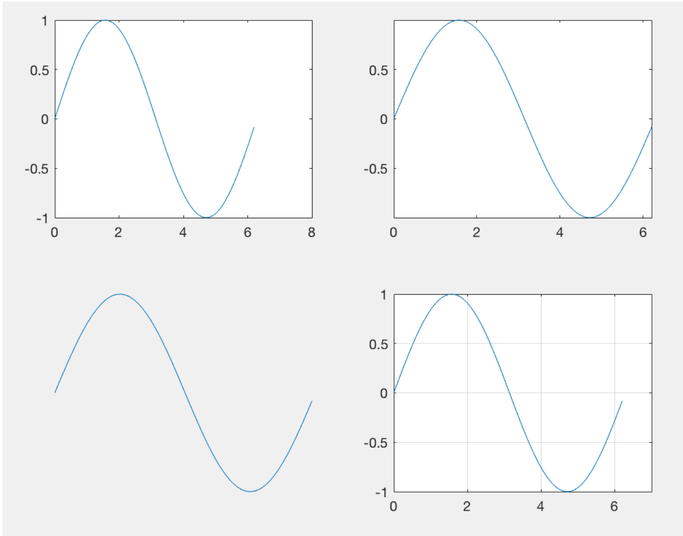
Pozivanjem naredbe `fplot`, briše se sadržaj grafičkog prozora prije prikazivanja novog grafa. Ukoliko želimo zadržati sadržaj grafičkog prozora, to postižemo naredbom `hold`, odnosno `hold on`. Naredba `hold off` prekida takvo ponašanje. Ovaj način postupnog dodavanja više grafova unutar istog grafičkog prozora funkcionira i za naredbu `plot`.

Naredba subplot

Naredba `subplot(m,n,p)` dijeli sadržaj grafičkog prozora na $m \times n$ područja (m redaka, n stupaca) i bira p-to područje za prikaz grafa. Područja se broje s lijeva na desno, od gore prema dolje, kao kod čitanja teksta.

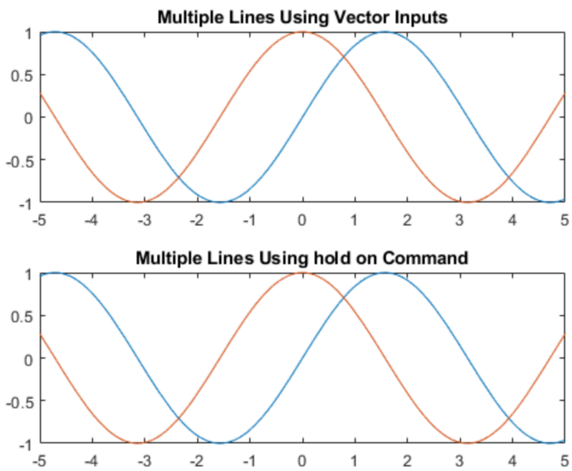
Pogledajmo primjer primjene u kombinaciji s naredbom `plot`:

```
x = 0 : 0.1 : 2*pi;
subplot(2,2,1); plot(x,sin(x)), axis auto
subplot(2,2,2); plot(x,sin(x)), axis tight
subplot(2,2,3); plot(x,sin(x)), axis tight, axis off
subplot(2,2,4); plot(x,sin(x)), axis([0 7 -1 1]), grid on
```



Te u kombinaciji s naredbom fplot:

```
syms x
subplot(2,1,1) fplot([sin(x) cos(x)])
title('Multiple Lines Using Vector Inputs')
subplot(2,1,2) fplot(sin(x))
hold on
fplot(cos(x))
title('Multiple Lines Using hold on Command')
hold off
```



Neke korisne naredbe primjenjive na grafički prozor

Ukoliko želimo uvećati neki dio grafa, u izborniku grafičkog prozora biramo `Tools/Zoom In`. Koristeći miša označimo dio krivulje ili samo kliknemo na dio koji želimo povećati i Matlab će automatski regenerirati crtež povećavajući prethodno mjerilo (raspon vrijednosti na koordinatnim osima će biti promijenjen koristeći faktor 2). Postupak možemo ponoviti željeni broj puta.

Isto možemo postići biranjem ikone `Zoom In` na alatnoj traci grafičkog prozora. Naredba/ikona `Zoom Out` vraća povećani dio na prethodnu dimenziju.

Treći način za uvećavanje prikaza bio bi unošenjem naredbe `zoom` odnosno `zoom off` u komandnom prozoru.

Naredba `clf` briše sadržaj grafičkog prozora.

Zadatak 1: U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija $f(x) = x^2$ i $f(x) = \sqrt{x}$. Označite naslov, koordinatne osi, legendu i ishodište.

Zadatak 2: Grafički prozor podijelite na dva dijela i nacrtajte grafove trigonometrijskih funkcija tangens i kotangens. Označite naslov, koordinatne osi i ishodište.

4. vježba

Polinomi

U Matlabu polinome prikazujemo pomoću vektora čiji su elementi koeficijenti polinoma zapisani u odgovarajućem slijedu, npr. polinom $5x^4 - x^3 + 7x + 5$ bit će prikazan vektorom [5 -1 0 7 5].

Vrijednost polinoma izračunava se korištenjem funkcije `polyval`. Tako npr. ako želimo izračunati vrijednost prije spomenutog polinoma u x=3, to radimo ovako:

```
p=[5 -1 0 7 5];
val=polyval(p,3)
val =
404
```

Nul-točke, odnosno korijeni polinoma nalaze se korištenjem funkcije `roots`:

```
roots(p)
ans =
   0.8053 + 1.0129i
   0.8053 - 1.0129i
  -0.7053 + 0.3160i
  -0.7053 - 0.3160i
```

Prethodni polinom očito je imao dva para konjugirano kompleksnih nul-točaka.

Ukoliko polinome želimo zbrojiti ili oduzeti, moramo voditi računa da matrice koje ih reprezentiraju moraju biti istog tipa. U protivnom, zbrajanje, odnosno oduzimanje nije moguće izvršiti i Matlab će nas upozoriti na pogrešku.

Recimo da prethodnom polinomu želimo dodati polinom q=2x-3.

```
q=[2 -3];
p+q
??? Error using ==> +
Matrix dimensions must agree.
```

Međutim, ako polinom q „lažno“ prikažemo polinomom četvrtog stupnja, riješit ćemo problem:

```
q1=[0 0 0 2 -3]
p+q1
ans =
     5    -1     0     9     2
```

Za množenje dvaju polinoma, koristimo funkciju `conv`:

```
conv(p,q)
ans =
    10   -17     3    14   -11   -15
```

a za dijeljenje, funkciju `deconv` koja osim rezultata dijeljenja vraća i ostatak:

```
[d, R] = deconv(p,q)
d =
    2.5000    3.2500    4.8750   10.8125
R =
         0         0         0         0   37.4375
```

Interpretirajte dobiveni rezultat!

1. Zadana je racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+3x}$. Komentirajte zašto je promatrana funkcija neprava, te je zapišite u obliku sume polinoma i prave racionalne funkcije.

Kako je stupanj polinoma u brojniku jednak stupnju polinoma u nazivniku, zadana racionalna funkcija je neprava, te ćemo prvo podijeliti brojnik s nazivnikom.

```
p=[1 0 0 1];
q=[1 0 3 0];
[d,r]=deconv(p,q)
d =
     1
r =
     0     0    -3     1
```

Znači, $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3+3x} = 1 + \frac{-3x+1}{x^3+3x}$.

Linearna interpolacija

2. Funkcija je zadana tabelarno:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	3	4	3	2	1

Koristeći linearnu interpolaciju izračunajte $f(2.4)$.

Napomena: Razmotrite upotrebu Matlabovih naredbi `polyval` i `polyfit`.

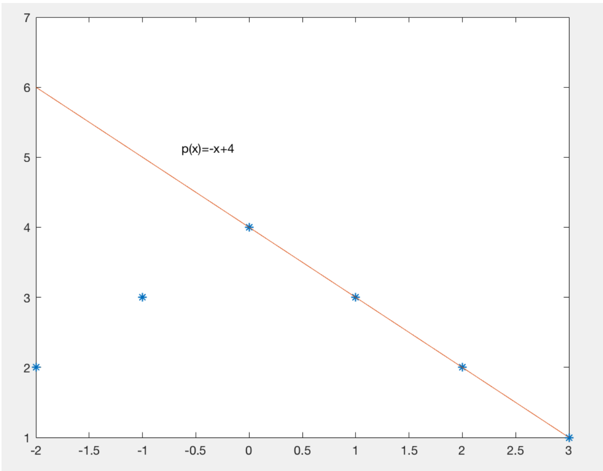
Uočimo da je $2.4 \in \langle 2,3 \rangle$. Kroz točke $A(2, f(2))$ i $B(3, f(3))$ povući ćemo pravac $p(x)$ i vrijednost funkcije $f(2.4)$ aproksimirat ćemo s $p(2.4)$.

Napišimo jednadžbu pravca (graf polinoma 1. stupnja) određenog točkama A i B.

```
x=[2 3];
y=[2 1];
p=polyfit(x,y,1)%naredba polyfit daje polinom koji prolazi danim točkama
p =
   -1.0000    4.0000
```

Rezultat je polinom $y = p(x) = -x + 4$. Nacrtajmo njegov graf i izračunajmo $p(2.4)$.

```
x1=-2:3;
y1=[2 3 4 3 2 1];
plot(x1,y1,'*',x1,polyval(p,x1))
gtext('p(x)=-x+4')
yt=polyval(p,2.4)
yt =
    1.6000
```



Prema tome, $f(2.4) \approx p(2.4) = 1.6$.

Zadatak 1: Zadani su polinomi $p(x) = 3x^4 + x^2 - 4x + 1$ i $q(x) = 2x^2 - 1$. Izračunajte sumu, razliku, produkt i kvocijent tih polinoma.

5. vježba

Neke elementarne funkcije, njihov graf i svojstva

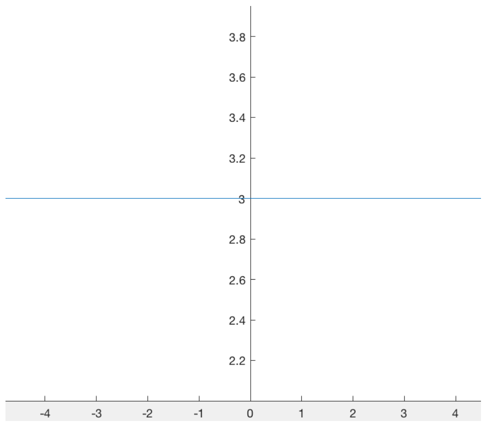
Napomena: naredba *centeraxes* korištena u nekim Matlab primjerima postavlja koordinatne osi u ishodište koordinatnog sustava te nije dio standardnog Matlabovog toolbox-a. Sadržaj datoteke centeraxes.m:

```
ax = gca;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
```

Konstanta, funkcija oblika $f(x) = c, c \in R$

1. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3$

```
// umjesto fplot('3') preporučeno:
fplot(@(t)3*ones(size(t)))
centeraxes
```



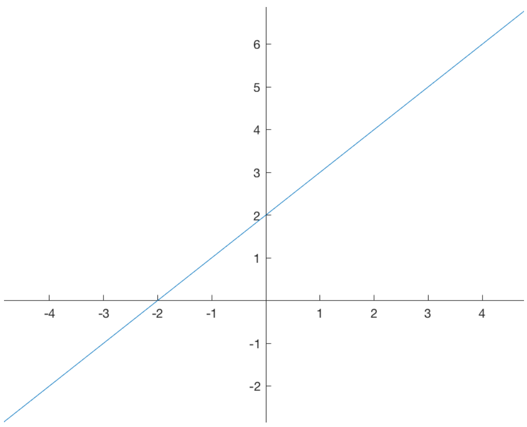
$D_f = R, \quad R_f = R$

Domena funkcije je skup R a kodomena $\{3\}$. Graf funkcije je pravac paralelan s x-osi . Funkcija nema nul-točke.

Linearna funkcija, funkcija oblika $f(x) = kx + l$

2. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = x + 2$

```
fplot(@(x) x+2)
centeraxes
```



$D_f = R, \quad R_f = R$

Graf funkcije f siječe x-os u točki $(-2,0)$ Apscisu te točke nazivamo nul-točka. Analitički je možemo izračunati tako da pronađemo onu vrijednost argumenta x za koju je vrijednost funkcije f jednaka 0. Lako se pokaže da je f(x)=0 za x=-2.

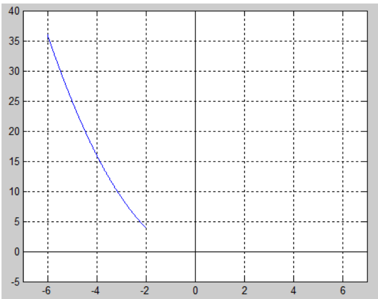
3. Nacrtajte grafove funkcija: a) $f(x)=x^2,\quad D_f=\langle -\infty,-2]$ b) $g(x)=x^2,\quad D_g=[-2,2]$ c) $h(x)=x^2,\quad D_h=[2,+\infty\rangle$

Funkcije su zadane istom formulom, ali im je područje definicije različito.

Korištene naredbe će biti jednake, jedino mijenjamo interval iz kojeg uzimamo vrijednosti argumenta:

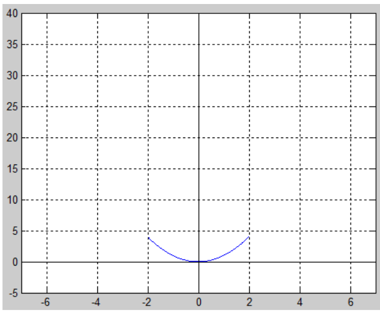
```
x=-6:0.01:-2;  %za zadatak pod a)
f=x.^2;
plot(x,f)
xlim([-7 7])
ylim([-5 40])
centeraxes
grid
```

a)

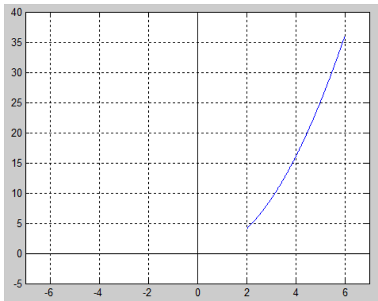


b)

4.

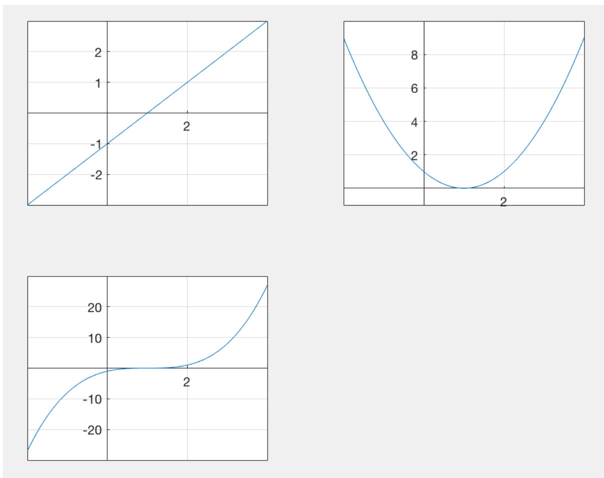


c)



4. Nacrtajte grafove funkcija $f(x)=x-1,\ g(x)=(x-1)^2,\ h(x)=(x-1)^3$ i usporedite ih.

```
x=-2:0.01:4;
f=x-1;
g=(x-1).^2;
h=(x-1).^3;
subplot(2,2,1); plot(x,f)
centeraxes; grid
subplot(2,2,2); plot(x,g)
centeraxes; grid
ylim([-1,10])
subplot(2,2,3); plot(x,h)
centeraxes;
grid
```

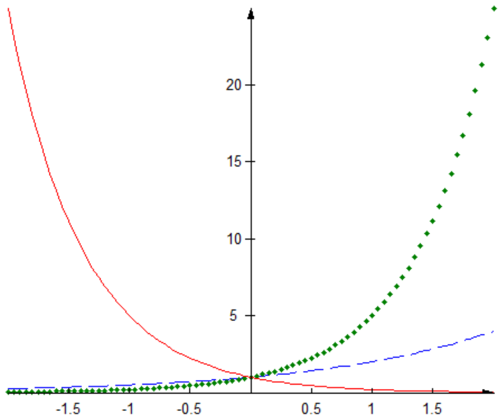


Sve tri funkcije su definirane na skupu R. Funkcija f strogo raste i ima nultočku $x_0=1$. Funkcija g pada na intervalu $\langle -\infty,1\rangle$, a onda raste na $\langle 1,+\infty\rangle$. Ima dvostruku nul-točku $x_0=1$. Funkcija h uvijek strogo raste a u $x_0=1$ ima trostruku nul-točku.

Eksponencijalna funkcija, funkcija oblika $f(x) = a^x$

5. Nacrtajte grafove slijedećih funkcija: $f(x) = 2^x, g(x) = 5^x, h(x) = (\frac{1}{5})^x$ i usporedite ih.

```
x=-2:0.05:2;
f=2.^x;
g=5.^x;
h=(1/5).^x;
plot(x,f,'--',x,g,'.',x,h)
centeraxes
```



Domena funkcija f, g, h je skup R dok je slika funkcije skup R^+ .

Funkcije f i g rastu (baza >1), dok funkcija h pada. Sve tri funkcije siječu os y u točki $(1,0)$ i nemaju nul-točke.

Logaritamska funkcija

6. Nacrtajmo na istoj slici grafove funkcija:
$f(x) = \log_2 x,\ g(x) = \log x,\ h(x) = \ln x,\ p(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ i usporedimo ih.

U Matlabu postoje naredbe $\log(x), \log 10(x), \log 2(x)$ dok naredba $\log_{\frac{1}{2}} x$ ne postoji.

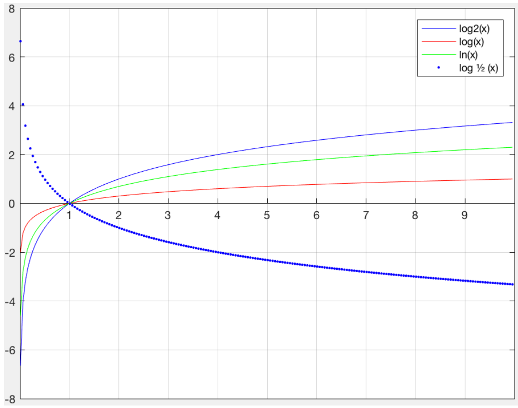
Koristeći pravilo $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ uzimajući pri tom za $a = \frac{1}{2},\ b = x,\ c = e$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\ln x}{\ln \frac{1}{2}}$ odnosno definiramo funkciju $p(x) = \log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log(x)}{\log(\frac{1}{2})}$

Pri crtanju grafa neke funkcije potrebno je imati na umu gdje je funkcija valjano definirana. U slučaju logaritamske funkcije čija je domena skup svih pozitivnih brojeva, ukoliko Matlabu zadamo da funkciju nacrta na intervalu izvan domene, Matlab nas upozorava dajući poruku (međutim nacrta i «neželjeni» dio):

```
Warning: Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored
```

```
x=0.01:0.05:10;
f=log2(x);
g=log10(x);
h=log(x);
p=log(x)/log(1/2);
plot(x,f,'b',x,g,'r',x,h,'g',x,p,'b.')
centeraxes
grid
legend('log2(x)','log(x)','ln(x)','log ½
(x)');
```



Funkcije su definirane za $x \in \langle 0, \infty \rangle$ i imaju zajedničku nul-točku $x_0 = 1$. Funkcije f, g, h rastu (baza > 1), a p pada.

Zadatak 1: U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ i $h(x) = x^6$. Što primjećujete?

Zadatak 2: U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$ i $h(x) = x^7$. Što primjećujete?

6. vježba

Inverzne funkcije

Za određene parove elementarnih funkcija znamo da su jedna drugoj inverzne, te da njihovi grafovi moraju biti simetrični u odnosu na simetralu prvog i trećeg kvadranta (ukoliko je mjerilo 1:1, tj. jedinice na osi x i y su jednake). Međutim, za neelementarne funkcije potrebno je izvršiti određeni izračun za utvrđivanje njima inverznih funkcija. U Matlabu postoji naredba koja određuje inverz zadane funkcije (naravno, ukoliko on postoji).

To je naredba `g= finverse(f)` koja vraća inverz funkcije f. Varijabla `f` je ili izraz ili funkcija jedne simboličke varijable.

```
syms x
f(x) = 1/tan(x);
g = finverse(f)
g(x) =
atan(1/x)
```

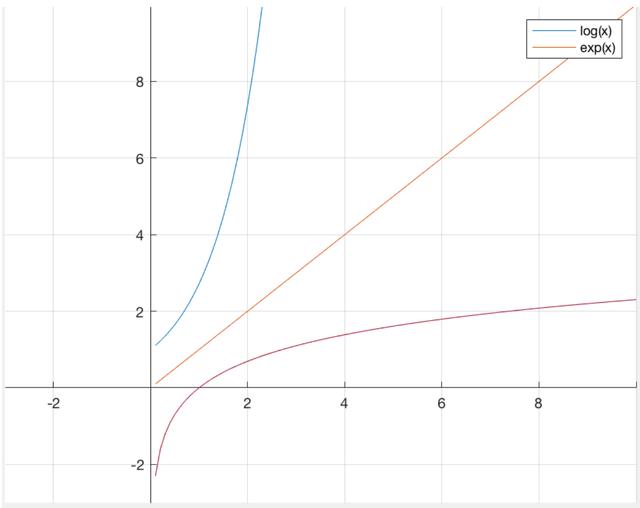
Oblik naredbe `g= finverse(f,var)` koristi simboličku varijablu `var` kao nezavisnu varijablu. Ovaj oblik se koristi kad f sadržava više od jedne simboličke varijable.

```
syms u v
finverse(exp(u - 2*v), u)
ans =
2*v + log(u)
```

Ukoliko inverz nije jedinstven, naredba `finverse` ne daje upozorenje.

1. Na istoj slici nacrtajte grafove funkcija $f(x)=e^x$ i $g(x)=f^{-1}(x)=\ln x$.

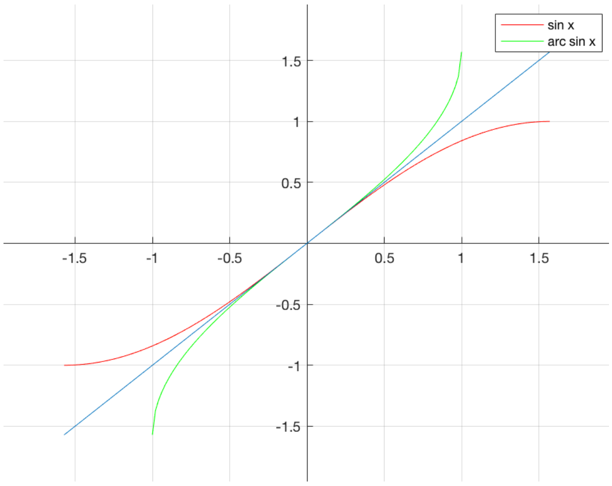
```
x=0.1:0.1:10;
f=log(x); g=exp(x); k=x;
xlim([-3,10]);
ylim([-3,10]);
hold on
plot(x,f,x,g,x,k)
legend('log(x)','exp(x)');
centeraxes
grid
```



Domena obje funkcije je R^+. Funkcije rastu, a f ima nul-točku $x_0 = 1$. Grafovi funkcija f i g simetrični su obzirom na pravac $y = x$, odnosno na simetralu 1. i 3. kvadranta.

2. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = arc \sin x$

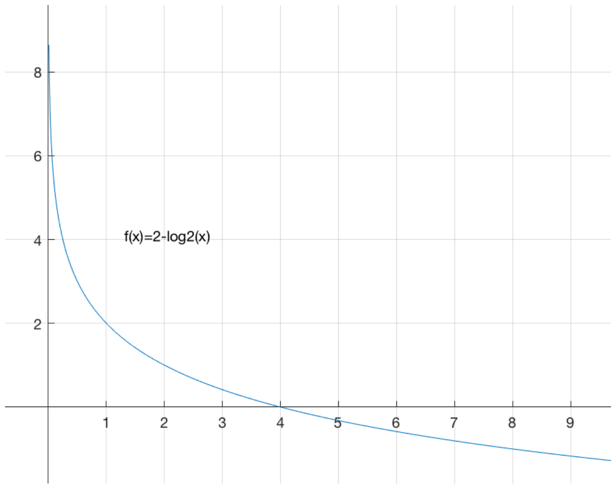
```
x1=linspace(-pi/2,pi/2,100);
x2=linspace(-1,1,100);
f=sin(x1);
g=asin(x2);
k=x1;
plot(x1,f,'r',x2,g,'g',x1,k)
legend('sin x','arc sin x');
centeraxes
grid
```



Određivanje domene kompozicije

3. Uz pomoć grafa funkcije $f(x) = 2 - \log_2 x$ odredite domenu funkciju $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

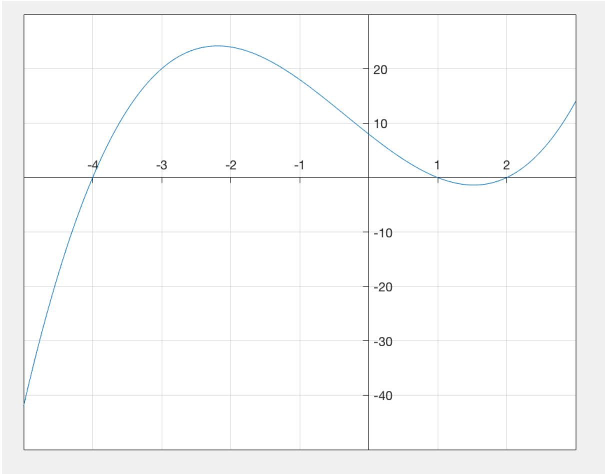
```
x=0.01:0.01:10;
y=2-log2(x);
plot(x,y)
xlim([-1,10])
gtext('f(x)=2-log2(x)')
centeraxes
grid
```



Neka je $z = f(x)$, tada je $g(x) = \sqrt{z}$. Funkcija g je definirana za vrijednosti $z \geq 0$ odnosno za $f(x) \geq 0$. To vrijedi na intervalu $\langle 0, 4]$, prema tome $D_g = \langle 0, 4]$.

4. Skicirajte graf funkcije $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ i odredite domenu funkcije $g(x) = \ln f(x)$

```
p=[1     1   -10     8];
roots(p)
x=-5:0.01:3;
plot(x,polyval(p,x))
centeraxes
grid
```

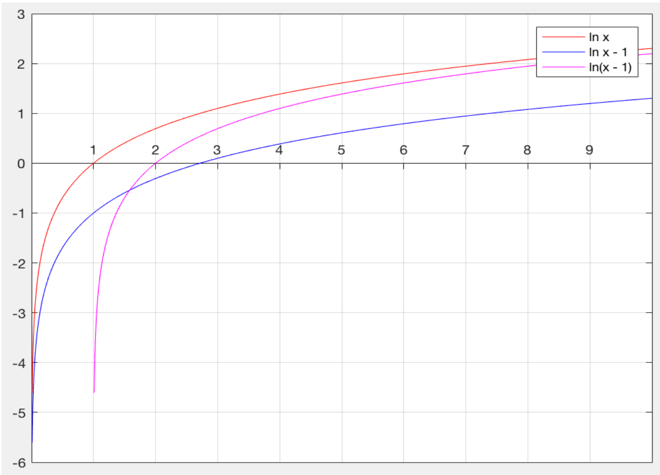


Kako je funkcija $\ln x$ definirana za $x > 0$, zaključujemo da je g definirana za $f(x) > 0$ a to vrijedi za $x \in \langle -4,1 \rangle \cup \langle 2,+\infty \rangle$.

Linearne transformacije grafa

5. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \ln x, g(x) = \ln x - 1$ i $h(x) = \ln(x-1)$ te objasnite kako linearnim transformacijama grafa funkcije f možemo dobiti grafove funkcija g i h.

```
x=0.01:0.01:10;
x1=1.01:0.01:10;
f=log(x);
g=log(x)-1;
h=log(x1-1);
plot(x,f,'r',x,g,'b',x1,h,'m')
legend('ln x','ln x - 1','ln(x -
1)');
centeraxes
grid
```



Graf funkcije g u odnosu na graf funkcije f translatiran je za 1 duž y osi u negativnom smjeru. Graf funkcije h dobiven je translacijom grafa funkcije f za 1 duž x osi u pozitivnom smjeru.

7. vježba

(Procjena) rješenja jednadžbi i nejednadžbi uz pomoć Matlaba

Riješavanje jednadžbe tipa $f(x)=g(x)$ ekvivalentno je traženju nultočaka funkcije $h(x)=f(x)-g(x)$. Ukoliko promotrimo graf funkcije h(x) te utvrdimo da nikada ne siječe os x, jasno je da postavljena jednadžba nema rješenja. Ukoliko pak siječe os x, s grafa možemo očitati približno riješenje.
Symbolic Toolbox sadržava na redbu `solve` koja služi simboličkom riješavanju jednadžbi. Dan je primjer uporabe:

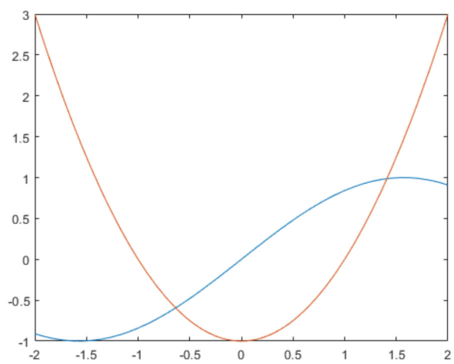
```
syms x
eqn = sin(x) == 1;
solx = solve(eqn,x)
solx =
pi/2
```

Ukoliko solver ne može pronaći točno simboličku soluciju dane jednadžbe, daje upozorenje i uključuje numerički solver. On ne traži sva moguća rješenja jednadžbe već daje samo prvo pronađeno rješenje.

```
syms x
eqn = sin(x) == x^2 - 1;
solve(eqn, x)
Warning: Unable to solve symbolically. Returning a numeric approximation
instead.
> In solve (line 304)
ans =
-0.63673265080528201088799090383828
```

Ukoliko nacrtamo grafove funkcija u danom primjeru, vidjet ćemo da postoje dva moguća rješenja

```
syms x
fplot(sin(x), [-2 2])
hold on
fplot(x^2 - 1, [-2 2])
hold off
```



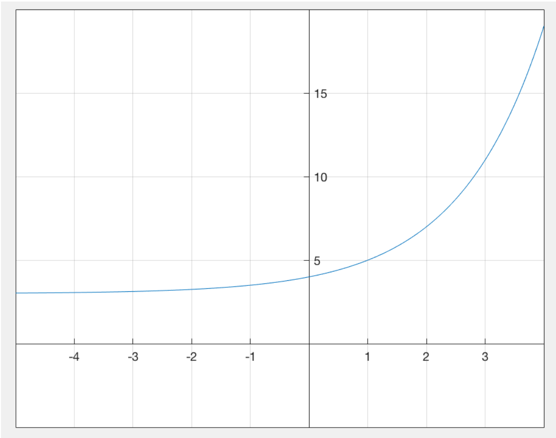
Drugo rješenje određujemo pozivajući numerički solver direktno pri tom specificirajući interval unutar kojeg leži riješenje.

```
eqn = sin(x) == x^2 - 1;
vpasolve(eqn, x, [0 2])
ans =
1.4096240040025962492355939705895
```

1. Riješite jednadžbu $2^x + 3 = 0$.

Rješenje zadane jednadžbe ujedno je nul-točka funkcije $f(x) = 2^x + 3$. Nacrtajmo graf funkcije f.

```
x=-5:0.01:4;
f=2.^x+3;
plot(x,f)
ylim([-5,20])
centeraxes
grid
```



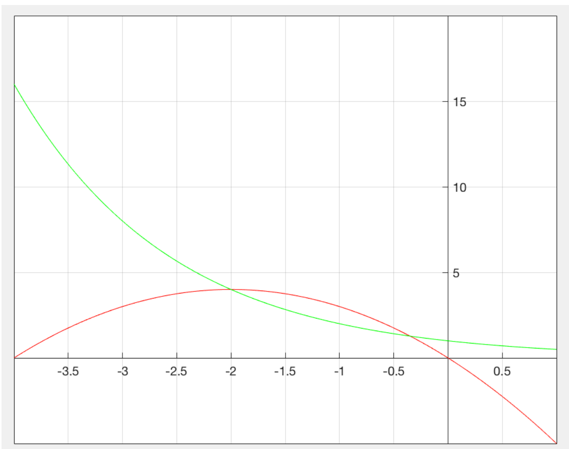
Funkcija nema nul-točke, prema tome zadana jednadžba nema rješenja.

2. Riješite jednadžbu $-x^2 - 4x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Rješenje ove jednadžbe možemo tražiti kao u prethodnom primjeru, promatrajući nul-točke funkcije $f(x) = -x^2 - 4x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Drugi način je definirati: $f(x) = g(x) - h(x)$, u našem slučaju $g(x) = -x^2 - 4x$ i $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Iz $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = h(x)$ tj. promatrat ćemo kada su funkcije g i h jednake.

```
x=-4:0.01:1;
g=-x.^2-4*x;
h=(1/2).^x;
plot(x,g,'r',x,h,'g')
centeraxes
grid
```



Možemo vidjeti da postoje dva rješenja zadane jednadžbe, $x_1 = -2$ (provjerite!),

$x_2 \in \langle -0.5, 0 \rangle$. Ukoliko rješenje želimo odrediti preciznije, zumiranjem možemo utvrditi da je $x_2 \in \langle -0.2, -0.3 \rangle$.

Upotrebom naredbe solve dobijemo:

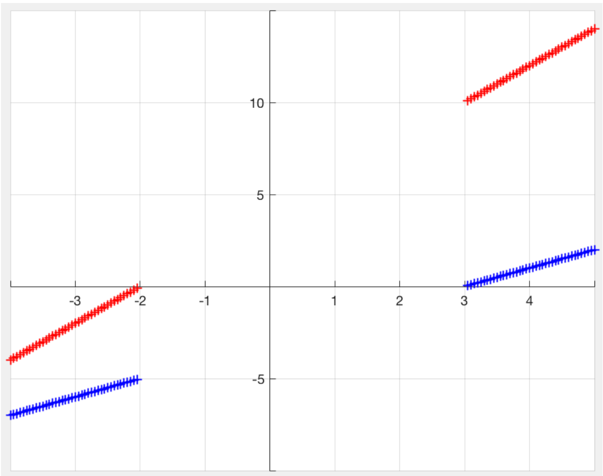
```
syms x
eqn= -x.^2-4*x==(0.5).^x;
solx=solve(eqn,x)
Warning: Unable to solve symbolically. Returning a numeric approximation
instead.
In solve (line 304)
solx =
        -0.34878444365993299559974114697134
```

3. Riješite nejednadžbu $(2x+4)(x-3)>0$

Definirajmo funkcije $f(x)=2x+4$ i $g(x)=x-3$. Izraz $(2x+4)(x-3)>0$ će biti istinit u dva slučaja, kada su funkcije f i g ili obje pozitivne ili obje negativne.

Napisat ćemo program koji crta grafove funkcija f i g na način da provjerava da li je $f(x_k)\cdot g(x_k)>0$ i u tom slučaju točke $(x_k, f(x_k))$ i $(x_k, g(x_k))$ označiti znakom'+'. Na kraju jednostavno očitamo konačni rezultat s grafa.

```
x=-4:0.05:5;
f=2*x+4;
g=x-3;
hold
for k=1:length(x)
if(f(k)*g(k)>0)
plot(x(k),f(k),'r+',x(k),g(k),'b+')
else
plot(x(k),f(k),'r',x(k),g(k),'b')
end
end
centeraxes
grid
```



S grafa je vidljivo da je $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$.

Zadatak 1: Riješite jednadžbu $4-4x=e^x$

8. vježba

Limesi

U Symbolic toolbox dijelu Matlaba naredba `limit` računa graničnu vrijednost simboličkog izraza.

Idući primjer pokazuje upotrebu računanja obostranog limesa kad vrijednost (argumenta) simboličkog izraza teži 0:

```
syms x
f = sin(x)/x;
limit(f,x,0)
ans = 1
```

Ovdje računamo posebno lijevi, a posebno desni limes:

```
syms x
f = 1/x;
limit(f,x,0,'right')
ans = Inf
```

```
limit(f,x,0,'left')
ans = -Inf
```

Moguće je izračunati graničnu vrijednost izraza u simboličkom vektoru:

```
syms x a
V = [(1+a/x)^x exp(-x)];
limit(V,x,Inf)
ans = [ exp(a), 0]
```

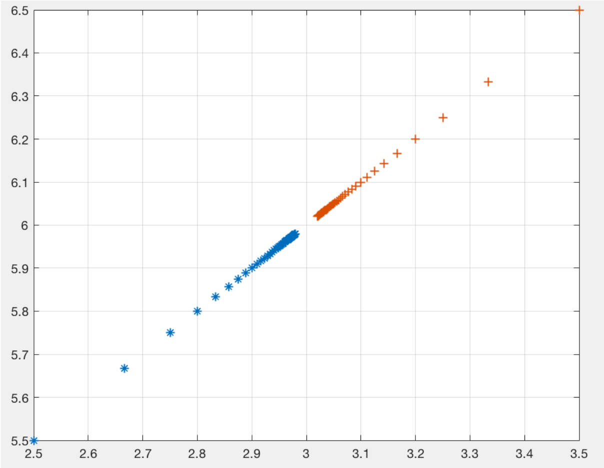
1. Zadana je funkcija $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Promatrajući graf funkcije procjenite čemu teži vrijednosti funkcije kad se vrijednost argumenta približava 3. Zatim koristeći naredbu `limit` provjerite dobiveni rezultat.

Možemo izračunati $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-9}{x+3}=6$,

odnosno prema definiciji limesa postoji granična vrijednost u toj točki.

Nacrtajmo graf funkcije. Domena funkcije f je $\langle-\infty,-3\rangle\cup\langle 3,\infty\rangle$ jer za $x=-3$ funkcija nije definirana $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Pogledajmo na grafu što se dešava kad $x\to 3^-$ i $x\to 3^+$.

```
for i=2:50
x1(i-1)=3-(1/i);
x2(i-1)=3+(1/i);
end
y1=(x1.^2-9)./(x1-3);
y2=(x2.^2-9)./(x2-3);
plot(x1,y1,'*',x2,y2,'+')
centeraxes
grid
```



Provjera u Matlabu:

```
syms x
f=(x.^2-9)./(x-3);
limit(f,x,3)
ans = 6
```

Funkcije definirane po dijelovima

Ukoliko želimo definirati funkciju po dijelovima, umjesto korištenja funkcijske m-datoteke moguće je koristiti naredbu `piecewise`.

Npr. funkcija $f(x)=\begin{cases}-1 & -x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$ definirana u Matlabu biti će

```
syms x
y = piecewise(x<0, -1, x>0, 1);
```

Ukoliko želimo izračunati vrijednost funkcije y u točkama -2, 0, i 2 koristimo naredbu `subs`. Kako y nije definirana u x=0, za taj argument vrijednost funkcije je NaN:

```
subs(y, x, [-2 0 2])
ans = [ -1, NaN, 1]
```

(Graf ovako unesene funkcije definirane po dijelovima dobijemo naredbom f`plot`.)

Neprekidnost

2. Ispitajte neprekidnost dolje definirane funkcije f(x) za vrijednost parametra k=0.5.

Zatim odredite vrijednost parametra k tako da funkcija f bude neprekidna:

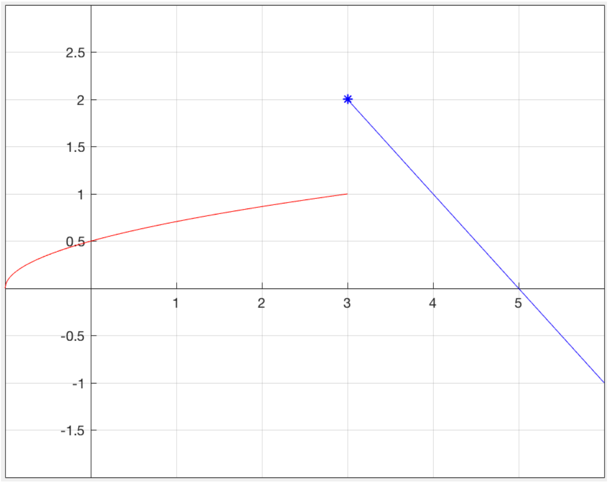
$$f(x)=\begin{cases}k\sqrt{x+1}, & -1\le x\le 3\\ 5-x, & 3<x\le 6\end{cases}$$

Analitički pristup je da parametar k odredimo iz tvrdnje

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

Pogledajmo graf funkcije f za $k = 0.5$:

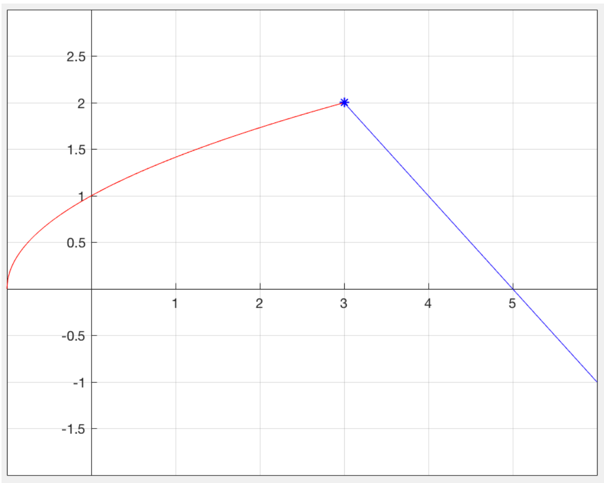
```
x1=-1:0.01:3;
x2=3.01:0.01:6;
y1=0.5*sqrt(x1+1);
y2=5-x2;
plot(x1,y1,'r',x2,y2,'b',3,2,'b*')
ylim([-2,3])
centeraxes
grid
```



Funkcija u točki $x = 3$ ima prekid, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 1$ ali $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$. Lako se pokaže da su lijevi i desni limes jednaki za k=1. (Napišite naredbe u Matlabu!)

Za $k = 1$ nacrtajmo graf funkcije:

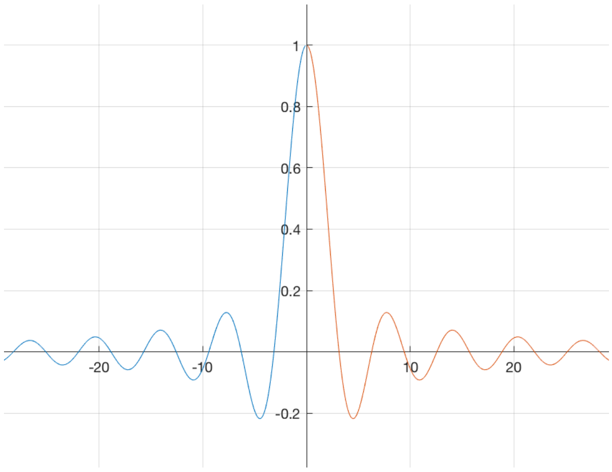
```
x1=-1:0.01:3;
x2=3.01:0.01:6;
y1=sqrt(x1+1);
y2=5-x2;
plot(x1,y1,'r',x2,y2,'b',3,2,'b*')
ylim([-2,3])
centeraxes
grid
```



U ovom slučaju lijevi i desni dio grafa se “susreću“, odnosno $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2 = f(3)$.

3. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ i izračunajte $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

```
x1=-30:0.01:-0.1;
x2=0.1:0.01:30;
y1=sin(x1)./x1;
y2=sin(x2)./x2;
plot(x1,y1,x2,y2)
ylim([-0.4,1.2])
centeraxes
grid
```



Promotrimo vrijednosti funkcije f u okolini točke $x = 0$.

```
x=-0.2:0.03:0.2;
f=sin(x)./x;
[x; f]'
```

ans =

-0.2000	0.9933
-0.1700	0.9952
-0.1400	0.9967
-0.1100	0.9980
-0.0800	0.9989
-0.0500	0.9996
-0.0200	0.9999
0.0100	1.0000
0.0400	0.9997
0.0700	0.9992
0.1000	0.9983
0.1300	0.9972
0.1600	0.9957
0.1900	0.9940

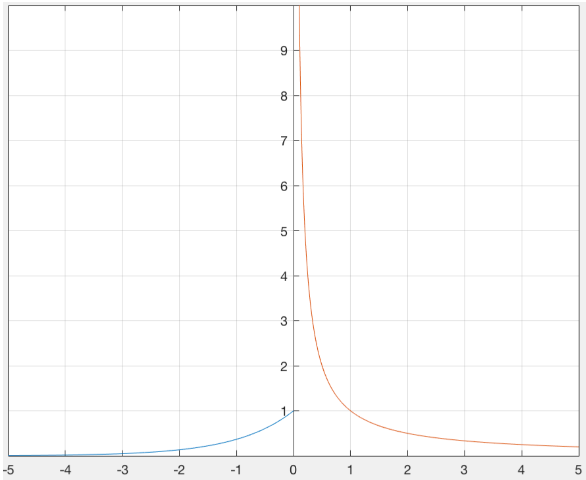
Numerički možemo procijeniti da je $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ odnoso $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Točnost numeričke procjene potvrđuje i Matlab:

```
syms x
f = sin(x)/x;
limit(f,x,0)
ans = 1
```

4. Nacrtajte graf funkcije $f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & x>0 \end{cases}$ i odredite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

```
x1=-5:0.01:0;
f1=exp(x1);
x2=0.1:0.01:5;
f2=1./x2;
plot(x1,f1,x2,f2)
centeraxes
grid
```



$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

Prema tome, ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Napišite u Matlabu odgovarajuće naredbe za izračun navedenih limesa!

5. Numerički procijenite vrijednost parametra a da funkcija $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x<0 \\ a & x=0 \\ 1+x & x>0 \end{cases}$

bude neprekidna.

Pogledajmo vrijednosti funkcije f u okolini točke $x=0$.

```
x1=-0.5:0.1:-0.1;
f1=1-x1.^2;
x2=0.1:0.1:0.5;
f2=1+x2;
[x1 x2;f1 f2]'
```

ans =

```
   -0.5000    0.7500
   -0.4000    0.8400
   -0.3000    0.9100
   -0.2000    0.9600
   -0.1000    0.9900
    0.1000    1.1000
    0.2000    1.2000
    0.3000    1.3000
    0.4000    1.4000
    0.5000    1.5000
```

Numerički možemo procijeniti da vrijedi $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ iz čega slijedi $a=1$.

Zadatak1: Testirajte iduće naredbe i interpretirajte dobivene rezultate:

```
x = sym('x')
f = x^2
limit(f, 2)

limit(f, inf)

limit(1/x, inf)

limit(log(abs(x)), 0)

limit(1/x, 0)
```

Zadatak 2: Uporabom naredbe limit izračunajte iduće limese:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$

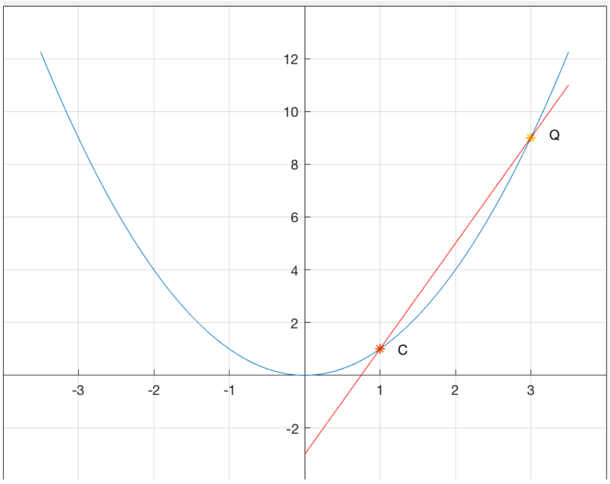
d) $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

9. vježba

Derivacije – geometrijska interpretacija

1. Nacrtajte graf funkcije $f(x)=x^2$ te na njemu odredite točke $C(1,1)$ i $Q(3,9)$. Nađite sekantu određenu tim dvjema točkama.

```
x=-3.5:0.01:3.5;
y=x.^2;
plot(x,y,1,1,'*',3,9,'*')
gtext('C')
gtext('Q')
hold
Current plot held
```




```
p=polyfit([1,3],[1,9],1);
xp=0:0.01:3.5;
plot(xp,polyval(p,xp),'r')
centeraxes
grid
p
p =

          4          -3
```

Koeficijent smjera sekante iznosi 4.

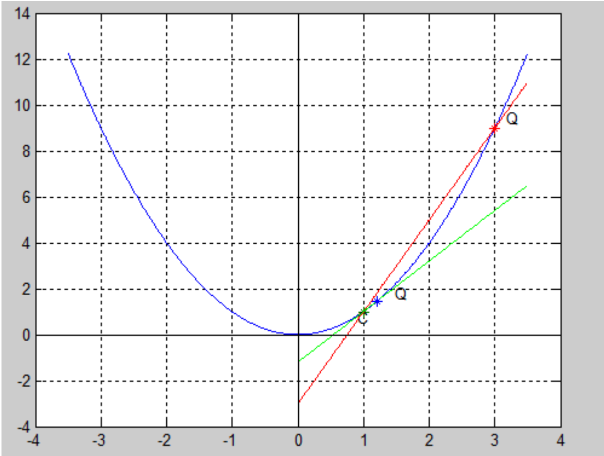
Promotrimo što se događa sa sekantom (njenim koeficijentom smjera) kada se točka Q po grafu funkcije približava točki C,

```
x0=1;y0=1;
x1=3:-0.3:1.1;
y1=x1.^2;
delta_x=x1-x0;delta_y=y1-y0;
k=delta_y./delta_x;
[delta_x; x1; y1; delta_y; k]'    %dovoljan je format short g
ans =

      2          3          9          8          4
    1.7        2.7       7.29       6.29        3.7
    1.4        2.4       5.76       4.76        3.4
    1.1        2.1       4.41       3.41        3.1
    0.8        1.8       3.24       2.24        2.8
    0.5        1.5       2.25       1.25        2.5
    0.2        1.2       1.44       0.44        2.2
```

Kako se točka Q približava točki C, koeficijent smjera sekante $k \to 2$.

Dodajmo grafu i onu sekantu kada točka Q ima posljednje vrijednosti iz gornje tabele, odnosno $Q(1.2, 1.44)$.

```
p1=polyfit([1,1.2],[1,1.44],1);
plot(xp,polyval(p1,xp),'g',…
1.2,1.44,'*')
gtext('Q')
```



Kako se točka Q približava točki C, tako se sekanta određena tim točkama sve više približava tangenti u točki C.

2. Numerički procijenite $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ako je

a) $f(x) = \ln x$ i $a = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ (x-1)^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ i $a = 1$

a) Napišimo program koji će računati $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ za pozitivne i negativne vrijednosti od h. Početni h bit će jednak 1. Koristit ćemo *for* petlju unutar koje ćemo h pomnožiti sa $\frac{3}{4}$ i tako ga smanjivati u svakom koraku.

```
a=1;
b=log(a);
h=1;
nmax=20;
for i=1:nmax
h=3*h/4;
div_left(i)=(log(a-h)-b)/(-h);
div_right(i)=(log(a+h)-b)/h;
end
[div_left; div_right]'
```

ans =

1.84839248149319	0.746154383913897
1.46965079677239	0.793399293561635
1.29888040465884	0.834314484520719
1.20222489459689	0.868837091153538
1.14155627776955	0.8973079165226 6
1.10119329217925	0.920334943116776
1.07334733575401	0.938659926930482
1.05367009483332	0.953052106558412
1.03953418816928	0.964237050171973
1.02926058401983	0.972857589041264
1.02173166471816	0.979458814169468
1.01618079253756	0.98448853798729
1.01207018506738	0.98830621413547
1.00901623510045	0.991195458073542
1.00674186093733	0.993377206547698
1.00504503575437	0.995021936566009
1.00377741506682	0.996260255869982
1.00282949464853	0.997191694939114
1.00212011971335	0.99789179933025
1.00158896615769	0.99841773827287

Izraz $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ jednak je koeficijentu smjera sekante koja prolazi točkama (a,h) i $(a+h, f(a+h))$ dok je $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ koeficijent smjera tangente u točki $(a, f(a))$. Pogledajmo to na našem primjeru i nacrtajmo lijeve i desne sekante u svim točkama koje smo koristili u numeričkom izračunu.

Jednadžba lijeve sekante biti će $y=\frac{\log(a-h)-b}{h}(x-a)+b$ a desne $y=\frac{\log(a+h)-b}{h}(x-a)+b$.

Umjesto da nacrtamo dvadeset različitih grafova, napravimo animaciju koristeći naredbe *getframe* i *movie*. Napišimo m-datoteku *derloganimate.m*:

```
x=linspace(0.01,2,100);
y=log(x);
a=1;b=log(a);
h=1;
nmax=20;
for i=1:nmax
    h=3*h/4;
    secant_left=(log(a-h)-b)/(-h)*(x-a)+b;
    secant_right=(log(a+h)-b)/h*(x-a)+b;
    plot(x,y,'b',x,secant_left,'k',x,secant_right,'r')
    M(i)=getframe;
end
```

Animaciju pokrećemo naredbama

```
derloganimate
movie(M,20,1)
```

b) Zadatak ćemo riješiti na isti način kao zadatak pod a)

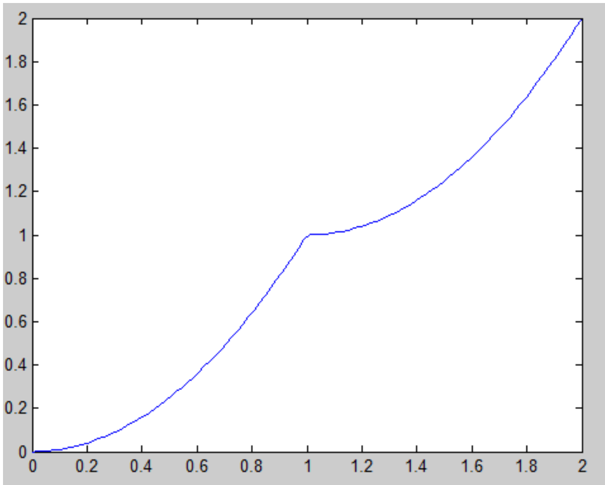
Prvo ćemo definirati funkcijsku m-datoteku *podijelovima1.m*

```
function y=podijelovima1(x)
if(x)<1
    y=x.^2;
else
    y=(x-1).^2+1;
end
```

Primjetite da se funkcija mogla definirati i uporabom naredbe `piecewise`. Pokušajte!

Nacrtajmo graf funkcije f:

```
x=linspace(0,2);
for i=1:100
y(i)=podijelovima1(x(i));
end
plot(x,y)
```



Računamo $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ za pozitivne i negativne vrijednosti od h.

```
a=1;
b=podijelovima1(a);
h=1;
nmax=20;
for i=1:nmax
h=3*h/4;
div_left(i)=(podijelovima1(a-h)-b)/(-h);
div_right(i)=(podijelovima1(a+h)-b)/h;
end
[div_left; div_right]'
```

ans =

1.25	0.75
1.4375	0.5625
1.578125	0.421875
1.68359375	0.31640625
1.7626953125	0.2373046875
1.822021484375	0.177978515625
1.86651611328125	0.13348388671875
1.89988708496094	0.10011291503906
1.9249153137207	0.0750846862792969
1.94368648529053	0.0563135147094727
1.9577648639679	0.0422351360321045
1.96832364797592	0.0316763520240784
1.97624273598194	0.0237572640180588
1.98218205198646	0.0178179480135433
1.98663653898985	0.0133634610101627
1.98997740424238	0.0100225957576206
1.99248305318179	0.00751694681820808
1.99436228988634	0.00563771011365606
1.99577171741476	0.00422828258523876
1.99682878806107	0.00317121193896408

Promatrajući gore dobivene vrijednosti, možemo numerički procjeniti da limes s lijeva i limes s desna nisu jednaki, odnosno limes u $x=1$ ne postoji što znači da funkcija u toj točki nije derivabilna.

Zadatak 1: Napišite i nacrtajte neku funkciju koja je derivabilna na cijelom području definicije. Zatim dajte primjer funkcije koja nije svugdje derivabilna i nacrtajte je.

10. vježba

Deriviranje u Matlabu

Symbolic Toolbox omogućuje deriviranje simboličkog izraza ili funkcije.

Idući primjer računa derivaciju funkcije $f(x)=\sin x^2$

```
syms f(x)
f(x) = sin(x^2);
df = diff(f,x)
df(x) = 2*x*cos(x^2)
```

Sada ćemo izračunati vrijednost derivacije za x=2. Dobivenu vrijednost prikazat ćemo u double formatu.

```
df2 = df(2)
df2 = 4*cos(4)
```

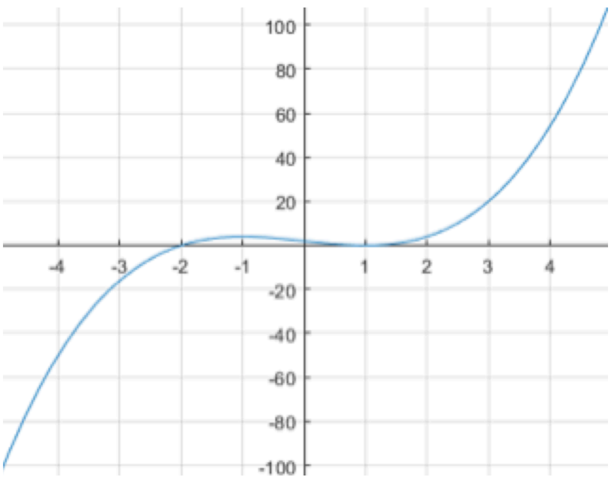
```
double(df2)
ans =    -2.6146
```

Idući izraz računa čevrtu, petu i šestu derivaciju zadane funkcije:

```
syms t
d4 = diff(t^6,4)
d5 = diff(t^6,5)
d6 = diff(t^6,6)
d4 = 360*t^2

d5 = 720*t

d6 = 720
```

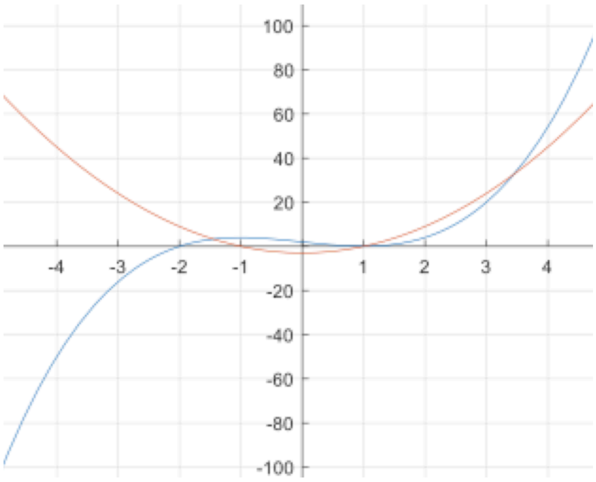
1. Nacrtajte graf funkcije $f(x)=x^3-3x+2$ na intervalu $[-3,3]$. Zatim u istom grafičkom prozoru dodajte graf prve derivacije zadane funkcije.

```
syms x
y=x^3-3*x+2;
fplot(y)
centeraxes
grid
hold
```



```
Current plot held
```

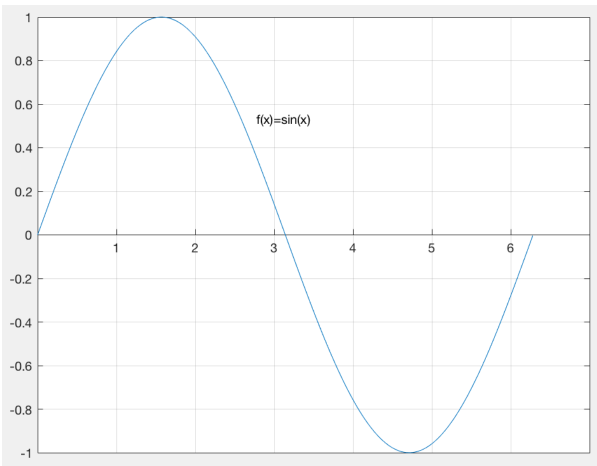
```
y1=diff(y)
y1 =
       3*x^2 - 3

fplot(y1)
```



Kako zadana funkcija najprije raste, pa zatim pada i onda ponovo raste, njena derivacija je prvo pozitivna, zatim negativna, pa opet pozitivna.

2. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \sin x$, za $D_f = [0,2\pi]$. Odredite predznak od $f'(x)$. Skicirajte graf funkcije $f'(x)$ i usporedite rezultat.

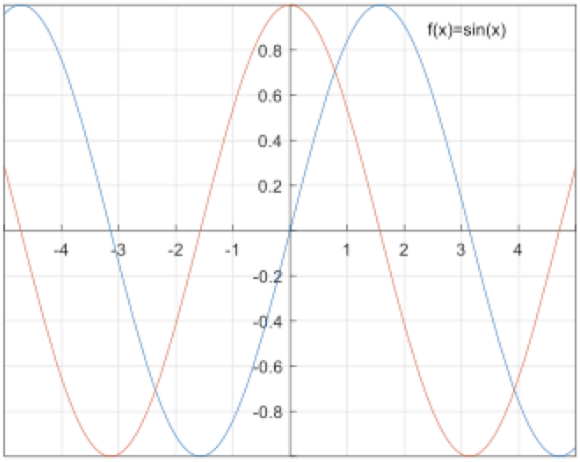
```
syms x
f=sin(x);
fplot(f)
gtext('f(x)=sin(x)')
centeraxes
grid
hold
```



Kako je f' pozitivna kada funkcija f raste, $f'>0$ za $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3\pi}{2}, \pi \right\rangle$. Na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ vrijedi da je $f'<0$.

Dodajmo istom crtežu graf funkcije $f'(x)$.

```
hold
Current plot held

f1=diff(f)
f1 =

      cos(x)

fplot(f1)
```



Zadatak 1: Izvršite u Matlabu iduće naredbe:

a) syms x
b) f=x^2
c) f1=diff(f)
d) X=-3:0.5:3
e) F=subs(f,X)
f) F1=subs(f1,X)
g) plot(X,F, X,F1)

Objasnite što prikazuje dobiveni graf.

Zadatak 2: Gornju proceduru ponovite za funkciju $f(x)=\dfrac{x^5+x^3+2}{8x+1}$

11. vježba

Asimptote

1. Odredite sve asimptote grafa funkcije $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-x$.

Funkcija nije definirana u točki $x=0$. Ispitajmo ponašanje funkcije u okolini te točke:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to o^-} e^{\frac{1}{x}}-x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to o^+} e^{\frac{1}{x}}-x=+\infty$$

Graf ima vertikalnu asimptotu $x=0$.

Provjerimo da li funkcija ima horizontalne asimptote:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}-x=+\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty} e^{\frac{1}{x}}-x=-\infty$$

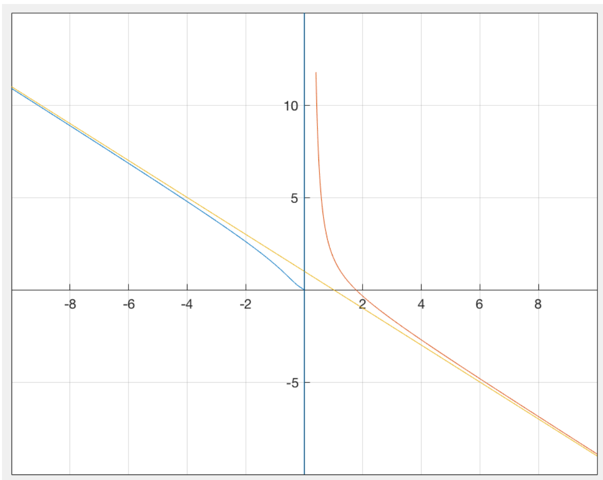
Ispitajmo da li ima kose asimptote:

$$k_l=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-x\right)'}{x'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}-1}{1}=-1$$

$$l_l=\lim_{x\to -\infty} f(x)-kx=\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}-x+x=\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$$

Na isti način dobijemo da je $k_d=-1$ i $l_d=1$. Možemo zaključiti da je pravac $y=-x+1$ obostrana kosa asimptota. Nacrtajmo graf funkcije i asimptote:

```
x1=-10:0.01:0;
f1=exp(1./x1)-x1;
x2=0.4:0.01:10;
f2=exp(1./x2)-x2;
x=-10:0.01:10;
y=-x+1;
plot(x1,f1,x2,f2,x,y)
line([0 -10],[0 15]) %nije potrebno
plot(x1,f1,x2,f2,x,y)
line([0 0],[-10 15])
centeraxes
grid
```



Pogledajmo kako desna kosa asimptota aproksimira graf zadane funkcije. Za dovoljne velike $x \in D_f$ vrijedi $e^{\frac{1}{x}} - x \approx x + 1$.

abs(f-y) računa apsolutno odstupanje asimptote od vrijednosti funkcije u nekoj točki

```
x=200:100:800;
f=exp(1./x)-x;
y=-x+1;
[x; f; y; abs(f-y)]'
```

ans =

```
   200.0000 -198.9950 -199.0000    0.0050
   300.0000 -298.9967 -299.0000    0.0033
   400.0000 -398.9975 -399.0000    0.0025
   500.0000 -498.9980 -499.0000    0.0020
   600.0000 -598.9983 -599.0000    0.0017
   700.0000 -698.9986 -699.0000    0.0014
   800.0000 -798.9987 -799.0000    0.0013
```

Primjena diferencijalnog računa

2. Nađi približnu vrijednost $\sqrt{4.07}$ (pomoću formule diferencijalnog računa).

Kako vrijedi da je $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, a $f(x) = \sqrt{x}$ slijedi:

$$\sqrt{4 + 0.07} \approx \sqrt{4} + f'(4) \cdot 0.07$$

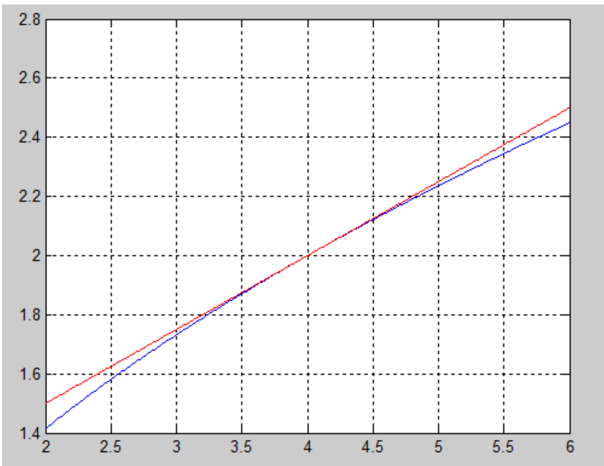
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4+0.07} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0.07 = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.07 = 2 + 0.0175 = 2.0175$$

Nacrtajmo graf funkcije f i tangentu u točki $(4, f(4))$.

$y = 0.25(x-4) + 2$

$y = 0.25x + 1$

```
x=2:0.1:6;
t=0.25*x+1;
y=sqrt(x);
plot(x,y,'b',x,t,'r');
grid
```



Vidimo da je u okolini točke $(4,2)$ tangenta jako priljubljena grafu funkcije, zbog čega vrijednosti na tangenti jako dobro aproksimiraju vrijednosti funkcije u odgovarajućim točkama.

Usporedimo te vrijednosti:

```
x1=4:0.01:4.07;
t1=0.25*x1+1;
f1=sqrt(x1);
[x1; f1; t1]'
```

ans =

4	2	2
4.01	2.00249843945008	2.0025
4.02	2.00499376557634	2.005
4.03	2.00748598998847	2.0075
4.04	2.00997512422418	2.01
4.05	2.01246117974981	2.0125
4.06	2.01494416796099	2.015
4.07	2.0174241001832	2.0175

12. vježba

Redovi brojeva

Symbolic Toolbox sadži naredbu `symsum(f,k,a,b)` koja računa sumu reda `f` koji ovisi o simboličkoj varijabli `k` koja se kreće u rasponu od `a` do `b`. Ukoliko je raspon izostavljen, naredba računa sumu reda.

Primjeri računanja sume idućih redova:

$$S1 = \sum_{k=0}^{10} k^2$$

$$S2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$S3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

```
syms k x
S1 = symsum(k^2, k, 0, 10)
S2 = symsum(1/k^2, k, 1, Inf)
S3 = symsum(x^k/factorial(k), k, 0, Inf)
S1 = 385
S2 = pi^2/6
S3 = exp(x)
```

1. Numerički procjenite da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergira.

Red je geometrijski s kvocijentom $q = \frac{1}{2}$. Prema tome je konvergentan i suma reda je 1. Kako se radi o redu s pozitivnim članovima, konvergenciju smo mogli ispitati koristeći Cauchyev kriterij $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$ iz čega slijedi da je red konvergentan.

Napišimo dvadeset prvih parcijalnih suma reda, $S_1, S_2, \ldots$

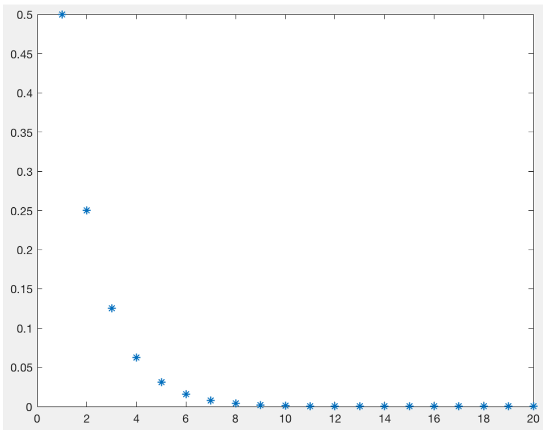
```
n=1:20;
a=1./2.^n;
s=cumsum(a);
[n; a; s]'
ans =
```

1	0.5	0.5
2	0.25	0.75
3	0.125	0.875
4	0.0625	0.9375
5	0.03125	0.96875
6	0.015625	0.984375
7	0.0078125	0.9921875
8	0.00390625	0.99609375
9	0.001953125	0.998046875
10	0.0009765625	0.9990234375
11	0.00048828125	0.99951171875
12	0.000244140625	0.999755859375
13	0.0001220703125	0.9998779296875
14	6.103515625e-005	0.99993896484375
15	3.0517578125e-005	0.999969482421875
16	1.52587890625e-005	0.99998474121094
17	7.62939453125e-006	0.99999237060547
18	3.814697265625e-006	0.99999618530273
19	1.9073486328125e-006	0.99999809265137
20	9.5367431640625e-007	0.99999904632568

Vidimo da niz parcijalnih suma teži prema broju 1.

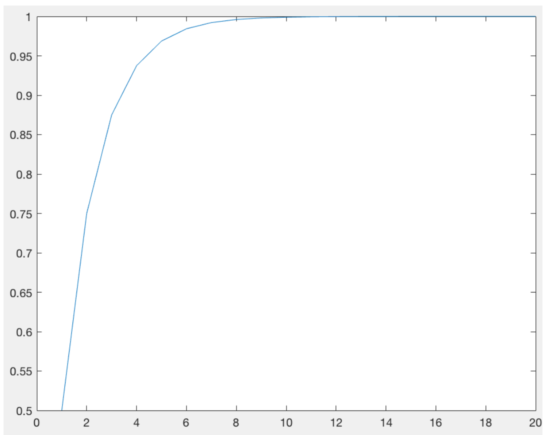
Zadatak smo mogli promatrati i grafički: Nacrtajmo prvih dvadeset članova reda.

```
n=1:20;
y=1./2.^n;
plot(n,y,'*')
```



Nacrtajmo niz parcijalnih suma tog reda.

```
z=cumsum(y);
plot(n,z)
```



Sa slike vidimo da se niz parcijalnih suma ustaljuje, teži prema broju 1.

Možemo provjeriti procjenjeni rezultat:

```
syms n
S = symsum(1/2^n, n, 1, Inf)
S=

      1
```

2. Numerički procjenite da li je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^2+5}$ konvergentan

```
n=[1:30];
a=(n.^2+3)./(n.^2+5);
s=cumsum(a);
[n; a; s]'
ans =
```

1	0.666666666666667	0.666666666666667
2	0.777777777777778	1.44444444444444
3	0.857142857142857	2.3015873015873
4	0.904761904761905	3.20634920634921
5	0.933333333333333	4.13968253968254
	...	
26	0.997063142437592	24.8703193455885
27	0.997275204359673	25.8675945499482
28	0.997465145754119	26.8650596957023
29	0.997635933806147	27.8626956295084
30	0.997790055248619	28.860485684757

Vidimo da nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije, odnosno vrijedi da a_n teži broju 1 iz čega proizlazi da red divergira.

3. Zadan je red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$. Da li je zadovoljen nužan uvijet konvergencije? Da li red konvergira? Računajući niz parcijalnih suma procjenite sumu reda.

Red je s pozitivnim članovima pa možemo primjeniti Cauchyjev kriterij konvergencije:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$ te zaključujemo da red konvergira.

Mogli smo koristiti i d'Alambertov kriterij konvergencije:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1$ iz čega zaključujemo da je red konvergentan.

Pokažimo to koristeći Matlab:

```
n=1:40;
a=n./exp(n);
s=cumsum(a);
for i=2:length(a)
q(i)=a(i)/a(i-1);   %ova petlja racuna kvocijent
end
[n; a; s; q]'
ans=
```

```
      1        0.367879441171442        0.367879441171442                    0
      2        0.270670566473225        0.638550007644668    0.735758882342885
      3        0.149361205103592         0.78791121274826    0.551819161757163
      4       0.0732625555549367        0.861173768303196    0.490505921561923
      5       0.0336897349954273        0.894863503298624    0.459849301464303

                        ...

     35   2.20679086605145e-014        0.920673594207779    0.378699424735308
     36   8.35028218887685e-015        0.920673594207787    0.378390282347769
     37    3.1572276215253e-015         0.92067359420779    0.378098314537316
     38   1.19287046097825e-015        0.920673594207792    0.377822128770671
     39   4.50380742747616e-016        0.920673594207792    0.377560479097007
     40   1.69934170211664e-016        0.920673594207792    0.377312247355325
```

Opći član a_n teži ka 0 čime je zadovoljen nužni uvjet konvergencije.

Niz parcijalnih suma teži prema 0.920673594207792 te zaključujemo da je red konvergentan.

Provjera:

```
syms n
S = symsum(n/exp(n), n, 1, Inf)
S=

      exp(-1)/(exp(-1) - 1)^2
```

```
format long g
exp(-1)/(exp(-1) - 1)^2
ans =

         0.920673594207792
```

3. Ispitajte da li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergira.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ čime je zadovoljen nužan uvjet konvergencije.

Ni Cauchyev ni D'Alambertov kriterij konvergencije ne daju nam odgovor da li red konvergira ($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$).

Pogledajmo niz parcijalnih suma

```
n=1:100;
a=1./n;
s=cumsum(a);
for i=2:length(a)  %ova petlja racuna kvocijent
q(i)=a(i)/a(i-1);
end
[n; a; s; q]'
ans =
```

1	1	1	0
2	0.5	1.5	0.5
3	0.333333333333333	1.83333333333333	0.666666666666667
4	0.25	2.08333333333333	0.75
5	0.2	2.28333333333333	0.8
	...		
50	0.02	4.49920533832942	0.98
51	0.0196078431372549	4.51881318146668	0.980392156862745
52	0.0192307692307692	4.53804395069745	0.980769230769231
53	0.0188679245283019	4.55691187522575	0.981132075471698
54	0.0185185185185185	4.57543039374427	0.981481481481482
55	0.0181818181818182	4.59361221192609	0.981818181818182
	...		
95	0.0105263157894737	5.13634648088877	0.989473684210526
96	0.0104166666666667	5.14676314755544	0.989583333333333
97	0.0103092783505155	5.15707242590596	0.989690721649485
98	0.0102040816326531	5.16727650753861	0.989795918367347
99	0.0101010101010101	5.17737751763962	0.98989898989899
100	0.01	5.18737751763962	0.99

Niz parcijalnih suma s postaje sve veći, prema tome ovaj red divergira

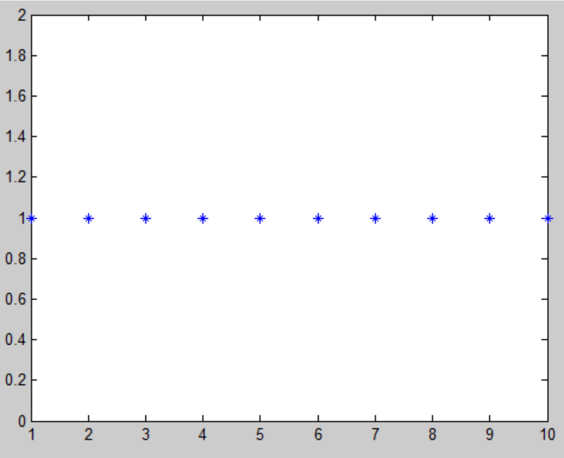
Provjera:

```
syms n
S = symsum(1/n, n, 1, Inf)
S=

      Inf
```

4. Zadani su niz $a_{n,} = \cos 2n\pi, n \in N$ i funkcija $f(x) = \cos 2\pi x$. Usporedite $\lim_{n\to\infty} a_n$ i $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

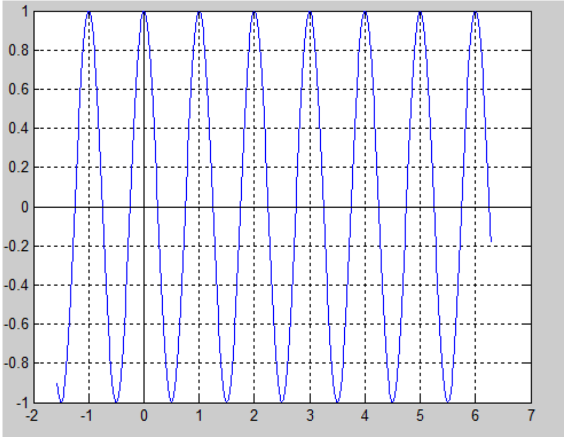
Za svaki prirodni broj n je $x_n = 1$ pa je $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

```
n=1:10;
an=cos(2*n*pi);
plot(n,xn,'*')
```



Nacrtajmo graf funkcije $f(x)$.

```
x=-pi/2:0.01:2*pi;
f=cos(2*x*pi);
plot(x,f)
mreza(gca)
```



Sa slike vidimo da ne postoji $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Zaključujemo da treba razlikovati postojanje limesa niza od limesa funkcije.

Taylorov red

Razvoj funkcije u Taylorov red vrši naredba `taylor`. Pred-definirana točka razvoja je 0, a pred-definirani stupanj prikazanog polinoma 5:

```
syms x
taylor(exp(x))
ans = x^5/120 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

```
syms x
taylor(log(x), x, 'ExpansionPoint', 1)
ans = x - (x - 1)^2/2 + (x - 1)^3/3 - (x - 1)^4/4 + (x - 1)^5/5 - 1
```

```
syms x
t8 = taylor(f, x, 'Order', 8)
t8 = - x^6/5040 + x^4/120 - x^2/6 + 1
```

5. Taylorov red funkcije $f(x)=e^x$ u okolini točke $a=0$ je $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

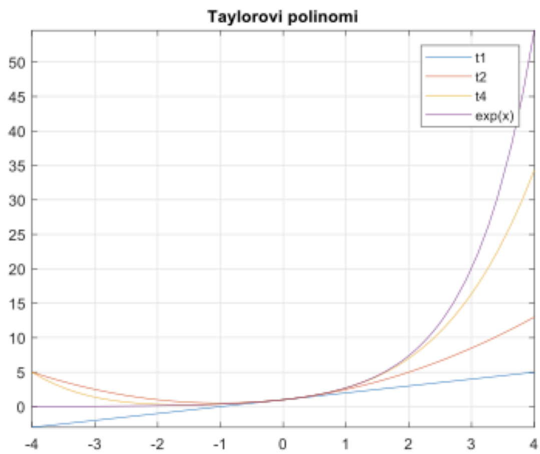
Kako za $f(x)=e^x$ vrijedi $f^{(n)}(x)=e^x$ za $n=1,2,\ldots$ tada je $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^0}{n!}x^n$.

Uz pomoć Matlaba izračunajmo aproksimaciju funkcije $f(x)=e^x$ u okolini točke $a=0$ Taylorovim polinomom prvog, drugog i četvrtog stupnja.

```
syms x
f = exp(x);
t1=taylor(f, x, 'Order', 2)
t1 =

      x + 1

t2=taylor(f, x, 'Order', 3);
t2 =

      x^2/2 + x + 1

t4=taylor(f, x, 'Order', 5);
t4 =

      x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1
```

Nacrtajmo u istom grafičkom prozoru zadanu funkciju i dobivene polinome:

```
fplot([t1 t2 t4 f])
xlim([-4 4])
grid on
legend('t1','t2','t4','exp(x)')
title('Taylorovi polinomi')
```



Pogledajmo vrijednosti koje funkcija $f(x)$ i navedeni polinomi poprimaju u okolini točke $a=0$ i usporedimo ih:

```
xrange=-0.3:0.1:0.3;
fv=subs(f,x,xrange);
t1v=subs(t1,x,xrange);
t2v=subs(t2,x,xrange);
t4v=subs(t4,x,xrange);
[xrange;fv;t1v;abs(fv-t1v);t2v;abs(fv-t2v);t4v;abs(fv-t4v)]'
ans=
```

-0.3	0.74082	0.7	0.040818	0.745	0.0041818	0.74084	1.9279e-05
-0.2	0.81873	0.8	0.018731	0.82	0.0012692	0.81873	2.5803e-06
-0.1	0.90484	0.9	0.0048374	0.905	0.00016258	0.90484	8.1964e-08
0	1	1	0	1	0	1	0
0.1	1.1052	1.1	0.0051709	1.105	0.00017092	1.1052	8.4742e-08
0.2	1.2214	1.2	0.021403	1.22	0.0014028	1.2214	2.7582e-06
0.3	1.3499	1.3	0.049859	1.345	0.0048588	1.3498	2.1308e-05

13. vježba

Integrali

Naredba `int` sadržana u Symbolic Toolbox-u računa neodređene i određene integrale. Ukoliko varijabla integracije nije navedena, `int` za varijablu uzima onu koju vraća `symvar`.

Neodređeni integral:

```
yms x
int(-2*x/(1 + x^2)^2)
ans =

       1/(x^2 + 1)
```

```
syms x z
int(x/(1 + z^2), x)
int(x/(1 + z^2), z)
ans =
       x^2/(2*(z^2 + 1))
ans =
       x*atan(z)
```

Ukoliko `int` ne može izračunati neodređeni integral, vraća zadani izraz:

```
syms x
F = sin(sinh(x)); int(F, x)
ans =

       int(sin(sinh(x)), x)
```

Određeni integral:

```
syms x
int(x*log(1 + x), 0, 1)
ans =

       ¼
```

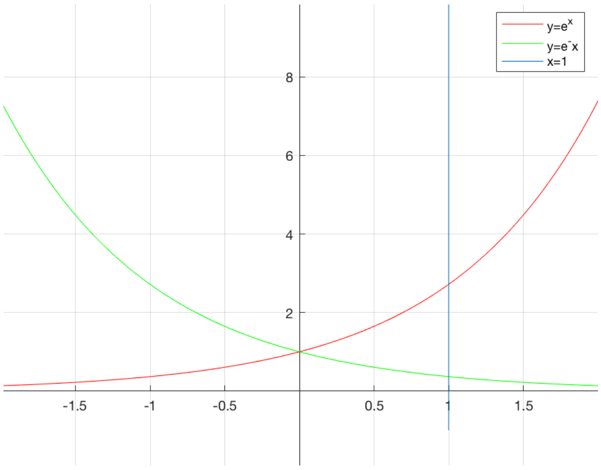
Ukoliko `int` ne može izračunati određeni integral, moguće je integral izračunati numerički:

```
syms x
F = int(cos(x)/sqrt(1 + x^2), x, 0, 10)
vpa(F, 5) %5 decimalnih mjesta
ans =

       0.37571
```

1. Odredite površinu lika omeđenog krivuljama $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i pravcem $x = 1$.

Nacrtajmo zadani lik:

```
x=-2:0.01:2;
y1=exp(x);
y2=exp(-x);
plot(x,y1,'r',x,y2,'g')
line([1 1],[-1 10])
legend('y=e^x','y=e^-x','x=1')
centeraxes
grid
```




```
syms x
int(exp(x)-exp(-x), 0, 1)
ans=

        exp(-1)+exp(1)-2
```

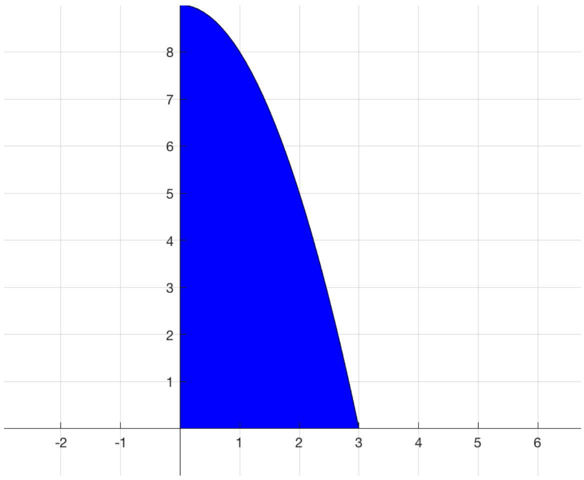
Analitička provjera:

$$S = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^{-x} dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e} = \frac{(e-1)^2}{e}$$

2. Odredite površinu ispod grafa funkcije $f(x) = 9 - x^2$ na intervalu $[0,3]$.

Nacrtajmo graf funkcije f i označimo zadanu površinu.

```
x=-1:0.01:4;
f=9-x.^2;
plot(x,f);
x1=0:0.1:3;
f1=9-x1.^2;
area(x1,f1,'facecolor',[0 0 1])
xlim([-3 7]);
ylim([-1 9]);
centeraxes
grid
```

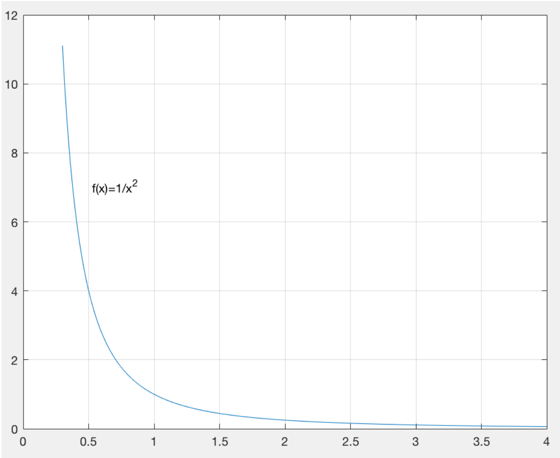



```
syms x
f=9-x^2;
int(f, 0, 3)
ans=

        18
```

3. Da li lik određen grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$, pravcem $x = 0$ i x osi za $x \in [0,2]$ ima konačnu površinu?

Nacrtajmo graf funkcije.

```
x=0.3:0.01:4;
f=1./x.^2;
plot(x,f)
gtext('f(x)=1/x^2')
centeraxes
grid
```

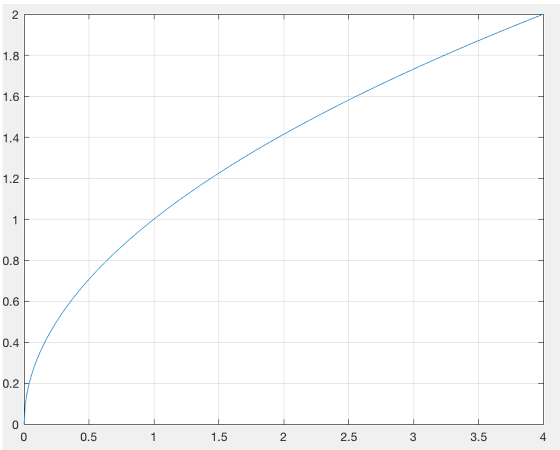


Funkcija nije definiran u $x = 0$ te $\lim_{x \to 0^+} = \frac{1}{x^2} = +\infty$ pa prema tome funkcija nije omeđena za $x \in \langle 0,2]$

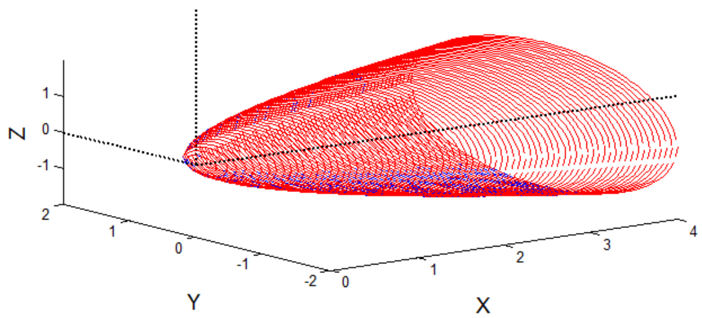
4. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom oko x-osi lika omeđenog krivuljom $y = \sqrt{x}$, pravcima $y = 0,\ x = 0,\ x = 4$.

Nacrtajmo zadani lik.

```
x=0:0.01:4;
y1=sqrt(x);
plot(x,y1)
centeraxes
grid
```



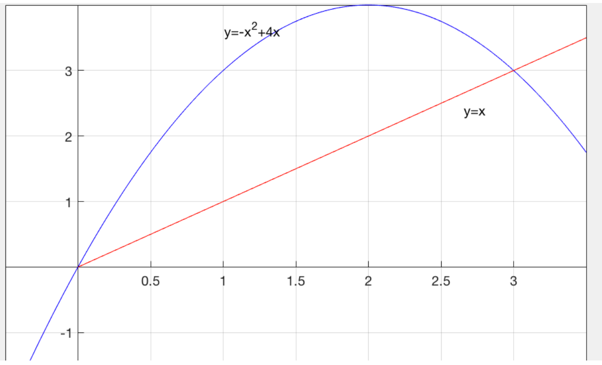
Tijelo koje nastaje rotacijom dano je na slici:



$$V=\int_0^4 y^2\pi dx=\pi\int_0^4(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\int_0^4 xdx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$$

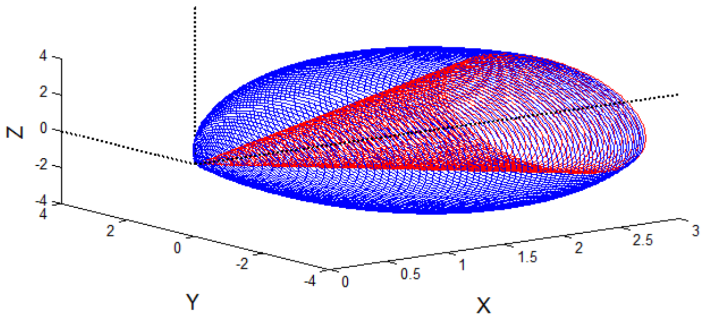
5. Odredimo obujam tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog parabolom $y=-x^2+4x$ i pravcem $y=x$ oko x osi.

```
x1=-0.5:0.01:3.5;
x2=0:0.01:3.5;
f1=-x1.^2+4*x1;
f2=x2;
plot(x1,f1,'b',x2,f2,'r');
gtext('y=-x^2+4x')
gtext('y=x')
centeraxes
grid
```



Sa slike možemo očitati da se parabola i pravac sijeku u dvije točke, a apscise sjecišta su brojevi 0 i 3. U Matlabu provjeravamo:

```
syms x
eqn = -x.^2+4*x == x;
solx = solve(eqn,x)
solx =
        0
        3
```



Obujam nastalog rotacijskog tijela izračunat ćemo tako da od obujma tijela nastalog rotacijom parabole oduzmeno obujam tijela nastalog rotacijom pravca.

$$V=\int_0^3(-x^2+4x)^2\pi dx-\int_0^3(x)^2\pi dx=\pi\int_0^3[(-x^2+4x)^2-x^2]dx=\pi\int_0^3(x^4-8x^3+15x^2)dx=$$

$$\pi(\frac{x^5}{5}-8\frac{x^4}{4}+15\frac{x^3}{3})\Big|_0^3=\pi(\frac{3^5}{3}-2\cdot 3^4+5\cdot 3^3)=\frac{108\pi}{5}$$

6. Neka se čestica giba po pravcu brzinom $v(t) = 18t - t^2 (m/s), t \geq 0$. Odredite:

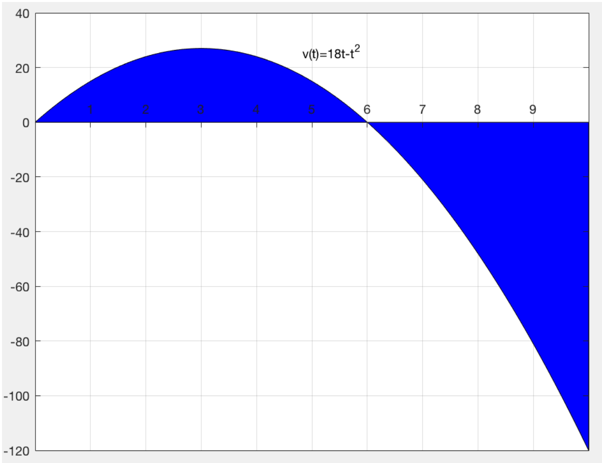
a) put pređen za vrijeme prvih triju sekunda

b) relativni put od početka kretanja čestice do njezina zaustavljanja

c) ukupni put u prvih 8 sekundi

Nacrtajmo graf funkcije $v(t)$

```
t=0:0.01:10;
v=18*t-3*t.^2;
plot(t,v)
area(t,v,'facecolor',[0 0 1])
centeraxes
grid
gtext('v(t)=18t-t^2')
```



Put nekog tijela koje se giba po pravcu brzinom $v(t)$ od trenutka a do trenutka b jednak je $s = \int_a^b v(t)dt$

a) $\int_0^3 (18t - t^2)dt = (9t^2 - t^3)\Big|_0^3 = 81 - 27 - 0 = 54m$

b) Čestica će se zaustaviti kada je brzina jednaka nuli, a to je za $t = 6s$.

$$\int_0^6 (18t - t^2)dt = (9t^2 - t^3)\Big|_0^6 = 324 - 216 - 0 = 108m$$

c) Koristeći navedenu formulu, dobivamo

$\int_0^8 (18t - t^2)dt = (9t^2 - t^3)\Big|_0^8 = 64m$ što bi značilo da je pređeni put nakon $8s$ kraći od pređenog puta nakon $6s$. Ako pogledamo graf, vidjet ćemo da je brzina od šeste do osme sekunde negativnog predznaka. Stoga ćemo ukupan put u prvih $8s$ računati kao stvarnu a ne relativnu površinu ispoda grafa funkcije v.

$$put = \int_0^6 v(t)dt - \int_6^8 v(t)dt = 108 - (9t^2 - t^3)\Big|_6^8 = 108 + 44 = 152m$$

LITERATURA

1. Mathworks Documentation; Dohvaćeno s www.mathworks.com/help/

2. D. N. Arnold: Graphics for the calculus classroom, 1997.; Dohvaćeno s

www.ima.umn.edu/~arnold/graphics-j.html

3. prof. G. Nakos: Matlab worksheets for Calculus I; Dohvaćeno s

www.nadn.navy.mil/Users/math/gcn/

4. S. Antoliš, A. Copić: Matematika 4 II dio, Udžbenik sa zbirkom zadataka,

Školska knjiga, 2007.

5. K. Rivier: Matematika 3, Zbirka riješenih zadataka, Veleučilište u Splitu,2003.

6. K.Rivier, A.B.Mišura: Analiza 1 – Laboratorijske vježbe – radni materijali

7. S. Chopin, T. Young: The Matlab Workbook – A Supplement for Calculus, Differential Equations and Linear Algebra; Dohvaćeno s www.ohiouniversityfaculty.com/youngt/matlab/workbook.pdf

8. P. Green, J. Rosenberg: Calculus with MATLAB; Dohvaćeno s www.math.umd.edu/~jmr/241/calc.htm

9. USING MATLAB FOR CALCULUS; Dohvaćeno s www.math.poly.edu/courses/matlab/matlab_guide.pdf

10. D. R. Hill, L. F. Roberts: Demos with positive impact; Dohvaćeno s mathdemos.gcsu.edu/mathdemos/